

LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 5 mai

M.P.S.I.2



2024

2025

TD26

◁0▷ ♡ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (argument géométrique sur des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ « pas si nombreux »).

◁1▷ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix} = e^t + t$ d'inconnue y fonction de t .

◁2▷ ♡ Cette famille est liée dans $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot) : (\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix})$. Retrouvez les coefficients qui manquent et donnez une relation de dépendance linéaire.
(liée : l'un des éléments est combinaison linéaire des autres).

◁3▷ Un couple de suites récurrentes vérifie : $u_0 = 1, v_0$ donné et pour tout $n \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2.v_n \\ v_{n+1} = 6.u_n + 2.v_n \end{cases}$. Existe-t-il des valeurs de v_0 pour lesquelles on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$?

◁4▷ ♡ Dans le plan usuel, on donne $A(1, 4), B(5, 2)$ et $C(4, 5)$. Donnez l'équation de la droite (AB) . Mesurez la distance de C à la droite (AB) . Trouvez les points D et E de (AB) tel que $[C, D]$ et $[C, E]$ découpent (AB, C) en trois triangles d'aires égales.
C'est un exercice sur les déterminants.

◁5▷ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 4 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles a et b .

◁6▷ Calculez les deux intégrales suivantes et dites qui est la plus grande : $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t} .dt$ et $\int_1^e (\ln(t))^2 .dt$.

◁7▷ On admet (vous le verrez en Spé) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} .dt = \frac{\pi}{2}$. Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} .dt = \frac{\pi}{2}$.

◁8▷ Quand il va au travail à la vitesse de quatre vingt kilomètres par heures, il a dix minutes d'avance. Quand il roule à soixante kilomètres à l'heure, il a dix minutes de retard. A quelle vitesse doit-il rouler pour arriver à l'heure ?

◁9▷ On pose $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.

Ajustez les quatre grecques pour avoir $M.V = V.D$. Déduisez la valeur de $\det(M)$ sous forme factorisée.

◁10▷ Résolvez $Tr\left(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n\right) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

Résolvez $Tr\left(\begin{pmatrix} \cos(5.\pi/12) & -\sin(5.\pi/12) \\ \sin(5.\pi/12) & \cos(5.\pi/12) \end{pmatrix}^n\right) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

Résolvez $Tr\left(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n\right) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

Résolvez $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = I_4$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

Non, ne diagonalisez pas, reconnaissez des matrices de rotation.

◁ 11 ▷

I~0) On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ muni de la base canonique orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tout triplet de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$, on définit la matrice G (dite « matrice de Gram ») de terme général

$$g_i^k = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k \text{ (produit scalaire des deux vecteurs)} : \begin{pmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \|\vec{u}_2\|^2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & \|\vec{u}_3\|^2 \end{pmatrix}$$

Montrez : $\text{Tr}(G) \geq 0$ et $\text{Tr}(\text{Com}(G)) \geq 0$.

I~1) Montrez même que $\text{Tr}(G)$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont nuls.

I~2) Montrez aussi $\text{Tr}(\text{Com}(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

I~3) Montrez que $\det(G)$ est positif ou nul. Montrez qu'il est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires (indication : ${}^t P.P$).

I~4) Soit X (de composantes x, y et z) un vecteur propre de G (valeur propre λ), montrez : $\lambda \cdot \|X\|^2 = {}^t X.G.X = \|x.\vec{u}_1 + y.\vec{u}_2 + z.\vec{u}_3\|^2$. Déduisez que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

I~5) On suppose à présent $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ de norme 1. Il existe donc trois angles vérifiant $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \cos(\alpha)$, $\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = \cos(\beta)$ et $\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1 = \cos(\gamma)$ (produits scalaires). Par symétrie des rôles, on posera $0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha \leq \pi$. On note G la matrice de Gram.

Déterminez les racines du polynôme $X^2 - 2.X.\cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

I~6) Déduisez une factorisation de $\det(G)$ comme produit de deux facteurs.

I~7) Montrez que $\cos(\alpha)$ est entre $\cos(\beta - \gamma)$ et $\cos(\beta + \gamma)$.

I~8) Montrez l'équivalence entre $\det(G) = 0$ et
$$\begin{array}{ccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & \pi \\ & & \text{ou} & & \\ \alpha & = & \beta & +\gamma & \end{array}.$$

II~0) On suppose $\alpha = \beta = \gamma$ et on pose alors $c = \cos(\alpha)$. Déterminez le polynôme caractéristique de G , puis ses valeurs propres (sachant qu'il y a une valeur propre double).

II~1) Quelle est la plus petite valeur que peut prendre c ?

II~2) On prend $c = -1/2$. Calculez $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

II~3) Déterminez le noyau de G . Retrouvez le résultat précédent.

- Rappel :
- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A : $\det(\lambda.I_n - A)$.
 - Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les λ pour lesquels il existe au moins un vecteur X non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.
 - Noyau d'une application linéaire f : ensemble des vecteurs $\vec{u}$ vérifiant $f(\vec{u}) = \vec{0}$.
 - Noyau d'une matrice rectangulaire A (format n sur k) : ensemble des vecteurs X de taille k vérifiant $M.X = 0_n$.
 - Le déterminant du produit est le produit des déterminants.

• La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est
$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b'' & c'' \\ b' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a'' & c'' \\ a' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a'' & b'' \\ a' & b' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

◁ 12 ▷

Soit A une matrice à trois colonnes et deux lignes. Montrez que ${}^t A.A$ et $A.{}^t A$ sont deux matrices carrées.

Montrez que l'une a un déterminant nul. Montrez que le déterminant de l'autre est une somme de carrés de déterminants de matrices de taille 2 extraites de A .

◁ 13 ▷

Montrez que la droite passant par $O(0, 0)$ et $E(42, 151)$ a pour équation cartésienne
$$\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0.$$

◁14▷ ♡ Calculez $\int_1^2 x^x \cdot (1 + \ln(x)) \cdot dx$.

◁15▷ ♡ A et B sont des ensembles. Montrez : $(P(A) \cap P(B) = \emptyset \Rightarrow P(A) = P(B))$
 $(P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A \cap B = \emptyset)$

		diagonalisable	non diagonalisable
◁16▷ ♡ Vérifiez	invertible	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	non invertible	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

◁17▷ La matrice M_n de taille n sur n a pour terme général $1_{i \neq j}$. Calculez son déterminant.

◁18▷ f est une application de E dans F vérifiant $\exists y \in F, \forall x \in E, f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
 f est une application de E dans F vérifiant : $\exists x \in E, \forall y \in F, f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
 Et si on a $\forall (a, b) \in E^2, a \neq b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

◁19▷ On remplit une matrice sous forme de triangle de Pascal écrit de travers par rapport à nos habitudes et coupé en carré, comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ venant de $\begin{matrix} & & & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 \\ 1 & & 1 & 3 & & 6 & & 3 & & 1 \\ & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 3 & & 4 & & 1 \\ & & & & & & & 1 & & 5 & & 15 & & 35 & & 70 \end{matrix}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$. Écrivez un script Python qui prend en entrée n et fabrique la matrice de taille n sur n . (Calculez le déterminant de cette matrice.)

◁20▷ ♡ Sachant que 2337, 2698, 4655 et 9614 sont des multiples de 19^1 , montrez que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ est aussi multiple de 19. Pensez à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

◁21▷ ♡ Inversez les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

◁22▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A^{-1})$. (la relation de Pascal peut servir...)

◁23▷ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Généralisez en taille n , si possible avec démonstration.

◁24▷ ♡ Dérivez (pour b fixé non nul) $x \mapsto \frac{x}{x^2 + b^2}$.

Calculez $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx \right) \cdot dy$ et $\int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dy \right) \cdot dx$.

Pas de quoi être troublé...

Sauf si on se dit que $\iint_C \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \cdot dx dy$ doit se calculer, quand C est le carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

Et une intégrale double, c'est deux intégrales simples.

On doit bien avoir $\int_{y=0}^1 \left(\int_{x=0}^1 F(x, y) \cdot dx \right) \cdot dy = \iint_{[0,1]^2} F(x, y) \cdot dx dy = \int_{x=0}^1 \left(\int_{y=0}^1 F(x, y) \cdot dy \right) \cdot dx$.

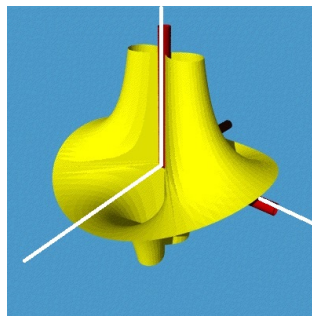
1. non, vous n'étiez pas obligé de le savoir

C'est ce qu'on appelle théorème de Fubini.

Et il est vrai si f est de classe C^0 sur tout $[0, 1]^2$.

Mais justement, ici, F n'est pas continue. Elle n'est pas définie en 0, et ça suffit à tout planter...

On a d'ailleurs $\iint_C \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| . dx dy = +\infty$.



25 ♠ ♣ $\mathbb{F}$ est le corps des entiers de **range**(7) pour l'addition et la multiplication modulo 7, et E est $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$. Montrez qu'aucune forme bilinéaire antisymétrique ϕ sur $E \times E$ ne vérifie $\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$.

Soit Φ une forme bilinéaire antisymétrique vérifiant $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 5$ calculez $\Phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$.

Montrez qu'il y a 49 vecteurs dans E et sept forme bilinéaires antisymétriques de $E \times E$ dans $\mathbb{F}$.

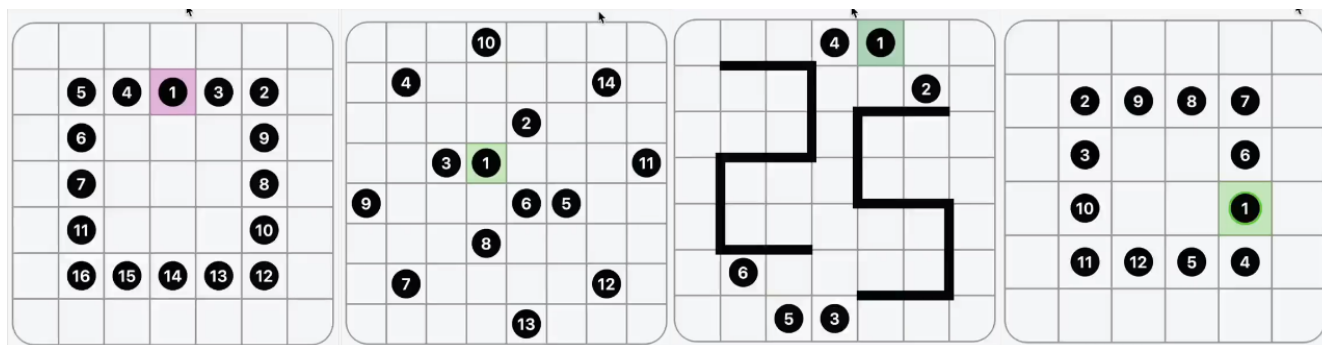
Une forme bilinéaire symétrique ψ vérifie $\psi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \psi\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 5$, montrez qu'on peut calculer $\psi\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

"Anton Voyl n'arrivait pas à dormir. Il alluma. Son Jaz marquait minuit vingt. Il poussa un profond soupir, s'assit dans son lit, s'appuyant sur son polochon. Il prit un roman, il l'ouvrit, il lut ; mais il n'y saisissait qu'un imbroglio confus, il butait à tout instant sur un mot dont il ignorait la signification.

Il abandonna son roman sur son lit. Il alla à son lavabo ; il mouilla un gant qu'il passa sur son front, sur son cou.

Son pouls battait trop fort. Il avait chaud. Il ouvrit son vasistas, scruta la nuit. Il faisait doux. Un bruit indistinct montait du faubourg. Un carillon, plus lourd qu'un glas, plus sourd qu'un tocsin, plus profond qu'un bourdon, non loin, sonna trois coups. Du canal Saint-Martin, un clapotis plaintif signalait un chaland qui passait.

Sur l'abattant du vasistas, un animal au thorax indigo, à l'aiguillon safran, ni un cafard, ni un charançon, mais plutôt un artisan, s'avancait, traînant un brin d'alfa. Il s'approcha, voulant l'aplatir d'un coup vif, mais l'animal prit son vol, disparaissant dans la nuit avant qu'il ait pu l'assaillir." (extraits de « La disparition »).



26 a, b et c sont trois complexes distincts. Montrez que $\delta(x)$ est une fonction du premier degré en x (pensez à combiner les colonnes). Calculez sa valeur pour x égal à $-b$, puis pour x égal à $-c$. Calculez Δ_5 . Écrivez un script Python qui prend en entrée trois réels a, b, c et un entier n et retourne la matrice de cette forme en taille n .

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix}, \Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}.$$

27 On va étudier le déterminant de $\begin{pmatrix} -b.c & b.c+b^2 & b.c+c^2 \\ a.c+a^2 & -a.c & a.c+c^2 \\ a.b+a^2 & a.b+b^2 & -a.b \end{pmatrix}$, et même généraliser, autrement qu'en développant comme un bourrin (oui, TD de maths !). Rendez vous vite en page 5.

◇ 0 ◇ On se donne trois réels non tous nuls a, b et c . On pose alors $s = a + b + c, \sigma = a.b + a.c + b.c, U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} s - a \\ s - b \\ s - c \end{pmatrix}$, puis $M = W.({}^tU)$. Calculez ${}^tU.W$ à l'aide de s et σ . Vérifiez que M est une matrice carrée, et montrez que (M^2, M) est liée (*inutile d'en revenir aux neuf coefficients, c'est par associativité*).

◇ 1 ◇ On pose $K = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tU.X = 0\}$. Montrez que K est un espace vectoriel et donnez sa dimension.

◇ 2 ◇ On pose $H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid M.X = 2.\sigma.X\}$. Montrez que H est un espace vectoriel contenant $\begin{pmatrix} b + c \\ a + c \\ a + b \end{pmatrix}$.

◇ 3 ◇ Démontrez $H \cap K = \{0_3\}$. Calculez $\dim(H)$. Déduisez $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

◇ 4 ◇ Déduisez que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$ (prendre pour les colonnes de P une base de K suivie d'une base de H).

◇ 5 ◇ Calculez alors $\det(M)$ et $\det(M - \sigma.I_3)$. Concluez.

◇ 6 ◇ Complétez et justifiez

$$\begin{vmatrix} & b^2 + b.c + b.d & c^2 + b.c + c.d & b^2 + b.d + c.d \\ a^2 + a.c + a.d & -a.c - a.d - c.d & & d^2 + a.d + c.d \\ a^2 + a.b + a.d & b^2 + a.b + b.d & -a.b - a.d - b.d & \\ a^2 + a.b + a.c & & c^2 + a.c + b.c & -a.b - a.c - b.c \end{vmatrix} = -(a.b + a.c + \dots + b.d + c.d)^4.$$

◁ 28 ▷ z est un complexe plus petit que 1 en module.

Montrez : $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k$. Montrez $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}$.

◁ 29 ▷ Une matrice est un carré vraiment magique si la somme des termes de chacune de ses lignes est égale à la somme des termes de chacune de ses colonnes, ainsi que la somme des termes de ses deux diagonales (*exemple* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; à vous d'en trouver d'autres). Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 1.

♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 2.

♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 3.

♡ Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 4.

Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et antisymétriques ($\forall(i, k), a_i^k = -a_k^i$) de taille n .

Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et symétriques ($\forall(i, k), a_i^k = a_k^i$) de taille n .

Ce gant est assoupli. Il est PRémuni face aux Doutes. Sans Pèze, il manque de Bouffe. Les vieux Masques évitent la Flotte. Pas de Bouffe, pas de Tabac. On manque de CHaises pour attirer les corBeaux. Ne faites pas craMer votre CHambre. Ces SPoliés sont pleins de Germes. J'ai CHIné un gros CALibre. Les Bars s'enDettente.

• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases du tableau ?

• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases distinctes du tableau ?

• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases distinctes du tableau ?

• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, aux symétries, rotations près ?

• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, sans qu'ils soient sur une même ligne ou une même colonne ?

.	.	.
.	.	.
.	.	.

◁ 30 ▷ *Aissata* et *Bintou*, c'est juste pour A et B.

5083 2 3 5 7
 66 11 13 17 19
 665 23

A droite, neuf nombres. Placez les dans les cases du tableau pour que les produits indiqués en ligne et en colonne soient corrects.

◁31▷ 1311 1309 130

◁32▷ ♥ Trouvez une primitive de $t \mapsto e^{a.t} \cdot \cos(t)$ en intégrant par parties.

Vérifiez que $t \mapsto e^{(a+i.b).t}$ se dérive bien en $t \mapsto (a+i.b) \cdot e^{(a+i.b).t}$.

Trouvez une primitive de $t \mapsto e^{a.t} \cdot 2 \cdot \cos(t)$ en l'écrivant $t \mapsto e^{(a+i).t} + e^{(a-i).t}$.

```
def truc(n) :
....A = []
....for i in range(n) :
.....L = []
.....for k in range(n) :
.....L.append(abs(i-k))
.....A.append(L)
....return A
```

◁33▷

Calculez le déterminant de `Truc(n)` pour n de 0 à 6.

L'inflation irrite les *mabouls*. La *gauche* au *boulot*. Je n'apprécie pas le géant de *taverne*. Intrus de Belgique. Les *profs* gèlent dans les *facs*. L'*équipe* exalte les *populations*. L'*abîme* est dans le contenu. Ce vétérinaire a *annulé* l'*encaisse*. Difficile de *s'en* sortir si on *recule*. Les footbaleurs ont montré leur *force* dans le *péno*.

◁34▷ (♥ en dimension 2 ou 3) En considérant que la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est de la forme

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$ (on promène les 1 le long de chaque ligne dans l'ordre) ;

la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \right)$ est elle de même orientation qu'elle (cette fois, les 1 se promènent de colonne en colonne) ?

Rappel : pour dire si deux bases B et $\mathbb{B}$ ont la même orientation, on exprime les vecteurs de B sur la base $\mathbb{B}$ et on regarde le signe du déterminant obtenu.

◁35▷ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 ? Si oui, cette valeur sera-t-elle

1	1	1	1
2	1	1	2
1	1	2	1
?	1	0	3

entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27} .

◁36▷ ♥ a, b, c et d sont quatre réels. Calculez les déterminants de VanDerImmonde :

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Pensez à un déterminant de VanDerMonde, mais de taille 5 : $VdM(a, b, c, d, x)$.

◁37▷ a, b, c et d sont quatre entiers tirés au hasard entre 0 et 4. Quelle est la valeur maximale de

1	a^2	a	a^3
1	b^2	b	b^3
1	c^2	c	c^3
1	d^2	d	d^3

 ?

◁38▷ Inversez ces trois matrices là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

Conseil : élevez au carré.

◁43▷ Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

◁40▷ Résolvez pour a, b et c complexes distincts donnés : $\begin{cases} x + a.y + a^2.z = a^3 \\ x + b.y + b^2.z = b^3 \\ x + c.y + c^2.z = c^3 \end{cases}$ d'inconnues (x, y, z) .

◁41▷ Complétez cette matrice de VanDerMonde, calculez son déterminant, et complétez son inverse, puis calculez le déterminant de son inverse. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & & \\ & 4 & & 2 & 2 \\ 1 & 1 & & 6 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & & 5 \\ 3 & & & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & \end{pmatrix}$. Pardon ? Il y a un truc ? Oui. On travaille sur $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 7.

◁42▷ ♡ Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières (c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle). On lance ce dé, l'espérance du résultat est $47/22$. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.

La variance est $365/484$ (rappel : $\text{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$).

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.

Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

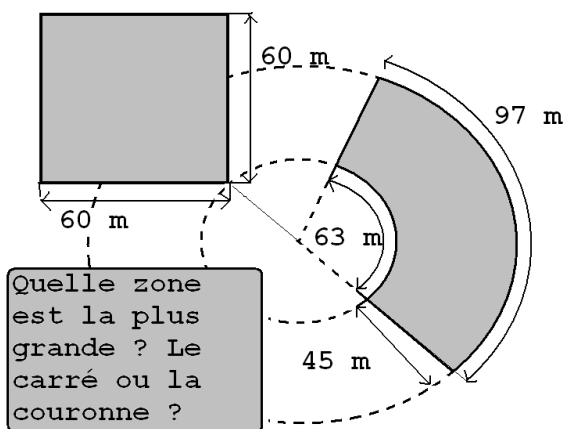
◁43▷ a, b, c et d sont quatre réels, montrez que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$ est égal à $8.(\cos(d) - \cos(c)).(\cos(d) - \cos(b)) \dots$ (complétez). Indication : Tchebychev, combinaisons et VanDerMonde.

La matrice B a pour valeurs propres 1, 3 et -2 . Donnez son polynôme caractéristique : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & & 15 \\ & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Trouvez un vecteur propre de valeur propre 1.

Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

◁44▷



◁45▷ Soit A une matrice de taille n sur n et U_1 à U_k des vecteurs propres de A associé à des valeurs propres distinctes λ_1 à λ_k ($A.U_i = \lambda_i.U_i$ et $U_i \neq O_n$). Montrez que la famille $(U_1, \dots, U_k)$ est libre (partir de $\alpha_1.U_1 + \dots + \alpha_k.U_k = 0_n$ et appliquer A autant de fois qu'il faut).

Concluez que si A admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A.P = P.D$ (on montrera qu'il existe au moins un vecteur propre pour chaque valeur propre, et on mettra ces vecteurs propres dans la matrice P).

◁46▷ ♡ Pour tout n , on pose $c_n = (\theta \mapsto \cos(n.\theta))$ et $\sigma_n = (\theta \mapsto \cos^n(\theta))$. Montrez que la famille $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$. Montrez que la famille $(\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$ et engendre le même sous-espace vectoriel que $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4)$. Donnez la matrice de changement de base.

47 Calculez en fonction de n le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ après avoir donné la forme de

son terme général (a_i^k en fonction de i et k).

48 ♡ Calculez $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ e & d & c & b & a - X \end{vmatrix}$ en combinant les colonnes. Montrez que pour tout polynôme donné de degré n il existe une matrice dont il est le polynôme caractéristique.

49 Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nuls en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X - 1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X - 1$ ou $X + 1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X - 1$ et $X + 1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nuls en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

50 ♡ S est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli (taille 9 sur 9, sur chaque colonne, sur chaque ligne et sur chaque "maison de taille 3 sur 3", on retrouve les entiers de 1 à 9). Montrez que $\det(S - 45.I_9)$ est nul (indication : le vecteur fait de 9 composantes égales à 1 donne un système non inversible).

51 ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez qu'il n'y a pas de matrice M vérifiant $A.M = B$ (pensez au déterminant, oh non, j'en ai trop dit !).
Remplacez le coefficient 5 de la matrice B par ce que vous voulez pour que l'équation ait une solution.
Combien en a-t-elle alors (évidemment, je n'attends pas de vous que vous posiez un système de neuf équations à neuf inconnues, sauf si vous visez la P.S.I.X.).
Et qu'en est il alors de l'équation $M.A = B$ d'inconnue M ?

52 ♡ Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\vec{i}$ sur cette base.

Changez la composante d'un de ces vecteurs pour que ce ne soit plus une base de $\mathbb{R}^3$.

Il existe une composante que l'on peut changer comme on veut, sans que la famille cesse d'être une base de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?

(une base $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ c'est « tout vecteur $\vec{u}$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\vec{u} = \alpha.\vec{a} + \beta.\vec{b} + \gamma.\vec{c}$, et ça revient à avoir un système ayant une unique solution, donc à un déterminant non nul, par exemple).

53 ♡ Décomposez $x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ sur la base $(\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j})$ puis sur la base $(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

54 Montrez qu'on n'a pas $\det(\Re(M)) = \Re(\det(M))$. (partie réelle).

55 Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

56 ♡ Montrez qu'il n'existe pas d'application f linéaire² de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(mot clef : relation de dépendance linéaire).

2. l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images

◀57▶ Pourquoi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+2)}$ vaut $\ln(2)$ alors que quand l'élève écrit $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+2)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2} \right).dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+2}$ il arrive à une erreur ?
 Pourquoi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$ n'existe pas alors que $\frac{1}{t+1}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.