Première partie

Déterminants

Table des matières

1 La formule « permutations/signatures »

Soit A une matrice carrée de terme général a_i^k (rappel $a_{i \leftarrow ligne}^{k \leftarrow colonne}$), on définit que son déterminant est alors

$$\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$$

> *Cette quantité est homogène à un « volume en dimension n », et est algébrique (elle peut être positive ou négative).*
> *Elle contient $n!$ facteurs, et la moitié d'entre eux sont pondérées d'un signe plus, et l'autre moitié d'un signe moins.*

1.1 Cas particulier en petite dimension

1. Dimension 0
   Il n'y a qu'une permutation : l'identité du vide ans lui même, et pour cette permutation de signature 1, le produit vide a pour valeur 1.
   C'est d'autre part la seule valeur cohérente avec le développement par rapport à une (la) ligne d'un déterminant de taille 1.
2. Dimension 1
   $\det(\begin{pmatrix} a_1^1 \end{pmatrix}) = a_1^1$ (unique terme $\sigma = Id$)
3. Dimension 2
   $\det(\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}) = a_1^1.a_2^2 - a_1^2.a_2^1$ (deux termes : $\sigma = Id$ et $\sigma = \overrightarrow{(1\ 2)}$)
4. Dimension 3
   $\det(\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}) = \begin{matrix} a_1^1.a_2^2.a_3^3 & - & a_1^2.a_2^1.a_3^3 & + & a_1^3.a_2^1.a_3^2 \\ -a_1^1.a_2^3.a_3^2 & + & a_1^2.a_2^3.a_3^1 & - & a_1^3.a_2^2.a_3^1 \end{matrix}$ pour les six permutations.
   On peut présenter ce calcul avec trois « diagonales descendantes » et trois « diagonales ascendantes ».

$$\begin{array}{ccccc} & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \\ & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \\ & a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & \\ \nearrow & a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & \searrow \\ \nearrow & a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & \searrow \\ \nearrow & & & & \searrow \end{array}
\qquad
\begin{matrix} a_1^1 & & \\ & a_2^2 & \\ & & a_3^3 \end{matrix} + \begin{matrix} a_2^1 & & \\ & a_3^2 & \\ & & a_1^3 \end{matrix} + \begin{matrix} a_3^1 & & \\ & a_1^2 & \\ & & a_2^3 \end{matrix} - \begin{matrix} & & a_1^3 \\ & a_2^2 & \\ a_3^1 & & \end{matrix} - \begin{matrix} & & a_2^3 \\ & a_3^2 & \\ a_1^1 & & \end{matrix} - \begin{matrix} & & a_3^3 \\ & a_1^2 & \\ a_2^1 & & \end{matrix}$$

1.2 Homogénéité

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}),\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \det(\lambda.A) = \lambda^n.\det(A)$$

en particulier $\det(-A) = (-1)^n.\det(A)$

Il suffit de calculer $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n}(\lambda.a_i^{\sigma(i)})$ et de sortir λ^n.

1.2.1 Corolaire : le déterminant d'une matrice antisymétrique de format impair est nul.

En admettant à ce stade $\det({}^tA) = \det(A)$, il suffit d'écrire $\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n.\det(A) = -\det(A)$.

1.3 Stabilités

Le déterminant d'une matrice à coefficients dans un anneau $(A, +, .)$ est aussi dans A.
Les produits et sommes d'éléments de A sont aussi dans A.

1.3.1 Application : le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est entier.

Exercice classique : Une matrice M de $M_n(\mathbb{Z})$ est inversible et son inverse M^{-1} est dans $M_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M)$ vaut -1 ou 1.
Dans un sens, si M est inversible, d'inverse M^{-1} on a alors

$$\det(I_n) = \det(M).\det(M^{-1}) = \det(M).\det(M^{-1})$$

et le produit des deux entiers vaut 1 si et seulement si les deux entiers valent tous deux -1 ou tous deux 1.
Dans l'autre sens, il suffit d'utiliser la formule $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}.{}^t(Com(M))$ où les coefficients de $Com(M)$ sont des déterminants de taille $n-1$ donc des entiers.

1.3.2 Le déterminant d'une matrice modulo 2 est égal au déterminant de la matrice-modulo-2.

Soit A une matrice à coefficients entiers a_i^k. On crée alors la matrice A_2 de terme général $(a_i^k)\%2$.
On a alors $\det(A_2) = \det(A)\ [2]$.
Il suffit de prendre la formule $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$ et de calculer modulo 2, sachant que les congruences sont compatibles avec l'addition, la multiplication.
Toute matrice dont les coefficients diagonaux sont pairs et les coefficients hors-diagonale impairs est automatiquement inversible.

1.3.3 Le déterminant d'une matrice à coefficients polynômiaux en X est un polynôme en X.

Exercice classique : $\begin{vmatrix} a_1^1+X & a_1^2+X & a_1^3+X & a_1^4+X \\ a_2^1+X & a_2^2+X & a_2^3+X & a_2^4+X \\ a_3^1+X & a_3^2+X & a_3^3+X & a_3^4+X \\ a_4^1+X & a_4^2+X & a_4^3+X & a_4^4+X \end{vmatrix}$ est un polynôme en X. mais il n'est que de degré inférieur ou égal à 1. En effet, si on commence par soustraire la première colonne à toutes les autres par

Algorithme 1 création de matrice diagonale

```
def diago(L) : #list of float -> list of list of float
....n = len(L)
....M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for i in range(n) :
........M[i][i] = L[i]
....return M
```

multilinéarité, il ne reste plus de X que sur une colonne, et dans les produits composant le déterminant, il n'est pris à chaque fois qu'un terme de la première colonne.

1.3.4 Exemple du polynôme caractéristique $\det(A - X.I_n)$

Le déterminant $\begin{vmatrix} a_1^1 - X & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 - X & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 - X & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 - X \end{vmatrix}$ est un polynôme en X de degré 4 dont on connaît plusieurs coefficients. En posant $\alpha_i^k = \left\{ \begin{array}{ccc} a_i^k - X & si & i = k \\ a_i^k & sinon & \end{array} \right|$;, la formule $\det(A - X) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} \alpha_i^{\sigma(i)}$ ne contient que des termes de degré inférieur ou égal à n.

Le seul terme de degré n correspond à $\sigma = Id$, d'où $\prod_{i=1}^{n}(a_i^i - X)$ qui est exactement de degré n. Le terme dominant est donc $(-1)^n.X^n$.

Le seul terme de degré $n-1$ viendra aussi de $\prod_{i=1}^{n}(a_i^i - X)$ (et ce sera $(-1)^{n-1}(\sum_{=1}^{n} a_i^i).X^{n-1}$. En effet, si σ n'est pas l'identité, alors il existe au moins deux indices i_1 et i_2 vérifiant $\sigma(i_1) \neq i_1$ et $\sigma(i_2) \neq i_2$.

Quant au terme constant, c'est évidemment $\det(A)$, correspondant à la valeur en 0 du polynôme.

1.4 Cas particuliers de calculs

1.4.1 Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.

Seul le terme correspondant à $\sigma = Id$ aura une contributions éventuellement non nulle.

Bonus : création avec Python d'une matrice diagonale

1.4.2 Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (par exemple) est égal au produit des termes diagonaux.

Supposons en effet $\forall(i,k),\ (i > k \Rightarrow a_i^k = 0)$ et isolons $\sigma = Id$ dans la formule $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$.

On a donc déjà $\prod_{i=0}^{n} a_i^i$ (produit des termes diagonaux).

Tous les autres termes sont alors nuls car le produit $\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$ contient au moins un terme nul.

Si σ n'est pas l'identité il existe au moins un indice i vérifiant $\sigma(i) < i$.

On raisonne par contraposée : $(\forall i,\ \sigma(i) \geqslant i) \Rightarrow (\sigma = Id)$.
Si on applique l'hypothèse à $i = n$, on trouve $\sigma(n) \geqslant n$ et donc $\sigma(n) = n$.
On applique à $n-1$ et on a $\sigma(n-1) \geqslant n-1$ mais aussi $\sigma(n-1) \neq \sigma(n) = n$. Il ne reste que $\sigma(n-1) = n-1$.
Par récurrence forte sur k on a montre $\sigma(n-k) = n-k$. Et on termine avec $\sigma = Id$ quand k atteint la valeur $n-1$.

1.4.3 Le déterminant d'une matrice antidiagonale est au signe près le produit des termes de l'antidiagonale.

Pour $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & & \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$ la seule permutations ayant une contribution non nulle est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ n & n-1 & n-2 & & 1 \end{pmatrix}$.
Elle se décompose directement en produit de bicycles $\overrightarrow{(1\ n)} \circ \overrightarrow{(2\ n-1)} \circ \dots$ et sa signature vaut $(-1)^{[n/2]}$ (et elle dépend de la valeur de n modulo 4).

1.4.4 Le déterminant d'une matrice de permutation est égal à la signature de la permutation.

Si φ est une permutation de $[1,\ 2,\ n]$ et si on crée la matrice S de terme général $s_i^k = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & k = \varphi(i) \\ 0 & si & k \neq \varphi(i) \end{array} \right|$
(un seul 1 par ligne et par colonne, le numéro de la colonne du 1 de la ligne i étant justement $\varphi(i)$.
Dans la somme, le seul terme non nul est

Bonus : on montre que l'inverse d'une matrice de permutation telle que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est simplement sa transposée.*
En effet, si la matrice associée à la permutation φ *est la matrice de terme général* $a_i^k = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & k = \varphi(i) \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$,
alors son inverse est la matrice associée à φ^{-1}, *de terme général* $\alpha_i^k = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & k = \varphi^{-1}(i) \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$. *mais on écrit alors* $\alpha_i^k = \left\{ \begin{array}{lll} 1 & si & i = \varphi(k) \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$ *et on reconnaît* $\alpha_i^k = a_k^i$. *C'est la définition même de la transposée.*

1.5 Déterminant de la transposée

On note ${}^tA$ la matrice de terme général α_i^k vérifiant $\alpha_i^k = \alpha_k^i$. On montre alors $\det({}^tA) = \det(A)$.
On calcule en appliquant la formule et la définition

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma). \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma). \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{\sigma(i)}^i$$

On fait un changement de variable (pour remettre les indices dans l'ordre)

$$\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma). \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^{\sigma^{-1}(k)}$$

On change cette fois ci l'indexation des $n!$ permutations en posant $\varphi = \sigma^{-1}$. Quant σ parcourt S_n, φ parcourt aussi S_n.

$$\det({}^tA) = \sum_{\varphi \in S_n} Sgn(\varphi^{-1}). \prod_{1 \leqslant k \leqslant n} a_k^{\varphi(k)}$$

Il ne reste plus qu'à dire que les variables de sommation sont muettes et à remplacer aussi $Sgn(\varphi^{-1}) = \varphi(\sigma)$.

> *On retrouve que A est inversible si et seulement si ${}^tA$ est inversible. On rappelle aussi $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$ (qui se démontre par $({}^tA).{}^t(A^{-1}) = I_n$) et justifie la notation ${}^tA^{-1}$.*
> *On a aussi $\det({}^tA.A) = (\det(A))^2 \geqslant 0$ si A est une matrice réelle.*
> *On montrera plus loin $\det(\overline{{}^tA}.A) = |\det(A)|^2 \geqslant 0$ si A est une matrice complexe.*

1.6 Déterminant de la conjuguée

Comme la conjugaison est un morphisme d'anneau de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même, on a

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{k=1}^{n} \overline{a_k^{\sigma(k)}} = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\overline{\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sigma(k)}}$$

$$\det(\overline{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} \overline{Sgn(\sigma).\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sigma(k)}} = \overline{\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sigma(k)}}$$

et on a finalement $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.
On notera qu'on peut là aussi prouver que si A est inversible, alors $\overline{A}$ l'est aussi
Applications qui servent en seconde année : si la matrice complexe A vérifie ${}^tA = \overline{A}$ alors on déterminant est réel.
Pour toute matrice complexe A, la matrice ${}^tA.\overline{A}$ est à coefficients réels et à trace et déterminant positifs.

1.7 Développement par rapport à la dernière ligne

En format 1, il faut convenir qu'un déterminant de taille 0 vaut 1.
En format 2, la formule indique juste $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -c.\det(b) + d.\det(a)$.
En format 3, on développe

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = a''.\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} - b''.\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c''.\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

En format 4, on a vraiment besoin de doubles indices

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = -a_4^1.\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \end{vmatrix} + a_4^2.\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^3 & a_3^4 \end{vmatrix} - a_4^3.\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^4 \end{vmatrix} + a_4^4.\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$$

La formule générale est

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n+k}.a_n^k.\det(A_n^k)$$

où A_n^k désigne la matrice dans laquelle on a effacé la ligne n et la colonne k.

La démonstration vient d'un regroupement des termes $Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$ en fonction de la valeur de $\sigma(n)$.

$$\det(A) = \Big(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma(n)=k}} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}\Big)$$

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_n^k . \Big(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=k}} Sgn(\sigma). \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma(i)} \Big)$$

Le terme le plus simple à voir est pour $k = n$. On a factorisé a_n^k devant $\Big(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} Sgn(\sigma). \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma(i)} \Big)$ dans lequel on reconnaît le déterminant de la matrice A_n^n où on a effacé le dernière ligne et la dernière colonne (σ devient une permutation de $[1,\ 2, \dots n-1]$ et les indices de ligne et de colonne ne vont que de 1 à $n-1$).

Les autres termes nécessitent une ré-indexation pour donner un déterminant. Dans chaque $Sgn(\sigma). \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma(i)}$ les indices de ligne vont de 1 à $n-1$ c'est bon.

Mais les indices de colonne $\sigma(i)$ vont de 1 à n en omettant k. On fait donc intervenir le cycle $\overrightarrow{(k\ k+1 \dots n)}$ (noté φ) pour que les indices du haut aillent de 1 à n.

Si on pose $\sigma' = \varphi \circ \sigma$, notre terme devient un terme du déterminant de la matrice A_n^k.

Mais il faut changer le signe de la permutation pour la cohérence. Et on doit remplacer $Sgn(\sigma)$ par $Sgn(\varphi \circ \sigma)$. On compense donc

$$\Big(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} Sgn(\sigma). \prod_{i=1}^{n-1} a_i^{\sigma(i)} \Big) = Sgn(\varphi). \Big(\sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} Sgn(\sigma'). \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{\sigma'(i)} \Big)$$

où les α_i^j sont les coefficients de A_n^k. Or, φ est un cycle de taille $n-k+1$, de signature $(-1)^{n-k}$.

On va donc avoir

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_n^k . (-1)^{n-k} . (\det(A_n^k))$$

Le signe $(-1)^{n-k}$ est le même que $(-1)^{n+k}$. On a la formule demandée.

1.8 Développement par rapport à une autre colonne ou ligne

En transposant à la fois la matrice A et les matrices A_n^k, on a la formule de développement par rapport à la dernière colonne.

En permutant des lignes avant développement puis en re-permutant après développement, on obtient aussi la formule de développement par rapport à une autre ligne (disons i) ou autre colonne (disons q)

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_i^k . (-1)^{i-k} . (\det(A_i^k)) = \sum_{j=1}^{n} a_j^k . (-1)^{j-k} . (\det(A_j^q))$$

On retiendra la règle facteur fois cofacteur (homogène) et alternance de signes. On reconnaît que les termes de la diagonale sont pondérés d'un signe plus.

+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

Cette formule permet de calculer de proche en proche des déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} 2.X & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2.X & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2.X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2.X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2.X & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & X \end{vmatrix} \quad et \quad \begin{vmatrix} 2.X & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2.X & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2.X & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2.X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2.X \end{vmatrix}$$

dans lesquels on retrouvera les polynômes de Tchebychev.

1.9 Comatrice

La matrice des $(-1)^{k-i}.\det(A_i^k)$ est appelée matrice des cofacteurs pondérés ou comatrice.
Il suffit de la transposer et diviser par $\det(A)$ pour retrouver A^{-1} quand A est inversible.
C'est la formule pratiquée classiquement en taille 2.
On peut l'utiliser en format 3 même si on recommande plutôt la formule avec les produits vectoriels qui lui est équivalente.

Techniquement, elle n'est pas la meilleure méthode pour inverser une matrice de grande taille car elle nécessite le calcul de n^2 déterminants de taille $n-2$.

1.9.1 Formule

On va prouver la formule générale

$$A.^tCom(A) =^t Com(A).A = \det(A).I_n$$

Elle permettra ensuite pour $\det(A)$ non nul de proposer et vérifier $A^{-1} = \dfrac{^tCom(A)}{\det(A)}$.
Cette formule donne donc la réciproque attendue : $(\det(A) \neq 0) \Rightarrow (A\ inversible)$.

1.9.2 Explication

Quand on calcule $A.^tCom(A)$ on recrée des déterminants de taille n sur n. Certains calculent bien $\det(A)$ (sur la diagonale de $A.^tCom(A)$). les autres calculent des déterminants (nuls) de matrices « dégénérées ».

1.9.3 Détails de la preuve

On note a_i^k le terme général de A et α_i^k le terme général de $Com(A)$, égal à $(-1)^{i+k}.\det(A_i^k)$ avec nos notations.
Le terme général de $^tCom(A)$ est alors $\beta_i^k = \alpha_k^i$.
On va calculer le terme général de la matrice produit $A.^tCom(A)$. Par construction, c'est

$$d_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\beta_j^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\alpha_k^j = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.(-1)^{i+k}.\det(A_k^j)$$

Dans le cas des termes diagonaux, on retrouve

$$d_i^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\beta_j^i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.\alpha_i^j = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.(-1)^{i+j}.\det(A_i^j)$$

et c'est le développement du déterminant de la matrice A par rapport à sa i^{eme} ligne.
La diagonale de $A.^tCom(A)$ est donc faite de termes tous égaux à $\det(A)$. Il reste à montrer que les termes hors de la diagonale de $A.^tCom(A)$ sont tous nuls. Ce sont cette fois des

$$d_i^k = \sum_{j=1}^{n} a_i^j.(-1)^{j+k}.\det(A_k^j)$$

Ce sont encore des développements de déterminants par rapport à la ligne i. mais c'est le développement d'une matrice avec les lignes i et k égales. Par antisymétrie, ce déterminant est nul.
Tous les termes hors de la diagonale sont nuls, le produit est bien le multiple indiqué de la matrice unité.

Pour l'autre produit ${}^tCom(A).A$, on conduit le même type de calculs mais cette fois ce sont des développements en colonne.

1.9.4 Exemple en taille 3

On travaille sans doubles indices pour bien saisir avec une matrice A égale à $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ et on effectue le produit

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Le terme de ligne 1 colonne 1 est bien le déterminant attendu

$$a.\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c.\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

Le terme de ligne 2 colonne 1 est cette fois le déterminant nul (développé par rapport à sa première ligne)

$$a'.\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} - b'.\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} + c'.\begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

On peut calculer les autres termes de la même manière.

2 Déterminant d'une famille de vecteurs

On peut considérer le déterminant comme une application qui à une matrice carrée de format n sur n associe un réel.
Mais on peut aussi le considérer comme une application qui à n vecteurs de format n associe un réel.
Les deux définitions sont évidemment équivalentes dans leur présentation :

$\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$	$\left(\begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_2^1 \\ a_3^1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^2 \\ a_2^2 \\ a_3^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1^3 \\ a_2^3 \\ a_3^3 \end{pmatrix} \right) \longrightarrow \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}$
déterminant de matrice	déterminant de famille de vecteurs
$\det\ :\ M_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$	$\det_C\ :\ \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$
$\det\ :\ M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$	$\det_C\ :\ \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Dans cet exposé, on mettra un petit c pour dire « déterminant en colonnes ».
On note que dans chaque produit de la formule $\sum\limits_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)} \ldots a^n_{\sigma(n)}$ il vient un terme de chaque colonne.

2.1 Propriétés élémentaires

Cette application est une forme (son espace d'arrivé est $\mathbb{R}$).
Elle est multilinéaire, c'est à dire linéaire par rapport à chaque vecteur.

Avec des points de suspension, si on remplace le i^{eme} vecteur par une combinaison $\overrightarrow{u_i} + \lambda.v_i$, la formule devient

$$\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)}\dots(a^i_{\sigma(i)} + \lambda.v^i_{\sigma(i)})\dots a^n_{\sigma(n)}$$

et se sépare en

$$\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)}\dots a^i_{\sigma(i)}\dots a^n_{\sigma(n)} + \lambda.\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)}\dots v^i_{\sigma(i)}\dots a^n_{\sigma(n)}$$

Elle est antisymétrique (si on permute deux vecteurs, le signe change).

En effet, si on permute les colonnes i et j, les produits deviennent $a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)}\dots a^j_{\sigma(i)}\dots a^i_{\sigma(j)}\dots a^n_{\sigma(n)}$ à la place de $a^1_{\sigma(1)}.a^2_{\sigma(2)}\dots a^i_{\sigma(i)}\dots a^j_{\sigma(j)}\dots a^n_{\sigma(n)}$.
Pour rétablir la forme attendue, il faudra remplacer σ par $\sigma \circ \overrightarrow{(i\ j)}$ qu'on va noter σ'. Quand σ décrit S_n, σ' le fait aussi. On peut donc ré-indexer. Mais il faut alors remplacer $Sgn(\sigma)$ par $-Sgn(\sigma')$ et on sort le signe moins.

2.2 Origine de la formule de la première partie

On peut montrer que le déterminant est une forme $n-$linéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^n$.
Mais on va aussi montrer que toute forme $n-$linéaire antisymétrique est un multiple de notre formule.

2.2.1 Explication pour n égal à 3.

On considère une forme tri-linéaire antisymétrique, c'est à dire une application de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chaque vecteur, et qui change de signe dès qu'on change deux vecteurs de la liste.
On montre déjà qu'elle s'annule dès que deux vecteurs sont égaux. En effet, en permutant les deux vecteurs égaux, la quantité calculée doit à la fois changer de signe mais aussi rester la même.

On prend trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ qu'on décompose sur la base canonique ($\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{k}$)

$$\begin{array}{cccc} a^1_1 & a^2_1 & a^3_1 & \overrightarrow{i}^* \\ a^1_2 & a^2_2 & a^3_2 & \overrightarrow{j}^* \\ a^1_3 & a^2_3 & a^3_3 & \overrightarrow{k}^* \\ \overrightarrow{a} & \overrightarrow{b} & \overrightarrow{c} & \end{array}$$

(à lire : $\overrightarrow{a} = a^1_1.\overrightarrow{i} + a^1_2.\overrightarrow{j} + a^1_3.\overrightarrow{k}$) et on développe $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\ \overrightarrow{c})$ par tri-linéarité

$a^1_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$	$a^1_1.a^2_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i},\overrightarrow{c})$	$a^1_1.a^2_1.a^3_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_1.a^2_1.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_1.a^2_1.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$	
	$a^1_1.a^2_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{c})$	$a^1_1.a^2_2.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_1.a^2_2.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_1.a^2_2.a^3_3.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$	$a^1_1.a^2_2.a^3_3.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
	$a^1_1.a^2_3.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{c})$	$a^1_1.a^2_3.a^3_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_1.a^2_3.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$	$-a^1_1.a^2_3.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
		$a^1_1.a^2_3.a^3_3.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$	
$a^1_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$	$a^1_2.a^2_1.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{c})$	$a^1_2.a^2_1.a^3_1.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_2.a^2_1.a^3_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_2.a^2_1.a^3_3.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$	$-a^1_2.a^2_1.a^3_3.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
	$a^1_2.a^2_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j},\overrightarrow{c})$	$a^1_2.a^2_2.a^3_1.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_2.a^2_2.a^3_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_2.a^2_2.a^3_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$	
	$a^1_2.a^2_3.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{c})$	$a^1_2.a^2_3.a^3_1.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$	$a^1_2.a^2_3.a^3_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
		$a^1_2.a^2_3.a^3_2.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_2.a^2_3.a^3_3.\phi(\overrightarrow{j},\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$	
$a^1_3.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c})$	$a^1_3.a^2_1.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i},\overrightarrow{c})$	$a^1_3.a^2_1.a^3_1.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_3.a^2_1.a^3_2.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$	$a^1_3.a^2_1.a^3_2.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
		$a^1_3.a^2_1.a^3_3.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$	
	$a^1_3.a^2_2.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{c})$	$a^1_3.a^2_2.a^3_1.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{i})$	$-a^1_3.a^2_2.a^3_1.\phi(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$
		$a^1_3.a^2_2.a^3_2.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_3.a^2_2.a^3_3.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$	
	$a^1_3.a^2_3.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k},\overrightarrow{c})$	$a^1_3.a^2_3.a^3_1.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k},\overrightarrow{i})$	
		$a^1_3.a^2_3.a^3_2.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k},\overrightarrow{j})$	
		$a^1_3.a^2_3.a^3_3.\phi(\overrightarrow{k},\overrightarrow{k},\overrightarrow{k})$	

Il y avait 27 termes en $a^1_?.a^2_?.a^3_?.\phi(\overrightarrow{?},\overrightarrow{?},\overrightarrow{?})$ mais beaucoup s'en vont par antisymétrie (certaines branches pouvaient même être coupées plus tôt). Enfin, on regroupe les termes en remettant les trois vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ dans l'ordre.

2.2.2 Généralisation aux formes $n-$linéaires antisymétriques de $\mathbb{R}^n$

On généralise d'ailleurs pour une forme n linéaire antisymétrique

$$\phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a^1_{i_1}.\overrightarrow{e_1},\ \sum_{i_2=1}^{n} a^1_2.\overrightarrow{e_{i_2}},, \dots \sum_{i_n=1}^{n} a^1_{i_n}.\overrightarrow{e_{i_n}}\Big) = \sum_{(i_1,\dots i_n)\in\{1,\ 2,\dots n\}^n} a^1_{i_1}.a^2_{i_2}\dots a^n_{i_n}.\phi(\overrightarrow{e_{i_1}},\dots \overrightarrow{e_{i_n}})$$

Il reste uniquement les termes où les trois vecteurs sont distincts. Il y a en six.
Pour n vecteurs, ne resteront que les listes $[i_1,\ i_2,\dots i_n]$ « injectives). Il s'agira donc de bijections (ou permutations). On écrira donc $i_k = \sigma(k)$ pour alléger

$$\phi\Big(\sum_{i_1=1}^{n} a^1_{i_1}.\overrightarrow{e_1},\ \sum_{i_2=1}^{n} a^1_2.\overrightarrow{e_{i_2}},, \dots \sum_{i_n=1}^{n} a^1_{i_n}.\overrightarrow{e_{i_n}}\Big) = \sum_{\sigma\in S_n}\prod_{k=1}^{n} a^k_{\sigma(k)}.\phi(\overrightarrow{e_{\sigma(1)}},\dots \overrightarrow{e_{\sigma(n)}})$$

En derrière colonne, on a remis le $n-$uplet de vecteurs dans l'ordre, et la signature de la permutation apparaît.
On peut alors mettre en facteur la constante de proportionnalité $\phi(\overrightarrow{e_1},\dots \overrightarrow{e_n})$ et il reste la forme $n-$ linéaire antisymétrique déjà définie, que l'on a appelé déterminant.

2.2.3 Corolaire

Si l'on définit proprement la notion de volume algébrique d'un parallélépipède en dimension 3, on a une forme tri-linéaire antisymétrique sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Elle est donc proportionnelle au déterminant tel que défini par la règle de Sarrus. Et la constante de proportionnalité est le volume arbitraire de la maille élémentaire déterminée par les trois vecteurs de la base canonique dans l'ordre naturel.

2.3 Déterminant d'un produit

La formule $\det(A.B)\det(A).\det(B)$ *pour* A *et* B *carrées de même forma ne se démontre pas avec des sommes de produits de sommes.*
Il faut regarder les deux matrices de deux façons différentes.
La matrice A *est vue comme une matrice d'application linéaire, et la matrice* B *est vue comme une matrice de vecteurs colonne.*

On se donne une matrice A carrée de taille n de terme général a_i^k. On crée déjà l'application linéaire ϕ : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ U & \longmapsto & A.U \end{array}$ (les formats sont cohérents, elle transforme un vecteur en vecteur, et sa linéarité repose sur les règles de calcul algébrique).
On crée alors l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (U_1, \ldots U_n) & \longmapsto & \det_C(\varphi(U_1), \ldots, \varphi(U_n)) \end{array}$$

Les n vecteurs $\varphi(U_1), \ldots \varphi(U_n)$ sont dans $\mathbb{R}^n$, on peut calculer le déterminant de la matrice qu'ils forment.
On établit par (anti)-symétrie la linéarité par rapport au premier vecteur, elle suffira

$$\phi((U_1 + \lambda.V_1),\ U_2, \ldots U_n) = \det_C(\varphi(U_1 + \lambda.V_1),\ \varphi(U_2), \ldots \varphi(U_n))$$

$$\phi((U_1 + \lambda.V_1),\ U_2, \ldots U_n) = \det_C(\varphi(U_1) + \lambda.\varphi(V_1),\ \varphi(U_2), \ldots \varphi(U_n))$$

$$\phi((U_1 + \lambda.V_1),\ U_2, \ldots U_n) = \det_C(\varphi(U_1),\ \varphi(U_2), \ldots \varphi(U_n)) + \lambda.\det_C(\varphi(V_1),\ \varphi(U_2), \ldots \varphi(U_n))$$

$$\phi((U_1 + \lambda.V_1),\ U_2, \ldots U_n) = \phi(U_1,\ U_2, \ldots U_n) + \lambda.\phi(V_1,\ U_2, \ldots U_n)$$

Enfin, cette forme multi-linéaire est antisymétrique. Il suffit de permuter deux vecteurs pour que le résultat change de signe (cette fois, on n'a même pas besoin de la linéarité de φ).

En tant que forme multilinéaire et antisymétrique, ϕ est proportionnelle au déterminant usuel dans un rapport égal à l'image de la base canonique (base que l'on notera $(E_1, \ldots E_n)$ dont les vecteurs sont faits de zéros et d'un seul 1 qui se promène) :

$$\forall (U_1, \ldots, U_n) = \in (\mathbb{R}^n)^n,\ \phi(U_1, \ldots U_n) = \det_C(U_1, \ldots U_n).\phi(E_1, \ldots E_n)$$

La formule prend forme, d'un côté un seul déterminant, de l'autre un produit de deux déterminants.
Si les U_k sont les colonnes de notre matrice B, le premier membre est le déterminant de la famille des $A.U_k$.
On reconnaît par construction du produit matriciel les colonnes du produit matriciel $A.B$. Le réel$\phi(U_1, \ldots U_n)$ est donc le déterminant de la matrice $A.B$.
Comme les E_k forment la base canonique, le calcul $\phi(E_1, \ldots E_n)$ fait intervenir les colonnes $A.E_k$. Ce sont les colonnes de A et le déterminant $\phi(E_1, \ldots E_n)$ est directement $\det(A)$.
Bref, on a démontré $\det(A.B) = \det(B).\det(A)$.

2.3.1 Corolaires

Seules les matrices de déterminant non nul sont inversibles.

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique (et donc les mêmes valeurs propres).

2.4 Formules de Cramer (dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$)

On considère $(\mathbb{R}^3, +, .)$ doté de la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Sur cette base, le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a pour composantes x, y et z (d'où le nom de canonique).
On se donne une autre base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3})$. Tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose donc sur cette base d'une façon unique : $\overrightarrow{u} = a_1.\overrightarrow{e_1} + a_2.\overrightarrow{e_2} + a_3.\overrightarrow{e_3}$.
La question est de passer des a_i à x, y et z et vice versa.
En général, il est facile d'écrire x, y et z à partir des a_i et des composantes sur la base canonique des trois $\overrightarrow{e_i}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a_1.\begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ c_3^1 \end{pmatrix} + a_2.\begin{pmatrix} c_1^2 \\ c_2^2 \\ c_3^2 \end{pmatrix} + a_3.\begin{pmatrix} c_1^3 \\ c_2^3 \\ c_3^3 \end{pmatrix}$$

Mais c'est l'autre sens qui est plus problématique et semble nécessiter la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues (de déterminant évidemment non nul).
Et pourtant, si on décide de calculer $\det_c(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2})$, on a une surprise agréable en développant par multilinéarité et antisymétrie

$$\det_c(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) = \det_C(a_1.\overrightarrow{e_1} + a_2.\overrightarrow{e_2} + a_2.\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

$$\det_c(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) = a_1.\det_C(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + a_2.\det_C(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}) + a_3.\det_C(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

$$\det_c(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2}) = a_1.\det_C(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$$

Il n'y a plus qu'à diviser par le déterminant non nul et à faire de même pour récupérer les autres composantes. On a alors deux présentations de la même formule

$$\overrightarrow{u} = \frac{\det_C(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}).\overrightarrow{e_1} + \det_C(\overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{e_3}).\overrightarrow{e_2} + a_3.\det_C(\overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{e_3}}{\det_c(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})}$$

$$\left\{ \begin{array}{llllll} c_1^1.a_1 & +c_1^2.a_2 & +c_1^3.a_3 & = & x \\ c_2^1.a_1 & +c_2^2.a_2 & +c_2^3.a_3 & = & y \\ c_3^1.a_1 & +c_3^2.a_2 & +c_3^3.a_3 & = & z \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left(a_1 = \frac{\begin{vmatrix} x & a_1^2 & a_1^3 \\ y & a_2^2 & a_3^3 \\ z & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_3^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}}, \ldots a_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & x \\ a_2^1 & a_2^2 & y \\ a_3^1 & a_3^2 & z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_3^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}} \right)$$

Ces formules se généralisent évidemment en dimension n.

Le lecteur intéressé, en particulier le physicien, observera que si on a $\dfrac{\partial x}{\partial a_2} = a_1^2$ *par exemple,*

on aura en revanche $\dfrac{\partial a_2}{\partial x} = \dfrac{-\begin{vmatrix} a_2^1 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix}}$.

Ce que l'on aura en calcul différentiel, c'est $\dfrac{D(a_1,\ a_2,\ a_3)}{D(x,\ y,\ z)} = \left(\dfrac{D(x,\ y,\ z)}{D(a_1,\ a_é,\ a_3)}\right)$ *avec des matrices dites « jacobiennes ».*

3 Produit vectoriel en dimension 3

Dans tout ce qui suit, on travaille sur la base canonique, qu'on considère comme orthonormée pour le produit scalaire usuel.

3.1 Caractérisation

Pour tout triplet de vecteurs $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$, on a
$$\begin{array}{ccc} \det_C(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) & = & (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c} \\ = & & = \\ \det_C(\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a}) & = & (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}).\overrightarrow{a} \\ = & & = \\ \det_C(\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) & = & (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}).\overrightarrow{b} \end{array}$$

3.2 Calcul explicite

On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.c - \begin{vmatrix} a & b \\ & \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.c' + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.c'' = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} c \\ c' \\ c'' \end{pmatrix}$$

C'est le grand vecteur formé de trois déterminants de taille 2 qui est le produit vectoriel de $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.

3.2.1 Formule abusive mais pratique

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} a & b & \overrightarrow{i} \\ a' & b' & \overrightarrow{j} \\ a'' & b'' & \overrightarrow{k} \end{vmatrix}$ qu'on développe par rapport à la dernière colonne.

3.2.2 Cas particulier de la base canonique

sens favorable	$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j}$
sens rétrograde	$\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{k}$	$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{j}$
évidence	$\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$	$\overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$

On peut ensuite calculer tous les produits scalaires par bilinéarité/distributivité.

3.2.3 Extension aux bases orthonormées

Si $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ est une base orthonormée directe, alors on a $\overrightarrow{e_1} \wedge \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{e_3}$, $\overrightarrow{e_2} \wedge \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{e_1}$ et ainsi de suite.

Rappel : la base est dite orthogonale si $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_j} = 0$ pour $i \neq j$ (vecteurs deux à deux orthogonaux)
la base est dite orthonormée si de plus $\overrightarrow{e_i}.\overrightarrow{e_i} = 1$ pour tout i (vecteurs normés)
elle est directe si $\det_C(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ est positif.
En l'occurrence, pour une base orthonormée, $\det_C(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$ ne peut valoir que 1 ou -1 , il suffit de calculer $\det({}^tM.M)$ en notant M la matrice des trois colonnes $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_3})$.

3.3 Propriétés élémentaires

3.3.1 Application bilinéaire antisymétrique

C'est une application bilinéaire de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ vecteurs, le produit $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est à son tour un vecteur.
Pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ et tout couple $(\lambda,\ \mu)$, on a

$$\overrightarrow{a} \wedge (\lambda.\overrightarrow{b} + \mu.\overrightarrow{c}) = \lambda.(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) + \mu.(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c})$$

Cette propriété peut être qualifiée de distributivité et est valable aussi suivant le premier vecteur.
Elle vient de la tri-linéarité du déterminant.

Cette application est antisymétrique : pour tout couple $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$, on a

$$\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a} = -\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$$

Ceci vient de l'antisymétrie du déterminant. Ceci entraine $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ (attention, vecteur nul et pas réel).

3.3.2 Absence d'associativité

Le produit vecteoriel n'est pas associatif.

On le voit sur un contre-exemple $\begin{array}{ccccc} (\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}) & \wedge \overrightarrow{j} & \neq & \overrightarrow{i}\wedge & (\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{j}) \\ \overrightarrow{k} & \wedge \overrightarrow{j} & & \overrightarrow{i}\wedge & (-\overrightarrow{0}) \\ -\overrightarrow{i} & & & & \overrightarrow{0} \end{array}$

D'autre part, $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ est orthogonal à $\overrightarrow{c}$ et est dans le plan engendré par $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ (car orthogonal à $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$),
tandis que $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$ est orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et est dans le plan engendré par $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.

On pourra vous fournir aux concours la formule dite du double produit vectoriel

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b}$$

Il n'y a pas de méthode astucieuse pour prouver cette formule, hormis le calcul avec neuf composantes ou le recours à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$ qui sert à exprimer $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$.
On pourra alors développer à tritre d'exercice.$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b}$.

3.4 Interprétation géométrique

Le vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et à $\overrightarrow{b}$. En effet

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{a} = \det_{C}(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}) = 0$$

C'est ce qui permet de construire directement un vecteur orthogonal au plan $(A\ B\ C)$: $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

Est-ce le même vecteur que $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ *et que* $\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CA}$ *?*
Pouvez vous retrouver que l'équation du plan $(A\ B\ C)$ *est à la fois* $\det(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AM}) = 0$ *et* $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$ *avec* $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ *?*

3.5 Applications géométriques

3.5.1 Complétion de famille en base

Si les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont non colinéaires, alors ils engendrent un plan, le vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est normél à ce plan, et la famille $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b})$ est une base directe de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ (pas forcément orthogonale, on n'a fait aucune hypothèse sur $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$).

3.5.2 Aire d'un paralléogramme dans l'espace

L'aire du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ dans $\mathbb{R}^3$ est $||\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}||$.
Il suffit d'interpréter la formule $\det_C(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).\overrightarrow{c}$ et d'y voir « base fois hauteur ».

3.5.3 Equation de droite

Le vecteur $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ est nul si et seulement si $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont colinéaires.
Le point M est sur la droite $(A\ B)$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}$ est le vecteur nul.

Ceci donne a priori trois équations, mais la troisième équation est combinaison linéaire des deux premières. Chacune des trois équations est une équation de plan.

3.5.4 Perpendiculaire commune à deux droites

La perpendiculaire commune aux droites $(A\ B)$ et $(C\ D)$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD}$ (et si ce vecteur est nul, on peut interpréter que les deux droites étaient parallèles.

Vecteur normal à un plan
Le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

3.6 Application à l'inversion d'une matrice de taille 3 sur 3.

Si A est une matrice de taille 3 sur 3 formée de trois colonnes linéairement indépendantes (donc formant une base de $(\mathbb{R}^{''}, +, .)$) : $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$, il suffit de calculer les trois produits « complémentaires » $\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{b}$ et

$\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}$ et de les écrire en ligne pour obtenir l'inverse de la matrice A.
Exemple :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} : \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-8} . \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 6 & -2 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il faut évidemment penser à diviser par le déterminant de A (non nul).

> *Remarque : si la matrice initiale n'est pas inversible, les trois vecteurs obtenus sont colinéaires. Et c'est normal car les trois vecteurs sont coplanaires.*
>
> $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} : \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
>
> $$\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
>
> *Retrouvez l'équation du plan contenant les trois vecteurs initiaux. Ou même un vecteur normal à ce plan.*