LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi avril
M.P.S.I.2

2024 2025

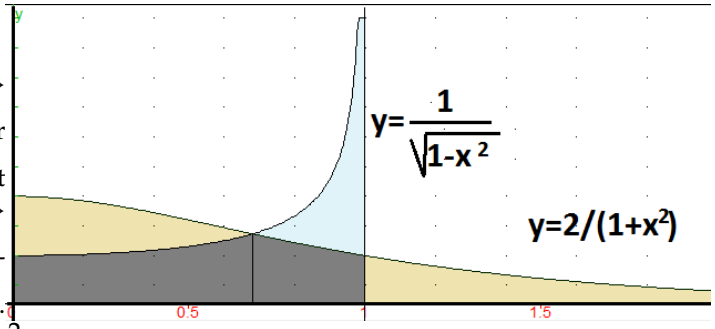
TD25

◁0▷ Pour toute suite réelle u, on définit sa moyenne de Cesarbi par $z_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}.\sum_{k=0}^{n} 2^k.u_k$. Montrez que les propriétés suivantes passent de u à z :
constance, caractère borné, croissance, convergence vers 0, convergence.
(pour la convergence, on pourra suivre exactement la même méthode que pour le théorème de Cesàro).
Indiquez lesquelles des propriétés précédentes passent de z à u.

◁1▷ Calculez $\int_0^1 Max\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\Big).dx$.

L'intégrale $\int_0^1 Min\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\Big).dx$ existe par continuité de la fonction sous le signe somme. Quoique. En 1 l'application $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ « explose ». Mais si justement elle explose, ce n'est pas elle qui est récupérée par le minimum.

Regardons un dessin. On a deux graphes : $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \longmapsto \frac{2}{1+x^2}$. En 0, c'est le premier qui est le plus petit, puis vient le moment où c'est le second. Il suffit de dire que l'application $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{2}{1+x^2}$ est croissante (dériver si nécessaire). Elle va s'annuler et changer de signe une fois.



Où cela se passe-t-il ? Quand on a $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{1+x^2}$, ce qui nous amène à résoudre $1+x^2 = 2.\sqrt{1-x^2}$ puis $x^4+2.x^2+1 = 4-4.x^2$. C'est une équation du second degré en x^2 qui admet deux racines : $x^2 = -3-2.\sqrt{3}$ et $x^2 = -3+2.\sqrt{3}$.<
Seule la seconde est cohérente. Comme ensuite on cherche une racine x entre 0 et 1, on garde $x = \sqrt{2.\sqrt{3}-3}$ qu'on va noter a.
On peut à présent découper par la relation de Chasles :
$\int_0^1 Min\big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\big).dx = \int_0^a Min\big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\big).dx + \int_a^1 Min\big(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{2}{1+x^2}\big).dx = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int_a^1 \frac{2}{1+x^2}dx$
On dispose de primitives : *Arcsin* et $2.Arctan$.
La réponse finale est donc $\boxed{Arcsin(\sqrt{2.\sqrt{3}-3}) + \frac{\pi}{2} - 2.Arctan(\sqrt{2.\sqrt{3}-3})}$

◁2▷ ♡ Montrez que $4^{4.n+2} - 3^{n+3}$ est toujours un multiple de 11.
Tout multiple de 11 est il de cette forme ?

On écrit $4^{4.n+2} - 3^{n+3} = 16.(256)^n - 27.3^n$.
On réduit modulo 11 :

	16	256	27	3
réduction	5	3	5	3

On a donc $4^{4.n+2} - 3^{n+3} = 16.(256)^n - 27.3^n = 5.3^n - 5.3^n = 0$ [11]. C'est aussi rapide que ça. [1]

Cette suite croît car $4^{4.n}$ croît bien plus vite que 3^n.
La valeur 22 ne sera jamais atteinte.

◁3▷ ♡ Trouvez toutes les applications dérivables f vérifiant $f'(t) = f(2-t)$ pour tout t *(on pourra par exemple dériver deux fois)*.

f est dérivable, donc $t \longmapsto f(2-t)$ est dérivable comme composée.

1. qui a tenté une récurrence ?

Et donc f' est dérivable à son tour. f est donc deux fois dérivable.
Mais alors, $t \longmapsto f(2-t)$ est deux fois dérivable, f' est donc D^2. f est D^3.
En mettant en boucle, f est directement de classe C^∞.
On va pouvoir dériver autant de fois qu'on veut.

Déjà une fois :

$$\forall t,\ f'(t) = f(2-t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall t,\ f'(t) = f(2-t) \\ \forall t,\ f''(t) = -f'(2-t) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall t,\ f'(t) = f(2-t) \\ \forall t,\ f''(t) = -f'(2-(2-t)) \end{array}$$

Afin d'avoir toute la rigueur mathématique (et scientifique), quand on dérive, on garde sous le coude l'équation originale et raisonne donc par équivalences.

Mais déjà, on a obtenu $f'' = -f$.

Nécessairement, f est de la forme $t \longmapsto A.e^{i.t} + B.e^{-i.t}$ pour deux constantes (complexes[2]) A et B à déterminer.
En reportant dans l'équation initiale : $\forall t,\ A.i.e^{i.t} - B.i.e^{-i.t} = A.e^{i.(2-t)} + B.e^{-i.(2-t)}$.
On arrange : $\forall t,\ A.i.e^{i.t} - B.i.e^{-i.t} = B.e^{-2.i}.e^{-i.t} + A.e^{2.i}.e^{i.t}$.
Par liberté de la famille de fonctions exponentielles, on a la condition redondante $A.i = B.e^{-2.i}$ et $-B.i = A.e^{2.i}$.

Redondante car les deux donnent $B = A.i.e^{2.i}$.

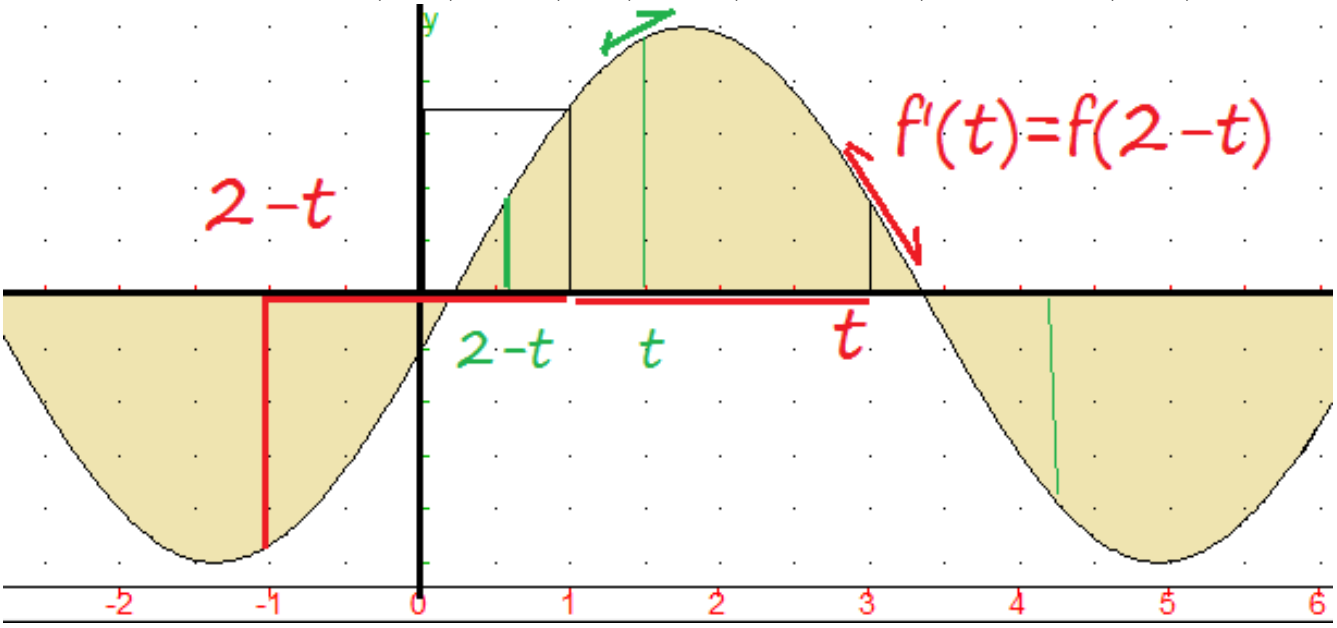
Les solutions forment un espace vectoriel, engendré par l'application « de base » $t \longmapsto e^{i.t} + i.e^{2.i-i.t}$.
Elle est « de base », mais pas assez réelle.
Elle s'écrit aussi $t \longmapsto e^{i.t} + e^{2.i+i.\frac{\pi}{2}-i.t}$.
Posons pour nous simplifier la vie $2.\alpha = 2 + \dfrac{\pi}{2}$ et on a $t \longmapsto e^{i.t} + e^{2.i.\alpha-i.t}$.
Vous comprenez pourquoi j'aime ? $t \longmapsto e^{i.\alpha}.(e^{i.(t-\alpha)} + e^{-i.(t-\alpha)})$.
On préfèrera donc prendre $t \longmapsto (e^{i.(t-\alpha)} + e^{-i.(t-\alpha)})$. Et maintenant la voilà réelle !

Et qui a-t-on alors ? $\boxed{t \longmapsto \cos(t-\alpha) \text{ et ses multiples avec } \alpha = 1 + \dfrac{\pi}{4}}$

On vérifie : $f'(t) = -\sin(t-\alpha) = -\sin\left(t-1-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(1-t+\frac{\pi}{4}\right)$.

et $f(2-t) = \cos\left((2-t)-\alpha\right) = \cos\left(1-t-\frac{\pi}{4}\right)$.

Il y a égalité par la formule $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Big(\cos(\theta)-\sin(\theta)\Big)$ ou même $\sin\left(\gamma+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\gamma)$.



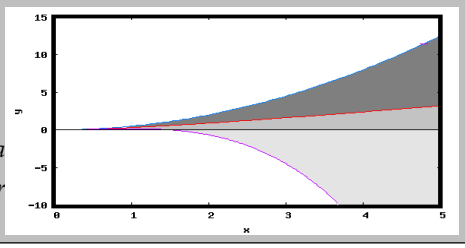
Remarque : si on était parti de $t \longmapsto a.\cos(t) + b.\sin(t)$ comme solutions de $f'' = -f$, on aboutissait à
$-a.\sin(t) + b.\cos(t) = a.\sin(2-t) + b.\cos(2-t)$
puis $-a.\sin(t) + b.\cos(t) = a.(\sin(2).\cos(t) - \cos(2).\sin(t)) + b.(\cos(2).\cos(t) + \sin(2).\sin(t))$ et finalement au

2. mais surement conjuguées

même résultat.

◃4▹ La CONSTANTE D'EULER, de valeur approchée `0.57721566490153286060`.

On définit $c_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $C_N = \sum_{k=1}^{N} c_k$.
Montrez pour tout x positif : $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.
Déduisez $\frac{1}{2.n^2} - \frac{1}{3.n^3} \leqslant c_n \leqslant \frac{1}{2.n^2}$.
Déduisez pour tout couple d'entiers $(n,\ N)$ *(avec $n \leqslant N$)* :
$\frac{1}{2.n+2} - \frac{1}{2.N} - \frac{1}{6.n^2} + \frac{1}{6.(N+1)^2} \leqslant C_N - C_n \leqslant \frac{1}{2.n} - \frac{1}{2.N+2}$
Déduisez $\gamma - C_n \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{2.n}$ *(en gros, pour connaître γ à 10^{-4} près, il faudra prendre n de l'ordre de 5000 dans C_n, ce qui fait trop de termes apportant chacun leur imprécision).*



Pour prouver $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \leqslant x - \ln(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$, on peut utiliser des méthodes de Terminable par étude et variations d'une fonction différence.

Mais on a des outils dans le cours, il est grand temps de les utiliser : la formule de Taylor avec reste intégrale :

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x.\ln'(1) + \frac{x^2}{2}.\ln''(1) + reste$$

avec

$$reste = \frac{x^3}{2}.\int_{t=0}^{t=1} (1-t)^2.\ln^{(3)}(1+t.x).dt$$

On connaît *(ou on calcule)* les dérivées successives du logarithmes

n	0	1	2	3
$\ln^{(n)}(x)$	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{2}{x^3}$
$\ln^{(n)}(1)$	0	1	-1	

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^3.\int_{t=0}^{t=1} \frac{(1-t)^2}{(1+t.x)^3}.dt$$

On passe à l'opposé, on ajoute x : $x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - reste$.
Le reste est positif car les fonctions en jeu le son *(et x aussi)* : $x - \ln(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.
Il faut ensuite majorer le reste *(pour minorer la soustraction)* :

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+x.t)^3}.dt \leqslant \int_0^1 (1-t)^2.dt$$

car le dénominateur est positif, plus grand que 1.
On multiplie par x^3 positif, et on a la minoration demandée.

Mot clef : formule de Taylor, encadrement du reste intégrale.

Quel rapport avec c_n ? On applique le résultat précédent à $x = \frac{1}{k}$ (positif) :

$$\frac{1}{2.k^2} - \frac{1}{3.k^3} \leqslant \frac{1}{k} - \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2.k^2}$$

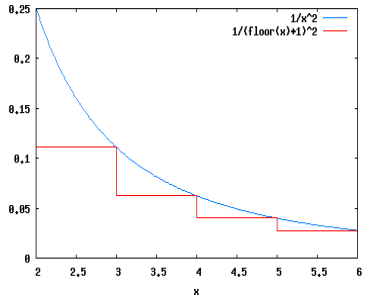
On somme de n à N :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2} - \frac{1}{3.k^3} \leqslant \sum_{n+1}^{N} c_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2}$$

On remplace :

$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2} - \frac{1}{3.k^3} \leqslant C_N - c_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2}$$

On fait une comparaison série intégrale avec l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{2.t^2}$:



$$\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2} \leqslant \int_n^{N+1} \frac{dt}{2.t^2}.$$

On en fait une aussi dans l'autre sens : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{2.k^2} \geqslant \int_{n+1}^{N+2} \frac{dt}{2.t^2}$

et pour $t \longmapsto \dfrac{1}{3.t^3}$: $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{3.k^3} \leqslant \int_n^{N+1} \frac{dt}{3.t^3}$.

On combine les deux dernières avec un passage à l'opposé :

$$\int_{n+1}^{N+2} \frac{dt}{2.t^2} - \int_n^{N+1} \frac{dt}{3.t^3} \leqslant C_N - C_n \leqslant \frac{dt}{2.t^2}$$

On calcule les intégrales avec des primitives en $t \longmapsto -\dfrac{1}{2.t}$ et $t \longmapsto -\dfrac{1}{6.t^2}$:

$$\frac{1}{2.n+2} - \frac{1}{2.N} - \frac{1}{6.n^2} + \frac{1}{6.(N+1)^2} \leqslant C_N - C_n \leqslant \frac{1}{2.n} - \frac{1}{2.N+2}$$

On comprend d'où pouvaient venir ces termes.

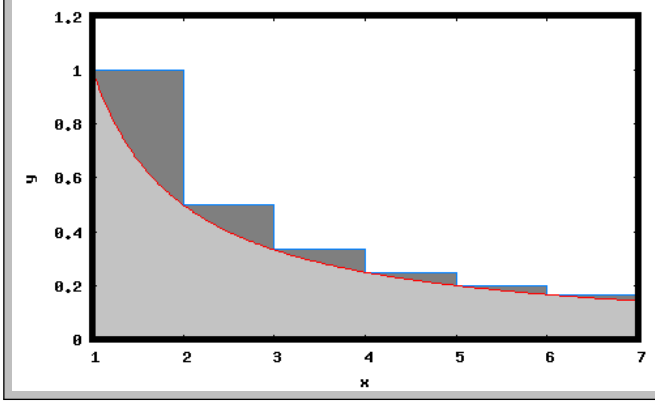
Mot clef : comparaison série/intégrale.

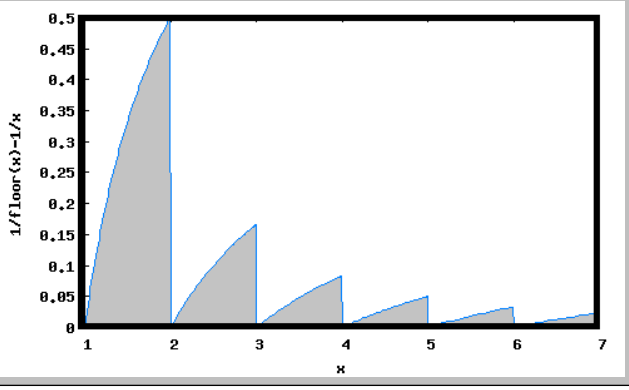
Que fait ce N dans la formule ? Rien. On va l'envoyer à l'infini. Les inégalités se conservent par passage à la limite. Le terme du milieu tend vers $\gamma - C_n$ comme attendu. Et l'encadrement est plus gentil après avoir expédié N à l'infini : $\dfrac{1}{2.n+2} - \dfrac{1}{6.n^2} \leqslant \gamma - C_n \leqslant \dfrac{1}{2.n}$

On sent que c'est alors bien une histoire d'équivalent. On divise par $1/2.n$ pour rendre la chose rigoureuse : $\dfrac{n}{n+1} - \dfrac{1}{3.n} \leqslant \dfrac{\gamma - C_n}{1/2.n} \leqslant 1$. On fait tendre n vers l'infini. Les suites encadrantes tendent vers 1, donc, par encadrement, le quotient $\boxed{\dfrac{\gamma - C_n}{1/2.n} \text{ tend vers } 1}$ Et c'est la définition de $\gamma - C_n$est équivalent à $\dfrac{1}{2.n}$.

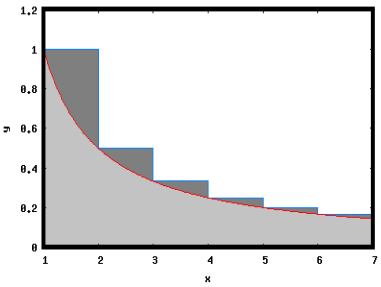
Mot clef : théorème d'encadrement sur les équivalents.

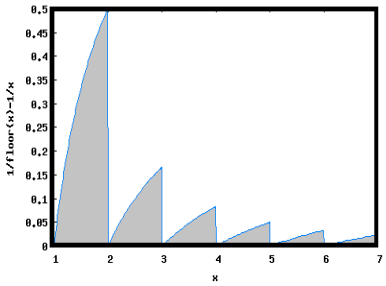
Calculez $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right).dx$ au sens de la limite quand N tend vers l'infini de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x}\right).dx$.





La fonction sous le signe somme de $\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx$ n'est pas continue, mais continue par morceaux. Pour l'intégrer, on va utiliser la relation de Chasles et découper en intervalles sur lesquels la partie entière est constante :
$\sum_n \int_n^{n+1}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx.$
Sur l'intervalle $[n,\ n+1]$ *(en fait, $[n,\ n+1[$, mais la valeur en un point ne pose pas de problème, on voit la chose par prolongement continu)*, la partie entière vaut $\frac{1}{n}$:
$\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx=\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{x}\right).dx.$
L'intégrale de $x\longmapsto\frac{1}{n}$ donne $\frac{1}{n}$ [a].





a. sans passer par $\left[\frac{x}{n}\right]_{x=n}^{x=n+1}$, merci, si on doit retourner au collège, ce sera au Collège de France, bon sang

L'intégrale de $x\longmapsto\frac{1}{x}$ donne $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.
La différence donne c_n.

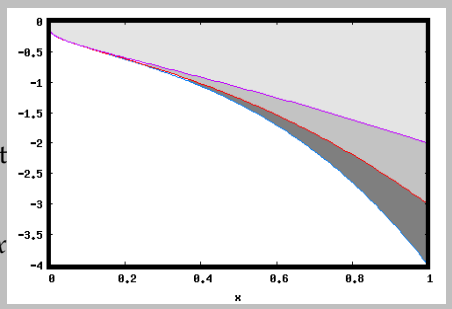
La relation de Chasles permet d'affirmer alors $\sum_n \int_1^{N+1}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx=C_N.$

On fait tendre N vers l'infini. Puisque le membre de droite a une limite, le membre de gauche en a une aussi, et elle vaut donc γ.

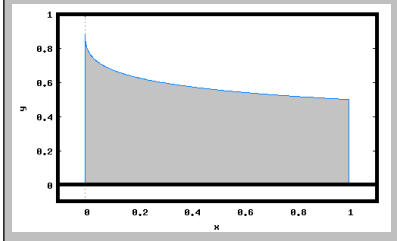
Certains vont dire : et si on avait fait tendre A vers l'infini dans $\sum_n \int_1^{A}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx$ sans le supposer entier. Je répondrait que par positivité de la fonction intégrée, il suffisait d'encadrer par l'intégrale de 1 à $[A]$ et par l'intégrale de 1 à $[A]+1$. On avait alors $C_{[A]}\leqslant\sum_n \int_1^{A}\left(\frac{1}{[x]}-\frac{1}{x}\right).dx\leqslant C_{[A]+1}$ et cette fois, on concluait par encadrement ou gendarmitude.

Mot clef : relation de Chasles pour une fonction de type "escalier".

Montrez pour tout entier naturel n $H_n=\int_0^1\frac{1-x^n}{1-x}.dx$, en prouvant aussi que $x\longmapsto\frac{1-x^n}{1-x}$ se prolonge par continuité en 1.



Montrez que $x\longmapsto\frac{1-x^n}{\ln(x)}$ *(notée φ_n)* se prolonge par continuité en 0 et en 1.
Calculez $\int_{t=1}^{t=n}\left(\int_{x=0}^{x=1}x^t.dx\right).dt$ puis exprimez $\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{t=0}^{t=n}x^t.dt\right).dx$ à l'aide de φ_n.



Prouvez que $x\longmapsto\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\ln(x)}$ (notée ψ) se prolonge par continuité en 0 et en 1.
En admettant qu'il existe un théorème sur les intégrales similaire au théorème sur les sommes qui permet de les permuter, déduisez : $C_n=\int_0^1\psi(x).dx-\int_0^1\left(x^n.\psi(x)\right).dx.$
Déduisez $\gamma=\int_0^1\psi(x).dx$.2016

On doit prolonger par continuité en 1 $x\longmapsto\frac{1-x^n}{1-x}$ qui pose effectivement problème $(0/0)$. Mais on connaît son

cours et on identifie une série géométrique : $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} x^k$. Sous cette forme, le polynôme admet pour limite n en 1.

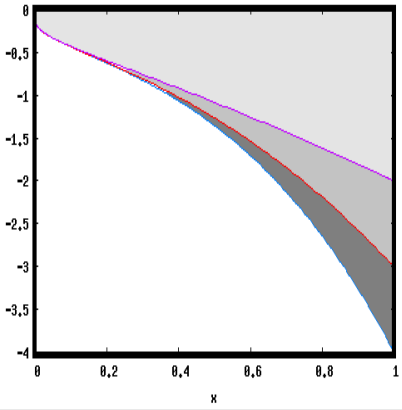
On peut aussi passer par la limite d'un taux d'accroissement de $x \longmapsto x^n$ en 1 et retrouver $n.1^{n-1}$. Mais le fait que ce taux d'accroissement ait cette limite repose sur... la série géométrique.

Ayant remplacé la fraction par la série géométrique, il devient facile d'intégrer par linéarité : $\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}.dx = \sum_k =$ $0^{n-1}\int_0^1 x^k.dx$. Chaque intégrale est connue, et dans la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}$, on décale les indices pour retrouver H_n.

Mot clef : série géométrique.

Pour $x \longmapsto \frac{1-x^n}{\ln(x)}$, on a deux problèmes : en 0 et en 1.
Mais en 0^+ *(car on ne va pas passer de l'autre côté)*, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur vers $-\infty$. Le quotient n'est pas indéterminé, il tend vers 0^-

En 1, on a une vraie forme indéterminée $"\left(\frac{"0"}{"0"}\right)"$ avec tous les guillemets voulus. Mais on s'aide de la question précédente : $\frac{1-x^n}{\log(x)} = \frac{1-x^n}{1-x}.\frac{1-x}{\log(x)}$. Le premier quotient tend vers n. Le second est au signe près et au sens près un taux d'accroissement u logarithme en 1 : $\frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$. Il tend vers $\frac{1}{1}$ *(dérivée en 1 du logarithme)*. En recollant les morceaux : $\frac{1-x^n}{\log(x)} \to_{x\to 1} -n$ *(qu'il s'agisse de limite à droite ou de limite à gauche, arrêtez de m'embêter avec ça quand la définition est la même des deux côtés...).*



Mot clef : développement limité du logarithme en 1.

La question sur $\int_{t=1}^{t=n}\left(\int_{x=0}^{x=1} x^t.dx\right).dt$ et l'autre intégrale peut vous rappeler une question de D.S. sur des Sup et Inf, ou le cours sur les sommes de sommes. Ici, on doit déjà calculer $\left(\int_{x=0}^{x=1} x^t.dx\right)$ pour tout t donné. Que l'exposant soit entier ou non, $x \longmapsto x^t$ s'intègre en $x \longmapsto \frac{x^{t+1}}{t+1}$ *(revenir à $x \longmapsto \frac{e^{(t+1).\ln(x)}}{x+1}$ et dériver si nécessaire [3])*. Le crochet $\left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_{x=0}^{x=1}$ vaut $\frac{1}{t+1}$.
On intègre en t pour t de 0 à n : $\int_0^n \frac{dt}{t+1} = \ln(n+1)$.

L'intégrale dans l'autre sens nécessite de calculer d'abord $\left(\int_{t=0}^{t=n} x^t.dt\right.$ pour x fixé. Cette fois, c'est une exponentielle. On doit écrire $x^t = e^{t.\ln(x)}$. On intègre une application de la forme $t \longmapsto e^{a.t}$. On intègre donc en $\left[\frac{e^{t.\ln(x)}}{\ln(x)}\right]_{t=0}^{t=n}$.
On trouve $\frac{e^{n.\ln(x)}-e^0}{\ln(x)}$ c'est à dire $\frac{x^n-1}{\ln(x)}$.
On résume : $\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{t=0}^{t=n} x^t.dt\right).dx = -\int_0^1 \varphi_n(x)dx$

S'il y a une chose à retenir si vous avez un profil Psikopat [a] : $\int x^t.dt = \left[\frac{x^t}{\ln(x)}\right]$, mais même pas sous cette forme mais en "j'intègre $t \longmapsto e^{\cdot\ln(x)}$". Ou même, je retiens $t \longmapsto x^t$ est une exponentielle et pas un polynôme.

a. et le MPzible a intérêt à avoir ce profil aussi et à connaître son cours

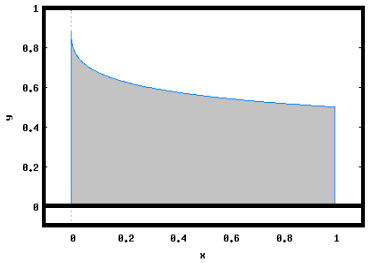
3. *oui, certain(e)s ne se sont même pas posé la question*

On résume :

$\int_{t=1}^{t=n}\left(\int_{x=0}^{x=1} x^t.dx\right).dt$	par théorème égalité	$\int_{x=0}^{x=1}\left(\int_{t=0}^{t=n} x^t.dt\right).dx$
$\ln(n+1)$	donc égalité	$-\int_0^1 \varphi_n(x)dx$

On étudie l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{\ln(x)}$. En 0, le terme $\dfrac{1}{1-x}$ tend vers 1, et le terme $\dfrac{1}{\ln(x)}$ tend vers 0. On prolonge : $\boxed{\psi(0)=1}$

En 1, les deux termes tendent vers l'infini. Que faire ? On n'a pas de quantité conjuguée. On réduit au dénominateur commun $\psi(x)=\dfrac{\ln(x)+1-x}{(1-x).\ln(x)}$. La forme est toujours indéterminée.



On pose $x=1+h$ car on est au voisinage de 1 *(h a le droit d'être négatif)*. On remplace : $\psi(1+h)=\dfrac{\ln(1+h)-h}{-h.\ln(1+h)}$. Le dénominateur est équivalent à $-h^2$. Le numérateur s'encadre par $-\dfrac{h^2}{2}$ et $-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^3}{3}$ *(question déjà traitée)*. Il est donc équivalent à $-\dfrac{h^2}{2}$. Le quotient est équivalent à $\dfrac{-h^2/2}{-h^2}$. Étant équivalent à une constante non nulle, il tend vers cette constante.

On pose donc $\boxed{\psi(1)=\dfrac{1}{2}}$

Mot clef : développements limités.

On a prouvé : $H_n=\int_0^1 \dfrac{1-x^n}{1-x}.dx$. En permutant les deux symboles d'intégration plus haut, on a prouvé $\ln(n+1)=\int_0^1 \varphi_n(t).dt$.

On effectue la différence :

$$C_n=H_n-\ln(n+1)=\int_0^1\left(\frac{1-x^n}{1-x}+\frac{1-x^n}{\ln(x)}.dx\right.$$

On sépare en deux intégrales en veillant à ce que les termes séparés existent bien :

$$C_n=\int_0^1\left(1-x^n\right).\psi(x).dx=\int_0^1\psi(x).dx-\int_0^1 x^n.\psi(x).dx$$

Oui, on n'a pas le droit par exemple d'écrire $\int_0^1\left(\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{\ln(x)}\right).dx=\int_0^1\dfrac{1}{1-x}.dx+\int_0^1\dfrac{1}{\ln(x)}.dx$ *car aucune des deux nouvelles intégrales n'existe.*

Il faut encore faire tendre n vers l'infini. On encadre l'intégrale non calculable $\int_0^1 x^n.\psi(x).dx$ *(en Sup, pour faire converger une intégrale dépendant d'un paramètre n, on l'encadre, on la pince, on l'écrabouille...)*.

L'application ψ est positive *(comparaison de base* $\ln(x)\leqslant x-1$*)*, et majorée *(elle est continue, et on pourrait même montrer qu'elle est décroissante ; son maximum est égal à* 1*)*. On va noter M un majorant de ψ :

$$0\leqslant\int_0^1 x^n.\psi(x).dx\leqslant\int_0^1 x^n.M.dx=\frac{M}{n+1}$$

Le théorème d'encadrement s'applique. L'intégrale $\int_0^1 x^n.\psi(x).dx$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

L'intégrale $\int_0^1\psi(x).dx$ ne dépend pas de n.

Le premier membre tend vers γ. Il reste $\boxed{\int_0^1\psi(x).dx=\gamma}$

Encore une intégrale calculée sans connaître de primitive. Il va falloir vous habituer à ça, on n'est plus en Terminale.
En Spé, vous aurez même des intégrales pour lesquels vous n'avez pas de primitive, et qu'en plus vous ne savez pas calculer....

◃5▹ Par combien de 0 se termine l'écriture décimale de $\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant 5} 2^i.3^j.5^k$?[a]

a. par « écriture décimale, je veux dire écriture en base 10 (car il existe des écritures en base 2, 16 ou même −2), et pas écriture avec des chiffres derrière la virgule, car là vous pouvez mettre plein de 0

Visiblement, i, j et k vont bouger. Et seul l'exposant de 2 et de 5 va servir.
$2^{70}.3^{105}.5^{140}$. On va avoir 70 fois le chiffre 0 à la fin.

◃6▹ ♡ Calculez $\prod_{k=3}^{n} \frac{k^2}{k^2-4}$ *(si possible évidemment sans récurrence, vous êtes en MPSI2, non ?)*

On note A_n cette quantité lui donner un nom est déjà preuve d'intelligence
penser à ce que ce nom dépende de la n est preuve d'intelligence mathématique[a]

a. pléonasme

$$A_n = \frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)^2}{\prod_{k=3}^{n}(k-2).(k+2)}$$

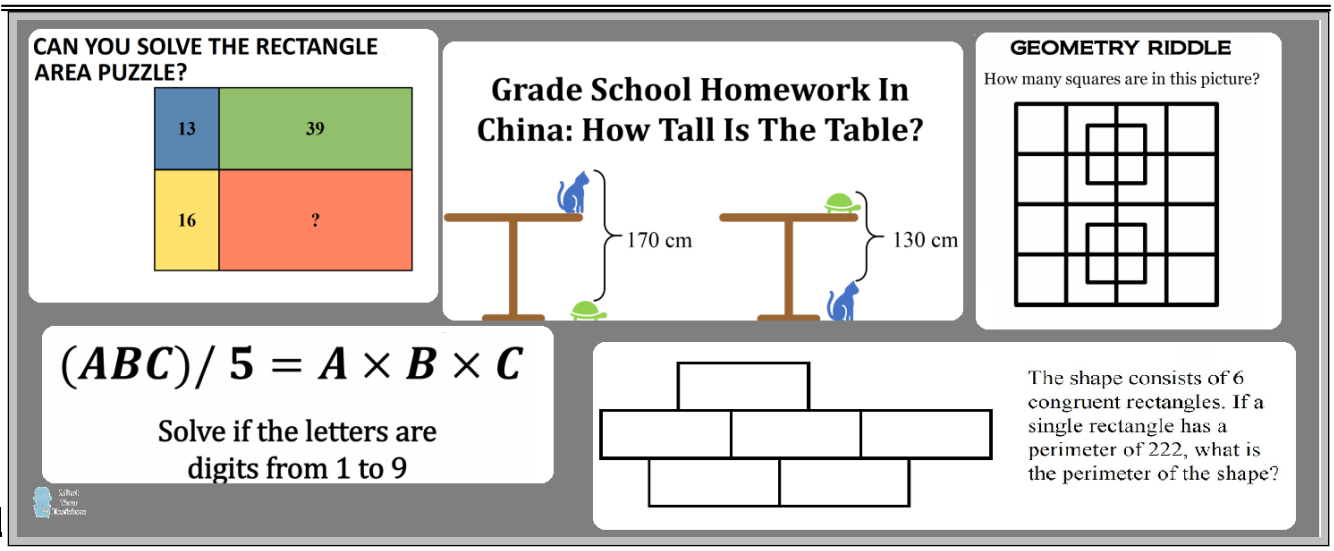
$$A_n = \frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)}{\prod_{k=3}^{n}(k-2)} . \frac{\left(\prod_{k=3}^{n} k\right)}{\prod_{k=3}^{n}(k-2)}$$

$$A_n = \frac{\prod_{k=3}^{n} k}{\prod_{k=1}^{n-2} k} . \frac{\prod_{k=3}^{n} k}{\prod_{k=5}^{n+2} k}$$

$$A_n = \frac{(n-1).n}{1.2} . \frac{3.4}{(n+1).(n+2)}$$

On peut simplifier un peu... si on y tient.

◃7▹



On note dans l'ordre a et α les longueurs des rectangles (« horizontales »).
On note b et β les hauteurs des rectangles (« verticales »).
On traduit les données : $a.b = 13$, $\alpha.b = 39$, $a.\beta = 16$.
trop d'inconnues et pas assez d'équations. On ne trouvera pas les quatre longueurs.
Mais qu'importe. Que cherche-t-on ? L'aire $\alpha.\beta$ et c'est tout.

$$\alpha.\beta = \frac{(b.\alpha).(a.\beta)}{a.b} = \frac{39 \times 16}{13} = 48$$

On a | Table+Chat-Tortue=170 | et | Table+Tortue-Chat=130 |
On somme : $2.Table + 0 = 170 + 130$. La table mesure 150 centimètres.
Et je ne cherche pas à savoir si c'est logique.
On peut aussi empiler deux tables et voir partir les chats et tortues.
On peut visualiser la moyenne des deux hauteurs.

L'entier $100.a + 10.b + c$ est un multiple de 5, c'est $5.a.b.c$.

Le chiffre des unités de abc est donc 0 ou 5. Mais si c'est 0, le produit $a.b.c$ est nul et on a une contradiction (sauf à tout prendre nul).
C'est donc que c vaut 5. $\overline{ab5} = 5 \times a \times b \times c$.
On reprend :$100.a + 10.b + 5 = 5.a.b.5$ et on simplifie : $20.a + 2.b + 1 = 5.a.b$.
On réduit modulo 2 : $5.a.b$ est impair, a et b sont impairs.
On réduit modulo 5 : $2.b + 1$ est nul. b vaut 2 ou 7. Mais comme il est impair, il vaut 7.
On trouve a par calcul direct. Il vaut 1.

$$175 = 5 \times 1 \times 7 \times 5$$

On note a la largeur d'une brique et b sa hauteur.
Les données disent $2.(a + b) = 222$.
Les trois morceaux verticaux de périmètre à gauche valent $3.b$.
Les trois morceaux verticaux de périmètre à droite valent $3.b$ aussi.
Les morceaux horizontaux valent $3.a$ aussi (découpés en trois morceaux).
Il en va de même pour le bas.

Le périmètre total est $3.b + 3.b + 3.a + 3.a$ ce qui fait $6.(a + b)$. Le chiffre de la bête : 666 centimètres.

One approach is to remove the 2 off-center squares in the middle, which leaves a 4×4 grid.
In the 4×4 grid, these are the number of squares of each size :
1square of size 4×4
4 squares of size 3×3
9 squares of size 2×2
16 squares of size 1×1

This makes for a total of 30 squares.

Now count the number of squares created by the 2 middle squares.
Inside of each square is 4 squares, so there are :
2 big middle squares
8 small middle squares

This gives 10 more squares, so in total there are $30 + 10 = 40$ squares in the picture.

Incidentally, there is a formula to count the number of squares in an nxn grid.
In our example of 4×4, remember we had:
$1 = 1^2$ square of size 4×4
$4 = 2^2$ squares of size 3×3
$9 = 3^2$ squares of size 2×2
$16 = 4^2$ squares of size 1×1

The 1×1 squares could be counted since there were 4 in a row, and there were 4 rows, so the total is $16 = 4^2$. Similarly, the 2×2 squares could be counted since there can be 3 in a row, and there are 3 rows, so the total is $9 = 3^2$. The 3×3 and 4×4 squares could be counted similarly.
Generalizing the pattern, in an nxn grid, the number of squares is equal to:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

◃ 8 ▹

♣ Trouvez toutes les séries géométriques réelles *(puis complexes)* vérifiant $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{2.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)^2$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{3.k} = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big)^3$.

Le terme général d'une suite géométrique de raison r et de premier terme a_0 est $a_0.r^n$.

La somme partielle de la série $\sum_{k=0}^{n} a_k$ est alors $a_0.\dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$.

On veut sommer jusqu'à l'infini ? On fait tendre n vers l'infini.

On a alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = a_0.\dfrac{1}{1-r}$ si $|r|<1$
et rien sinon.

Pour que tout ait un sens, on va donc imposer $|r|<1$ (et on éliminera les résolutions conduisant à des r hors de $]-1,\ 1[$.

La première question de l'exercice devient $a_0.\dfrac{1}{1-r^2} = \Big(\dfrac{a_0}{1-r}\Big)^2$.

Il y a évidemment une solution avec $a_0 = 0$ (la suite nulle, les deux membres de la formule sont nuls).

Par produit en croix : $a_0.(1-r).(1-r) = (a_0)^2.(1-r).(1+r)$.

On met de côté $a_0 = 0$.

On élimine $r = 1$.

Il reste $a_0 = \dfrac{1-r}{1+r}$ avec r entre -1 et 1 (ou dans le disque de centre 0 et de rayon 1).

Par exemple : $r = \dfrac{1}{2}$ et $a_0 = \dfrac{1}{3}$.

D'un coté $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{48} + \ldots$ de somme $\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}}$

De l'autre $\Big(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{24}\ldots\Big)^2$ de somme $\Big(\dfrac{1}{3.\left(1-\frac{1}{2}\right)}\Big)^2$

Les deux valent $\dfrac{4}{9}$

Pour l'autre équation : $\dfrac{a_0}{1-r^3} = \dfrac{(a_0)^3}{(1-r)^3}$.

On met encore de côté $a_0 = 0$ trop facile. On refuse $r = 1$.

On a alors la relation $(a_0)^2 = \dfrac{(1-r)^2}{1+r+r^2}$.

◃ 9 ▹

A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de neuf 1. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ? sachant que la notation ${}^tM$ indique la matrice M où on a échangé le rôle des lignes et des colonnes :* ${}^t\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix}$*)* ?

$B.U$ ça fait quoi ?

Facile, regardons en taille 4 sur 4 : $\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & +a' & +a'' & +a''' \\ b & +b' & +b'' & +b''' \\ c & +c' & +c'' & +c''' \\ d & +d' & +d'' & +d''' \end{pmatrix}$.

On a la somme de tous les termes de chaque ligne.

Or, sur chaque ligne, on a les entiers de 1 à 9 dans je ne sais quel ordre.

La somme vaut toujours $1+2+3+4+5+6+7+8+9$.

Le vecteur $A.U$ est un vecteur fait de neuf entiers valant tous 45.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Certes, ma grille est ici un peu spéciale, mais testez sur la grille que vous voulez...

Et c'est pareil avec : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 45 & \dots & 45 \end{pmatrix}$

Et si maintenant on colle ${}^tU.A.B.U$, on a $({}^tU.A).(B.U)$, et c'est le produit d'un vecteur ligne et vecteur colonne :

$$\begin{pmatrix} 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 & 45 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \\ 45 \end{pmatrix}$$

C'est un simple réel, égal à $45 \times 45 + 45 \times 45 + \ldots + 45 \times 45$.
Et on pourra changer de matrices comme on veut, ${}^tU.A.B.U$ vaut 9.45.45.
Maximum et minimum sont égaux.

◃ 10 ▹

♡ On sait que la suite $\left(\frac{n+3}{n+6}\right)$ *(notée u)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|u_n - 1| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

On sait que la suite $\left(\frac{\sin(e^n)}{n+6}\right)$ *(notée v)* converge vers 0. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|v_n - 0| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

/♡ On sait que la suite $\left(\frac{n^2+3.\sin(n)}{n^2-\ln(n)}\right)$ *(notée w)* converge vers 1. Prouvez le en explicitant N_ϵ pour avoir $|w_n - 1| \leqslant \varepsilon$ à partir du rang N_ϵ.

Bonus de bonus : des conseils, piqués pour certains à Pierre-Jean Desnoux.

S'il y a un contre-exemple à chercher, essaye avec $((-1)^n)$.	
Trois petits points ne font pas une preuve.	
Juste. Justifié. Efficace.	
« Forcément », « naturellement » traduisent en fait l'ignorance.	
Si on a fait tendre n vers l'infini dans une limite, il n'y a plus de n dans le résultat.	
Si l'ensemble image est patit, le noyau sera grand.	
Tu devras avoir autant d'équations de chaque côté de $\Leftrightarrow$.	
Pour majorer ou minorer une somme, pense déjà à « nombre de termes fois le plus grand/petit ».	
Quand deux sigmas s'additionnent, on peut prendre la même variable de sommation. Quand deux sigmas se multiplient, on prend deux variables de sommation différentes. La somme $\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$n'a en général rien à voir avec $\sum_{k=1}^{n} a_k . \sum_{k=1}^{n} b_k$.	
$(\cos(2.t))'$ n'a pas de sens. f peut être croissante, décroissante, périodique. $f(x)$ est juste un nombre, il ne croît pas.	
Tu ne simplifieras pas par a si tu ne sais pas si a est non nul. Tu ne soustrairas pas des inégalités entre elles.	
Une équation ou une inéquation est une question (« trouver x pour que... »). Sinon, il y a des égalités et des inégalités, c'est tout.	

Une question telle que « montrez que f est un endomorphisme de E » appelle une réponse en plusieurs points : morphisme et endo.

Si l'hypothèse une une limite ou un équivalent, vous n'obtiendrez jamais une conclusion en « pour tout n ».
Au mieux une conclusion en « pour tout n à partir d'un certain rang », avec un encadrement et non plus une égalité.

Pense à intercaler des termes : $a-b=a-\alpha+\alpha-b$ avec α bien choisi.

Le symbole $\Longrightarrow$ ne se galvaude pas.
Si vous voulez écrire « donc », eh bien écrivez « donc ».
Et au lieu de « donc », citez l'argument (on somme, on dérive, cas particulier, par passage à la limite...).

Les trois piliers de l'intégration : linéarité, croissance et Chasles.

Ne crains pas d'avancer lentement, crains seulement de t'arrêter.

Jamais de sigma « mous ».

Si je tiens la fonction, je ne tiens pas sa dérivée.
Si je tiens sa dérivée, je maîtrise la fonction.

Penser aux idées simples :
sommes télescopiques, décompositions en éléments simples, intégration par parties, formule de Leibniz, factorisation de a^n-b^n, formules de Viète, théorème d'encadrement, majoration terme à terme, comparaison série intégrale, principe des tiroirs, quantité conjuguée, inégalité triangulaire (première et seconde)

Tu ne soustrairas point des équivalents de même ordre.
Tu ne passeras pas les équivalents aux exponentielles.

Cette variable a-t-elle été présentée ?
Une lettre muette est en fait une lettre absente ($\sum_{k=0}^{n}\ldots$, $\int_a^b\ldots dx$).

Nommer les objets, c'est déjà prendre le pouvoir sur eux.

Gauss, Bézout et Euclide. Avec ça, tu tiens presque toute l'arithmétique élémentaire.
Sur les entiers, comme sur les polynômes.
Mais le lemme de Gauss ne dit pas n'importe quoi.

« Montrez qu'il existe un unique a vérifiant.. ; », ce n'est pas une question. C'est deux questions :
• existence et unicité.
« Montrez que P_n est un polynôme de degré n vérifiant $P(X+1)-P(X)=\ldots$ » ce n'est pas une question, c'est trois questions :
• polynôme, degré et formule.

Une suite qui converge vers a peut très bien ne jamais prendre la valeur a.

Ne confonds pas « borne supérieure » et « plus grand élément ».
Ne dis pas « le majorant » mais « un majorant ».

Pour « identifier », il faut presque toujours un argument de type « base » ou « somme directe » ,
sinon c'est presque toujours une bêtise.

La relation $f(x)=g(x)$ n'entraîne pas $f'(x)=g'(x)$ si elle n'a lieu que pour un x particulier.

Ne te perds pas entre les étages (f ou $f(x)$, u_n ou (u_n), pas de $(f(0))'$...).

Une formule en « pour tout n » se démontre souvent sans récurrence, et sert dans la suite pour des récurrences.

Tu ne diviseras jamais par 0.
Une suite ne peut pas être équivalente à 0.

Si tu as bien cherché un exercice...
...même si tu n'as rien trouvé...
...tu t'es bien préparé pour les concours.

Les réponses aux questions posées tu encadreras. Les arguments tu souligneras. Tes notations tu mettras en valeur.

Si tu sens que ton argument est bancal,
crois moi, le correcteur le saura encore mieux que toi...

On justifie la convergence d'une série en étudiant / dominant.. son terme général, et pas avec des $\sum$ (sauf pour la série géométrique).

$x.\ln(x)$ en 0 est la forme indéterminée classique.
Et 1^∞ est une forme indéterminée (classique $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$).

◁ 11 ▷ ♡ Que fait la suite $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{\sqrt{3}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}},\ldots)$?

$\sqrt{x}$ c'est $x^{\frac{1}{2}}$. Ensuite , $\sqrt{\sqrt{x}}$ c'est $\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $x^{\frac{1}{4}}$.

Et si on met n racines carrées : $x^{\frac{1}{2^n}}$.

On étudie donc ici $(n+1)^{\frac{1}{2^n}}$.
Passons au logarithme : $\dfrac{\ln(n+1)}{2^n}$.
Pour ce qui est de la limite, c'est vite réglé : 0 pour ce quotient. Et donc 1 pour la suite.

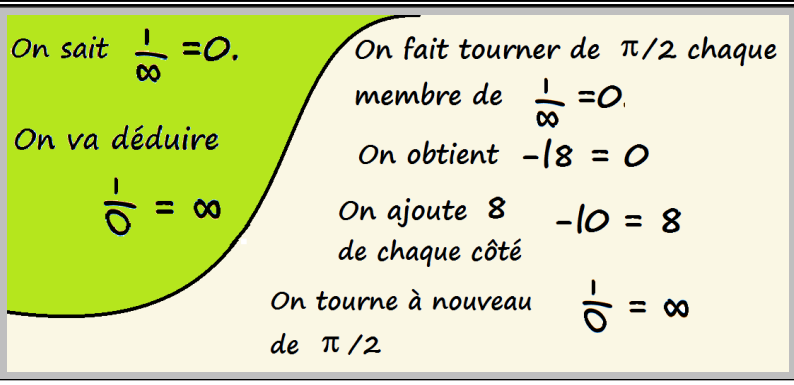
Pour ce qui est de la monotonie : $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{2^x}$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x).\ln(2).x}{x.2^x}$. On trouve le signe « à la louche ».
Pardon, on voulait $x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{2^x}$. Bon, c'est $x \longmapsto 2.\dfrac{\ln(x+1)}{2^{x+1}}$, donc on connaît déjà les variations.
De 1 à $\sqrt{2}$ on monte, mais après on redescend...

En fait, simplement, on constate :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+2)^{\frac{1}{2^{n+1}}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}} = \left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)^{\frac{1}{2^{n+1}}}$$

La position de ce réel par rapport à 1 dépend juste de la position de $\dfrac{n+2}{n^2+2.n+1}$ par rapport à 1.
On retrouve la décroissance mentionnée à partir du rang 1.

◁ 12 ▷



◁ 13 ▷

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $n^{1/\sqrt{n}}$.

Déterminez, si elle existe, la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\sqrt{n}^{1/n}$.

Trouvez le plus de coefficients du développement asymptotique :
$\sqrt{n^4+n^3}-n^2 = a.n+b+\dfrac{c}{n}+\dfrac{d}{n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$.

On va utiliser largement $a^b = (e^{\ln(a)})^b = e^{b.\ln(a)}$ et ramener à caque fois à l'étude de $b.\ln(a)$ (et on passera ensuite à l'exponentielle).
On rappelle aussi $\sqrt[k]{x} = x^{1/k}$ et donc $\ln(\sqrt[k]{x}) = \dfrac{\ln(x)}{k}$.

On calcule le logarithme de $\sqrt[\ln(n)]{\dfrac{\ln(n)}{n}}$

$$\frac{\ln\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)}{\ln(n)} = \frac{\ln(\ln(n))}{\ln(n)} - \frac{\ln(n)}{\ln(n)}$$

Le premier terme est de la forme $\dfrac{\ln(t)}{t}$ avec $t=\ln(n)$ qui tend vers $+\infty$. Il tend donc vers 0. L'autre terme vaut 1.
Globalement, le logarithme tend vers -1 et la limite cherchée vaut e^{-1}.

Le nombre $n^{1/\sqrt{n}}$a pour logarithme $\dfrac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$. Les croissances comparées lui donnent une limite nulle, et la limite de

$n^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ est donc 1.

En revanche $\sqrt{n}^{1/n}$ a pour logarithme $\frac{1}{n.}\ln(\sqrt{n})$ ce qui fait $\frac{\ln(n)}{2.n}$. Toujours les croissances comparées : la limite est nulle.
$(\sqrt{n})^{1/n}$ tend vers 1.

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n^4+n^3-(n^2)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2}=\frac{n^3}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\sim\frac{n^3}{2.n^2}=\frac{n}{2}$$

Première étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n}{2}+o(n)_{n\to+\infty}$.

On soustrait alors ce terme pour voir ce qu'il reste.

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2-\frac{n}{2}=\frac{n^4+n^3-\left(n^2+\frac{n}{2}\right)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2+\frac{n}{2}}=\frac{-n^2/4}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n^2+\frac{n}{2}}\sim\frac{-n^2/4}{2.n^2}=-\frac{1}{8}$$

Deuxième étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n}{2}-\frac{1}{8}+o(1)_{n\to+\infty}$.

Et pourquoi ne pas recommencer ?

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2-\frac{n}{2}+\frac{1}{8}=\frac{n^4+n^3-\left(n^2+\frac{n}{2}-\frac{1}{8}\right)^2}{\sqrt{n^4+n^3}+n^2+\frac{n}{2}}=\frac{\frac{n}{8}-\frac{1}{64}}{n^2.\sqrt{1+\frac{1}{n}}+n}\sim\frac{n/8}{2.n^2}=\frac{1}{16.n}$$

Troisième étape donc : $\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16.n}+o\left(\frac{1}{n}\right)_{n\to+\infty}$.

Et en poursuivant de la même façon :

$$\sqrt{n^4+n^3}-n^2=\frac{n}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16.n}-\frac{5}{128.n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\to+\infty}$$

Il y a d'autres façons d'obtenir ce développement.

$$\sqrt{n^4+n^3}=n^2.\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=n^2.\left(1+\frac{1}{2}.\frac{1}{n}+\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}.\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right).\left(\frac{1}{2}-2\right)}{6}.\left(\frac{1}{n}\right)^3+\frac{\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}-1\right).\left(\frac{1}{2}-2\right).\left(\frac{1}{2}-3\right).}{24}.\left(\frac{1}{n}\right)$$

◁14▷ ♡ Calculez cette intégrale « exponentielle » $\int_0^1 2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}.dx$.

Il suffit d'écrire $2^x.3^{-x}.4^x.5^{-x}=e^{x.\ln(2)}.e^{-x.\ln(3)}.e^{x.\ln(4)}.e^{-x.\ln(5)}$.
On pose alors $A=\ln(2)+\ln(4)-\ln(3)-\ln(5)$ et on intègre en $\frac{e^{A.x}}{A}$.
On trouve $\frac{7}{15.\ln(15/8)}$.

◁15▷ ♡ Déterminez la limite quand n tend vers l'infini de $\frac{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$.

On conjugue, on conjugue.

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}=\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+1}}$	$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}=\frac{2}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{1}$	$\frac{1}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}=\frac{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+1}}{2}$

On passe aux équivalents :

$\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+1}\sim_{n\to+\infty}\frac{1}{2.n}$	$\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}\sim_{n\to+\infty}\frac{2}{2.\sqrt{n}}$
$\frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\sim_{n\to+\infty}\frac{2.\sqrt{n}}{1}$	$\frac{1}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}\sim_{n\to+\infty}\frac{2.n}{2}$

On multiplie les équivalents *(notion compatible)* et il reste 1.
Étant équivalente à n, la forme indéterminée tend vers 1.

Mais par exemple $\frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$ tend vers 4.
Et $\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}.\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+1}}$ tend vers $+\infty$.

◁16▷ L'énoncé dit : « une suite u de réels strictement positifs vérifie $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} 0$, déduire que (u_n) converge vers 0 ». Un élève commence par « on note α la limite de la suite u ; on a alors par passage à la limite : $\frac{\alpha}{\alpha} = 0$, d'où $\alpha = 0$ ». Indiquez les erreurs de son raisonnement.
Démontrez quand même le résultat en commençant par $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{1}{2}$ pour n plus grand que $N_{1/2}$.

◁17▷ Où est l'erreur : pour tout k, $\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$, donc $\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout k, $\left(n^{\frac{1}{k}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: presque vrai
Pour k positif c'est vrai.
Pour k négatif, c'est faux.
Et pour k nul, ça n'a aucun sens.
Pour k complexe, je n'ose envisager.

$\left(n^{\frac{1}{n}}\right)$ diverge vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$: faux.

Prenons le logarithme de cette quantité : $\frac{\ln(n)}{n}$.
Par croissances comparées, ceci tend vers 0.
$n^{\frac{1}{n}}$ converge vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

C'est dans le « donc » qu'est l'erreur.
La variable k a un rôle précis, quantifié avant celui de n.
On ne peut pas mélanger les deux.

$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0+\infty$ ce qui est vrai	
$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon A > 0,\ \exists G_{A,k},\ \forall n,\ (n \geqslant G_{A,k} \Rightarrow n^{\frac{1}{k}} \geqslant A)$	
$n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$ ce qui est faux	
$\forall A > 0,\ \exists H_A,\ \forall n,\ (n \geqslant H_A \Rightarrow n^{\frac{1}{n}} \geqslant A)$ qu'est devenu k ? Qui est ce H_A ?	

On notera que dans $n^{\frac{1}{k}} \longrightarrow_{n\to+\infty} +\infty$, on peut expliciter $G_{A,k}$ qui dépend bel et bien de Aet k : $G_{A,k} = A^k$.
Il dépend de k. Quand ensuite k se met à être égal à n, que peut être la condition $n \geqslant A^n$?

◁18▷ Soit p dans $\mathbb{N} - \{0,1\}$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{n+p}{n}^{-1}$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2).u_{n+2} = (n+2).u_{n+1}$.
Montrer par récurrence $S_n = \frac{1}{p-1}.\Big(1-(n+p+1)u_{n+1}\Big)$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = (n+p).u_n$. Montrer que (v_n) converge vers 0. Déduisez $\lim_{n\to+\infty} S_n$ en fonction de p.

◁19▷ Un élève dont je tairai le nom s'est trompé sur la moyenne de Cesàro : $\frac{a_0+\ldots+a_n}{n}$ au lieu de $\frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ (nombre de termes).
Perd il la propriété « convergence » ?
Perd il la propriété « croissance » ?

La croissance peut se perdre.

On donne un contre-exemple :

n	0	1	2	3
a_n	2	2	2	
$\frac{a_0+\ldots+a_n}{n}$	?	4	3	

Et je laisse les plus pervers trouver des trucs pires...

Pour ce qui est de la converge, on a prouvé dans le cours :
• si (a_n) converge vers α, alors $\left(\frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}\right)$ converge vers α.
En multipliant par $\left(\frac{n+1}{n}\right)$, on a aisément « $\left(\frac{n+1}{n}.\frac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}\right)$ converge aussi vers α ».

◁ 20 ▷ *On note $(E,+,.,\times)$ l'algèbre des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$. Deux suites a et b sont dites voisines si la moyenne de Cesàro de leur différence tend vers 0 à l'infini.* Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence.
Indiquez pour les suites suivantes si elles sont équivalentes et/ou voisines de la suite (n^2) :

(n^2+n)	$(n^2+n.\ln(n))$	$\left(\frac{n^3+\ln(n+1)}{n+1}\right)$	$(n.\ln(n+1))$	$(2.n^2+n)$

Montrez que deux suites stationnaires *(c'est à dire "constantes à partir d'un certain rang")* sont voisines si et seulement si elles ont la même limite.
Un élève prétend qu'une suite a est voisine de la suite constante égale à 1 si et seulement si elle converge vers 1. A-t-il raison ?

Deux parties A et B de $\mathbb{N}$ sont dites "de même masse" si leurs fonctions indicatrices sont deux suites voisines. Montrez qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur $P(\mathbb{N})$.
Montrez que les ensembles finis ont tous la même masse.
Montrez que l'ensemble $\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ a la même masse que les ensembles finis.
Montrez que si A et B sont des parties de $\mathbb{N}$ de même masse, alors A^c et B^c ont la même masse.
Montrez que l'ensemble des nombres pairs et l'ensemble des nombres impairs ont la même masse, mais n'ont pas la même masse que $\mathbb{N}$.
Montrez que l'ensemble A des nombres qui sont multiples de 2 ou de 3 a la même masse que l'ensemble B des nombres qui ne sont pas multiples de 3.
Écrivez une fonction Python qui prend en argument un entier n et retourne deux booléens $(1_A(n),\ 1_B(n))$ pour les deux parties A et B définies ci dessus.

◁ 21 ▷ ♡ On pose : $u_n = (-1)^n.(2.n+1)$ pour tout n. Calculez $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k$ pour n de 0 à 7. Montrez que la suite u diverge, de même que sa moyenne de Cesàro. Montrez que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro converge.
Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que sa moyenne de Cesàro ne converge.
♣ Donnez une suite dont la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro de la moyenne de Cesàro converge vers 1 sans que la moyenne de Cesàro de sa moyenne de Cesàro ne converge.
Rappel : la moyenne de Cesàro de la suite (a_n) est la suite (c_n) définie par $c_{n+1} = \frac{a_0+a_1+\ldots+a_n}{n+1}$.

◁ 22 ▷ ♡ Pour tout n, on définit $a_n = \binom{3.n}{n}$. Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, puis de $\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$ quand n tend vers l'infini.
En appliquant le théorème de 16 arômes, donnez la limite de $\sqrt[n]{\binom{3.n}{n}}$ quand n tend vers l'infini.

La suite (a_n) est bien définie, jamais nulle : $a_n = \frac{(3.n)!}{(2.n)!.n!}$.
On effectue un quotient : $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3.n+3)!}{(3.n)!}.\frac{(2.n)!}{(2.n+2)!}.\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{(3.n+1).(3.n+2).(3.n+3)}{1}.\frac{1}{(2.n+1).(2.n+2)}.\frac{1}{n+1}$.
L'ensemble a une limite : $\frac{27}{4}$.

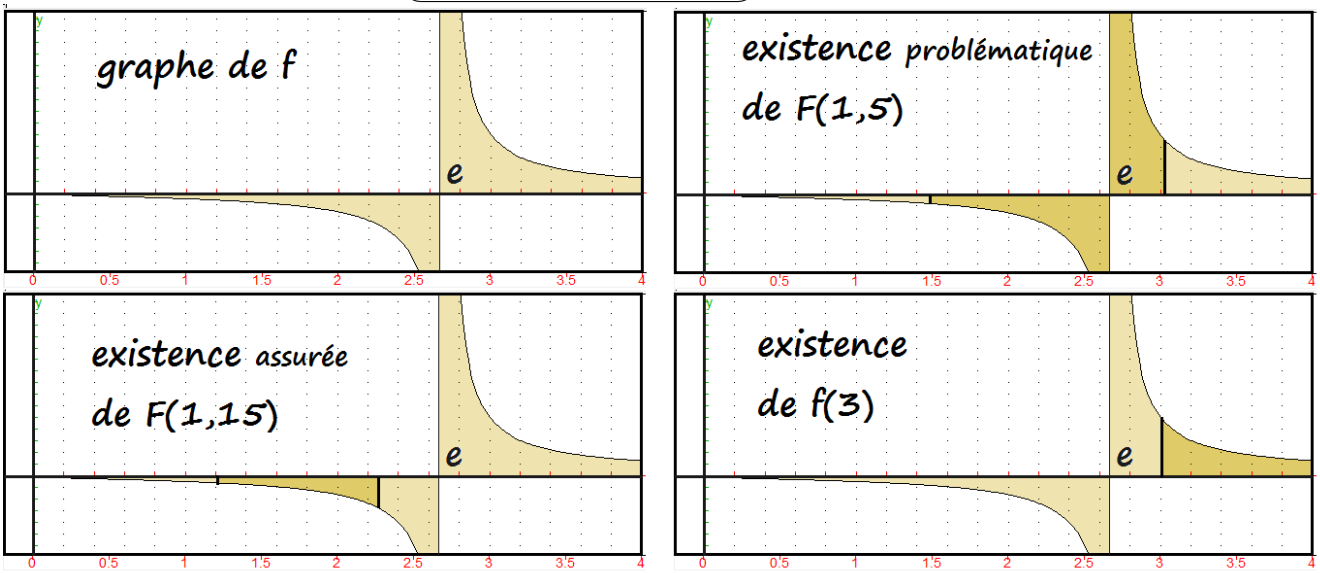
Par passage au logarithme, $\ln(a_{n+1})-\ln(a_n)$ converge vers $\ln(27/4)$.

Par théorème de Cesàro, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\ln(a_{k+1})-\ln(a_k)$ converge vers $\ln(9/4)$ quand n tend vers l'infini.
Par télescopage, $\frac{\ln(a_n)-\ln(a_0)}{n}$ converge vers $\ln(27/4)$.
Par retour à l'exponentielle (continue), $\sqrt[n]{a_n}$converge vers $\frac{27}{4}$.

◁23▷ Donnez le domaine de définition de $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$ puis de $x \longmapsto \displaystyle\int_x^{2.x} \dfrac{dt}{\ln(t)-1}$ *(et ce ne devra pas du tout être les mêmes domaines...)*

On va poser $f = x \longmapsto \dfrac{1}{\ln(x)-1}$.
Il faut que $\ln(x)$ existe : $]0,\ +\infty[$.
Il faut ensuite que ce logarithme ne vaille pas 1 : $]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$ (largement préférable à $]0,\ +\infty[-\{e\}$ dans lequel on ne voit plus les intervalles [4].
La condition est même suffisante : $\boxed{D_f =]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[}$

Maintenant, la question est : pour quels x peut on calculer $\displaystyle\int_x^{2.x} \dfrac{dt}{\ln(t)-1}$, ce qui revient à demander que $\dfrac{1}{\ln(t)-1}$ existe pour tous les t de $[x,\ 2.x]$.
Bien évidemment, ceci nécessite que x et $2.x$ soient dans D_f précédemment trouvé.
Mais aussi tous les t entre x et $2.x$.
Bref, il faut que x soit strictement positif, déjà. mais ensuite, il faut que e ne soit pas entre x et $2.x$.
Ceci revient à exclure tout $\left[\dfrac{e}{2},\ e\right]$. $\boxed{D_F = \left]0,\ \dfrac{e}{2}\right[\cup \left]e,\ +\infty\right[}$



Et si on s'entraînait à TeX ? $D_f =]0,\ e[\cup]e,\ +\infty[$ c'est
$D_f = \rbrack0, e\lbrack \cup \rbrack e, +\infty \lbrack$.
Les dollars **$** c'est pour passer en mode mathématique (obtenu par **Ctrl M** sous certains environnements).
Les crochets, c'est des **\lbrack** et **\rbrack** (**l**eft et **r**ight). Et l'infini, c'est **\infty**. Et **\cup** c'est union. Devinez ce que sera **\cap**. Il y a même **\bigcup**, plus esthétique.
Et l'underscore **_f**, c'est pour placer **f** en indice.

◁24▷ ♡ Montrez l'équivalence entre $a_n \sim b_n$ et $b_n = a_n + o(a_n)$.

C'est du cours.
On suppose que nos suites ne s'annulent jamais (ou en tout cas sont non nulles à partir d'un certain rang), afin de pouvoir donner les définitions par quotients.
$a_n \sim b_n$ c'est $\dfrac{b_n}{a_n}$ tend vers 1.
$b_n = a_n + o(a_n)$ c'est $b_n - a_n = o(a_n)$ c'est à dire $\dfrac{b_n - a_n}{a_n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Il y a bien équivalence entre $\dfrac{b_n}{a_n}$ tend vers 1 et $\dfrac{b_n}{a_n} - 1$ tend vers 0.

---

4. et bien plus encore à $]0,\ +\infty[-e$ qui n'a pas de sens.... enfin, si, ce serait $]0-e,\ +\infty-e[$ et même $]-e,\ +\infty[$

◁ 25 ▷ ♡ Pour tout n, on pose $a_n = n^{\ln(n)}$. Donnez sa limite en $+\infty$.
La série de terme général $1/a_n$ converge-t-elle ?
Donnez la limite de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ quand n tend vers l'infini *(indication :* $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$*)*.

Classique : pour étudier a^bavec a et b qui bougent, il faut revenir à $a^b = e^{b.\ln(a)}$ (indiqué dans la feuille de rentrée dès septembre, et en petit test de vacances d'été avec $3^{\ln(2)}$ et $2^{\ln(3)}$).

Ici : $a_n = e^{(\ln(n))^2}$. Il tend vers l'infini, et $\frac{1}{a_n}$existe et tend vers 0.

Dès que n a dépassé 10 (en fait dès que n a dépassé e^2), on a $0 \leqslant \frac{1}{n^{\ln(n)}} \leqslant \frac{1}{n^2}$. La série de terme général $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 10}$ converge (Riemann).

Par théorème de majoration des séries termes positifs, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n\geqslant 10}$.

Par addition, la série de terme général $\left(\frac{1}{n^{\ln(n)}}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.

Rapidité de Spé : $\frac{1}{n^{\ln(n}} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on passe à la suite de l'exercice.

Le quotient $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ donne bien $\exp\left((\ln(n+1))^2 - (\ln(n))^2\right)$.
On factorise $a^2 - b^2$ en $a(-b).(a+b)$ et on profite de la propriété de morphisme du logarithme :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \exp\left(\ln\left(n^2+n\right).\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)$$

Et qu'a-t-on gagné ? Une forme indéterminée : $\ln(n^2+n)$ tend vers l'infini (comme $\ln(n+1)+\ln(n)$), donc équivalent à $2.\ln(n)$).
$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0 (à la vitesse de $\frac{1}{n}$ par l'équivalent $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$).
On utilise donc des équivalents : $\ln(n^2+n).\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim_{n\to+\infty} \frac{2.\ln(n)}{n}$.
Le terme de droite tend vers 0 (croissances comparées) et entraîne celui de gauche.
Par continuité de l'exponentielle, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$converge vers 1 quand n tend vers l'infini.

Étape 0	la suite	$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape1	la suite	$\left(1, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape2	la suite	$\left(1, 1, 1, \frac{1}{8} \frac{1}{16} \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape3	la suite	$\left(1, 1, 1, 1 \frac{1}{16} \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Étape4	la suite	$\left(1, 1, 1, 1 1 \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Écrivez la formule pour le terme général à l'étape p.			
Étape$p$	la suite	$\left(1, 1, 1, 1 1 \frac{1}{32} \dots \frac{1}{2^n}, \dots\right)$	converge vers 0
Faites tendre p vers $+\infty$.			
	la suite	$\left(1, 1, 1, 1 1 1 \dots 1, \dots\right)$	converge vers 0

Euh, il y a une erreur, là !

◁ 26 ▷ Oui, évidemment. Il y a des propriétés qui sont valables « pour tout n » , mais ne se propagent pas « par passage à la limite ».
Comme la propriété « n est un entier fini ».

Sinon, à la p^{ieme} étape, la suite a pour terme général $a_n = 1$ si $n \leqslant p$ et 2^{-n} sinon.
Il doit y avoir moyen de compacter en une seule formule avec un $2^{-Max(n,p)}$. Mais quelle utilité ?

◁ 27 ▷ Faux : si u_n tend vers a quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ tend vers a^n quand n tend vers $+\infty$.
Vrai ou faux : si u_n tend vers $a > 1$ quand n tend vers l'infini, alors $u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}$ est équivalent à a^n quand n tend vers $+\infty$.

Première partie de la question : on tend vers une limite, et pas vers une autre suite qui bouge !

Deuxième partie de la question : on doit étudier le quotient $\frac{u_{n+1}.u_{n+2}\dots u_{2n}}{a^n}$.
On regarde son logarithme : $\ln(u_{n+1}) + \ln(u_{n+2}) + \dots \ln(u_{2.n}) - n.\ln(a)$.
On y lit une moyenne de Cesàro ?

$$n.\frac{(\ln(u_{n+1}) - \ln(a)) + (\ln(u_{n+2}) - \ln(a)) + \dots + (\ln(u_{n+n}) - \ln(a))}{n}$$

Le quotient tend bien vers 0. mais la forme redevient indéterminée.
Il n'est pas dit que ce produit va tendre vers 0.

Et on peut aller chercher quelquechose de simple : prenons (u_n) qui tend vers 1.

◁ 28 ▷

C'est drôle, mais il y a un multiple de 13 dont la somme des chiffres vaut 13 : $13 \times 19 = 247$ et $2 + 4 + 7 = 13$. Et c'est pareil pour 19 : $19 \times 46 = 874$ et $8 + 7 + 4 = 19$. Trouvez une solution pour 10. Une solution pour 20. Trouvez une solution pour 25. Et pour 22. Soit par un programme Python. Soit avec votre cervelle.

On cherche un multiple de 10 dont la somme des chiffres vaut 10 : par exemple $\boxed{190}$

Et un multiple de 20 dont la somme des chiffres vaut 20 ? Son dernier chiffre est 0 et son avant dernier est pair : $\boxed{3980}$ par exemple.

On cherche un multiple de 25 dont la somme des chiffres vaut 25.
Or, les multiples de 25 suivent un schéma assez simple dans leur écriture décimale.

	$n = 4.p$	$n = 4.p + 1$	$n = 4.p + 2$	$n = 4.p + 3$
$n \times 25$	$100.p$	$100.p + 25$	$100.p + 50$	$100.p + 75$
écriture	$\overline{p00}$	$\overline{p25}$	$\overline{p50}$	$\overline{p75}$

Il suffit ensuite de trouver un entier p dont la somme des chiffres vaut 25 et c'est gagné pour la première colonne.
Mais on peut aussi demander « somme des chiffres de p égale à 13 » et prendre $4.p + 3$.
Par exemple $9 + 9 + 7 = 25$ donc avec $(4.997) \times 25$ on a $\boxed{99700}$ dont la somme des chiffres est bonne.
Mais aussi $4 + 9 = 13$ puis $4 + 9 + 7 + 5 = 25$: $(4.49 + 3) \times 25 = 4975$.
On a aussi $\boxed{9925}$

Pour 22, on a $109 \times 22 = 2398$ et $2 + 3 + 9 + 8 = 22$.
Comment les obtenir avec `Python` :

```
def SommeChiffres(N) :
....s = 0
....while n>0 :
........s += n%10
........n = n/10
....return s
```

```
def Test(n) :
....for k in range(10000) :
........if
SommeChiffres(n*k) == n:
............return (k,n*k)
....return('Echec')
```

Et François vient de m'en proposer un : $\boxed{112288}$
Pair, multiple de 11 et avec une somme des chiffres convenable.
.
.
.

Et maintenant, une proposition de Dylan (MPSI2 + MP* + ENS) :
Pour trouver un multiple d'un entier n dont la somme des chiffres en base 10 est n . On fixe un tel n . On peut l'écrire comme produit d'un entier premier avec 10, disons P et d'un entier avec que des facteurs 2 et 5, disons Q .
On a : $\exists k, 10^k = 1(\quad mod \quad P)$ car P est premier avec n (on prend $k = \varphi(n)$ par le théorème de Lagrange).
On construit alors $M = \sum_{i=1}^{n} 10^{k.\varphi(n)}$ qui est une somme de la forme $100 + 10000 + 1000000\dots$. avec n termes, le nombre final sera de la forme $100100100100100100100100\dots\dots$ avec n chiffres 1 dedans, donc la somme de ses chiffres vaut bien n . Et modulo p : $M = \sum_{i=1}^{n} \left(10^{\varphi(n)}\right)^k = \sum_{i=1}^{n} 1^k = n = PQ = 0(\quad mod \quad p)$
On veut le rendre multiple de n , il suffit de le multiplier par un multiple de Q , et on va en prendre un bien choisi : on a $Q = 2^x.5^y$ pour certains entiers naturels x et y, si l'on prend le nombre $L = 10^{\max(x,y)}$, c'est un multiple de Q de la forme $10000\dots$.. On prend alors le nombre $L.M$ comme résultat final (c'est M décalé avec plein de zéros en plus à droite), il est divisible par n et sa somme des chiffres vaut n !

◁ 29 ▷

Montrez que si la série à termes positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (avec une limite non nulle), alors la série à termes positifs $\frac{a_0 + \dots + a_n}{n+1}$ ne converge pas.

Déjà, la condition nécessaire.
Comme la série de terme général a_n, converge, ce terme tend vers 0.
Par théorème de Cesàro, le terme général $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ converge aussi vers 0.
Déjà, pas de divergence grossière.

La série de sommes est à termes positifs. On en fait une famille sommable (ou non).
Si l'un des termes existe, ce qui suit est légitime. Si une des sommes est infinie, ce qui suit prouve que la série diverge.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{n+1}\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{a_k}{n+1}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{a_k}{n+1}\Big)$$

Et dans cette somme de termes positifs, il y a déjà $a_0.\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$.
pas de change. La série harmonique.
Le regroupement de la première colonne donne déjà l'infini, la famille n'est pas sommable. La série à termes positifs diverge.

Ah mais si a_0 est nul ?
Alors au moins l'un des a_k est non nul. Disons a_{k_0}. Et il est en facteur de $\sum_{n=k_0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ qui vaut quand même $+\infty$. Bref, dans tous les cas, c'est foutu.

a_0					
$a_0/2$	$a_1/2$				
$a_0/3$	$a_1/3$	$a_2/3$			
$a_0/4$	$a_1/4$	$a_2/4$	$a_3/4$		
$a_0/5$	$a_1/5$	$a_2/5$	$a_3/5$	$a_4/5$	
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
∞	∞	∞	∞	∞	

En revanche, on pourra voir dans le cadre d'un autre exercice que la moyenne $\dfrac{\sum_{k=0}^{n}k.a_k}{\sum_{k=0}^{n}k}$ *va conduire à une nouvelle série convergente.*

◁ 30 ▷ On note L_2 l'espace des suites réelles de carré sommable (les (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$ existe).
Montrez que pour (a_n) et (b_n) dans L_2 alors la série de terme général $a_n.b_n$ est absolument convergente (pensez à une majoration avec des $(a_n)^2$ et des $(b_n)^2$).
Déduisez que L_2 est stable par addition et multiplication par un réel (oh, oui, un espace vectoriel).

Le petit indice 2 c'est pour dire carrés. Et vous croiserez L_1 : c'est $\sum_{n=0}^{+\infty|a_n|}$ qui doit exister. Je vous laisse méditer sur « lequel implique lequel ».

On suppose donc que $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ existent (séries à termes positifs / familles sommables).

Profitons en pour dire au passage que $\sum_{n=0}^{+\infty}\Big((a_n)^2+(b_n)^2\Big)$ existe aussi.

On regarde la série de terme général $|a_n.b_n|$ (absolue convergence ?).
Or, on sait : $|a_n.b_n|\leqslant\dfrac{(a_n)^2+(b_n)^2}{2}$. C'est une comparaison des moyennes, ou c'est issu de $(|a|-|b|)^2\geqslant 0$.
Par majoration entre séries numériques à termes positifs, la série de terme général $|a_n.b_n|$ converge.

On aussi $\Big|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.b_n\Big|\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n.b_n|\leqslant\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2+\frac{1}{2}.\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ *mais je ne vois pas trop à quoi cela peut servir.*

Pour la stabilité additive, il faut encore vérifier si la série de terme général $(a_n+b_n)^2$ converge.

Mais elle est maintenant la somme de trois séries convergentes : $\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n)^2$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(b_n)^2$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.b_n$.

Pour ce qui est de $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda.a_n)^2$, c'est direct.

Il s'ensuit que $(L_2,+,.)$ est bien un espace vectoriel.
dans la suite du cours, nous verrons que on peut définir ensuite la norme d'une suite $\sqrt{(a_0)^2+(a_1)^2+\ldots+(a_n)^2+\ldots}$ quand la suite est dans L_2.
On pourra définir aussi le produit scalaire de deux suites, puis leur angle.
Bref, on fera de la géométrie sur les suites.

◁ 31 ▷ Montrez l'existence de chaque $\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ (noté a_n) et montrez que la famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculez sa somme.

Déjà, chaque terme est une série.

C'est même le reste de la série convergente $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ (qui vaut e).

En fait, une fois qu'on a dit $e=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ il suffit de dire

$$\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}$$

(réel moins somme finie).

Mais ensuite, il faut prouver la convergence de la série des séries.
Mais comme tous les termes sont positifs, on peut la regarder comme une famille éventuellement sommable.
Et lui appliquer le théorème de Fubini, sous réserve d'existence d'une des trois sommes.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k!}\Big)=\sum_{\substack{(k,n)\in\mathbb{N}^2\\ n\leqslant k}}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}\Big)$$

Or, celle de droite est la plus intéressante, car n est devenu un compteur :

$$\Big(\sum_{n=0}^{k}\frac{1}{k!}\Big)=(k+1).\frac{1}{k!}$$

On s'interroge maintenant sur l'existence(et la valeur tant qu'on y est) de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k+1}{k!}$.

On sépare en deux sommes convergentes : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$.

On décale les indices dans la première (en enlevant le terme $k=0$) et il reste $e+e$.

Les trois sommes existent et les trois donnent la même valeur : $2.e$.

◁ 32 ▷ d_n est le nombre de diviseurs positifs de n. Montrez que la série de terme général $\frac{d_n}{2^n}$ converge.
Montrez que la série de terme général $\frac{1}{2^n-1}$ ($n>0$ évidemment) converge.
Comparez les deux sommes obtenues.

La série est à termes positifs. Il suffit de dominer par une série de référence.
d_n ne peut pas dépasser n (un entier ne peut pas avoir tous les entiers avant lui comme diviseurs !).
Or, la série de terme général $\frac{n}{2^n}$ converge.
On peut en faire un $O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$ par réflexe.

Ou on peut même joliment calculer

$$\sum_{n=à}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=0}^{n-1}1\Big)=\sum_{0\leqslant k<n<+\infty}\frac{1}{2^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n=k+1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}\Big)$$

$$\sum_{n=à}^{+\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{1-\frac{1}{2}}\Big)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k}=2$$

Ensuite, le terme général $\frac{1}{2^n-1}$ est positif aussi et est équivalent au terme général positif d'une série de référence : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$.
On a la convergence, mais pas la somme.

Ensuite, si on nous demande de les comparer, c'est qu'il doit se passer quelquechose. Mais quoi ? Une égalité ?

```
S = 0
puis = 1
for n in range(200) :
....puis *= 2 #calcul progressif de 2**n sans utiliser **
....S += 1/(S-1)
```

`S` vaut `1.6066951524152913`

```
def nbdiv(n) :
....c = 0
....for k in range(1, n+1) :
........if n%k == 0 :
............c += 1
....return c
```

```
S = 0
p = 1
for n in range(200) :
....S += nbdiv(n)/p
```

`S` vaut cette fois `1.6066951524152917`

Mais comment prouver l'égalité ? On ne l'a pas terme à terme mais surement en passant par une famille sommable à deux indices.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{d_n}{2^n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.\Big(\sum_{k=1}^{n}1_{k|n}\Big)$$

$1_{k|n}$ est un indicateur de « k divise n » (oui, on s'en serait douté) et la somme $\sum_{k=1}^{n}1_{k|n}$ est un compteur. On peut même l'écrire $\sum_{k=1}^{+\infty}1_{k|n}$ puisque au delà de n les termes sont tous nuls. On permute alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{2^n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.1_{k|n}\Big)$$

Cette fois, dans la somme, on a des $\frac{1}{2^n}$ uniquement quand n est un multiple de k (retourné de la phrase « k divise n »).
On ne garde donc que les n de la forme $k.p$ avec p décrivant $\mathbb{N}^*$ et on somme la série géométrique (raison $\frac{1}{2^k}$convenable et premier terme $\frac{1}{2^k}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{2^n}=\sum_{k=1}^{+\infty}\Big(\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{p.k}}\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2^k}}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^k-1}$$

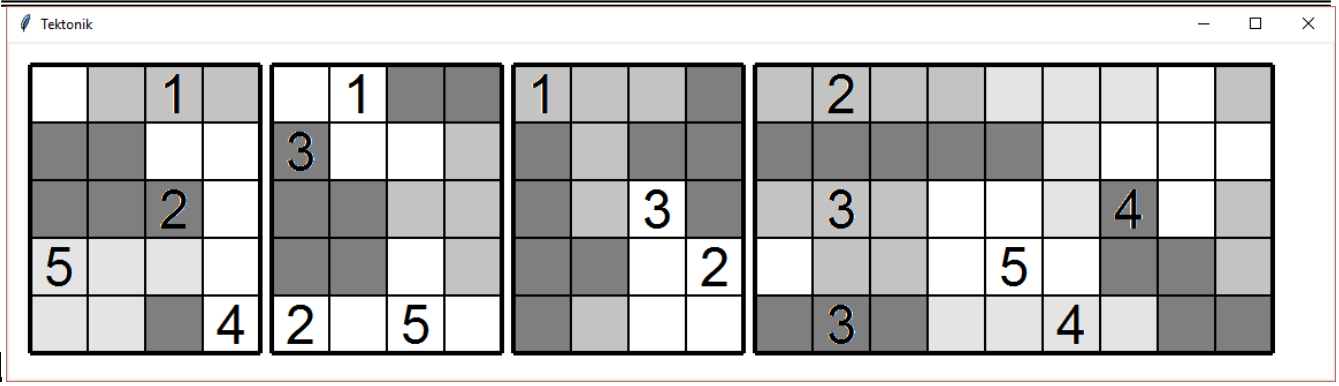
◃ 33 ▹ Prolongez par continuité en 0 l'application $x \longmapsto (x+1)^{\ln(x)}$. Montrez qu'elle est décroissante puis croissante sur $]0, +\infty[$.

On écrit $(x+1)^{\ln(x)} = e^{\ln(x).\ln(x+1)}$. Le domaine de définition est $]0, +\infty[$ pour que $\ln(x)$ existe (et dès lors, $\ln(x+1)$ aussi, tiens !).

Quand x tend vers 0, $\ln(x)$ tend vers $-\infty$ et $\ln(1+x)$ tend vers 0. la forme est indéterminée.
On n'a pas d'équivalent du logarithme en 0 (à part $\ln(x) \sim \ln(x)$).
Mais on a un équivalent de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) \sim_{x\to 0} x$.
On multiplie $\ln(1+x).\ln(x) \sim_{x\to 0} x.\ln(x)$.
Or, $x.\ln(x)$ tend vers 0 en 0.
La quantité qui lui est équivalente doit aussi tendre vers 0.
Ou alors même, je le rejoue façon Terminale « je ne connais pas les équivalents, mais je me débrouille) :
$\ln(1+x).\ln(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}.x.\ln(x)$ le premier terme tend vers 1 et le second vers 0. Le produit tend vers 0.
Par composition, $(x+1)^{\ln(x)}$ tend vers 1.

Son sens de variations est celui de $x \longmapsto \ln(x).\ln(x+1)$ (on compose ensuite par l'exponentielle, croissante)
On dérive une fois : $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x}$.
On veut le signe de cette chose. Passons par le signe de $x.\ln(x) + (x+1).\ln(x+1)$, ce sera le même.
A finir.

◃ 34 ▹



◃ 35 ▹ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$ avec des coefficients entiers sachant que son carré est $11.I_2$ et son déterminant -11. Combien de solutions ?

On nomme les coefficients $\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$ et on traduit les exigences : $\begin{pmatrix} 1+a.b & 0 \\ 0 & 1+a.b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$ et $1+a.b = 11$.

Bon... Trois fois la même chose. Et solutions

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

◃ 36 ▹ ♣ Mon corps est à sept éléments[a] version sur 2 sur 2. On pose donc $\mathbb{K} = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ avec l'addition et la multiplication modulo 7 qui en font un corps.
Montrez qu'il y a 7^4 matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\mathbb{K}$.
Montrez qu'il y a $(7^2-1).(7^2-7)$ matrices carrées $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversibles *(indication : vecteurs non nuls et non colinéaires...)*.
Montrez qu'il y a $\dfrac{(7^2-1).(7^2-7)}{6}$ matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant 1.

a. comme disait Blanche Neige

On rappelle les deux tableaux

$+$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

et

$\times$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	1	3	5
3	0	3	6	2	5	1	4
4	0	4	1	5	2	6	3
5	0	5	3	1	6	4	2
6	0	6	5	4	3	2	1

Sur le tableau de la multiplication, il conviendra d'effacer première ligne et première colonne pour retrouver un groupe (multiplicatif), puisque on a un corps.
On note la mise en valeur des 1 pour bien visualiser que chaque élément a un inverse.

Pour remplir une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, il faut choisir quatre coefficients, indépendamment les uns des autres, de $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$ en passant par $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.
On a 7 choix pour chaque coefficient, d'où $7 \times 7 \times 7 \times 7$ matrices possibles (rien à apprendre par cœur sur ce type de question, juste du bon sens).

Comment construire une matrice carrée inversible ? Pas en regardant le déterminant, c'est trop compliqué à cause des cas et sous cas (a nul ou pas, et ainsi de suite).

Mais une matrice est faite de deux colonnes.

Comment choisir la première ? Comme on veut, du moment qu'on ne prend pas le vecteur nul.
On a donc 7 choix pour a et 7 choix pour c mais il faut éliminer le choix $a = c = 0$.
En fait, il y a 7^2 vecteurs, dont un seul est le vecteur nul.

Reste à choisir le deuxième vecteur colonne. Par exemple, partant de $\begin{pmatrix} 2 & ? \\ 3 & ? \end{pmatrix}$, comment compléter ?
On met ce qu'on veut, mais pas le vecteur nul.
Mais il faut éviter aussi le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ puisque $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. [5]
Mais il faut aussi éviter $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ puisque là encore les deux colonnes sont proportionnelles.
Et aussi $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ me direz vous.
Sauf que dans $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$ il y a un 9 qui nous fait sortir de l'ensemble.
Certes, mais c'est juste $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ puisque on travaille modulo 7. Et on a bien $2.2 - 3.6 = 0$.
En fait, il faut éviter tous les $\begin{pmatrix} 2 & 2.k \\ 3 & 3.k \end{pmatrix}$ (et uniquement eux) avec k pouvant valoir 0,1, 2, 3, 4, 5 et 6 [6].
Aux 7^2 vecteurs initiaux, il faut en enlever 7.

On a donc finalement

(7^2-1)	$\times$	(7^2-7)
premier vecteur		deuxième vecteur

matrices inversibles.

Chaque fois qu'on a une matrice inversible $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de déterminant non nul, on en a six nouvelles, en étudiant $\begin{pmatrix} a & k.b \\ c & k.d \end{pmatrix}$ avec k valant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 (cette fois, le déterminant est $k.(a.d - b.c)$).
On a 2016 matrices inversibles qui se répartissent équitablement entre toutes les valeurs de déterminants possibles

5. vous pouvez le voir par « déterminant nul » car $2 \times 5 - 5 \times 2 = 0$, mais je vous recommande de le voir par « parallélogramme plat car vecteurs colinéaires », vous commencerez alors à faire de la géométrie avec l'algèbre... donc des maths et pas juste du calcul
6. avec $k = 0$, on a bien les cas « seconde colonne nulle »

det = 1	det = 2	det = 3	det = 4	det = 5	det = 6	det = 0
336	336	336	336	336	336	385
matrices inversibles						non inversibles

La dernière colonne a été obtenue par soustraction.

◁37▷ ♡ Trouvez le réel a sachant $\left\{\begin{array}{rcl} 2^a\times 3^b\times 5^c &=& 235\\ 3^a\times 5^b\times 2^c &=& 352\\ 5^a\times 2^b\times 3^c &=& 523\end{array}\right|$

Le système $\left\{\begin{array}{rcl} 2^a\times 3^b\times 5^c &=& 235\\ 3^a\times 5^b\times 2^c &=& 352\\ 5^a\times 2^b\times 3^c &=& 523\end{array}\right|$ peut avoir l'air étrange. Mais si on pense à passer au logarithme, il devient très simple *(et le passage au logarithme est une équivalence)* :

$\left\{\begin{array}{rcl} \ln(2).a+\ln(3).b+\ln(5).c &=& \ln(235)\\ \ln(3).a+\ln(5).b+\ln(2).c &=& \ln(352)\\ \ln(5).a+\ln(2).b+\ln(3).c &=& \ln(523)\end{array}\right|$ et même $\begin{pmatrix}\ln(2)&\ln(3)&\ln(5)\\ \ln(3)&\ln(5)&\ln(2)\\ \ln(5)&\ln(2)&\ln(3)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\ln(235)\\ \ln(352)\\ \ln(523)\end{pmatrix}$.

La matrice est inversible. On déduit la valeur de a *(unique)* : $a=\dfrac{\begin{vmatrix}\ln(235)&\ln(3)&\ln(5)\\ \ln(352)&\ln(5)&\ln(2)\\ \ln(523)&\ln(2)&\ln(3)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\ln(2)&\ln(3)&\ln(5)\\ \ln(3)&\ln(5)&\ln(2)\\ \ln(5)&\ln(2)&\ln(3)\end{vmatrix}}$.

L'application numérique est une horreur :

$$a=\frac{-\ln(5)^2.\ln(532)-\ln(2).\ln(3).\ln(235)-\ln(2).\ln(3).\ln(352)+\ln(2).\ln(3).\ln(532)+\ln(2).\ln(5).\ln(235)+\ln(3).\ln(5).\ln(352)}{-\ln(5)^3-\ln(2)^2.\ln(3)+\ln(2)^2.\ln(5)+\ln(3)^2.\ln(5)-\ln(2).\ln(3)^2+\ln(2).\ln(3).\ln(5)}$$

Et aucune formule intelligente ne simplifie $\ln(a).\ln(b)$ (hormis $\ln(a^{\ln(b)})$ mais je n'en vois pas l'intérêt.

C'était juste une question sur les systèmes et les formules de Cramer une fois qu'on passait au logarithme.
Le pire est de répondre qu'il n'y a pas de solution, en croyant qu'il faut aller chercher des solutions seulement dans $\mathbb{N}^3$, en factorisant $235=5.47$ par exemple.

◁38▷ Écrivez $x\longmapsto\cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x\longmapsto\cos(x+b)$ et $x\longmapsto\cos(x+c)$ (b et c sont deux réels donnés, dont la différence n'est pas multiple de π).
Pouvez vous écrire $x\longmapsto\cos(x+a)$ comme combinaison linéaire de $x\longmapsto\cos(x+b)$ et $x\longmapsto\cos(x+b+\pi)$.

$x\longmapsto$					
	$\cos(a)$	$.\cos(x)$	$-\sin(a)$	$.\sin(x)$	*la fonction*
	$\alpha.\cos(b)$	$.\cos(x)$	$-\alpha.\sin(a)$	$.\sin(x)$	*α fois l'une*
	$+\beta.\cos(c)$	$.\cos(x)$	$-\beta.\sin(c)$	$.\sin(x)$	*β fois l'autre*

Il suffit d'avoir $\begin{array}{rcrcl}\alpha.\cos(b)&+&\beta.\cos(c)&=&\cos(a)\\ \alpha.\sin(b)&+&\beta.\sin(c)&=&\sin(a)\end{array}$
Les données sont a, b et c. Les inconnues α et β.

C'est un système qui se résout, car son déterminant est non nul : $\begin{vmatrix}\cos(b)&\cos(c)\\ \sin(b)&\sin(c)\end{vmatrix}=\sin(c-b)$.

On peut trouver α et β. Je vous laisse le faire...

◁39▷ ♡ Deux matrices carrées A et B de même format sont dites semblables si il existe une matrice inversible P vérifiant $A.P=P.B$.
Montrez que $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$ sont semblables en trouvant une matrice P.
Montrez que $\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$ ont même trace et même déterminant mais ne sont pas semblables.
Ajustez pour que $\begin{pmatrix}1&1\\1&\clubsuit\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4&\spadesuit\\1&2\end{pmatrix}$ soient semblables.

La condition $Tr(A)=Tr(B)$ et $\det(A)=\det(B)$ n'est que nécessaire.
Si on a$Tr(A)\neq Tr(B)$ ou $\det(A)\neq\det(B)$, on peut conclure « pas semblables », c'est direct.

Si on a $Tr(A)=Tr(B)=$ et $\det(A)=\det(B)$, on ne peut a priori pas conclure.
La seule solution à notre niveau est de trouver P.

en voici une, $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\2&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1\\2&1\end{pmatrix}$
mais ce n'est pas la seule.

Si une matrice est semblable à $3.I_2$, c'est qu'elle est déjà égale à $3.I_2$ (calculez $P.(3.I_2).P^{-1}$).
La matrice $\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$ a beau avoir pour trace 6 et déterminant 9, elle n'est pas semblable à $3.I_2$.
On peut quand même la rendre semblable à $\begin{pmatrix}3&1\\0&3\end{pmatrix}$...
ou à toute matrice $\begin{pmatrix}3&a\\0&3\end{pmatrix}$ avec a non nul. Mais pas à $\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$.

Pour que $\begin{pmatrix}1&1\\1&\clubsuit\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4&\spadesuit\\1&2\end{pmatrix}$ soient semblables, il faut
• qu'elles aient la même trace : $\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4&\spadesuit\\1&2\end{pmatrix}$
• qu'elles aient le même déterminant : $\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4&4\\1&2\end{pmatrix}$.
Mais maintenant, sont elles bien semblables ? Il faut trouver P.
On résout un système et on propose une solution : $\begin{pmatrix}1&1\\1&5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4&4\\1&2\end{pmatrix}$.
Il faut écrire quatre équations (et pas juste deux), faire des choix comme $c=0$ et $d=1$, et regarder ce que cela donne.
Mais surtout à la fin, il faut vérifier.

◃ 40 ▹ Montrez que $\begin{pmatrix}3&9\\-1&-3\end{pmatrix}$ est semblable à son double *(en donnant P inversible vérifiant donc $A.P=P.(2.A)$)*. Même question avec ses multiples *($\lambda.A$ pour λ non nul)*.

◃ 41 ▹ Montrez : $\begin{vmatrix}1&1&1\\a&b&c\\a^2&b^2&c^2\end{vmatrix}=(b-a).(c-a).(c-b)$ (déterminant de VanDerMonde de taille 3).

Pour a égal à b ou c le déterminant est nul à cause de deux colonnes égales.
Pareil pour $b=c$. La factorisation est donc naturelle.
Sinon, on développe avec 6 termes : $b.c^2-b^2.c+a.b^2-a^2.b+a^2.c-a.c^2$ et on compare.

◃ 42 ▹ On donne $u_0=9$, $u_1=-8$ et $u_2=2$.
Trouvez α et β vérifiant $u_n=\alpha.2^n+\beta.(-1)^n$ pour tout n de $\{0,\,1\}$. A-t-on alors $u_n=\alpha.2^n+\beta.(-1)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.3^n$ pour tout n de $\{0,\,1\}$. A-t-on alors $u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.3^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Trouvez α et β vérifiant $u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.(-3)^n$ pour tout n de $\{0,\,1\}$. A-t-on alors $u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.(-3)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$?

Pour ces trois questions, on résout un système pour trouver α et β, puis on regarde si la propriété est vraie déjà au rang suivant. Si ce n'est pas le cas, inutile de continuer, les deux suites comme (2^n) et $((-1)^n)$ ne sont pas les bonnes.
Si en revanche tout va bien encore pour n égal à 2, voire à 3, on pousse plus avant.

formule	$u_n=\alpha.2^n+\beta.(-1)^n$	$u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.3^n$	$u_n=\alpha.(-2)^n+\beta.(-3)^n$
système	$\alpha+\beta=9$ $2.\alpha-\beta=-8$	$\alpha+\beta=9$ $-2.\alpha+3.\beta=-8$	$\alpha+\beta=9$ $-2.\alpha-3.\beta=-8$
solution	$\alpha=\frac{1}{3}$ et $\beta=\frac{26}{3}$	$\alpha=7$ et $\beta=2$	$\alpha=19$ et $\beta=-10$
rang 2	$46=(2)^n/3+26.(-1)^n/3$?	$46=7.(-2)^n+2.(3)^n$?	$46=19.(-2)^n-10.(-3)^n$?
	non	peut-être	non

Sur les trois propositions, s'il y en a une à propager par récurrence, c'est $\boxed{u_n=7.(-2)^n+2.3^n}$ pour tout n.
On l'a initialisée aux rangs 0 et 1 *(création du système)* et 2 *(vérification)*.
Supposons la proposition vraie pour deux rangs, et établissons la au rang suivant

on suppose	P_n vraie	$u_n =$	$7.(-2)^n$	$+2.3^n$	
et	P_{n+1} vraie	$u_{n+1} =$	$7.(-2)^{n+1}$	$+2.3^{n+1}$	
on somme	$u_{n+2} =$	$u_{n+1} + 6.u_n =$	$7.(-2)^{n+1}$	$+2.3^{n+1}$	
			$+6.7.(-2)^n$	$+6.2.2^n$	
on factorise		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^n.(-2+6)$	$+2.3^n.(3+6)$	
on simplifie		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^n.4$	$+2.3^n.9$	
on confirme :		$u_{n+2} =$	$7.(-2)^{n+2}$	$+2.3^{n+2}$	P_{n+2} est vraie

◁43▷ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & -5 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ a pour trace $a+b$ et pour déterminant $a.b+10$.
On veut qu'elle ait pour trace 5 et déterminant 4.
a et b vérifient $a+b=5$ et $a.b=-6$.
On trouve tout de suite le couple $(-1,\ 6)$ et son « symétrique ».

Mais on ne s'arrête pas là. Pour l'instant, on a juste raisonné par conditions nécessaires.
Reste à être sûr qu'elle se diagonalise bien. C'est à dire à trouver effectivement P et à vérifier que P est inversible...

$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

S'arrêter à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas répondre à la question.
C'est n'avoir raisonné que par conditions nécessaire, comme douze fois sur dix au lycée et au collège.
Mais raisonner juste par implications (conditions nécessaires), ce n'est pas raisonner.
C'est agir en automate (facile, tu apprends quarante trois règles, et tu ne te poses quasiment aucune question...).
Mais ensuite, se demander « ai je répondu à la question ? »,
c'est faire des maths
des sciences
de l'ingénierie
En arrivant à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ vous avez juste prouvé que « si il y a des solutions, ce ne peut être que ».
Mais avez vous prouvé qu'elles se diagonalisaient vraiment ainsi ? Non. pas tant que vous n'avez pas trouvé P[7].
Dans un devoir de maths, si vous résolvez mal l'équation du second degré conduisant à -1 et 6, vous perdrez un petit quart des points.
Si vous ne prouvez pas que P existe, vous perdez la moitié des points.
Faites votre choix.

◁44▷ ♡ (a_n) et (b_n) sont les suites $\forall n,\ a_n = 4^n - 3.(-1)^n$ et $\forall n,\ b_n = -4^{n+1} + 5.(-1)^n$.
Trouvez la matrice M vérifiant $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.
Vérifiez qu'on a alors $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^n.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ (sans calculer M^n).

On veut : $M.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}$.
Il suffit de multiplier à droite par l'inverse de $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}$:
$M.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -21 \end{pmatrix}^{-1}$
donc $M = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ -21 & -59 \end{pmatrix}.\frac{1}{35}.\begin{pmatrix} -21 & -7 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}$

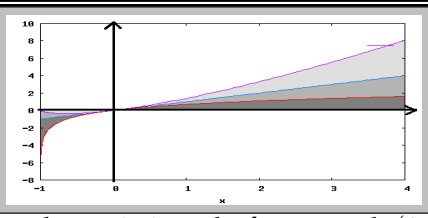
Cette matrices carrée de format 2 sur 2 permet de calculer des choses comme $M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Comme le résultat $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ sent la récurrence sur n
la suite géométrique de raison à gauche M,
on va calculer justement

7. *ou cité un théorème qui dit qu'« avec autant de valeurs propres distinctes que le format de la matrice c'est bon »*

$M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} -32 & -15 \\ 100 & 53 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 4^n & -3.(-1)^n \\ -4^{n+1} & +5.(-1)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$
avec $u = -32.4^n + 32.3.(-1)^n + 15.4^{n+1} - 5.15.(-1)^n = 28.4^n + 21.(-1)^n = 7.a_{n+1}$
$v = 100.4^n - 300.(-1)^n - 53.4^{n+1} + 5.53.(-1)^n = 7.b_{n+1}$
On a donc $M.\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$.
On avait aussi $M.\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ en lisant juste la première colonne de $M.\begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.[8]
On met bout à bout pour une récurrence : initialisation faite
hérédité : si l'on a $M^n.U_0 = U_n$ (hypothèse de rang n)
et aussi $U_{n+1} = M.U_n$
alors on a $U_{n+1} = M.M^n.U_0 = M^{n+1}.U_0$
Mais sinon, autant parler de suite géométrique de raison à gauche M et de premier terme U_0.

Montrez pour tout x positif : $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (1+x).\ln(1+x)$.
Déduisez : $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.
Déduisez $\sqrt[n]{n!} \sim_{n\mapsto+\infty} \frac{n}{e}$.



◁ 45 ▷

$\ln(1+x) \leqslant x \leqslant (1+x).\ln(1+x)$ se démontre par exemple en étudiant les variations de $f = x \longmapsto \ln(1+x) - x$ et $g = x \longmapsto (x+1).\ln(1+x) - x$.
On trouve $f' = x \longmapsto \frac{-x}{1+x}$. Elle croit sur $]-1,\ 0]$ et décroit sur $[0,\ +\infty[$. Elle a donc un maximum en 0. Et ce maximum est $f(0) = 0$. f est donc négative ou nulle.
De même $g' = x \longmapsto \ln(1+x)$ est négative puis positive. g admet en 0 un minimum égal à 0. g est positive sur $]-1,\ +\infty[$.

On applique ce résultat à $x = \frac{1}{k}$: $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right).\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.
On multiplie par k positif :

$$k.\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \leqslant 1 \leqslant (k+1).\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

On passe à l'exponentielle :

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

On multiplie ces n inégalités pour k de 1 à n (tout est positif, on n'oublie pas l'argument) :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \leqslant e^n \leqslant \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

Que donne le premier membre exactement ?
Et proprement

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^k}{k^k} = \frac{\prod_{k=1}^{n}(k+1)^k}{\prod_{k=1}^{n}k^k} = \frac{\prod_{p=2}^{n+1}p^{p-1}}{\prod_{k=2}^{n}k^k}$$

En bas, on peut commencer à *é*, le terme 1^1 vaut 1. Et en haut, on a translaté la somme.

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \frac{(n+1)^n.\prod_{p=2}^{n}p^{p-1}}{\prod_{p=2}^{n}p^p} = \frac{(n+1)^n}{\prod_{p=2}^{n}p} = \frac{(n+1)^n}{n!}$$

8. ici, déception du professeur qui voit ses eleves lui dire « on ne m'avait pas dit ue j'avais le droit de faire ça, donc je pensais ue c'etait interdit », alors u'il suffit de lire ce ueon fait dans le produit !

Et sans cette « virtuosité » qu'on vous demande d'avoir sur des produits :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k=\left(\frac{2}{1}\right).\left(\frac{3}{2}\right)^2.\left(\frac{4}{3}\right)^3.\left(\frac{5}{4}\right)^{'}\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1}.\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

Le $(n+1)^n$ reste seul, nul ne l'effacera. Et sinon, chaque terme s'efface presque entre haut et bas..

On traite de même le majorant :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right).\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$$

On retrouve le précédent, et un produit télescopique :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}=\left(\frac{(n+1)^n}{n!}\right).\left(\frac{n+1}{1}\right)=\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

Après ces simplifications : $\frac{(n+1)^n}{n!}\leqslant e^n\leqslant\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.
Croisons en multipliant par $n!$ et divisant par e^n :

$$\frac{(n+1)^n}{e^n}\leqslant n!\leqslant\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}=\frac{(n+1)^n}{e^n}.(n+1)$$

c'est naturel vu ce à quoi on veut arriver.
Passons même à la racine n^{ieme} (application croissante) : $\frac{n+1}{e}\leqslant\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+1}{c}.(n+1)^{\frac{1}{n}}$.
Sachant que $(n+1)^{\frac{1}{n}}$converge vers 1 (c'est $e^{\frac{\ln(n+1)}{n}}$), on peut conclure par théorème d'encadrement sur les équivalents.
Ou par prudence, on écrit $1\leqslant\frac{\sqrt[n]{n!}}{\frac{n+1}{e}}\leqslant(n+1)^{\frac{1}{n}}$ et là, on utilise le théorème d'encadrement.

◁ 46 ▷

On veut montrer le résultat suivant : si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices à coefficients complexes *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice P à coefficients complexes)* alors elles le sont aussi en tant que matrices à coefficients réels *(c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice R à coefficients réels)*.
Regardons un exemple $A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&0&1\\0&0&\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&\\0&-1&2\end{pmatrix}$ et $P=\begin{pmatrix}0&1+2.i&-3.i\\-1-i&2+2.i&-2-2.i\\i&1&-1\end{pmatrix}$
Arrangez vous pour que A ait la même trace et le même déterminant que B.
Vérifiez que A est semblable à B via la matrice P. Trouvez une matrice réelle R telle que A soit semblable à B via R.
Dans le cas général, un élève propose la démonstration suivante :
on part de $A=P^{-1}.B.P$, on écrit $P=R+i.S$, on obtient $(R+i.S).A=B.(R+i.S)$ d'où $R.A=B.R$ et on a trouvé R ;
Complétez les étapes qui manquent dans son raisonnement *(il y a des notations à rendre rigoureuses et il y a une grosse lacune sur la fin)*.

On donne $A=\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$ pour avoir même trace et même déterminant.
On vérifie $\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0&1+2.i&-3.i\\-1-i&2+2.i&-2-2.i\\i&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1+2.i&-3.i\\-1-i&2+2.i&-2-2.i\\i&1&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}$
Au non, tiens ! C'est $\boxed{P.A=B.P}$ qui est vraie.

Cette question était là pour tester votre faculté à bluffer. Mais j'ai très peur alors de croiser des âneries dans vos copies "on calcule et tout va bien".
Ah, si il y a pire. largement pire. Ce sont les élèves qui remplissent des pages pour calculer P^{-1} et vérifier $A=P^{-1}.B.P$. Ceux là, je ne peux plus rien pour eux. Ils en sont restés à chaque fois à la première formule comme en Terminale et ne veulent pas devenir intelligents. Désolé...

Et après, il y a le détail qui manque. P est elle inversible. Et là, c'est lourd et long : $\det(P)=-2-4.i$.

Séparons quand même P en deux matrices : $P = R + i.S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie $\boxed{R.A = B.R \text{ et aussi } S.A = B.S}$

A et B sont semblables via les deux matrices R et S *(inversibles).*

L'idée n'est pas originale : $P.A = B.P$ donnait $(R + i.S).A = B.(R + i.S)$ et donc $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.
On identifie, on doit bien avoir $R.A = B.R$ et aussi $S.A = B.S$.

Prenons d'ailleurs le raisonnement général.
On part de $P.A = B.P$ avec P complexe inversible.
On écrit $P = R + i.S$ avec R réelle et S aussi *(le terme général de P est $p_j^k = \Re e(p_j^k) + i.\Im m(p_j^k)$ qu'on sépare)*.
On développe $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.
On identifie partie réelle et partie imaginaire : $R.A = B.R$ et $S.A = B.S$.
On a envie d'écrire $A = R^{-1}.B.R$ et de conclure.
Mais qui dit que R est inversible ? Rien.
L'inversibilité de P ne se transmet pas forcément à sa partie réelle *(pensez à $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$)*.
Pas grave, on a aussi $S.A = B.S$. Donc, si R n'est pas inversible, on prend S.
Mais il se peut que S ne soit pas inversible non plus.
Alors, qui ?
C'est là qu'on ruse avec $(a.R + b.S)$.
On a en effet $(a.R + b.S).A = B.(a.R + b.S)$.
Et sur toutes les matrices $(a.R + b.S)$, il doit bien y en avoir une qui est inversible.

L'idée était de dire : si on n'a pas R ou S inversible utilisable, on va prendre $R + S$ ou $R - S$.
Proprement, on prend $R + \lambda.S$. On va détecter qu'il y a au moins un λ réel tel que $R + \lambda.S$ soit inversible.
Sinon, pour tout λ réel, $\det(R + \lambda.S)$ est nul.
Or, $\det(R + \lambda.S)$ est un polynôme en λ.
S'il est nul pour tout λ réel, alors c'est le polynôme nul.
Et il est nul aussi pour tout λ complexe. Et en particulier pour $\lambda = i$. Ce qui est contraire à "P est inversible".

Niveau "Sup bête" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous pensiez conclure.
Niveau "Sup normal" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous disiez "mais il y a un problème car R n'est peut être pas inversible".
Niveau "Sup bien parti vers la Spé" : j'attendais de vous que vous tentiez alors des choses avec S mais aussi $R + S$.
Niveau "Normale Sup" : vous avez deviné la bonne solution, ou même vous en avez trouvé une nouvelle.

◁ 47 ▷

Montrez que toute matrice carrée de taille 2 de trace et déterminant nuls est nilpotente.
Montrez que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a une trace nulle et un déterminant nul, mais n'est pas nilpotente.

On prend $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec $-a^2 - b.c = 0$ avec $-a$ en bas (j'ai écrit trace nulle, et j'ajoute ensuite déterminant nul, d'où le s à nuls).
On l'élève au carré ; ça ne traine pas :
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b.c & 0 \\ 0 & a^2 + b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Remarque	On peut aussi utiliser $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$ pour arriver à la même conclusion. La relation $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_{2,2}$ (dite « de Cayley Hamilton) est vraie pour toute matrice carrée de taille 2 sur *é*.

Que $\begin{pmatrix} 10 & -9 & -1 \\ 11 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ ait une trace nulle et un déterminant nul, c'est du calcul.
Qu'elle ne soit pas nilpotente nécessite de calculer ses puissances pour voir qu'on ne tombera jamais sur $0_{3,3}$. Mais jamais ? Même à la puissance 132 ?
Oui, car $M^3 = M$ (calcul des premières puissances).
On a donc ensuite en mettant en boucle

$M^{2.n+1} = M$	pour tout n	jamais nul
$M^{2.n} = M^2$	pour tout n non nul	jamais $0_{3,3}$

En fait, je l'avoue, M se diagonalise en $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ d'où sa trace et son déterminant, mais aussi le clignote-

ment de ses puissances.

◁ 48 ▷ ♡ Dans le développement du déterminant d'une matrice de taille 6 et de terme général a_i^k, que est le signe devant $a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$? Même question avec $a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$. De même pour $a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$.
Complétez $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_\cdot^6$ pour qu'il ait un signe moins.

$a_3^1.a_4^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$	$a_4^1.a_5^2.a_3^3.a_1^4.a_6^5.a_2^6$	$a_6^1.a_4^2.a_3^3.a_5^4.a_2^5.a_1^6$
pas cohérent	$\begin{array}{cc\|cccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 4 & & 4 & 2 & 3 & 1 & 5 & 6 \\ 2\leftrightarrow 5 & & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 6\leftrightarrow 2 & & 3 & 4 & 1 & 2 & 6 & 2 \end{array}$	$\begin{array}{cc\|cccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 6 & & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2\leftrightarrow 4 & & 6 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2\leftrightarrow 5 & & 6 & 4 & 3 & 5 & 2 & 1 \end{array}$
0	-1	-1

On a deux façons de compléter « bijectivement » $a_*^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_\cdot^6$:

$a_2^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_6^6$	$a_6^1.a_1^2.a_3^3.a_5^4.a_4^5.a_2^6$
$\begin{array}{cc\|cccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 2 & & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4\leftrightarrow 5 & & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \end{array}$	$\begin{array}{cc\|cccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1\leftrightarrow 2 & & 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4\leftrightarrow 5 & & 2 & 1 & 3 & 5 & 4 & 6 \\ 2\leftrightarrow 6 & & 6 & 1 & 3 & 5 & 4 & 2 \end{array}$
$+1$	-1

On garde la seconde.

◁ 49 ▷ A est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli. Quelle est la valeur maximale de ${}^tU.A.V$ si U est le vecteur colonne formé de neuf 1 et V le vecteur colonne formé des entiers de 0 à 8 ?
A et B sont deux matrices de Su-Do-Ku convenablement remplies. U est le vecteur colonne formé de un 1 suivi de huit 0. Entre quelle et quelle valeur peut varier le réel ${}^tU.A.B.U$ *(au fait pour un demi point déjà, c'est bien un réel ?)* ?

Regardons en taille 3 déjà ce que donne un ${}^tU.M$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a'+a'' & b+b'+b'' & c+c'+c'' \end{pmatrix}.$$

Les 1 font qu'on récupère à chaque fois « la somme des coefficients sur la colonne ».
Et sur une matrice de Su-Do-Ku, la somme sur une colonne vaut toujours $1+2+3+\ldots+9$ car l'addition est commutative et associative (chaque colonne contient chaque entier une fois et une seule).

Notre question se ramène à $\begin{pmatrix} 45 & 45 & \ldots & 45 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 8 \end{pmatrix}$ qu'il faut maximiser.

Mais quoi qu'on y fasse, cette quantité (matrice de taille 1 sur 1) vaut toujours 36×45, et la matrice du milieu n'y peut rien.

Le produit $A.B$ donne une matrice de taille 9 sur 9 avec des coefficients entiers positifs assez imposants.
On multiplie à droite par un vecteur colonne, on obtient un vecteur colonne.
On faut tomber sur une unique ligne, on obtient un réel.
Proprement, en simplifiant les formats :

matrice	U		A		B		U	
lignes	1		$\swarrow 9$		$\swarrow 9$		$\swarrow 9$	
colonnes		$9\nearrow$		$9\nearrow$		$9\nearrow$		1
	${}^tU.A$				$B.U$			
lignes	1				$\swarrow 9$			
colonnes			$9\nearrow$				1	
lignes	1							
colonnes					1			

Mais regroupons par associativité du produit matriciel ${}^tU.A$ face à $B.U$.
Le vecteur $B.U$ récupère en faut la première colonne de B tous les entiers de 1 à 9..
Le vecteur ${}^tU.A$ récupère la première ligne de A : tous les entiers de 1 à 9.

On a donc quelquechose comme $\begin{pmatrix} 3 & 5 & \dots & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ \vdots \\ 8 \end{pmatrix}$.

C'est donc une somme du type $\sum_{k=1}^{9} a_k.b_k$ où les a_k et b_k sont les entiers de 1 à 9, pas forcément dans le même ordre.
Quitte à ré-ordonner en fonction de la valeur des a_k, on a une somme $1.b_1 + 2.b_2 + 3.b_3 + \dots + 9.b_9$.
Ce qu'on appelle inégalité de réarrangement permet de dire

minimum	les b_k dans le même ordre que les a_k	$1.1 + 2.2 + 3.3 + \dots + 9.9$	285
maximum	les b_k dans l'ordre inverse des a_k	$1.9 + 2.8 + 3.7 + \dots + 9.1$	165

Réarrangement

L'inégalité de réarrangement dit que si les a_k sont classés par ordre croissant, la somme $\sum_k a_k.b_k$sera maximale si les b_k sont aussi par ordre croissant, et minimale si les b_k sont classés par ordre décroissant.
Elle se démontre en indiquant que la somme augmente si on permute par exemple b_1 et b_3 si l'on avait $b_1 > b_3$, et ainsi de suite.
Et elle se comprend très bien sous l'énoncé suivant : si je dois calculer votre moyenne en mettant des coefficients aux devoirs, vous préférez que les gros coefficients soient sur les meilleures de vos notes, non ?

◁ 50 ▷

La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant $A.P = P.B$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P vérifiant $A.P = P.B$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?
La relation définie sur $M_2(\mathbb{R})$ par "*il existe P inversible vérifiant $A.P = B.P$*" est elle réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive ?

La première est réflexive, symétrique et transitive, mais pas antisymétrique. (elle est dans le cours ou elle y sera).

La seconde est telle que A est toujours en relation avec B (il suffit de prendre $P = 0_{2,2}$).
Elle est réflexive, symétrique, transitive et vraiment pas antisymétrique. Mais avec une seule classe.

La dernière est l'égalité qui est à la fois réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.

◁ 51 ▷

Un entier naturel p supérieur ou égal à 2 est dit jovial s'il existe une liste d'entiers naturels entiers $2 \leqslant k_0 < k_1 < \dots < k_{n-1} = p$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{k_i} = 1$. Par exemple : 12 est jovial d'ordre 4 car $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$.
Écrivez un script testeur de jovialité qui prend en entrée une suite d'entiers `L` et vérifie si les entiers plus grands que 2 vont en croissant et ont pour somme de leurs inverses 1. La procédure devra retourner `False, 0` si il y a une erreur, et `True, p` où p est le dernier terme de la liste *(le nombre jovial)* si tout va bien.

Comme on est en maths, il ne faudra pas se baser sur un calcul approché qui de toutes façons ne pourra pas être probant comme ci contre. Je rappelle que pour Python, 1/2+1/3+1/6 vaut 0.99999999999. Quel farceur ce serpent !
Par exemple, `TestJovial([2, 4, 6, 12])` doit donner « `True, 12` », donc 12 est jovial.

```
S=0
for i in L :
....S += 1/i
if S==1 :
```

♣ 0 ♣ Montrez que 24 est jovial d'ordre 5. Montrez que 156 (c'est 12.13) est jovial d'ordre 5.

On a bien $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$, donc 12 est jovial.

En divisant tout par 2 : $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{2}$. En ajoutant $\frac{1}{2}$: $\boxed{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24}\right) = 1}$ Le dernier dénominateur de cette liste est jovial. Et c'est 24.

On repart de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$ et on remplace $\frac{1}{12}$ par $\frac{1}{13} + \frac{1}{12.13}$: $\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{13} + \frac{1}{12.13} = 1}$ Ceci prouve que 12.13 est jovial d'ordre 5.

♣ 0 ♣ Montrez qu'aucun nombre premier n'est jovial.

Faisons un petit raisonnement par l'absurde en supposant qu'il existe une liste de denier terme p : $2 \leqslant k_0 <$

$k_1 < \ldots < k_{n-1} = p$ vérifiant $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{p} = 1$. Mais alors il y a un p au dénominateur dans le premier membre, et on se demande bien comment il va pouvoir partir. C'est ça l'idée. Poussons l'idée avec rigueur : $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \ldots + \frac{1}{k_{n-2}} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p}$. On effectue le produit en croix en écrivant le primer membre $\frac{N}{k_0.k_1 \ldots k_{n-2}}$ (sans aller chercher le plus petit dénominateur commun) : $p.N = (p-1).k_1 \ldots k_{n-2}$. Le premier membre est multiple de p premier, le second membre ne contient que des facteurs plus petits que p, il ne peut pas être multiple de p.

♣ 0 ♣ On note J l'ensemble des nombres joviaux. Donnez $Min(J)$ *(justifiez)*.

La seule liste d'entiers strictement croissante finissant par 2 et de premier terme au moins égal à 2 est [2]. Et la somme des inverses ne vaut pas 1. 2 n'est pas jovial.

Les listes d'entiers strictement croissantes de premier terme au moins égal à 2 et de dernier terme 3 sont [2, 3] et [3]. Aucune n'a pour somme d'inverses 1. 3 n'est pas jovial.
Il est donc inutile de tester 5 et 7 *(premiers)* ; ils ne sont pas joviaux.
On regarde pour 4 les listes disponibles : [2, 3, 4], [2, 4], [3, 4]. Aucune n'a pour somme 1. 4 n'est pas jovial.

On teste 6 ? On se souvient alors sans doutes d'avoir croisé dans sa vie $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ *(ou même* $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$*)*.

6 est jovial, et c'est lui le plus petit élément de J.

Erreur lue dans les copies : je dis que 6 *est jovial.*
J'affirme que c'est lui le plus petit élément de J.
Et je n'ai pas prouvé que les nombres plus petits que 6 *ne le sont pas.*
Pour moi, commettre ce type d'erreur logique, c'est pire que de faire un mauvais calcul et de prétendre que 5 *serait jovial.*
Cela dit, on admirera l'élève qui montre que les nombres premiers ne sont jamais joviaux, et qui trois questions plus loin dit « je vais montrer que 5 *est jovial ».*

♣ 0 ♣ On doit montrer que J est stable par multiplication ; un élève propose le raisonnement suivant : on part de $\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{p} = 1$ (n termes) et $\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{q} = 1$ (m termes), on effectue le produit et on réordonne les nombres aux dénominateurs $\frac{1}{k_0.h_0} + \ldots + \frac{1}{p.q} = 1$ ($n.m$ termes), le dernier entier de la liste est jovial. Où est l'erreur ?

On prend p et q qui sont joviaux par deux expressions de la forme $\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{p} = 1$ et $\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1} + \ldots + \frac{1}{q} = 1$.
On a envie d'effectuer le produit comme proposé. On a alors une somme d'inverses d'entiers qui vaut 1. Quitte à réordonner les dénominateurs, on a une liste dont le dernier élément est $\frac{1}{p.q}$ qui tendrait à prouver que $p.q$ est jovial.
C'est tentant. Mais qui assure que les éléments seront tous distincts. Prenons deux nombres de jovialité reconnue : 6 et 12 :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ et $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$:

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{72}$

La somme des inverses vaut bien 1 et $\frac{1}{72}$ est bien le dernier terme. Mais il y a des nombres en double ! Et c'est interdit pour la jovialité.
On a un contre-exemple au raisonnement proposé.

♣ 1 ♣ Montrez que si p est jovial alors $2.p$ et $p.(p+1)$ le sont aussi.

Pour les petites stabilités : supposons p jovial grâce à une liste $[k_0, \ldots k_{n-1}]$ avec $k_{n-1} = p$ et $\frac{1}{k_0} + \frac{1}{k_1} + \ldots + \frac{1}{k_{n-1}} = 1$. On refait ce qu'on a déjà fait en divisant par 2 et en ajoutant $\frac{1}{2} : \frac{1}{2} + \frac{1}{2.k_0} + \frac{1}{2.k_1} + \ldots + \frac{1}{2.k_{n-1}} = 1$. la liste $[2.k_0, 2.k_1, \ldots 2.k_{n-1}]$ est toujours strictement croissante, commence avec un entier plus grand que 2 et finit par $2.p$. Comme le premier terme vaut au moins 4, on peut insérer *é* : $[2, 2.k_0, 2.k_1, \ldots 2.k_{n-1}]$.
Ceci confirme : $2.p$ est dans J.

Pour $p.(p+1)$, on part de $\frac{1}{k_0}+\frac{1}{k_1}+\ldots+\frac{1}{p}=1$. On efface $\frac{1}{p}$ qu'on remplace par $\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p.(p+1)}$. La croissance est préservée.

C'est ce qu'on a fait avec $p=12$.

Pour le test sur une liste.
On regarde déjà si le premier terme est au moins égal à 2. Si ce n'est pas le cas, on sort brutalement avec un `return False`.

Si c'est vrai, on ne sort pas crétinement avec un `return True` ; il reste des choses à tester.

On parcourt la liste, et à chaque fois, on regarde si le nouveau terme est strictement plus grand que le précédent. Si ce n'est pas le cas, on sort. Sinon, on continue.
Et c'est juste si à la fin tout va bien qu'on réponde `True`.

```
def TestJovial(L) :
....if L[0] < 2 :
.........return False
....for k in range(1, len(L)) :
........if L[k] =< L[k-1] :
............return False
....return True
```

Mais il reste aussi à tester "la somme des inverses vaut 1".
On doit calculer une somme de rationnels et voir si elle vaut 1. Mais on doit les traiter comme des rationnels et pas comme des flottants.

Pour `Python`, `1/2+1/3+1/6` vaut `0,99999999999999`. C'est parfait pour le physicien. C'est satisfaisant pour le comptable. C'est nullissime pour le mathématicien.

On va donc travailler avec un `Numer`ateur et un `Denom`inateur.
Il faut les initialiser au premier quotient : `Numer = 1`, `Denom = L[0]`. Ou mieux, avec le quotient d'avant $\frac{0}{1}$.
A chaque étape, on y va brutalement, sans chercher à savoir si il y a des simplifications possibles : $\frac{Numer}{Denom}+\frac{1}{L[k]}=\frac{L[k].Numer+Denom}{Denom.L[k]}$.
Le test ultime ne sera pas une égalité à 1, mais `Numer == Denom`.

```
def TestJovial(L) :
....Numer = 0 #on initialise
....Denom = L[0] #premier dénominateur
....Avant = 1 #on doit démarrer avec strictement plus grand que 1
....for elt in L : #inutile d'utiliser des indices, parcourons la liste
........if not(type(elt) is int) : #a-t-on des entiers ?
............return False #non ! alors on dégage
........if elt <= avant : #la suite ne croît pas
............return False #alors je ne crois plus en elle non plus
........Numer = Numer*elt+Denom #on calcule
........Denom = Denom*elt #avec la formule indiquée
........Avant=elt #on mémorise le nombre pour ne pas jongler sur les indices
....return Numer == Denom
```

Il est inutile de conclure par

```
if Numer == Denom :
....return True
else :
....return False
```

Certes, ce n'est pas faux, mais qu'est ce que c'est lourd. je dois faire de vous des gens intelligents, je suis payé pour ça. Et je crois que je vais hélas finir ruiné à cause de vous.
Les deux tests `L[k+1]>L[k]` et `L[0]>1` ont été fusionnés dès le début grâce à `Avant=1`.
On a initialisé la première fraction à $\frac{0}{1}$ pour n'avoir pas à traiter le premier terme à part.

◁ 52 ▷ ♡ On rappelle la définition du déterminant d'une matrice A de terme général a_i^k : $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)})$. A-t-on $\det(-A) = \det(A)$?
Montrez que le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des termes diagonaux.
Quel est le coefficient de chacun des termes suivants dans le déterminant d'une matrice de taille 6 :

$a_1^2.a_2^3.a_3^4.a_4^5.a_5^6.a_6^1$	$a_1^6.a_2^5.a_3^4.a_4^3.a_5^2.a_6^1$	$a_1^3.a_2^4.a_3^2.a_4^1.a_5^6.a_6^5$	$a_1^3.a_3^4.a_5^2.a_6^1.a_2^6.a_4^5$	$a_1^3.a_2^2.a_3^4.a_4^6.a_5^5.a_6^1$

En taille n, quel est le coefficient de $a_1^n.a_2^{n-1}\dots a_{n-1}^2.a_n^1$.
Calculez $\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ en utilisant la définition avec ses 24 termes *(dont plusieurs seront nuls)*.

La formule $\det(-A) = \det(A)$ est vraie pour les matrices de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$ ont pour déterminant $a.d - b.c$.
Mais en taille impaire, de $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)})$ à $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).((-a_1^{\sigma(1)})\dots(-a_n^{\sigma(n)}))$, il y a un $(-1)^n$.

Si la matrice est diagonale, les $(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)})$ sont toujours nuls. Ou presque.
Si σ est Id, on a $(a_1^1\dots a_n^n)$: produit des termes diagonaux.
Sinon, dans $(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)})$ il y a toujours un terme hors de la diagonale, tel que a_2^5 ou autre. Le produit est nul.

La somme $\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).(a_1^{\sigma(1)}\dots a_n^{\sigma(n)})$ ne contient donc bel et bien qu'un terme.

Dans les propositions, on élimine les termes qui ne sont pas des permutations (il y a un $\sigma(i)$ en double et/ou une valeur qui n'apparait pas). C'est bon, il n'y a pas de piège de ce côté là.
Ensuite, il faut reconstruire les permutations indiquées, à coup de simples transpositions (échanges de deux termes).

$a_1^2.a_2^3.a_3^4.a_4^5.a_5^6.a_6^1$	$a_1^6.a_2^5.a_3^4.a_4^3.a_5^2.a_6^1$	$a_1^3.a_2^4.a_3^2.a_4^1.a_5^6.a_6^5$	$a_1^3.a_3^4.a_5^2.a_6^1.a_2^6.a_4^5$	$a_1^3.a_2^2.a_3^4.a_4^6.a_5^5.a_6^1$
1 2 3 4 5 6 / 2 3 4 5 6 1	1 2 3 4 5 6 / 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 / 3 4 2 1 6 5	1 2 3 4 5 6 / 3 6 4 5 2 1 / vicieux !	1 2 3 4 5 6 / 3 2 4 6 5 1
1 2 3 4 5 6 / 2 1 / 3 1 / 4 1 / 5 1 / 6 1 / 2 3 4 5 6 1	1 2 3 4 5 6 / 6 1 / 5 2 / 4 3 / 6 5 4 3 2 1	1 2 3 4 5 6 / 3 1 / 4 2 / 2 1 / 6 5 / 3 4 2 1 6 5	1 2 3 4 5 6 / 3 1 / 6 2 / 4 1 / 5 1 / 2 1 / 3 6 4 5 2 1	1 2 3 4 5 6 / 3 1 / 4 1 / 6 1 / 3 2 4 6 5 1
signe −	signe −	signe +	signe −	signe −

Dans $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, seuls deux termes sont non nuls :

$a_1^1.a_2^2.a_3^3.a_4^4$	$a_1^1.a_2^2.a_3^4.a_4^3$
2.2.3.1	2.2.2.1
$\sigma = Id$	$\sigma = \overrightarrow{(3\,4)}$
signe +	signe −

Les termes tels que $a_1^2.a_2^1.a_3^4.a_4^3$ ou $a_1^4.a_2^2.a_3^1.a_4^1$. Du moment qu'on y croise a_2^1 ou a_3^1 ou a_3^2 ou a_4^1 ou a_4^2 ou a_4^3, le produit sera nul.

◁ 53 ▷ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Vous avez ensuite le droit d'augmenter ou diminuer un des coefficients d'une unité. Est il possible que le déterminant ne change pas ?
Quel coefficient changez vous pour que le déterminant bouge le plus possible ?

Le déterminant vaut -15.
Si vous changez le coefficient a dans le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, vous remplacez a. $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$ par α. $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$
et c'est le seul endroit où le déterminant change.

Si finalement il ne change pas, c'est que le cofacteur du a est nul : $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} = 0$.

Le raisonnement est le même pour tout coefficient.
Le déterminant dépend linéairement d'un coefficient par l'intermédiaire de son cofacteur.
La question « le déterminant ne change pas » se ramène à « existe-t-il un cofacteur nul ».

On calcule les neuf cofacteurs : de $\begin{vmatrix} & & \\ & 2 & 0 \\ & 1 & 1 \end{vmatrix}$ à $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$ en passant par $\begin{vmatrix} & & \\ 3 & & 0 \\ 2 & & 1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} & 4 & 5 \\ & & \\ & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Aucun n'est nul.

Quel est maintenant le coefficient qui a le plus d'influence ?
Celui qui a le plus grand cofacteur (en valeur absolue).

$\begin{vmatrix} 1 & & 5 \\ 3 & & 0 \\ & a & \end{vmatrix}$ avec facteur 15. On n'a pas mieux.

Et c'est vrai $\left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -30 \right| \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -15 \right| \left| \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \right|$

◁ 54 ▷

On travaille avec les entiers de 0 à 16 pour l'addition et la multiplication modulo 17.

Complétez

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
inverse de a	*	*	*	13	*		5			*		*	*	*	*	*

Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 4 & * \\ 1 & * & 3 \\ * & 1 & * \end{pmatrix}$ pour que ce soit l'inverse de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ en utilisant la formule $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)} \dots a_n^{\sigma(n)}$.

Résolvez l'équation $\left\{ \begin{array}{rrrcl} 7.a & +2.b & +2.c & = & 2 \\ 15.a & +5.b & +16.c & = & 1 \\ 16.a & +2.b & & = & 4 \end{array} \right|$.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
inverse de a	1	9	6	13	7	3	5	15	2	12	14	10	4	11	8	16

Il suffit de chercher parmi les multiples de 2 si il n'y a pas 18. Ensuite comme inverser de 2 est 9, l'inverse de 9 est 2.
Et l'inverse de -2 est -9. Donc, l'inverse de 15 est 8 (on vérifie $15.8 = 120$ et $17.7 = 119$).

Ensuite, on veut $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 4 & c \\ 1 & b & 3 \\ a & 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc par exemple $14 + 2 + 2.a = 1$. $a = 1$ convient.
on vérifie sur les autres lignes $30 + 5 + 16 = 0$
et $32 + 2 = 0$.

De même : $28 + 2.b + 2 = 0$ donc $2.b = 4$ puis $b = 2$
on vérifie $60 + 10 + 32 = 0$ et $64 + 4 = 0$
Enfin, un système du même type donne $c = 5$ (troisième ligne : $16.c + 6 = 1$ donc $-c = -5$) et $d = 5$.

On n'oublie pas de vérifier dans les neuf équations, et pas juste de trouver a, , c et d par conditions nécessaires..

On développe le déterminant de $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 15 & 5 & 16 \\ 16 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ par la règle de Sarrus, en simplifiant modulo 17 tant qu'on peut :

$15.2.2$	$+16.16.2$	$-16.5.2$	$-16.2.7$	
-8	$+2$	$+10$	$+14$	$= 18 = 1$

Par exemple, 16 vaut -1, et 15 vaut -2.

Pour résoudre $\left\{ \begin{array}{rrrcl} 7.a & +2.b & +2.c & = & 2 \\ 15.a & +5.b & +16.c & = & 1 \\ 16.a & +2.b & & = & 4 \end{array} \right|$ il suffit d'utiliser la matrice inverse : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On trouve $x = 11$, $y = 16$ et $z = 6$.

◁ 55 ▷ ♡ Montrez : $\det(M^2 + I_2) \geqslant 0$ pour toute matrice M de $M_2(\mathbb{R})$.
Conseil : $\det(M + i.I_2)$ *et* $\det(M - i.I_2)$.

On peut certes calculer $\begin{pmatrix} a^2+b.c & b.(a+d) \\ c.(a+d) & d^2+b.c \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1+a^2+b.c & b.(a+d) \\ c.(a+d) & 1+d^2+b.c \end{pmatrix}$ son déterminant $a^2.d^2 + a^2 - 2.a.d.b.c + d^2 + b^2.c^2 + 2.b.c + 1$.
Mais ensuite, il y a des termes qui peuvent être négatifs suivant les signes des uns et des autres.

On commence par écrire $(M + i.I_2).(M - i.I_2) = M^2 - M.(i.I_2) + i.I_2.M - i^2.I_2 = M^2 + I_2$ car M et I_2 sont permutables.

On passe au déterminant : $\det(M^2 + I_2) = \det(M + i.I_2).\det(M - i.I_2)$.
Sous cette forme, on ne peut plus écrire d'inégalités, puisqu'on est dans $\mathbb{C}$.
Mais $\det(M + i.I_2)$ est un complexe dont $\det(M - i.I_2)$ est le conjugué.
On a une écriture de la forme $z.\bar{z}$. C'est le carré du module d'un complexe. C'est un réel positif.
Joli.
Plus précisément : $\det(M + i.I_2) = (a+i).(d+i) - b.c = (a.d - b.c - 1) + i.(a+d)$
$\det(M - i.I_2) = (a-i).(d-i) - b.c = (a.d - b.c - 1) - i.(a+d)$
On développe : $\boxed{\det(M^2 + I_2) = (a.d - b.c - 1)^2 + (a+d)^2}$

Remarque : *Et on ne sait rien sur le signe des coefficients de M^2.*
Et quand bien même, dans le déterminant, il y a des signes moins.
Et notre raisonnement tient ici en dimensions plus grandes...

◁ 56 ▷ Qui c'est $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} [2.n,\ 3.n]$?

$$\{0\} \cup [2,\ 3] \cup [4,\ +\infty[$$

car à partir de $[4,\ 6] \cup [6,\ 9] \cup [8,\ 12]$ ... les intervalles « se chevauchent ».

◁ 57 ▷ Le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ (notée A) vaut 7 quel que soit a. Trouvez b.
Et donnez les coefficients de A^{-1} qui ne dépendant pas de a.

On calcule le déterminant de A ou du moins, on imagine qu'on le calcule *(dernière colonne)* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} - 3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

La seule dépendance en a se fait par le facteur $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix}$ qui doit donc être nul.
On développe par rapport à la dernière ligne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & b & 1 \end{vmatrix} = 2.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - b.\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$b = 2$$

Maintenant qu'on connaît la valeur du déterminant, on inverse la matrice. Ah non, on imagine encore que l'on calcule son inverse.
Ce sont quatorze cofacteurs, comme $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ ou $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.
On voit que dans le premier, il reste du a. Il ne fait donc pas partie des cofacteurs à calculer.
On voit dans le dernier qu'il n'y a plus de a. Et pour cause, on a effacé sa ligne et sa colonne.
Chacun des termes de la dernière colonne ou de la dernière ligne peut être calculé *(et devient un terme de la dernière*

ligne et de la dernière colonne, puisqu'il faut transposer).

On calcule donc $\begin{vmatrix} 1&3&0\\2&5&2\\2&1&3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1&3&0\\2&5&2\\2&1&3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1&1&0\\2&2&2\\2&2&3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1&1&3\\2&2&5\\2&2&1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1&1&3\\2&2&5\\&&\\1&2&1 \end{vmatrix}$ et ainsi de suite. Et on n'oublie pas l'alternance de signes, ni la division par 7.

On aboutit à $\begin{pmatrix} &&&-7\\&&&7\\&&&0\\-8&5&-1&0 \end{pmatrix}$ qu'il faudra diviser encore par 7.

Mais il y a une surprise ou un bonus : $\begin{vmatrix} 1&1&0\\&&\\2&2&3\\1&2&a \end{vmatrix}$ ne dépend pas non plus de a ! Car a est face à $\begin{vmatrix} 1&1\\2&2 \end{vmatrix}$ qui est nul.

On pourrait donc aboutir à $A^{-1} = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} &&&-7\\&&&7\\-2&3&-2&0\\-8&5&-1&0 \end{pmatrix}$ *(et les derniers facteurs comme* $24-8.a$ *et* $5.a-15$ *dépendant de a).*

◁ 58 ▷

On pose $U = \begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M.U = \lambda.U\}$ est un espace vectoriel. Donnez en une base et la dimension.

On montre que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M.U = \lambda.U\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. l'inclusion est dans la définition.
Pour la présence du neutre, on a bien $O_{2,2}.U = \lambda.U$ avec λ nul d'ailleurs.
On prend A et B dans cet ensemble, ainsi que deux réels α et β. On a déjà $A.U = \lambda_A.U$ pour un certain λ_A et $B.U = \lambda_B.U$ pour un certain λ_B *(pourquoi serait ce le même, bougres d'andouilles !)*. On a alors $(\alpha.A + \beta.B).U = (\alpha.\lambda_A + \beta.\lambda_B).U$. Comme $(\alpha.\lambda_A + \beta.\lambda_B)$ est un réel qu'on peut noter μ, on a bien $(\alpha.A + \beta.B).U = \mu.U$, ce qui confirme la présence de $\alpha.A + \beta.B$ à l'ensemble.

En écrivant la matrice $\begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}$, la condition devient « $\begin{pmatrix} a&b\\c&d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ». Comment exprimer cela ? par la nullité d'un déterminant : $\begin{vmatrix} 2.a+3.b & 2\\ 2.c+3.d & 3 \end{vmatrix} = 0$. On trouve la relation $6.a + 9.b = 4.c + 6.d$.
On en choisit trois, et le quatrième vient. On a des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b\\ c & a+3.b/2-2.c/3 \end{pmatrix}$. on les sépare en $a.\begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0&1\\0&3/2 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0&0\\1&-2/3 \end{pmatrix}$. On a trois matrices (on prendra leur multiples si nécessaire), qui forment une famille génératrice :

	$\begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&2\\0&3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0\\1&-2/3 \end{pmatrix}$
vérification	$\begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&2\\0&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0\\3&-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 2\\3 \end{pmatrix}$

Elles forment une famille libre : $\alpha.\begin{pmatrix} 1&0\\0&1 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0&2\\0&3 \end{pmatrix} + \alpha.\begin{pmatrix} 0&0\\3&-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0\\0&0 \end{pmatrix}$ entraine $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
La dimension est de 3.

Comment rendre votre réponse absurde ? Avec des λ qui resteraient dans la matrice, alors que la définition est $\exists\lambda$.

◁ 59 ▷

Dérivez $x \longmapsto \begin{vmatrix} 15&2&3\\x&25&13\\18&2&5 \end{vmatrix}$.

Ce déterminant est une fonction affine de x, de la forme $x \longmapsto -x.\begin{vmatrix} 2&3\\&\\2&5 \end{vmatrix} + reel$.

Sa dérivée est $x \longmapsto -\begin{vmatrix} 2&3\\2&5 \end{vmatrix}$.

Attention : La réponse est une fonction (certes constante, mais fonction).
Et qui s'est fatigué à calculer les termes qui partaient à la dérivation ?

◁ 60 ▷ Montrez que $\begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ ne pourront jamais être nuls.

$$\begin{vmatrix} a & 5 & 1 \\ 9 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix} = a.\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} - 9.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

Le réel a est pondéré d'un coefficient nul. Le déterminant ne dépend pas de a. Il vaut toujours -285.

Mais comment s'en rendre compte sans calcul explicite de $-9.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$?

On regarde sa parité :

$-9.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}$	$+3.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$	
$-9.(40-2)$	$+3.(20-1)$	
pair	impair	impair donc non nul !

$\begin{vmatrix} a & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ ne dépend pas non plus de a, car son cofacteur est $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix}$ qui vaut 0 [9].

Le déterminant ne dépend pas de a. mais s'il était quand même nul ? On le développe par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 4 & 8 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 6 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = a.0 - 4.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ & & \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} + 6.\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 5 \\ & & \\ 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

Cette fois, pas de jeu sur la parité possible, dommage, c'est un classique pour montrer qu'un déterminant entier est non nul.

◁ 61 ▷ Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n et crée la matrice de format n sur n(liste de listes) correspondant aux exemples suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Et demandez au matheux en vous de calculer le déterminant en taille n.

On remplit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ en une seule fois : $\begin{pmatrix} (0,0)\to 1 & (0,1)\to 1 & (0,2)\to 1 & (0,3)\to 1 \\ (2,0)\to 1 & (2,1)\to 2 & (2,2)\to 2 & (2,3)\to 2 \\ (2,0)\to 1 & (2,1)\to 2 & (2,2)\to 3 & (2,3)\to 3 \\ (3,0)\to 1 & (3,1)\to 2 & (3,2)\to 3 & (3,3)\to 4 \end{pmatrix}$

On voit vite que c'est le minimum de i et k qui dicte tout.

Le terme général est Min(i,k) en indexation mathématique, et $Min(i,k)+1$ en indexation Python.

```
def Matrice(n) :
....return([[min(i,k)+1 for k in range(n)] for i in range(n)])
```

En une ligne !

Les premières ont pour déterminant 1. Les suivantes aussi.

Et il suffit de soustraire chaque ligne à la suivante : $L_i < L_i - L_{i-1}$ pour i dans range(1,n).

En taille 5, en commençant bien à partir de la fin :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ jusqu'à la matrice triangulaire, de déterminant 1.

◁ 62 ▷ La comatrice d'une matrice antisymétrique inversible est antisymétrique. La preuve :
${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$ donc
$Com(A) = {}^t(\det(A).A^{-1}) = \det(A).{}^t(A^{-1}) = \det(A).({}^tA)^{-1} = \det(A).(-A)^{-1} = -\det(A).A^{-1} = -Com(A)$
Et pourtant, il suffit d'une matrice de taille 3 pour avoir un contre-exemple. Alors ?

Alors ? les matrices antisymétriques de taille 3 ont un déterminant nul.

9. développez par rapport à la première ligne, et vous n'avez que des déterminant 2 sur 2 qui sont nuls

Et donc on ne peut pas utiliser ce raisonnement.
Et c'est dommage car il est joli.

◃ 63 ▹ ♡ Le colleur demande de calculer le déterminant $\begin{vmatrix} \cos(2.a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a+b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(c+a) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(d+a) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$. Après un calcul un peu long, l'élève P.Céhessi trouve 0.
L'élève M.Péhaiçi bougonne "coplanaires dans $\mathbb{R}^4$". Expliquez.

On peut développer les cosinus. Le déterminant vaut

$$\begin{vmatrix} \cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a) & \cos(a+b) & \cos(a+c) & \cos(a+d) \\ \cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b) & \cos(2.b) & \cos(b+c) & \cos(b+d) \\ \cos(a).\cos(c)-\sin(a).\sin(c) & \cos(c+b) & \cos(2.c) & \cos(c+d) \\ \cos(a).\cos(d)-\sin(a).\sin(d) & \cos(d+b) & \cos(d+c) & \cos(2.d) \end{vmatrix}$$

et ainsi de suite.

On décide de nommer deux colonnes : $C = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \cos(b) \\ \cos(c) \\ \cos(d) \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} \sin(a) \\ \sin(b) \\ \sin(c) \\ \sin(d) \end{pmatrix}$.

La colonne $\begin{pmatrix} \cos(a).\cos(a)-\sin(a).\sin(a) \\ \cos(a).\cos(b)-\sin(a).\sin(b) \\ \cos(a).\cos(c)-\sin(a).\sin(c) \\ \cos(a).\cos(d)-\sin(a).\sin(d) \end{pmatrix}$ est donc $\cos(a).\begin{pmatrix} \cos(a) \\ \cos(b) \\ \cos(c) \\ \cos(d) \end{pmatrix} - \sin(a).\begin{pmatrix} \sin(a) \\ \sin(b) \\ \sin(c) \\ \sin(d) \end{pmatrix}$.

La seconde colonne est $\cos(b).C - \sin(b).S$.
La troisième ? $\cos(c).C - \sin(c).S$.
Et la dernière ? Non. Vous avez compris.

Les quatre colonnes sont des combinaisons de C et S.
Elles sont donc coplanaires dans le plan engendré par ces deux vecteurs [10].
Le déterminant est donc nul.

Un exercice qui teste votre capacité à dire « je ne calcule pas tout de suite, je réfléchis d'abord, je change de point de vue.
« Est ce une matrice d'un système, ou un simple tableau de nombres ou une famille de vecteurs, ou une transformation... ».
Zéro « par coeur », tout « par cerveau ».

◃ 64 ▹ Une forme bilinéaire antisymétrique sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifie $\phi(\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j}) = 4$ et $\phi(\vec{i}+\vec{k},\ \vec{i}+2.\vec{k}) = 10$.
Pouvez vous calculer $\phi(\vec{i}+\vec{j},\ \vec{j}-\vec{k})$?
Et si je vous donne $\phi(\vec{j}+\vec{k},\ \vec{i}-\vec{j}) = 8$?

Le cours ne parle que des tri-linéaires antisymétriques sur $\mathbb{R}^3$. Ici, elles ne sont que bilinéaires, et « donc » plus nombreuses.
Partons de $\phi(\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j}) = 4$ et développons par bilinéarité :

$$\phi(\vec{i},\ \vec{i}) - \phi(\vec{i},\ \vec{j}) + \phi(\vec{j},\ \vec{i}) - \phi(\vec{j},\ \vec{j}) = 4$$

Profitons de l'aternance : $0 - \phi(\vec{i},\ \vec{j}) + \phi(\vec{j},\ \vec{i}) - 0 = 4$
puis de l'antisymétrie : $-2.\phi(\vec{i},\ \vec{j}) = 4$.
La formule $\phi(\vec{i}+\vec{j},\ \vec{i}-\vec{j}) = 4$ nous a donné $\phi(\vec{i},\ \vec{j}) = -2$ [11]

De même, $\phi(\vec{i}+\vec{k},\ \vec{i}+2.\vec{k}) = 10$ donne

$$\phi(\vec{i},\ \vec{i}) + 2.\phi(\vec{i},\ \vec{k}) + \phi(\vec{k},\ \vec{i}) + 4.\phi(\vec{k},\ \vec{k}) = 10$$
$$2.\phi(\vec{i},\ \vec{k}) - \phi(\vec{i},\ \vec{k}) = 10$$

10. colinéaires si même C et S sont proportionnels
11. et $\phi(\vec{j},\ \vec{i}) = 2$ c'est vrai

On résume ce qu'on connaît :

	$\overrightarrow{i}$	$\overrightarrow{j}$	$\overrightarrow{k}$
$\overrightarrow{i}$	0	-2	10
$\overrightarrow{j}$	2	0	?
$\overrightarrow{k}$	-10	?	0

Et maintenant $\phi(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}) = \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j}) - \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}) + \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{j}) - \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$
$\phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j} - \phi(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{k}) - \phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$
Il nous manque un terme. On ne peut pas conclure.

L'information $\phi(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}) = 8$ donne

$$\phi(\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}) + \phi(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}) - \phi(\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}) = 8$$

et on peut conclure. Le reste n'est que gentil calcul.

◁ 65 ▷ Montrez que $\sum_{k=1}^{n} k.\ln(k)$ est équivalent à $\frac{n^2.\ln(n)}{2}$ quand n tend vers l'infini.

On étudie la croissance de $x \longmapsto x.\ln(x)$ sur $[1,\ +\infty[$. Elle croît.
On encadre donc chaque $k.\ln(k)$ par $\int_{k-1}^{k} t.\ln(t).dt$ et $\int_{k}^{k+1} t.\ln(t).dt$.
On somme ces encadrements, et on a donc $\int_1^n t.\ln(t).dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} k.\ln(k) \leqslant \int_1^{n+1} t.\ln(t).dt$.
On a laissé de côté la première fois le terme $1.\ln(1)$ pour ne pas créer un intempestif $\int_0^1 t.\ln(t).dt$.
On intègre explicitement (par parties) : $\frac{x^2.\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$.
En notant (A_n) notre suite, on a obtenu $\frac{2.n^2.\ln(n) - n^2}{4} - \alpha \leqslant A_n \leqslant \frac{2.(n+1)^2.\ln(n+1) - (n+1)^2}{4} - \beta$ où α et βsont deux réels explicitables mais ne dépendant pas de n.
On divise :

$$1 - \frac{1}{2.\ln(n)} - \frac{\alpha}{n^2.\ln(n)/2} \leqslant \frac{A_n}{\frac{n^2.\ln(n)}{2}} \leqslant \frac{(n+1)^2.\ln(n+1)}{n^2.\ln(n)} - \frac{(n+1)^2}{2.n^2.\ln(n)} - \frac{\beta}{n^2.\ln(n)/2}$$

Les termes comme $\frac{1}{2.\ln(n)}$ et $\frac{\alpha}{n^2.\ln(n)/2}$ tendent vers 0.
De même pour $\frac{(n+1)^2}{2.n^2.\ln(n)}$ puisque $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ tend vers 1.
Il reste $\frac{(n+1)^2.\ln(n+1)}{n^2.\ln(n)}$ à faire tendre vers 1. On sait que déjà $\frac{(n+1)^2}{n^2}$ tend vers 1.
Et $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ s'écrit $\frac{\ln(n)+\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}$ et il tend aussi vers 1.
Par encadrement, le terme du milieu tend vers 1, et c'est la définition de l'équivalence de deux suites.

◁ 66 ▷ De même qu'on peut développer un déterminant par rapport à une colonne faite de n termes avec chacun son cofacteur, il existe une formule où l'on développe par rapport à deux colonnes, somme de termes du type "déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$". Combien de termes de ce type ?

Quel est le signe du terme $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ dans le déterminant de taille 5 ?

Cette formule, vous la connaissez en taille 3 :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} & & c \\ & & \\ & & \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ & \\ a'' & b'' \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} & & c' \\ & & \\ & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \\ & \end{vmatrix}.\begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & c'' \end{vmatrix}$$

(je n'ai pas envisagé la taille 2).

Dans le déterminant de taille n il y a $n!$ termes.
dans un déterminant de taille 2 il y a deux termes, dans un déterminant de taille $(n-2)$ il y en a $(n-2)!$.
Dans le produit d'un déterminant de taille 2 multiplié par un déterminant de taille $n-2$ il y a $2.(n-2)!$ termes.

Si il n'y a pas de termes en trop qui se simplifient mutuellement, dans k produits « déterminant de taille 2 fois déterminant de taille $n-2$ » il y a $k.2.(n-2)!$ termes.

On en veut $n!$ au total ?

Prenons $2.k.(n-2)! = n!$ et déterminons

$$k = \frac{n!}{2.(n-2)!} = \frac{n.(n-1)}{2}$$

on constate que c'est un entier.

Imaginons le calcul de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ contenant $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & & & \\ & & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & & & \\ & & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ & & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$ qui est l'objet de notre énoncé.

Or, dans la grande formule du déterminant, on a justeremtdes termes issus de $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}$

que je vais écrire $\begin{matrix} a_1^1 & .a_3^2 \\ -a_3^1 & .a_1^2 \end{matrix} \times \begin{matrix} a_2^3.a_4^4.a_5^5 & - & a_2^3.a_5^4.a_4^5 \\ +a_4^3.a_5^4.a_2^5 & - & a_4^3.a_2^4.a_5^5 \\ +a_5^3.a_2^4.a_4^5 & - & a_5^3.a_4^4.a_2^5 \end{matrix}$.

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_4^4.a_5^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient -1 (un bicycle).

On y trouve par exemple $a_1^1.a_3^2.a_2^3.a_5^4.a_4^5$.
Ce terme est présent dans le grand déterminant avec coefficient $+1$ (deux bicycles).

Si on veut, on fait demême avec les dix autres termes.

On a donc $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 & a_1^5 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 & a_3^5 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^1 & a_5^2 & a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = \ldots - \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_3^1 & a_3^2 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} a_2^3 & a_2^4 & a_2^5 \\ a_4^3 & a_4^4 & a_4^5 \\ a_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} + \ldots$

◁ 67 ▷ Calculez $\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. (non, pas de rapport)

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x^2 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

calcul : $C_1 := C_1 + x.C_2$ pour éliminer le $-x$

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ -x^3 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e+d.x+c.x^2 & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

calcul : $C_1 := C_1 + x^2.C_3$ pour éliminer le $-x^2$
et ainsi de suite

$$\begin{vmatrix} -x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ e & d & c & b & a-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & 1 \\ S & d & c & b & a-x \end{vmatrix}$$

en continuant $C_1 := C_1 + x^3.C_4 + x^4.C_5$
avec $S = e + d.x + c.x^2 + b.x^3 + (a-x).x^4$
Finalement, en développant ensuite par rapport à la colonne où il n'y a que $s : x^5 - (a.x^4 + b.x^3 + c.x^2 + d.x + e)$
car le cofacteur $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -x & 1 \end{vmatrix}$ vaut 1.
Et l'idée se généralise.

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & -1 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & -1 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & -1 & 0 \\ e & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ avec $S = a+b+c+d+e$ en additionnant toutes les lignes sur la première.
Le déterminant vaut $(a+b+c+d+e)$.
On pouvait aussi développer par rapport à la première colonne et calculer chaque cofacteur, égal à $(-1)^{quelquechose}$ qui est compensé par le $(-1)^{i+k}$ de l'alternance de signes.

◁ 68 ▷

Le corps est $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 5, noté $\mathbb{F}_5$.
Montrez qu'il y 5 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$. .
5 formes trilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
625 formes bilinéaires sur $(\mathbb{F}_5)^2$
125 formes bilinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^3$
125 formes bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$

Dans $(\mathbb{F}_5)^2$ il y a deux vecteurs de base, qu'on va noter $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ (c'est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).
Une forme bilinéaire antisymétrique est totalement déterminée par la donné de $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
C'est à dire par la donnée d'un nombre. Il y a cinq choix pour ce nombre (de 0 à 4).

De toutes façons, toutes les formes biinéaires antisymétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$ sont des multiples du déterminant.
Et le choix du facteur « multiple de » laisse cinq possibilités.

L'idée est la même pour les trilinéaires antisymétriques.
Elles sont toutes des multiples du déterminant. Et il suffit de déterminer le nombre $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ pour trouver ϕ.
Ah oui, j'ai posé $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On travaille sur $(\mathbb{F}_5)^2$. On a des couples de vecteurs de la forme $(a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j}, c.\overrightarrow{i} + d.\overrightarrow{j})$.
Par bilinéarité, une forme $\phi : (a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j}, c.\overrightarrow{i} + d.\overrightarrow{j}) \longmapsto \ldots$ est totalement déterminée si on se donne les quatre nombres

$\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$	$\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$
$\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$

Il n'y a aucune hypothèse de symétrie ou d'antisymétrie permettant de regrouper ou simplifier.

Il y a $5 \times 5 \times 5 \times 5$ choix de ce quadruplet. Ceci fait bien 625.

Dès lors, $\phi : (a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j}, c.\overrightarrow{i} + d.\overrightarrow{j}) \longmapsto a.b.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + b.c.\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + a.c.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + b.d.\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$ est totalement déterminée.

Sur $(\mathbb{F}_5)^3$ on va avoir beaucoup de formes bilinéaires.

On doit choisir $\begin{array}{|c|c|c|}\hline \phi(\vec{i},\vec{i}) & \phi(\vec{j},\vec{i}) & \phi(\vec{k},\vec{i}) \\ \hline \phi(\vec{i},\vec{j}) & \phi(\vec{j},\vec{j}) & \phi(\vec{k},\vec{j}) \\ \hline \phi(\vec{i},\vec{k}) & \phi(\vec{j},\vec{k}) & \phi(\vec{k},\vec{k}) \\ \hline \end{array}$.

Mais si la forme est antisymétrique, on n'a plus tant d'images à déterminer :

$\phi(\vec{i},\vec{i})$	$\phi(\vec{j},\vec{i})$	$\phi(\vec{k},\vec{i})$
$\ominus$	$\phi(\vec{j},\vec{j})$	$\phi(\vec{k},\vec{j})$
$\ominus$	$\ominus$	$\phi(\vec{k},\vec{k})$

Ah, j'oubliais, antisymétrique implique alternée :

0	$\phi(\vec{j},\vec{i})$	$\phi(\vec{k},\vec{i})$
$\ominus$	0	$\phi(\vec{k},\vec{j})$
$\ominus$	$\ominus$	0

Trois nombres à déterminer, 5^3 tableaux possibles.

Pour les bilinéaires symétriques sur $(\mathbb{F}_5)^2$,on doit choisir $\begin{array}{|c|c|}\hline \phi(\vec{i},\vec{i}) & \phi(\vec{j},\vec{i}) \\ \hline \phi(\vec{i},\vec{j}) & \phi(\vec{j},\vec{j}) \\ \hline \end{array}$

Et par symétrie, $\begin{array}{|c|c|}\hline \phi(\vec{i},\vec{i}) & \phi(\vec{j},\vec{i}) \\ \hline & \phi(\vec{j},\vec{j}) \\ \hline \end{array}$ suffit.

◁69▷ ♡ Résolvez $\vec{a}\wedge(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=(\vec{i}+\vec{j}+2.\vec{k})$ d'inconnue vectorielle $\vec{a}$.

Pour résoudre $\vec{a}\wedge(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})=(\vec{i}+\vec{j}+2.\vec{k})$ d'inconnue vectorielle $\vec{a}$, le plus simple est d'en venir à un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{rrcl|} & -y & -z = & 1\\ x & & +z = & 1\\ x & -y & = & 2\end{array}\right.$$

La première donne $y=1-z$, la seconde donne $x=1-z$ et la troisième confirme *(système compatible)*.

On trouve les solutions : $S=\left\{\begin{pmatrix} 1-z\\ 1-z\\ z\end{pmatrix}\mid z\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}+Vect\left(\begin{pmatrix} -1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\right)$ suivant la forme souhaitée *(description complète ou solution particulière plus homogènes)*.

Si vous avez rédigé en $\left\{\begin{array}{rrcl|} & -y & -z = & 1\\ x & & +z = & 1\\ x & -y & = & 2\end{array}\right.\Rightarrow(x=1-z \text{ et } y=1-z)$ *vous avez gardé vos réflexes de résolution par implication, et vous avez... perdu. En effet, on a tout aussi bien* $\left\{\begin{array}{rrcl|} & -y & -z = & 1\\ x & & +z = & 1\\ x & -y & = & 43.\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow(x=1-z \text{ et } y=1-z)$ *puisque c'est juste une implication...*

◁70▷ $\vec{i}\wedge\vec{j}\wedge\vec{i}\wedge\vec{k}$ n'a pas de sens si on ne met pas de parenthèses *(ainsi, $(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{i}\wedge\vec{k})$ va en avoir)*. Combien de « valeurs » peut prendre ce vecteur suivant comment vous mettez les parenthèses ? *(base canonique)*

On peut mettre toutes les parenthèses que voici :

$\left((\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge\vec{i}\right)\wedge\vec{k}$	$\left(\vec{i}\wedge(\vec{j}\wedge\vec{i})\right)\wedge\vec{k}$	$(\vec{i}\wedge\vec{j})\wedge(\vec{i}\wedge\vec{k})$	$\vec{i}\wedge\left((\vec{j}\wedge\vec{i})\wedge\vec{k}\right)$	$\vec{i}\wedge\left(\vec{j}\wedge(\vec{i}\wedge\vec{k})\right)$
$\left(\vec{k}\wedge\vec{i}\right)\wedge\vec{k}$	$\left(\vec{i}\wedge(-\vec{k})\right)\wedge\vec{k}$	$\vec{k}\wedge(-\vec{j})$	$\vec{i}\wedge\left((-\vec{k})\wedge\vec{k}\right)$	$\vec{i}\wedge\left(\vec{j}\wedge(-\vec{j})\right)$
$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$	$\vec{j}\wedge\vec{k}=\vec{i}$	$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{0}$

Finalement, seulement deux vecteurs.

◁ 71 ▷ ♡ a, b et c sont trois réels, montrez : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) \end{vmatrix} = \cos(b) - \cos(a)$ et

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(b)).(\cos(c) - \cos(a)).$$

Avez vous une formule pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$? Et pour $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix}$

En taille 2, c'est facile.
En taille 3, on peut développer le déterminant en commençant par l'écrire

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) \end{vmatrix}$$

On écrit ensuite $\cos(2.b) - \cos(2.a) = 2.\cos^2(b) - 1 - (2.\cos^2(a) - 1) = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(b) + \cos(a))$
On factorise alors le contenu des colonnes :

$$\begin{vmatrix} \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) \\ \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) \end{vmatrix} = 2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(a)).\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) + \cos(a) \end{vmatrix}$$

On trouve bien la formule demandée.

Pour celle de taille 4, on effectue le même type de travail pour aboutir à

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) - \cos(a) & \cos(c) - \cos(a) & \cos(d) - \cos(a) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) - \cos(2.a) & \cos(2.c) - \cos(2.a) & \cos(2.d) - \cos(2.a) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) - \cos(3.a) & \cos(3.c) - \cos(3.a) & \cos(3.d) - \cos(3.a) \end{vmatrix}$$

On factorise de même, puis avec $\cos(3.b) - \cos(3.a) = 4.\cos^3(b) - 4.\cos^3(a) - 3.(\cos(b) - \cos(a))$
$\cos(3.b) - \cos(3.a) = (\cos(b) - \cos(a)).(4.(\cos^2(b) + \cos(a).\cos(b) + \cos^2(a) - 3)$
On arrive à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) + \cos(a) & \cos(d) + \cos(a) \\ 4.(\cos^2(b) + \cos(a).\cos(b) + \cos^2(a) - 3) & \dots & \dots \end{vmatrix}$
en facteur de $2.(\cos(b) - \cos(a)).(\cos(c) - \cos(a)).(\cos(d) - \cos(a))$.

On soustrait la première colonne aux autres

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(b) + \cos(a) & \cos(c) - \cos(b) & \cos(d) - \cos(b) \\ \dots & 4.\cos^2(c) - 4.\cos^2(b) + 4.(\cos(c) - \cos(b)).\cos(a) & \end{vmatrix}$$

A la fin, on a

$$8\times \begin{matrix} (\cos(d) - \cos(a)) & (\cos(c) - \cos(a)) & (\cos(b) - \cos(a)) \\ (\cos(d) - \cos(b)) & (\cos(c) - \cos(b)) & \\ (\cos(d) - \cos(c)) & & \end{matrix}$$

Il existe aussi une solution astucieuse avec les déterminants de VanDerMonde et les polynômes de Tchebychev..

Avec les cosinus hyperboliques, le résultat est le même.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ ch(a) & ch(b) & ch(c) \\ ch(2.a) & ch(2.b) & ch(2.c) \end{vmatrix} = 2.(ch(b) - ch(a)).(ch(c) - ch(a)).(ch(c) - ch(b))$$

Et le coup des polynômes de Tchebychev ?

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2 - 1 & 2.y^2 - 1 & 2.z^2 - 1 & 2.t^2 - 1 \\ 4.x^3 - 3.x & 4.y^3 - 3.y & 4.z^3 - 3.z & 4.z^3 - 3.z \end{vmatrix}$$

avec des notations que j'espère claires.

On soustrait en lignes : $L_2 \leftarrow L_2 + L_0$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 3.L_1$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & y & z & t \\ 2.x^2 & 2.y^2 & 2.z^2 & 2.t^2 \\ 4.x^3 & 4.y^3 & 4.z^3 & 4.z^3 \end{vmatrix}$

Il ne reste qu'à sortir les 2 et les 4 et on a un déterminant de VanDerMonde.
On a donc 8 fois le produit des différences de cosinus.

◁ 72 ▷ Est il possible qu'une phrase soit vraie dans ce que j'ai écrit dans ce cadre ?

Dans ce cadre, exactement une phrase est vraie.
Dans ce cadre, exactement une phrase est fausse.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont vraies.
Dans ce cadre, exactement deux phrases sont fausses.

◁ 73 ▷ Trouvez une matrice dont la comatrice est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Même question avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une matrice de comatrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec la définition.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ facile (même sans être inversible).

Et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la comatrice de $\frac{1}{\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Prenons les trois vecteurs

$$\vec{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \frac{\sqrt{3}}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculons les trois produits vectoriels.
On a ce qu'on voulait.

◁ 74 ▷ ♡ Montrez que l'équation d'un cercle du plan est de la forme $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$.
Montrez néanmoins que $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$ n'est pas une équation de cercle.
Montrez que $\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ est l'équation du cercle passant par $A(a,\alpha)$, $B(b,\beta)$ et $C(c,\gamma)$ *(surtout ne développez pas, on est en maths ! pensez à prouver que c'est la forme d'une équation de cercle, et trouvez trois points évidents)*. Donnez l'équation et le centre du cercle passant par $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$.
Donnez l'équation et le centre de la sphère de $\mathbb{R}^3$ passant par $A(1,1,0)$, $B(2,5,0)$ et $C(4,12,0)$ et $D(0,0,1)$.

L'équation duu cercle de centre $C(a,\ b)$ et de rayon R est $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$.
On la développe en $x^2 + y^2 - 2.\alpha.x - 2.\beta.y + \gamma = 0$ avec $\gamma = \alpha^2 + \beta^2 - R^2$.

Si les coefficients sont mal choisis : $x^2 + y^2 - 2.x - 4.y + 7 = 0$

$$(x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + 7 = 0$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = -2$$

Ce qu'il reste n'est pas un carré de rayon. Le cercle est « imaginaire ».

$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ se développe sous la forme

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

On a la forme $(x^2+y^2) - 2.A.x - 2.B.y + C = 0$ en posant

$$A = \frac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}} \quad B = -\frac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}} \quad C = \frac{\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix}}{2.\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix}}$$

sous réserve que le dénominateur soit non nul (on en recause plus loin si nécessaire).

C'est bien la forme d'une équation de cercle.

Ensuite, $\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ a^2+\alpha^2 & a & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux lignes égales.
Ce cercle contient le points A.
De même, avec « $L_1 = L_3$ », il contient le point B.
Et le point C.

Or, par A, B et C passe un cercle et un seul.
C'est donc LE cercle passant par A, B et C.

Tout ça sans se prendre la tête à déterminer son centre par trente équations comme le ferait un élève malformé par le système « éducatif » pré-bac.

Pour $A(1,1)$, $B(2,5)$ et $C(4,12)$, l'équation est

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 29 & 2 & 5 & 1 \\ 160 & 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

et on développe en

$$x^2+y^2-335.x+77.y+256$$

On peut ainsi retrouver les coordonnées du centre $\left(\frac{335}{2}, \frac{-77}{2}\right)$ et un petit calcul donne le rayon [12].

Et pour la sphère, le raisonnement est le même : $\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ a^2+a'^2+a''^2 & a & a' & a'' & 1 \\ b^2+b'^2+b''^2 & b & b' & b'' & 1 \\ c^2+c'^2+c''^2 & c & c' & c'' & 1 \end{vmatrix} = 0$
est l'équation d'une sphère (forme développée $(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2 = R^2$).
Et elle est valable pour A, pour B, pour C et pour D. C'est LA sphère passant par A, B, C et D.

Ah oui, j'ai promis de traiter à part le cas $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ dans l'équation

$$(x^2+y^2).\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} - x.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & \alpha & 1 \\ b^2+\beta^2 & \beta & 1 \\ c^2+\gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} + y.\begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & 1 \\ b^2+\beta^2 & b & 1 \\ c^2+\gamma^2 & c & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a^2+\alpha^2 & a & \alpha \\ b^2+\beta^2 & b & \beta \\ c^2+\gamma^2 & c & \gamma \end{vmatrix} = 0$$

C'est alors l'équation d'une droite.
Mais cette droite passe quand même par A, B et c puisque ces trois couples de composantes vérifient l'équation.
Et c'est louche une droite passant par trois points imposés.
A moins que ces points ne soient déjà alignés, auquel cas la question « équation du cercle » perd son sens...

12. moi je dirais « mesure juste la distance de A au centre que tu viens de trouver

On notera que $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b & \beta & 1 \\ c & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0$ équivaut à $\begin{vmatrix} a & \alpha & 1 \\ b-a & \beta-\alpha & 0 \\ c-a & \gamma-\gamma & 0 \end{vmatrix} = 0$ puis $\begin{vmatrix} b-a & \beta-\alpha \\ c-a & \gamma-\gamma \end{vmatrix} = 0.$

On reconnaît « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ».
Comme quoi tout se tient...

◁ 75 ▷ ♡ Un triangle du plan a pour sommets A, B et C de coordonnées $(a',\ a'')$, $(b',\ b'')$ et $(c',\ c'')$. L'aire du triangle est notée S. Montrez $2.S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$.

Le cours nous indique déjà : $2.S = \det_C(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC})$. Avec des coordonnées : $2.S = \begin{vmatrix} b'-a' & c'-a' \\ b''-a'' & c''-a'' \end{vmatrix}$.
Un déterminant nous est donné qu'on arrange par combinaisons du type $C_k \leftarrow C_k - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a' & b'-a' & c'-a' \\ a'' & b''-a' & c''-a'' \end{vmatrix}$$

On développe ce déterminant par rapport à la première ligne, et on retrouve $2.S$ comme promis.
Et c'est aussi $\begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix}$ car une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Déduisez : $4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

Cette question n'était pas juste là pour que vous fassiez appel à $\det({}^tM) = \det(M)$. *C'est une piste.*

On calcule $4.S^2 = 2.S.2.S = \begin{vmatrix} 1 & a' & a'' \\ 1 & b' & b'' \\ 1 & c' & c'' \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$, voilà l'idée.
Or, le déterminant du produit est le produit est le produit des déterminants :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Quand on développe le déterminant proposé

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1+a'^2+a''^2 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+a'.c'+a''.c'' \\ 0 & 1+a'.b'+a''.b'' & 1+b'^2+b''^2 & 1+b'.c'+b''.c'' \\ 0 & 1+a'.c'+a''.c'' & 1+b'.c'+b''.c'' & 1+c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

par rapport à sa première colonne donne celui de l'énoncé.

Il était possible évidemment d'aboutir au même résultat par de laborieux calculs et développement complet de toutes les formules. C'était bien moins intelligent, mais ça rapportait tous les points. Et ça faisait passer le temps...

puis $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

On part du déterminant proposé et on le travaille par combinaisons en lignes et en colonnes. On soustrait la première ligne aux autres :

$$4.S^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ -1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ -1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Ca ne ressemble pas encore au déterminant demandé. Il manque le 0 en haut. Et il manque le signe moins.
Pour le signe moins, la multilinéarité le donne :

$$-4.S^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$$

Il y a cette fois un -1 en haut.

Mais quel est son cofacteur ? C'est $\begin{vmatrix} a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$

Si celui ci est nul, les deux déterminants
$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ seront égaux.
Il suffit pour celà de prouver que ces colonnes sont coplanaires.
Or, ce sont toutes trois des combinaisons de deux colonnes élémentaires :

$\begin{pmatrix} a'^2+a''^2 \\ a'.b'+a''.b'' \\ a'.c'+a''.c'' \end{pmatrix} = a'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + a''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a'.b'+a''.b'' \\ b'^2+b''^2 \\ b'.c'+b''.c'' \end{pmatrix} = b'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + b''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a'.c'+a''.c'' \\ b'.c'+b''.c'' \\ c'^2+c''^2 \end{pmatrix} = c'.\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + c''.\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$	

Trois vecteurs dans le plan engendré par $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$, leur déterminant est bien nul.

et $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$

On repart de $-4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a'^2+a''^2 & a'.b'+a''.b'' & a'.c'+a''.c'' \\ 1 & a'.b'+a''.b'' & b'^2+b''^2 & b'.c'+b''.c'' \\ 1 & a'.c'+a''.c'' & b'.c'+b''.c'' & c'^2+c''^2 \end{vmatrix}$ et multiplie par -8 (je sais on aurait voulu tout multiplier par 4, mais on va bien voir) ; ceci revient à multiplier trois colonnes par -2 :

$$8.4.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On a les bons "double produits", mais on a des -2 en trop sur la premeière ligne. Alors on sort un facteur -2 de la première ligne :

$$8.4.S^2 = -2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2.a'^2-2.a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & -2.a'.c'-2.a''.c'' & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

Le facteur -2 en trop s'en va, c'est fini, on a la formule de l'énoncé.

Peu de gens savent par exemple qu'on a $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & -\beta' & -\gamma' \\ \alpha'' & -\beta'' & -\gamma'' \end{vmatrix}$. *Mais je n'irai pas prétendre que ce soit un grand avantage pour vous de le savoir.*

et enfin $-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(déterminant de Cayley-Menger*[a]*).*

a. *Karl Menger mathématicien du vingtième siècle né à Vienne mais devenu américain en* 1937*, connu pour son "éponge" fractale, de volume nul et d'aire infinie*

On a nos doubles produits. Il nous faut des termes en $(a'-b')^2+(a''-b'')^2$. On va utiliser la première colonne et la première ligne pour les avoir. On ajoute $(a'^2+a''^2).C_1$ à la colonne C_2 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2-a''^2 & -2.a'.b'-2.a''.b'' & -2.a'.c'-2.a''.c'' \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -2.b'^2-2.b''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & -2.b'.c'-2.b''.c'' & -2.c'^2-2.c''^2 \end{vmatrix}$$

On ajoute ensuite $(b'^2+b''^2).C_1$ sur la colonne C_3 et ce dont on se doute sur la colonne C_4 :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a'^2-a''^2 & b'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+b''^2 & c'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -b'^2-b''^2 & c'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & b'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+b''^2 & -c'^2-c''^2 \end{vmatrix}$$

On est en bon chemin, il manque encore des termes pour nos identités remarquables en

$$|\overrightarrow{AB}|^2 = (a'^2-2.a'.b'+b'^2)+(a''^2-2.a''.b''+b''^2)$$

et pour avoir des 0 sur la diagonale. On travaille en ligne : $L_2 \leftarrow L_2+(a'^2+a''^2).L_1$:

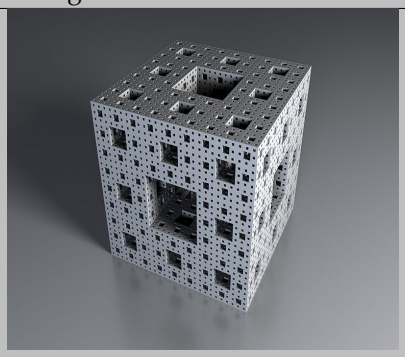
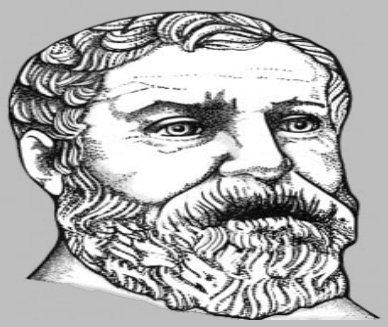
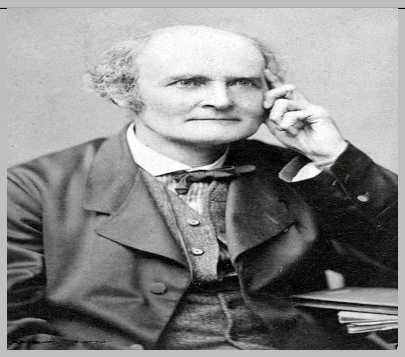
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & b'^2-2.a'.b'+a'^2+a''^2-2.a''.b''+b''^2 & c'^2-2.a'.c'+a'^2+a''^2-2.a''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.b'-2.a''.b''+a''^2 & -b'^2-b''^2 & c'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+c''^2 \\ 1 & a'^2-2.a'.c'-2.a''.c''+a''^2 & b'^2-2.b'.c'-2.b''.c''+b''^2 & -c'^2-c''^2 \end{vmatrix}$$

On élimine encore sur les autres lignes et on a enfin ces carrés de normes attendus :

$$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Moralité : si on connaît juste les trois longueurs et aucun angle, on peut quand même calculer l'aire. Et on a la formule similaire en dimension n.

Retrouvez la formule dite de Heron[a] : $S=\sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ où a, b et c désignent les longueurs des trois côtés du triangle.

a. Heron d'Alexandrie, premier siècle, mathématicien grec, auteur de nombreux livres et d'astucieux systèmes mécaniques

Oui, c'est le même Heron que dans la formule de Euclide et Héron, généralisation du théorème de Pythagore avec un angle non droit : $c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos(\gamma)$ *appelée aussi formule d'Al-Kashi.*

On note a, b et c les trois longueurs des côtés pour simplifier et faire comme tout le monde :

$-16.S^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$ On développe par rapport à une colonne :

$$-16.S^2 = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 0 & a^2 \end{vmatrix}$$

et on recommence, regroupe : $\boxed{16.S^2 = 2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$

On sent venir les formules de Viète, et pourtant...

Pour établir la formule de Heron, il suffit de comparer la somme $2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$ et le produit $(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)$.

Connaissant Simon F., je me doute qu'il va juste écrire "*on développe le membre de droite et on retrouve celui de gauche*".

Mais il faut prouver que vous l'avez fait. Et que vous l'avez fait intelligemment :

$(a+b+c).(a+b-c) = (a+b)^2 - c^2$	$(c+b-a).(c+a-b) = c^2 - (a-b)^2$

On développe pour finir le produit de ces deux termes :

$(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b) = -c^4 - (a+b)^2.(a-b)^2 + c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$

On a le terme $-c^4$.

Le produit $(a+b)^2.(a-b)^2$ vaut $(a^2-b^2)^2$ et apporte a^4, b^4et $2.a^2.b^2$ avec les bons signes.

Il reste $c^2.((a+b)^2 + (a-b)^2)$ de valeur $c^2.(2.a^2 + 2.b^2)$ et on a les derniers double produits.

On a donc sans gros effort

$$\boxed{2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4 = (a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}$$

On reporte, et on a la formule de Heron $S = \sqrt{\dfrac{(a+b+c).(a+b-c).(b+c-a).(c+a-b)}{16}}$ plus connue sous la forme $\boxed{S = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}$ où p est le demi-périmètre $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

♣1♣ Pour un tétraèdre de $\mathbb{R}^3$, la formule est $288.V^3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & AB^2 & AC^2 & AD^2 \\ 1 & AB^2 & 0 & BC^2 & BD^2 \\ 1 & AC^2 & BC^2 & 0 & CD^2 \\ 1 & AD^2 & BD^2 & CD^2 & 0 \end{vmatrix}$ *(dite formule de Piero della Francesca*[a]*)*. Prouvez la.

a. *XV^eme siècle, mathématicien italien (oui, avec ce nom) qui formalisa la notion de perspective et volumes dans $\mathbb{R}^3$ et reste d'ailleurs connu comme peintre*

Même type de calculs.

◃76▹ Écrivez un script Python qui prend en entrée n et crée la matrice de taille n sur n "du laboureur", dont voici les premières $L_0 = ()$, $L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$, $L_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \curvearrowright \\ \curvearrowleft & \leftarrow & \leftarrow & \leftarrow & \hookleftarrow \\ \hookrightarrow & \rightarrow & \rightarrow & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \end{pmatrix}$

Calculez son déterminant en fonction de n.

On crée la matrice comme liste de listes. La première ligne est `range(1, n+1)`.

La suivante est `range(n+1, 2.n+1)`, mais en sens inverse.

La suivante est `range(2.n+1, 3.n+1)` dans le bon sens :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & \rightarrow & n \\ 2.n & 2.n-1 & 2.n-2 & \leftarrow & n+1 \\ 2.n+1 & 2.n+2 & 2.n+3 & \rightarrow & \end{array}$$

et ainsi de suite.

Dans la ligne d'indice `i` (indice `Python`) on a les termes de `n.i+1` à `n.(i+1)`. Mais le sens de remplissage de la ligne dépend de la parité de `i`.

On peut proposer :

```
def Laboureur(n) :
....M = [ ]
....for i in range(n) : #les lignes
........L = list(range(n*i+1, n*(i+1)+1) #gare aux indices
........if i%2==1 : #suivant la parité de i
............L.reverse( ) #on la renverse
........M.append(L) #la ligne est validée
....return M #la matrice est finie
```

Il y a d'autres solutions, en remplissant directement puis en retournant une ligne sur deux

```
....M = [[i*n+k+1 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for i in range(1, n, 2) : #on génère les indices impairs
........M[i].reverse( )
```

On peut aussi explorer un `index in range(1, n*n+1)` pour avoir tous les termes de la liste, puis compléter les lignes une par une en append si `i%n` est pair ou en append au début si `i%n` impair.

```
....M = [ ]
....L = [ ]
....for index in range(1, n*n+1) : #on va tout parcourir
........if (index/n)%2 == 0 : #sur quelle ligne est on ?
............L = L+[index] #ligne paire, le laboureur avance vers la droite
........else :
............L = [index]+L #ligne impaire, il avance vers la gauche
........if index%n == 0 : #est en en bout de ligne ?
............M.append(L) #on colle la ligne
............L = [ ] #on remet la ligne à zéro
```

Pour le calcul du déterminant, il y a les premiers. Mais à partir d'un certain rang, tout devient facile.
Dès qu'il y a plus de quatre lignes, on peut remplacer L_1 par $L_1 - L_0$ et L_3 par $L_3 - L_2$. On a tout de suite deux lignes égales, le déterminant est nul.
Pour saisir :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

$L_0 = ()$	$L_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$	$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$	$L_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 16 & 15 & 14 & 13 \end{pmatrix}$	
1	1	-3	0	0	etc

On peut aussi, dès la taille 3 remplacer L_2 par $L_2 - L_1$ et retrouver L_0. Même $\det(L_3)$ est nul.

◁ 77 ▷ Soit A une matrice de terme général a_i^k. On note $\overbrace{A}$ la matrice de terme général $\alpha_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$. Expliquez "géométriquement" comment elle se déduit de A.
Montrez qu'elle a le même déterminant que A.
Vous pourrez revenir à la formule "brute", vous pourrez aussi utiliser la permutation $i \longmapsto n+1-i$.
Exprimez $\overbrace{A}$ à l'aide de A et de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

On intervertit le rôle des lignes et des colonnes, puisque k passe en indice de ligne et i en indice de colonne.
Ensuite, on renverse l'ordre des lignes par $n+1-i$, pareil pour les colonnes (rappel : $j \longmapsto n+1-j$ renverse une liste $[1, 2, \dots n]$).
Taille 1 : bof, sans intérêt
Taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$
Taille 3 : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a'' & a' & a \\ b'' & b' & b \\ c'' & c' & c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} c'' & c' & c \\ b'' & b' & b \\ a'' & a' & a \end{pmatrix}$

La matrice a tourné d'un demi-tour autour de son centre (son centre est une case immobile, ou un point fictif).
Le déterminant n'a pas changé.

◁ 78 ▷ f est une application affine paire vérifiant $f(2) = 7$. calculez $\int_0^5 f(t).dt$.

Vous en connaissez beaucoup des applications affines qui soient paires ? On considère $x \longmapsto a.x + b$. On exeige $f(1) = f(-1)$ et on a immdiatement $a + b = -a + b$ et donc $a = 0$.
Les seules applications affines paires sont les applicatons constantes.

Approche plus lourde mais peut être plus compréhensible pour certains :
la dérivée d'une application paire est impaire, donc nulle en 0
la dérivée d'une application affine est une constante
On a donc une constante nulle en 0*. Elle est nulle.*
L'application cherchée est constante.

Comme l'application est constante et qu'on nous donne sa valeur en un point, on la connaît partout et l'intégrale est le produit hauteur fois largeur.

◁ 79 ▷ Lequel de ces deux programmes va bien construire une matrice (justifiez) :

```
def Fred(n, a, b) :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n) :
........M[k][k] = a
........M[k][k+1] = b
....return M
```

```
def Daphne(n, a, b) :
....M=[[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in range(n) :
........M[k][k] = a
........M[k][k-1] = b
....return M
```

Calculez le déterminant de celle qui existe.

```
def Fred(n, a, b) :
....M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for k in ange(n) :
........M[k][k] = a
........M[k][k+1] = b
....return M
```

Fred va planter.
Pour k égal à $n-1$ *(dernier du range)*, il va vouloir écrire sur le terme de position `[n-1][n]`, qui n'existe pas.

Mais finalement, on le savait, les pièges montés par Fred ne marchent jamais...

En revanche, Daphné s'en sort, car même pour `k` nul, le terme `M[0][-1]` existe. il est en bout de ligne.

De fait, Daphné construit les matrices telles que $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$.

On calcule le déterminant de la matrice de taille n (qu'on note d_n) en développant par rapport à la première ligne :
$d_n = a.c_n + (-1)^{n+1}.b.\gamma_n$ où $c_n$et $\gamma_n$sont deux cofacteurs de forme assez simples.
c_n est le déterminant d'une matrice triangulaire inférieur de diagonale faite de a
γ_n est le déterminant d'une matrice triangulaire supérieur de diagonale faite de a

Ici : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

Finalement : $\boxed{d_n = a^n + (-1)^{n+1}.b^n}$