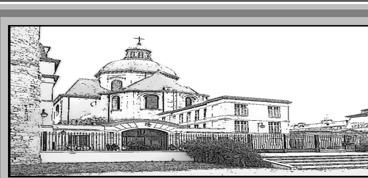
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi avril
M.P.S.I.2



2024 2025

TD26

◁0▷ ♡ Calculez le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(argument géométrique sur des vecteurs de $\mathbb{R}^4$ « pas si nombreux »).*

On a une matrice de taille 4 sur 4 qu'on peut certes expliciter.

Mais si on note A, B et C les trois colonnes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

La matrice finale est faite de quatre colonnes $(3.A - B + C,\ B + 2.C,\ 2.A + B + C,\ -A - 3.B + 2.C)$.
Ces colonnes forment une famille liée (quatre vecteurs dans un sous-espace de dimension 3).
Le déterminant est nul.

Tenez, j'ai aussi ça : A, B et C sont dans un même sous-espace de dimension 3, d'équation $4.x = 2.y + t$.

On vérifie en effet : $\begin{array}{ccccc} 4.1 & = & 2.2 & +0.1 & +1.0 \\ 4.2 & = & 2.3 & +0.5 & +1.2 \\ 4.1 & = & 2.0 & +0.3 & +1.4 \end{array}$.

On transcrit même : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

puis $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

En notant M la matrice 4 sur 4 : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} .M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ou même ${}^tM. \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La matrice ${}^tM$ ne peut pas être inversible, sinon en multipliant par son inverse on passerait de ${}^tM.U = 0_4$ à $U = 0_4$.
On a donc $\det({}^tM) = 0$ et par suite $\det(M) = 0$.

De l'algèbre linéaire dans toute sa splendeur. Epsilon calcul, un résultat intelligent.

Au fait, comment ai-je trouvé l'équation du plan contenant A, B et mC (par jeu de dimensions justement ?).
On peut tâtonner/vérifier. Beuh.

On écrit juste $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & x \\ 2 & 3 & 0 & y \\ 1 & 5 & 3 & z \\ 0 & 2 & 4 & t \end{pmatrix} = 0$.

Et on a quatre déterminants de taille 3 sur 3 à calculer.

◁1▷ Résolvez l'équation différentielle $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix} = e^t + t$ d'inconnue y fonction de t.

On développe le déterminant par rapport à la première ligne : $\begin{vmatrix} y_t & 1 & 1 \\ y'_t & 3 & -2 \\ y''_t & 9 & 4 \end{vmatrix} = e^t + t$ et on obtient $30.y_t + 5.y'_t - 5.y''_t = e^t + t$.
On résout l'équation homogène associée.

Équation homogène	Équation caractéristique	Spectre	Solutions
$-5.h''_t + 5.h'_t + 30.h_t = 0$	$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$	$[3,\ -2]$	$Vect(t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^{-2.t})$

On trouve des solutions particulières par superposition et analogie : $t \longmapsto \dfrac{e^t}{30}$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{30} - \dfrac{1}{180}$.

Les solutions sont de la forme $t \longmapsto a.e^{3.t} + b.e^{-2.t} + \frac{e^t}{30} + \frac{6.t-1}{180}$ valables sur $\mathbb{R}$ avec a et b à déterminer en fonction des conditions initiales.

◁2▷ ♡ Cette famille est liée dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$: $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$. Retrouvez les coefficients qui manquent et donnez une relation de dépendance linéaire.
(liée : l'un des éléments est combinaison linéaire des autres).

Par symétrie des rôles, on va dire que la première est combinaison des deux suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ceci nous livre un système de quatre équations mais deux doivent permettre de retrouver a et b.
Nommons d'ailleurs les coefficients qui manquent :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 2 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & y \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} z & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a quatre équations pour cinq inconnues. Mais le système n'est pas slinéaire (certaines inconnues se multiplient entre elles)

$$\left\{\begin{array}{ccccc|} a & + & b.z & = & 1 \\ -a & + & b & = & 1 \\ a & + & b & = & x \\ a.y & + & 2.b & = & 2 \end{array}\right.$$

On peut par exemple extraire a et b des deux lignes du milieu $a = \dfrac{x-1}{2}$ et $b = \dfrac{x+1}{2}$ puis trouver y et z avec les autres.

Si je veux donner un exemple, je choisis $x = 1$ par exemple. Et j'ai la famille

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right)$$

qui est liée car on y trouve deux fois la même matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Mais il y a aussi des cas moins simplistes avec des matrices sans colinéarité mais avec dépendance

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

◁3▷ Un couple de suites récurrentes vérifie : $u_0 = 1$, v_0 donné et pour tout n $\left\{\begin{array}{ccrr|} u_{n+1} & = & u_n & +2.v_n \\ v_{n+1} & = & 6.u_n & +2.v_n \end{array}\right.$. Existe-t-il des valeurs de v_0 pour lesquelles on a $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$?

La suite $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ est géométrique de raison à gauche $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$.

On diagonalise avec $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}^n = \frac{1}{7}.\begin{pmatrix} 3.5^n + 4.(-2)^n & 2.(5^n - (-2))^n \\ & \\ 6.5^n - 6.(-2)^n & 4.5^n + 3.(-2)^n \end{pmatrix}$$

On extrait $\boxed{u_n = \dfrac{(3.u_0 + 2.v_0).5^n + (4.u_0 - 2.v_0).(-2)^n}{7}}$

On pouvait y arriver en écrivant des choses « astucieuses » comme

$$\begin{array}{lclll} u_{n+2} & = & u_{n+1} & +2.v_{n+1} & \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} & +2.(6.u_n & +2.v_n) \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} & +12.u_n & +2.2.v_n \\ u_{n+2} & = & u_{n+1} & +12.u_n & +2.(u_{n+1} \quad -u_n) \\ u_{n+2} & = & 3.u_{n+1} & +10.u_n & \end{array}$$

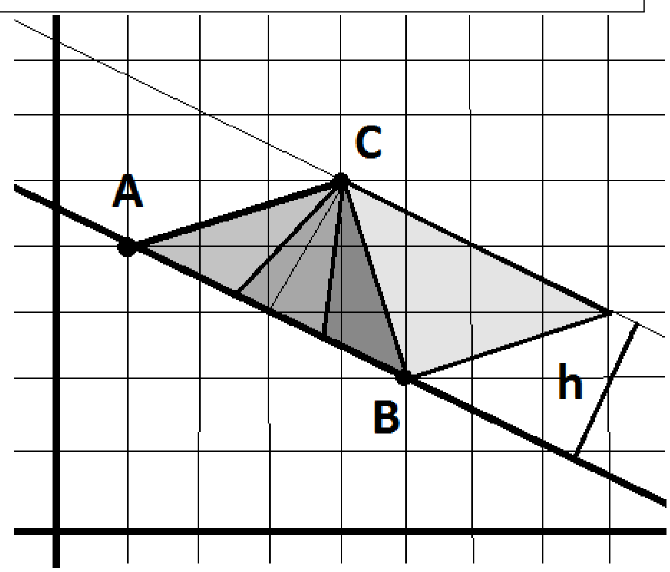
Et face à $u_{n+2} = 3.u_{n+1} + 10.u_n$ on calcule le polynôme caractéristique
les valeurs propres 5 et -2
et la forme des solutions $u_n = A.5^n + B.(-2)^n$

Avec $u_n = \dfrac{(3.u_0 + 2.v_0).5^n + (4.u_0 - 2.v_0).(-2)^n}{7}$, exigeons $3.u_0 + 2.v_0 > 0$; et on est sûr d'avoir u_n positif au moins à partir d'un certain rang.
Exigeons même $4.u_0 - 2.v_0 = 0$ et le terme en $(-2)^n$ s'en va. On a alors l'assurance que tous les termes u_n sont positifs.
D'ailleurs, si u_0 et v_0 sont positifs, alors tous les termes des deux suites sont positifs !

◃4▹ ♡ Dans le plan usuel, on donne $A(1, 4)$, $B(5, 2)$ et $C(4, 5)$. Donnez l'équation de la droite $(A\ B)$. Mesurez la distance de C à la droite $(A\ B)$. Trouvez les points D et E de $(A\ B)$ tel que $[C,\ D]$ et $[C,\ E]$ découpent $(A,\ B,\ C)$ en trois triangles d'aires égales.

Pour l'équation de $(A\ B)$, on utilise $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}) = 0$. On trouve $\boxed{x + 2.y = 9}$

On ne peut pas écrire $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-4 & -2 \end{vmatrix} = -2.(x-1) - 4.(y-4) = -2.x - 4.y + 18 = 0$ *comme le font les élèves qui confondent raisonnements mathématiques et application numérique de physique. Dans cet enchainement, les premières égalités sont vraies que le point soit ou non sur $(A\ B)$ et seule la dernière devient une équation. Je vais finir par flinguer direct.*
On rédige donc $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-4 & -2 \end{vmatrix} = -2.(x-1) - 4.(y-4) = -2.x - 4.y + 18$ *(sans = 0).*
On ajoute que l'équation $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AB}) = 0$ *devient* $-2.x - 4.y + 18 = 0$



L'équation obtenue est bien une équation de droite, et elle est vérifiée par A et B, c'est la bonne.

Pour le distance de C à la droite, on calcule l'aire du parallélogramme : $\det(\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -10$.
On divise par la longueur de la base pour récupérer sa hauteur :
$dist(C,\ (AB)) = \dfrac{|-10|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{20}}$ qu'on écrira $\boxed{dist(C,\ (AB)) = \sqrt{5}}$

On peut aussi par chance ici projeter orthogonalement C en $H(3, 3)$ car le triangle est isocèle.

Pour ce qui est des points découpant en trois triangles d'aires égales, il suffit de diviser la base par 3, la hauteur restera la même...
$A + \dfrac{\overrightarrow{AB}}{3}$ et $A + 2.\dfrac{\overrightarrow{AB}}{3}$ auront pour coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{10}{3}\right) \text{ et } \left(\dfrac{11}{3},\ \dfrac{8}{3}\right)}$

◃5▹ ♡ Résolvez $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 5 & 6 \\ b & 4 & 5 \end{vmatrix}$ d'inconnues réelles a et b.

$24 + 15.a - 25 - 12.a$ doit être égal à $25 + 12.b + 12.a - 15.b - 24 - 10.a$
La condition devient $\boxed{a = 2 - 3.b}$

Dans le plan des points $(a,\ b)$, l'ensemble des solutions est une droite.

◁6▷ **Calculez les deux intégrales suivantes et dites qui est la plus grande :** $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}.dt$ et $\int_1^e (\ln(t))^2.dt$.

La première est de la forme $\int u^2.u'$. On intègre : $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}.dt = \left[\frac{(\ln(t))^3}{3}\right]_{t=1}^e$ et on trouve $\frac{1}{3}$.

Pour l'autre (dont l'existence est assuree comme pour la première par continuite), on intègre par parties :

1	$\hookleftarrow$	t
$(\ln(t))^2$	$\hookrightarrow$	$2.\frac{\ln(t)}{t}$

et on recommence (ou on utilise une primitive toute prête en $t.\ln(t) - t$).

$$\int (\ln(t))^2.dt = t.(\ln(t))^2 - 2.t.\ln(t) + 2.t$$

et avec les bornes 1 et e : $\int_1^e (\ln(t))^2.dt = e - 2$.

Ensuite, le physicien sortira sa calculatrice pour comparer $e-2$ et $\frac{1}{3}$.

Mais le matheux dira juste $\frac{(\ln(t))^2}{t} \leqslant (\ln(t))^2$ pour tout t de $[1,\ e]$: $\int_1^e \frac{(\ln(t))^2}{t}.dt < \int_1^e (\ln(t))^2.dt$. Et sans calcul approche.

Vous preferez l'approche du physicien : faites PSI.
Vous preferez l'approche du matheux : faites une spé.

◁7▷ **On admet (vous le verrez en Spé)** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt = \frac{\pi}{2}$. **Montrez :** $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \frac{\pi}{2}$.

On va quand même intégrer à distance finie, y compris au voisinage de 0.

La première intégrale est la limite de $\int_a^b \frac{\sin(t)}{t}.dt$ *quand a tend vers* 0 *et b vers l'infini. En* 0*, c'est juste l'application sous le signe intégrale qui se prolonge par continuité. A l'infini, c'est la primitive non explicitable qui a une limite.*

On intègre par parties la nouvelle

$\frac{1}{t^2}$	$\hookleftarrow$	$-\frac{1}{t}$
$\sin^2(t)$	$\hookrightarrow$	$2.\sin(t).\cos(t)$

$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \left[\frac{\sin^2(t)}{t}\right]_a^b + \int_a^b \frac{2.\sin(t).\cos(t)}{t}.dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_a^b \frac{\sin(2.t)}{t}.dt$$

Là, il y a une idée géniale : $\boxed{\theta = 2.t}$ dans la seconde. Et le truc est d'autant plus surprenant que $\frac{dt}{t} = \frac{d\theta}{\theta}$ (invariance logarithmique).

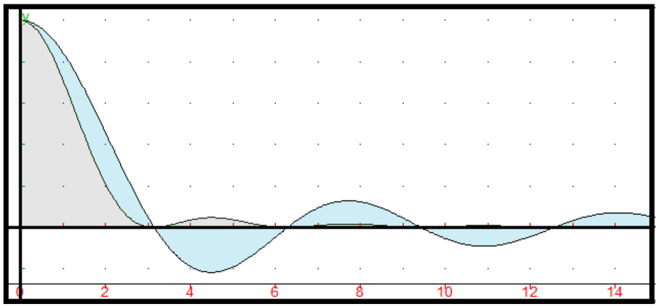
$$\int_a^b \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \frac{\sin^2(a)}{a} - \frac{\sin^2(b)}{b} + \int_{2.a}^{2.b} \frac{\sin(\theta)}{\theta}.d\theta$$

On fait tendre a vers 0 : $\frac{\sin^2(a)}{a} = \frac{\sin(a)}{a}.\sin(a)$ tend vers 1×0

On fait tendre b vers l'infini, le quotient à numérateur borné $\frac{\sin^2(b)}{b}$ tend vers 0.

Et l'intégrale $\int_{2.a}^{2.b} \frac{\sin(\theta)}{\theta}.d\theta$ tend vers $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\theta)}{\theta}.d\theta$ dont on nous a dit qu'elle existait, et qu'elle valait $\frac{\pi}{2}$ (certains livres lui donnent même un nom).

On a bien $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2}.d\theta} = \frac{\pi}{2}$



Pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt$ on a comme pour une série à termes positifs des aires positives de plus en plus petites (en $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ au n^{ieme} intervalle de longueur π) qui s'additionnent mais donnent au total une aire finie.
Pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta)}{\theta^2}.d\theta$, des aires algébriques sont positives, d'autres négatives. On pense davantage aux séries alternées...

Pour information

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}.dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}.dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^3}.dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^5}.dt$	$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(t)}{t^5}.dt$	
$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{3.\pi}{8}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{115.\pi}{384}$	

mais n'essayez pas d'en déduire des choses.

◁ 8 ▷

Quand il va au travail à la vitesse de quatre vingt kilomètres par heures, il a dix minutes d'avance. Quand il roule à soixante kilomètres à l'heure, il a dix minutes de retard. A quelle vitesse doit il rouler pour arriver à l'heure ?

On note D la distance à parcourir *(toujours la même)* et T le temps qu'il doit mettre pour arriver à l'heure. On traduit les hypothèses

$80km/h$	10 minutes d'avance	$\dfrac{D}{80} = T - \dfrac{1}{6}$
$60km/h$	10 minutes de retard	$\dfrac{D}{60} = T + \dfrac{1}{6}$

On élimine T : $\dfrac{D}{80} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{D}{60} - \dfrac{1}{6}$, on résout : D vaut 80.

On cherche la vitesse V pour avoir $\dfrac{D}{V} = T$. On élimine encore T : $\boxed{V = \dfrac{480}{7}}$

En valeur approchée : 68,5 km/h à 10^{-1} près, et pas 70.

◁ 9 ▷

On pose $C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$.
Ajustez les quatre grecques pour avoir $M.V = V.D$. Déduisez la valeur de $\det(M)$ sous forme factorisée.

◁ 10 ▷

Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(5.\pi/12) & -\sin(5.\pi/12) \\ \sin(5.\pi/12) & \cos(5.\pi/12) \end{pmatrix})^n \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $Tr(\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n) \in \mathbb{Z}$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.
Résolvez $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = I_4$ d'inconnue n dans $\mathbb{Z}$.

On rappelle le résultat du cours $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.\theta) & -\sin(n.\theta) \\ \sin(n.\theta) & \cos(n.\theta) \end{pmatrix}$

Inutile de vous lancer dans des récurrences, diagonalisation ou autres.
C'est géométrique : on fait n rotations d'angle θ, on a fait une rotation d'angle $n.\theta$.

La première question demande : $2.\cos\left(\frac{n.\pi}{12}\right) \in \mathbb{Z}$.

Ce cosinus se promène sur une liste finie de valeurs parmi lesquelles il y a 0, $\dfrac{1}{2}$, 1 et leurs opposés (et d'autres inutiles car irrationnelles).

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
oui				oui		oui		oui			

$\boxed{S = \{12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{4 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{6 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{8 + 12.k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

Oui, on est sur $\mathbb{Z}$, et la formule $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.\theta) & -\sin(n.\theta) \\ \sin(n.\theta) & \cos(n.\theta) \end{pmatrix}$ est valable aussi sur $\mathbb{Z}$.

Pour le second, on a mal place l'exposant : $(2.\cos(5.\pi/12))^n$ doit être dans $\mathbb{Z}$.
Mais cet irrationnel est plus petit que 1, la suite $\big((2.\cos(5.\pi/12))^n\big)$ converge vers 0.
La seule solution positive est $n = 0$ qui donne $(trace)^0 = 1$.

$\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}$ est une matrice de symétrie. Ses puissances paires donnent I_2 (trace entière) et ses puissances impaires la redonnent (trace entière).
Bref, pour tout n, $\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & \sin(\pi/12) \\ \sin(\pi/12) & -\cos(\pi/12) \end{pmatrix}^n$ a sa trace dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi/12) & -\sin(\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(\pi/12) & \cos(\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\pi/15) & -\sin(\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(\pi/15) & \cos(\pi/15) \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos(n.\pi/12) & -\sin(n.\pi/12) & 0 & 0 \\ \sin(n.\pi/12) & \cos(n.\pi/12) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(n.\pi/15) & -\sin(n.\pi/15) \\ 0 & 0 & \sin(n.\pi/15) & \cos(n.\pi/15) \end{pmatrix}$$

(rotations et produits par blocs)
On demande que n soit à a fois multiple de 24 et de 30.

$\boxed{S = \{120.k \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

◁ 11 ▷

I∼0) On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de la base canonique orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Pour tout triplet de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, on définit la matrice G (dite « matrice de Gram ») de terme général $g_i^k = \overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_k}$ (produit scalaire des deux vecteurs) : $\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}$
Montrez : $Tr(G) \geqslant 0$ et $Tr(Com(G)) \geqslant 0$.

La trace de la matrice de Gram G est la somme $||\overrightarrow{u_1}||^2 + ||\overrightarrow{u_2}||^2 + ||\overrightarrow{u_3}||^2$.
En tant que somme de carrés de normes, elle est positive.

Chaque coefficient de la diagonale de la comatrice est un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 \end{vmatrix}$ (en variant les indices).
Un tel déterminant vaut $(||\overrightarrow{u_1}|| \times ||\overrightarrow{u_2}||)^2 - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2$.
Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit : $(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 \leqslant ||\overrightarrow{u_1}||^2.||\overrightarrow{u_2}||^2$.
C'est l'inégalité de la forme $(x.x' + y.y' + z.z')^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2).('^2 + y'^2 + z'^2)$.

On somme ces trois termes positifs ou nuls, on obtient un réel positif ou nul.
Sinon, il suffit d'écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(angle)$ pour conclure aussi géométriquement.

I∼1) Montrez même que $Tr(G)$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont nuls.

La seule façon pour qu'elle soit nulle est que chaque norme soit nulle, et chaque vecteur nul.
Et la matrice est alors nulle.

I∼2) Montrez aussi $Tr(Com(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

Que peut on dire si
$\Big((||\overrightarrow{u_1}|| \times ||\overrightarrow{u_2}||)^2 - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2\Big) + \Big((||\overrightarrow{u_2}|| \times ||\overrightarrow{u_3}||)^2 - (\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3})^2\Big) + \Big((||\overrightarrow{u_3}|| \times ||\overrightarrow{u_1}||)^2 - (\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1})^2\Big)$ est nulle ?
En tant que somme de réels positifs ou nuls, c'est que chacun est nul.
Mais alors chaque inégalité de Cauchy-Schwarz devient une égalité.
$\Big((||\overrightarrow{u_1}|| \times ||\overrightarrow{u_2}||)^2 - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2\Big) = 0$ se traduit par $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont colinéaires.

Les vecteurs sont deux à deux colinéaires, ils sont tous colinéaires.

Et c'est réciproque.

I∼3) Montrez que $\det(G)$ est positif ou nul. Montrez qu'il est nul si et seulement si les trois vecteurs sont coplanaires (indication : ${}^tP.P$).

Écrivons nos trois vecteurs sur la base canonique : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ pour simplifier la lecture.

Les produits scalaires se calculent « vectoriellement » :

$\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = x.x' + y.y' + z.z' = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ par exemple.

On a alors : $G = \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & x.x'+y.y'+z.z' & x.x''+y.y''+z.z'' \\ x.x'+y.y'+z.z' & x'^2+y'^2+z'^2 & x'.x''+y'.y''+z'.z'' \\ x.x''+y.y''+z.z'' & x'.x''+y'.y''+z'.z'' & x''^2+y''^2+z''^2 \end{pmatrix}$

$G = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$

G est de la forme ${}^tP.P$ avec P égale à la matrice de $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ sur la base canonique.
Son déterminant se calcule : $\det({}^tP.P) = \det({}^tP).\det(p) = \det(P).\det(P)$.
En tant que carré de réel, il est positif ou nul.

Et il n'est nul que pour $\det(P) = 0$. Ce qui se traduit par « vecteurs coplanaires ».

$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
positive	positive	positif
nul si tous nuls	nul si tous colinéaires	nul si tous coplanaires

I∼4) Soit X (de composantes x, y et z) un vecteur propre de G (valeur propre λ), montrez : $\lambda.||X||^2 = {}^tX.G.X = ||x.\overrightarrow{u_1} + y.\overrightarrow{u_2} + z.\overrightarrow{u_3}||^2$. Déduisez que les valeurs propres de G sont positives ou nulles.

Prenons un vecteur propre X de G, de valeur propre λ. On traduit : $G.X = \lambda.X$.

Si vous y tenez : $\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ mais c'est juste pour vérifier les formats.

On doit égaler trois termes. partons d ecelui du milieu : ${}^tX.G.X$.

Pour les formats : $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ c'est un réel.

Mais surtout : ${}^tX.G.X = {}^tX.\lambda.X = \lambda.{}^tX.X$.

Et le réel ${}^tX.X$ c'est $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ qui fait $x^2+y^2+z^2$. Et c'est bien $||X||^2$.

Mais dans le même temps, au niveau des coefficients (des fois le matheux se la joue physicien et il calcule) :

${}^tX.G.X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \times ||\overrightarrow{u_1}||^2 & +y \times \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & +z \times \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ x \times \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & +y \times ||\overrightarrow{u_2}||^2 & +z \times \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ x \times \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & +y \times \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & +z \times ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}$

C'est un réel fait de neuf termes : $\boxed{\begin{array}{ccc} x^2.||\overrightarrow{u_1}||^2 & +x \times y \times (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}) & +x \times z \times (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3}) \\ +x \times y \times (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}) & +y^2 \times (\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_2}) & +y \times z \times (\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}) \\ +x \times z \times (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3}) & +y \times z \times (\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3}) & +z^2 \times (\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_3}) \end{array}}$

on a intérêt à écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ plutôt que $||\overrightarrow{u}||^2$.
Ces neuf termes correspondent au développement de $(x \times \overrightarrow{u_1} + y \times \overrightarrow{u_2} + z \times \overrightarrow{u_3}).(x \times \overrightarrow{u_1} + y \times \overrightarrow{u_2} + z \times \overrightarrow{u_3})$ par bilinéarité.
On a donc aussi ${}^tX.G.X = ||x \times \overrightarrow{u_1} + y \times \overrightarrow{u_2} + z \times \overrightarrow{u_3}||^2$.

Assemblons nos résultats : $\lambda.||X||^2 = ||x.\overrightarrow{u_1} + y.\overrightarrow{u_2} + z.\overrightarrow{u_3}||^2$ et divisons par $||X||^2$ (non nul).
Le réel λ est positif.

Les valeurs propres des matrices de Gram sont positives ou nulles.

Ceci confirme

$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$	$\lambda_1.\lambda_2+\lambda_2.\lambda_3+\lambda_3.\lambda_1$	$\lambda_1.\lambda_2.\lambda_3$
positif	*positif*	*positif*

I∼5) On suppose à présent $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ de norme 1. Il existe donc trois angles vérifiant $\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} = \cos(\alpha)$, $\overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} = \cos(\beta)$ et $\overrightarrow{u_3}.\overrightarrow{u_1} = \cos(\gamma)$ (produits scalaires). Par symétrie des rôles, on posera $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \pi$. On note G la matrice de Gram.
Déterminez les racines du polynôme $X^2 - 2.X.\cos\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$.

Les trois produits scalaires utiles sont connus, la matrice de Gram est donc ici $\begin{pmatrix} 1 & \cos(\alpha) & \cos(\gamma) \\ \cos(\alpha) & 1 & \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) & \cos(\beta) & 1 \end{pmatrix}$.

Oui, il faut savoir lire l'énoncé, les vecteurs sont de norme 1, donc une diagonale de 1, et les produits scalaires en $||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(angle)$ donnent juste de cosinus. [1].

Si on en a besoin, le déterminant vaut $1 + 2.\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma)$ *.*
Et moi je vois le rapport avec la suite et le polynôme $X^2 - 2.X.\cos\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$ *calculé en* $\cos(\alpha)$*.*

$X^2 - 2.X.\cos(\beta).\cos(\gamma) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) - 1$ a pour discriminant
$4.\Big(\cos^2(\beta).\cos^2(\gamma) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma) + 1\Big)$.
Il doit se passer quelquechose, sinon les valeurs vont être affreuses.
On factorise $4.(\cos^2(\beta) - 1).(\cos^2(\gamma) - 1)$

Remarque : *Oui,* $a.b - a - b + 1 = (a-1).(b-1)$ *est classique.*
Les maths, ce ne sont pas de formules abjectes à apprendre par cœur, ce sont de petites idées à savoir exploiter.

On transforme : $4.(-\sin^2(\beta)).(-\sin^2(\gamma))$.
Et comme nos angles sont entre 0 et π, pas de valeur absolue : $\delta = 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)$.

On trouve les deux racines : $\dfrac{2.\cos(\beta).\cos(\gamma) - 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)}{2}$ et $\dfrac{2.\cos(\beta).\cos(\gamma) + 2.\sin(\beta).\sin(\gamma)}{2}$.

Un peu de trigonométrie : les deux racines sont $\boxed{\cos(\beta+\gamma) \text{ et } \cos(\beta-\gamma)}$

On pouvait aussi essayer de les deviner : somme $2.\cos(\beta).\cos(\gamma)$ *et produit plus laid. Puis proposer/vérifier.*

I∼6) Déduisez une factorisation de $\det(G)$ comme produit de deux facteurs.

Ayant effectué le calcul quelques lignes plus haut, on a donc
$\det(G) = 1 + 2.\cos(\alpha).\cos(\beta).\cos(\gamma) - \cos^2(\alpha) - \cos^2(\beta) - \cos^2(\gamma)$
soit $\boxed{\det(G) = -P(\cos(\alpha)) = \Big(\cos(\alpha) - \cos(\beta+\gamma)\Big).\Big(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\alpha)\Big)}$

I∼7) Montrez que $\cos(\alpha)$ est entre $\cos(\beta-\gamma)$ et $\cos(\beta+\gamma)$.

Comment cerner $\cos(\alpha)$ justement entre les deux racines ?
On sait que $\det(G)$ est positif ou nul.
Donc $P(\cos(\alpha))$ est négatif ou nul.
Ceci force $\cos(\alpha)$ à être entre les deux racines... Niveau Première.

Remarque : *Une question d'une évidence... mathématique.*
Et qui aide à deviner d'ailleurs les racines du polynôme P *!*

I∼8) Montrez l'équivalence entre $\det(G) = 0$ et $\begin{array}{ccccc} \alpha & +\beta & +\gamma & = & \pi \\ & & ou & & \\ \alpha & = & \beta & +\gamma & \end{array}$.

Ce déterminant est nul si et seulement si un de ces facteurs est nul.
Méfions nous quand même des cas d'égalité des cosinus. Pas seulement à cause des modulo $2.\pi$ *mais aussi à cause des deux familles à chaque fois.*

$\cos(\alpha) = \cos(\beta+\gamma)$		$\cos(\alpha) = \cos(\beta-\gamma)$	
$\alpha = \beta + \gamma\ [2.\pi]$	$-\alpha = \beta + \gamma\ [2.\pi]$	$\alpha = \beta - \gamma\ [2.\pi]$	$\alpha = \gamma - \beta\ [2.\pi]$
$\alpha = \beta + \gamma$	$\alpha + \beta + \gamma = 2.\pi$	« impossible »	« impossible »

La troisième ligne du tableau prend une formule telle que $\alpha = \beta + \gamma + 2.k.\pi$ et trouve la seule valeur de k compatible avec nos encadrements $0 \leqslant \gamma \leqslant \beta \leqslant \alpha \leqslant \pi$.
Par exemple, $\beta - \gamma$ est positif, mais plus petit que α. Il ne peut pas être égal à α.
Mais $\beta - \gamma + 2.\pi$ est plus grand que $2.\pi$ donc plus grand que α, il ne peut pas être égal à α non plus.
De même $\beta - \gamma + 2.k.\pi$ avec k non nul n'est pas entre 0 et π et ne peut pas être égal à α.

1. le pluriel de cosinus, c'est cosini ?

De même, $\gamma - \beta$ est entre $-\pi$ et 0, et ne peut coïncider avec α, ni avec α translaté d'un multiple de $2.\pi$.

Plus rapide : $0 \leqslant (\beta - \gamma) \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Sur $[0,\ \pi]$, le cosinus décroit strictement.
La seule façon d'avoir $\cos(\alpha) = \cos(\beta - \gamma)$ c'est donc de demander $\alpha = \beta - \gamma$ puis $\gamma = 0$ et donc finalement $\alpha = \beta + \gamma$ déjà mentionné.

Mine de rien, on vient de donner le critère sur les angles pour que les trois vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ et $\overrightarrow{u_3}$ soient coplanaires.

II∼0) On suppose $\alpha = \beta = \gamma$ et on pose alors $c = \cos(\alpha)$. Déterminez le polynôme caractéristique de G, puis ses valeurs propres (sachant qu'il y a une valeur propre double).

Les trois cosinus sont égaux, la matrice G est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & c & c \\ c & 1 & c \\ c & c & 1 \end{pmatrix}$ avec nos notations proposées.

$Tr(G)$	$Tr(Com(G))$	$\det(G)$
3	$3 - 3.c^2$	$1 + 2.c^3 - 3.c^2$
polynôme caractéristique		
$X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2$		

On cherche une racine évidente, sinon comment s'en sortir ?
Ah si. Une indication de l'énoncé : la racine double.

C'est donc une racine du polynôme et de sa dérivée...

$P(X) = X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2$ donc $P'(X) = 3.(X^2 - 2.X + (1 - c^2))$
Les racines de P sont $1 + c$ et $1 - c$.
Laquelle est aussi racine de P et sera donc la racine double ?
C'est $1 - c$.

Par la somme des racines, on retrouve la troisième :

$X^3 - 3.X^2 + (3 - 3.c^2).X - 1 - 2.c^3 + 3.c^2$		
$1 - c$	$1 - c$	$1 + 2.c$

Autre approche : si nous notons a, a et b les trois racines,
on a alors $2.a + b = 3$ et $a^2.b = 1 + 2.c^3 - 3.c^2$ et $a^2 + 2.a.b = 3 - 3.c^2$.
Et on n'a plus que deux inconnues a et b.

II∼1) Quelle est la plus petite valeur que peut prendre c ?

Les valeurs propres de G sont tenues d'être positives. $1 + 2.c$ est donc positif, et c ne descendra pas en deça de $-\dfrac{1}{2}$.
Et c'est justement le cas qu'on va étudier ensuite, donc on peut atteindre cette valeur.

Et la plus grande, c'est 1, avec 1 avec trois vecteurs colinéaires... Bien triste.

II∼2) On prend $c = -1/2$. Calculez $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$.

Pour c égal à $-\dfrac{-1}{2}$, la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, visiblement non inversible (additionnez les colonnes les unes sur les autres).
Calculons la norme du vecteur $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$ en effectuant le produit scalaire avec lui même :

$$(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}).(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}) = \begin{matrix} 1 & +\cos(\alpha) & +\cos(\alpha) \\ +\cos(\alpha) & +1 & +\cos(\alpha) \\ +\cos(\alpha) & +\cos(\alpha) & +1 \end{matrix} = 0.$$

Le vecteur est nul.

D'ailleurs, géométriquement, ce sont trois vecteurs coplanaires, de norme 1, faisant entre eux des angles $\dfrac{2.\pi}{3}$.
Comme 1, j et j^2 dans le plan complexe !

II∼3) Déterminez le noyau de G. Retrouvez le résultat précédent.

Quant au noyau de $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ il est formé de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de ses multiples, je ne vois pas trop quoi dire d'autre.

Rappel :

- Polynôme caractéristique d'une matrice carrée A : $\det(\lambda.I_n - A)$.
- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique. Mais ce sont surtout les λ pour lesquels il existe au moins un vecteur X non nul vérifiant $A.X = \lambda.X$.
- Noyau d'une application linéaire f : ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$.
- Noyau d'une matrice rectangulaire A (format n sur k) : ensemble des vecteurs X de taille k vérifiant $M.X = 0_n$.
- Le déterminant du produit est le produit des déterminants.
- La comatrice de $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a' & c' \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a' & b' \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ b'' & c'' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ a'' & b'' \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

◁ 12 ▷ Soit A une matrice à trois colonnes et deux lignes. Montrez que ${}^tA.A$ et $A.{}^tA$ sont deux matrices carrées. Montrez que l'une a un déterminant nul. Montrez que le déterminant de l'autre est une somme de carrés de déterminants de matrices de taille 2 extraites de A.

${}^tA.A = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \\ o & o \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$ carrée 3 sur 3

$A.{}^tA = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \\ o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o \\ o & o \end{pmatrix}$. carrée 2 sur 2

En notant U et V les deux colonnes de ${}^tA$, $\begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o & o & o \\ o & o & o \\ o & o & o \end{pmatrix}$ les trois colonnes de ${}^tA.A$ sont combinaisons de U et V.
Elles sont dans le plan engendré par U et V.
Les trois colonnes sont coplanaires, le déterminant est nul.

Ensuite, on nomme les coefficients de A

$$A.{}^tA = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' \\ b & b' \\ c & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a.a' + b.b' + c.c' \\ a.a' + b.b' + c.c' & a'^2 + b''^2 + c'^2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant cherché vaut $(a^2 + b^2 + c^2).(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (a.a' + b.b' + c.c')^2$
Il suffit de le développer (par exemple les $(a.a')^2$ s'en vont et il reste des vrais $-2.a.a'.b.b'$)
et de le comparer à $(a.b' - a'.b)^2 + (a.c' - a'.c)^2 + (b.b' - b'.c)^2$.
Il y a bien égalité.
Pur calcul sans astuce. Des fois, même enmaths ça arrive...

◁ 13 ▷ Montrez que la droite passant par $O(0,\ 0)$ et $E(42,\ 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.

Approche dynamique : ce déterminant est nul si et seulement si les deux colonnes sont proportionnelles (aire du parallélogramme gale à 0).
Ceci revient à dire que les deux vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 42 \\ 151 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Appelons les $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OA}$. Ceci revient à dire « ils sont colinéaires », et ceci donne même O, A et M sont alignés.
C'est fini.

Approche Terminale : liquation de la droite est $y = \frac{151}{42}.x$ (coefficient directeur).
Elle est la même que $x.151 - y.42 = 0$. C'est bon.

Attention.
Si vous vous contentez de cette méthode (certes exacte), alors vous restez dans vos ornières de Terminale.
Vous pourrez continuer à avancer à la vitesse d'un lourd camion de Terminale, mais vous ne pourrez pas aller à la vitesse attendue pour réussir aux concours.
C'est même là la grosse difficulté pour certains lèves : j'ai réussi comme ça jusqu'à présent, donc je continue comme ça.
NON ! En continuant comme ça, vous vous ferez dépasser par les vrais lèves de Prépas, et vous n'arriverez qu'à réussir le bac et c'est tout.
Il faut accepter de changer vos méthodes, même si vos méthodes marchaient jusqu'à présent.
Il ne faut plus que ça marche seulement, il faut que ça courre !

◁14▷ ♡ Calculez $\int_1^2 x^x.(1+\ln(x)).dx$.

Avez vous écrit $e^{x.\ln(x)}.(1+\ln(x))$ et reconnu la forme en $e^u.u'$?

◁15▷ ♡ A et B sont des ensembles. Montrez : $(P(A)\cap P(B)=\emptyset \Rightarrow P(A)=P(B))$
$(P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A\cap B=\emptyset)$

Il est impossible d'avoir $P(A)\cap P(B)=\emptyset$.
En effet, dans $P(A)$ et $P(B)$ il y a toujours un élément commun (appelé $\emptyset$ lui même).
On a donc au moins $\{\emptyset\}\subset P(A)\cap P(B)$.

L'exercice $(P(A)\cap P(B)=\emptyset \Rightarrow P(A)=P(B))$ est donc un pur plaisir de prof de maths : « faux implique ce qu'on veut ».

Prouvons $(P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\}) \Leftrightarrow (A\cap B=\emptyset)$ par double implication.

On suppose $(P(A)\cap P(B)=\{\emptyset\})$. On veut montrer $(A\cap B=\emptyset)$.
On a déjà $\emptyset\subset A\cap B$ évidemment. Mais peut il y avoir un x dans $A\cap B$.
Non, car si tel était le cas, on aurait $\{x\}\in P(A)$ et $\{x\}\in P(A)$ d'où $\{x\}\in P(A)\cap P(B)$, ce qui contreduit $P(A)\cap B=\{\emptyset\}$.

On suppose $A\cap B=\emptyset$.
On a déjà $\emptyset\in P(A)$ et $\emptyset\in P(B)$, d'où $\emptyset\in P(A)\cap P(B)$ et donc $\{\emptyset\}\in P(A)\cap P(B)$.

Soit à présent X dans $P(A)\cap P(B)$. On traudit : $X\in P(A)$ et $X\in P(B)$.
On traduit :$X\subset A$ et $X\subset B$.
On a donc $X\subset A\cap B$. mais comme $A\cap B$ est vide, on a donc $X=\emptyset$.
Le seul élément de $P(A)\cap P(B)$ est donc bien $\emptyset$.

◁16▷ ♡ Vérifiez

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$
non inversible	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

On trouve « à la main » les inverses (en résolvant de petits systèmes) :
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-1/6\\0&0&1/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&-1/6\\0&0&1/3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
Oui, être inversible, c'est avoir un inverse, c'est tout.
Qu'êtes vous allés chercher dans des livres des caractérisations avec un déterminant non nul C'est inutile. ?

De même $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Pour « non inversibles », on voit qu'on aura beau faire :

un résultat tel que $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est impossible. Rien qu'avec le premier 1 en haut à gauche de la matrice produit. C'est toujours un 0.
Il ne va de même de l'autre matrice.

Et là encore, pourquoi aller chercher un critère certes automatique par le déterminant, mais que vous allez appliquer sans comprendre ?

Pour « diagonalisable », on trouve D et P :
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inversible (pour son inverse, j'ai $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

Et de même $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour non diagonalisables, on fait un raisonnement par l'absurde.

◃17▹ **La matrice M_n de taille n sur n a pour terme général $1_{i\neq j}$. Calculez son déterminant.**

C'est $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Et même en taille 0 et 1, on peut le définir.

On calcule les premiers sans trop réfléchir :

$n =$	0	1	2	3
det $=$	1	0	-1	2

On ne va pas appliquer la règle de Sarrus en taille supérieure, même si les 0 de la diagonale vont annuler quelques termes.
On fait des combinaisons sur les colonnes, qui ne modifient pas le déterminant.
Je le raconte en taille 5, au delà, on mettra des points de suspension.
Méthode 1 :

On ajoute toutes les colonnes à la dernière : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

On sort le facteur 4 (en fait $n-1$) : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

On soustrait la dernière colonne à chacune : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -4. \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

La matrice est triangulaire : $\det(A_5) = (-1)^4.4$ et plus généralement : $(-1)^{n-1}.(n-1)$.

$n =$	0	1	2	3	4	5	6
det	1	0	-1	2	-3	4	-5

Méthode 2 :
On soustrait chaque la première colonne sur toutes les autres (en gardant la première intacte pour que l'opération soit réversible) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

On ajoute chaque ligne sur la première :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

La matrice est diagonale.

◃18▹

f est une application de E dans f vérifiant $\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
f est une application de E dans F vérifiant : $\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$. Que pouvez vous déduire ?
Et si on a $\forall (a,b) \in E^2,\ a \neq b \Rightarrow f(a) = f(b)$.

$\exists y \in F,\ \forall x \in E,\ f(x) = y$ comme y ne dépend pas de x, tous les x ont la même image. f est constante !

$\exists x \in E,\ \forall y \in F,\ f(x) = y$ pour ce x, par transitivité : pour y et z dans F : $y = f(x) = z$.
L'ensemble F est réduit à un seul élément !
Et f est encore constante. Mais il faut être idiot pour dire « je vais regarder des applications de $\mathbb{R} - \{0\}$ dans $\{0\}$...

Encore une fois, f est constante.

◃19▹

On remplit une matrice sous forme de triangle de Pascal écrit de travers par rapport à nos habitudes et coupé en carré, comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ venant de $\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$, puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{pmatrix}$. Écrivez un script **Python** qui prend en entrée n et fabrique la matrice de taille n sur n. (Calculez le déterminant de cette matrice.)

En indexation **Python**, le terme général (ligne i colonne k) est $\binom{i+k}{k}$ qui n'est autre aussi que $\binom{i+k}{i}$ (les rôles sont bien symétriques).
Et l'indexation à partir de 0 est la plus pratique.

On peut créer la matrice en bourrin :

```
def Pascal(n) :
....return [[binomial(i+k,i) for k in range(n)] for i in range(n)]
```

à condition d'avoir une fonction `binomial` disponible, par exemple avec le module `math`.

Mais on va la remplir plus efficacement avec la relation de Pascal.

```
def Pascal(n) :
....M = [[1]*n] #première ligne
....for i in range(1, n) : #les autres lignes
........L = [1] #toutes les lignes commencent ainsi
........for k in range(1, n) :
............L.append(L[-1]+M[i-1][k])
........M.append(L)
....return M
```

Dans cette version, juste des additions : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & ? & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$ le terme à calculer vaut $4 + 6$, et le suivant $10 + 10$ et ainsi de suite.

Le premier script avec binomial rapport les points si c'est pour une épreuve d'I.P.T.
Mais il vous vaut un regarde noir en option informatique...

Le déterminant de cette matrice vaut toujours 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}$$

en soustrayant $C_k = C_k - C_{k-1}$ jusqu'à $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}$.

On développe par rapport à la première ligne : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix}$.

On soustrait chaque ligne à sa suivante : $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$

et on arrive sur $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$.

On a diminué la matrice d'une taille.
On poursuit jusqu'à celle dont le déterminant vaut 1.

Mais j'ai aussi ça : on effectue des combinaisons sur les colonnes, après avoir émis une conjecture en calculant les premiers déterminants. On soustrait chaque colonne à la suivante *(et on garde la première)*. On recommence avec les colonnes suivants, jusqu'à obtenir une matrice triangulaire

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$\boxed{\text{Le déterminant vaut toujours 1.}}$

◁20▷ ♡ Sachant que 2337, 2698, 4655 et 9614 sont des multiples de 19 [a], montrez que le déterminant $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ est aussi multiple de 19. Pensez à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1000 \\ 0 & 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. non, vous n'étiez pas obligé de le savoir

On effectue une combinaison qui ne modifie pas le déterminant : $C_4 := 1000.C_1 + 1...C_2 + 10.C_3 + C_4$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 7 \\ 2 & 6 & 9 & 8 \\ 4 & 6 & 5 & 5 \\ 9 & 6 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 2337 \\ 2 & 6 & 9 & 2698 \\ 4 & 6 & 5 & 4655 \\ 9 & 6 & 1 & 9614 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 19\times 123 \\ 2 & 6 & 9 & 19\times 142 \\ 4 & 6 & 5 & 19\times 245 \\ 9 & 6 & 1 & 19\times 506 \end{vmatrix} = 19.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 123 \\ 2 & 6 & 9 & 142 \\ 4 & 6 & 5 & 245 \\ 9 & 6 & 1 & 506 \end{vmatrix}$$

Le déterminant est ensuite entier (somme de produits d'entiers). On a un multiple de 19.

Ici, x vaut 1 *(et effectivement, 1 ne tend pas vers 0)*.

On a donc $S = \dfrac{e^1}{2} + e^1$ et c'est la bonne réponse.

◁21▷ ♡ Inversez les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Pour $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, on calcule le déterminant et surtout les cofacteurs :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & 3 & 2 \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & . & 2 \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & 3 & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & . & . \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ . & . & . \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ . & . & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & 3 & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ 1 & 3 & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Et même les cofacteurs pondérés

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & 3 & 2 \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & . & 2 \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & 3 & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & . & . \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ . & . & . \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ . & . & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & 3 & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ 1 & 3 & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

On transpose ensuite :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} . & . & . \\ . & 3 & 2 \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & . & . \\ . & 4 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} . & 1 & 2 \\ . & 3 & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & . & 2 \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ . & . & . \\ 2 & . & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & . & 2 \\ 1 & . & 2 \\ . & . & . \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} . & . & . \\ 1 & 3 & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ . & . & . \\ 2 & 4 & . \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & . \\ 1 & 3 & . \\ . & . & . \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus qu'à calculer ces petits déterminants et à diviser par le déterminant de la 3 sur 3.
On fait de même avec les autres, sauf à avoir une belle idée...

◁22▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix}$. Calculez $\det(A^{-1})$. (la relation de Pascal peut servir...)

Si A^{-1} a une forme simple, on la calcule puis on calcule son déterminant.
Mais ici, autant calculer $\det(A)$ puis passer à $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix}$$

On a soustrait la première colonne à chacune, puis développé par rapport à la première ligne.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

On a encore soustrait des multiples de la première sur les suivantes et développé par rapport à la bonne ligne avec ses 0.

Le déterminant de A (et de A^{-1}) vaut 1.

◁23▷ ♡ Calculez $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. Généralisez en taille n, si possible avec démonstration.

On développe par rapport à la dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + d.\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + d.(-d)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

On a redéveloppé le deuxième par rapport à sa dernière ligne.
La matrice 3 sur 3 est la matrice I_3 de déterminant 1.
On recommence en développant le déterminant de taille 4 par rapport à sa dernière colonne :

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{vmatrix} - c.\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} - d^2$$

On re-développe $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = c.\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = c.$

On itère le bon nombre de fois : $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 02 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a^2 - b^2 - c^2 - d^2.$

On pouvait aussi développer par rapport à la première ligne et bien travailler chaque cofacteur.

Mais il y a mille fois plus simple.
On note C_0, C_1, C_2, C_3 et C_4 les cinq colonnes de la matrice initiale.
On remplace C_0 par $C_0 - a.C_1 - b.C_2 - c.C_3 - d.C_4$:

$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & d \\ a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ? & a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ avec ? $= -a^{é} - b^2 - c^2 - d^2$.

La matrice est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux.
Et la combinaison $C_0 := C_0 - \sum_i a_i.C_i$ est le bon argument pour arriver à $-\sum_i (a_i)^2$.

◁24▷ ♡ Dérivez (pour b fixé non nul) $x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+b^2}$.
Calculez $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx\Big).dy$ et $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy\Big).dx$.

$\Big(x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+b^2}\Big)' = \Big(x \longmapsto \dfrac{1}{x^2+b^2} - \dfrac{2.x}{(x^2+b^2)^2}.x\Big)$

On réduit au dénominateur commun $\boxed{\Big(x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+b^2}\Big)' = \Big(x \longmapsto \dfrac{b^2-x^2}{(x^2+b^2)^2}\Big)}$

quelle chance, si au lieu de b on note y la constante, alors on a pour tout y non nul :

$$\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx = \Big[\frac{-x}{x^2+y^2}\Big]_{x=0}^{x=1} = \frac{-1}{1+y^2}$$

On traite à part le cas $y = 0$? $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-0}{(x^2+0)^2}.dx$ ceci n'existe pas. Mais on va faire comme si on n'avait pas vu.

quel sens donner ensuite à $\displaystyle\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{1}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx\Big).dy$?

C'est $\int_{y=0}^{1} F(y).dy$ avec $F(y) = \Big(\int_{x=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx\Big)$ pour tout y (c'est bien une intégrale qui ne dépend plus après intégration que de y).

Par le calcul précédent, on trouve $\int_{y=0}^{1} \frac{-1}{1+y^2}.dy$. On intègre en arctangente et on trouve $-\frac{\pi}{4}$.

Dans $\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy\Big).dx$, qu'est ce qui change ? Les rôles sont inversés.

On peut tout de suite conclure en disant que le signe va changer.

Sinon, pour chaque x de $]0,\ 1]$, on calcule $\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy$ en trouvant justement une primitive :

$$\Big(y \longmapsto \frac{y}{x^2+y^2}\Big)' = \Big(y \longmapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big)$$

donc

$$\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy = \frac{1}{1+x^2}$$

Ensuite

$$\int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{1}\Big(\frac{1}{1+x^2}\Big).dx = [Arctan(x)]_{x=0}^{1} = \frac{\pi}{4}$$

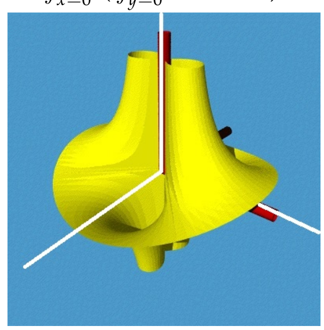
Bilan : $\boxed{\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dx\Big).dy = \frac{\pi}{4} \text{ et } \int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dy\Big).dx = \frac{\pi}{4}}$

Pas de quoi être troublé...

Sauf si on se dit que $\iint_C \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.dxdy$ *doit se calculer, quand C est le carre* $[0,\ 1]\times[0,\ 1]$.

Et une intégrale double, c'est deux intégrales simples.

On doit bien avoir $\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{1} F(x,y).dx\Big).dy = \iint_{[0,1]^2} F(x,y).dxdy = \int_{x=0}^{1}\Big(\int_{y=0}^{1} F(x,y).dy\Big).dx.$



C'est ce qu'on appelle théorème de Fubini.
Et il est vrai si f est de classe C^0 *sur tout* $[0,\ 1]^2$.
Mais justement, ici, F n'est pas continue. Elle n'est pas définie en 0, *et ça suffit à tout planter...*

On a d'ailleurs $\iint_C \Big|\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big|.dxdy = +\infty.$

Sinon, on peut aussi regarder $\int_{x=0}^{2}\Big(\int_{y=0}^{1} x.y.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}.dy\Big).dx = \frac{1}{5}$ *et* $\int_{y=0}^{1}\Big(\int_{x=0}^{2} x.y.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}.dx\Big).dy = -\frac{1}{20}$ *pour faire plus original.*

(pour les integrales du centre en $\Big(\int_{y=0}^{1} x.y.\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^3}.dy\Big)$ *et sa consoeur, changez de variable en* $u = x^2+y^2$*).*

◃25▹

♡♣ $\mathbb{F}$ est le corps des entiers de `range(7)` pour l'addition et la multiplication modulo 7, et E est $\mathbb{F}\times\mathbb{F}$. Montrez qu'aucune forme bilinéaire antisymétrique ϕ sur $E\times E$ ne vérifie $\phi(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}) = 5$.

Soit Φ une forme bilinéaire antisymétrique vérifiant $\Phi(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}) = 5$ calculez $\Phi(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix})$.

Montrez qu'il y a 49 vecteurs dans E et sept forme bilinéaires antisymétriques de $E\times E$ dans $\mathbb{F}$.

Une forme bilinéaire symétrique ψ vérifie $\psi(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}) = \psi(\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}) = 5$, montrez qu'on peut calculer $\psi(\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$.

Il y a sept coefficients, et donc 7^2 vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ avec sept choix pour a et autant pour b.

Notons $\overrightarrow{i}$ le vecteur $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j}$ le vecteur $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

On a donc $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}) = \phi(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, 5.\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j})$.

On développe par bilinéarité en éliminant les $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$ et $\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$: $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}) = 3.\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + 10.\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$.
Mais on sait $\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) - \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Il reste $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}) = 7.\phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) = 0$ (puisque 7 est nul !).

Il est donc impossible d'avoir $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}) = 0$.

Si on repart de $\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = 5$, on obtient cette fois $2.\Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + 3.\Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + 4.\Phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + 6.\Phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 5$
et donc $\Phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) = 5$ (ou $\Phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 2$).

On développe alors $\boxed{\Phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}) = 2.0 + 5.0 + 5.2 - 2.2 = 6}$

Pour déterminer une forme bilinéaire antisymétrique, il faut et il suffit de déterminer $\phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec sept valeurs possibles.

Pour la forme bilinéaire symétrique, on aurait besoin de connaître $\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$, $\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$.

Et on ne nous donne que
$$\begin{array}{ccc} \psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = 5 & \text{et} & \psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 5 \\ \psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + 5.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + 6.\psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) = 5 & & 2.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + 4.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = 5 \end{array}$$

Et on cherche $\psi(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ c'est à dire $4.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + \psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$.

Mais peut être peut on le retrouver par combinaison

6 fois	$\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$	$+5.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$+6.\psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$
plus 4 fois	$2.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$	$+4.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	
égale	$14.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i})$	$+46.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$+36.\psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$
c'est à dire		$+4.\psi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$+\psi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$

On a donc $\boxed{\psi(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 6.\psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}) + 4.\psi(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 6.5 + 4.5 = 1}$

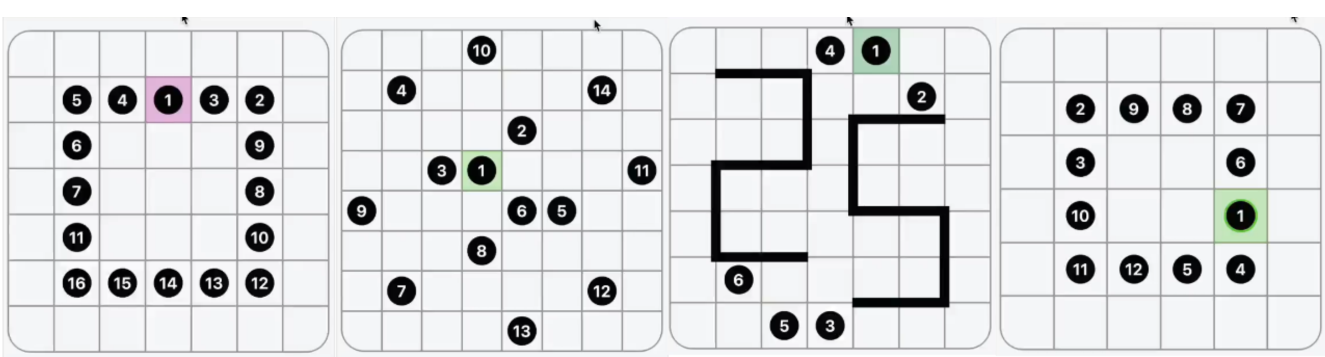
Cela dit, on l'avait avec $\psi(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 4.\psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = 4.\psi(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, a.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix})$ *avec a et b bien choisis.*

"Anton Voyl n'arrivait pas à dormir. Il alluma. Son Jaz marquait minuit vingt. Il poussa un profond soupir, s'assit dans son lit, s'appuyant sur son polochon. Il prit un roman, il l'ouvrit, il lut ; mais il n'y saisissait qu'un imbroglio confus, il butait à tout instant sur un mot dont il ignorait la signification.

Il abandonna son roman sur son lit. Il alla à son lavabo ; il mouilla un gant qu'il passa sur son front, sur son cou.

Son pouls battait trop fort. Il avait chaud. Il ouvrit son vasistas, scruta la nuit. Il faisait doux. Un bruit indistinct montait du faubourg. Un carillon, plus lourd qu'un glas, plus sourd qu'un tocsin, plus profond qu'un bourdon, non loin, sonna trois coups. Du canal Saint-Martin, un clapotis plaintif signalait un chaland qui passait.

Sur l'abattant du vasistas, un animal au thorax indigo, à l'aiguillon safran, ni un cafard, ni un charançon, mais plutôt un artison, s'avançait, traînant un brin d'alfa. Il s'approcha, voulant l'aplatir d'un coup vif, mais l'animal prit son vol, disparaissant dans la nuit avant qu'il ait pu l'assaillir."



◁26▷ a, b et c sont trois complexes distincts. Montrez que $\delta(x)$ est une fonction du premier degré en x *(pensez à combiner les colonnes)*. Calculez sa valeur pour x égal à $-b$, puis pour x égal à $-c$. Calculez Δ_5. Écrivez un script **Python** qui prend en entrée trois réels a, b, c et un entier n et retourne la matrice de cette forme en taille n.

$$\delta(x) = \begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix}, \Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & b-a & b-a & b-a \\ c+x & a-c & b-c & b-c \\ c+x & 0 & a-c & b-c \\ c+x & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

en soustrayant la première colonne aux autres.

On développe par rapport à la première colonne, on a des termes en $(a+x).\lambda_{a,b,c}$ et $(c+x).\mu_{a,b,c}$ où comme l'indique leur nom, $\lambda_{a,b,c}$ et $\mu_{a,b,c}$,ne dépendant que de a b et c et pas de x *(des « constantes » dans un jargon de malpropre)*.

On a bien un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1, qu'on écrira $p.x+q$, avec p et q dépendant *(comme leur nom devrai l'indiquer)* de a, b et c.

J'aurai une grande estime sur les qualités calculatoires de l'élève qui aura mené le calcul jusqu'au bout. Je me dirai que comme prof de physique pour dégouter des collégiens des matières scientifiques il sera parfait. mais j'aurai de la pitié pour son manque de recul.

Pour x égal à $-b$, il reste $\boxed{p.(-b)+q = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ c-b & a-b & 0 & 0 \\ c-b & c-b & a-b & 0 \\ c-b & c-b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^4}$

Pour x égal à $-c$, la matrice est triangulaire aussi *(mais supérieure)* : $p.(-c)+q = (a-c)^4$

Pour calculer $\begin{vmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{vmatrix}$, on introduit

$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix}$$

Par combinaison et développement, on montre que c'est un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1, qu'on note $p.x+q$.

On le calcule en $x=-b$ et en $x=-c$ *(matrice triangulaires)* : $\left\{ \begin{array}{ccc} p.(-b) & +q & = & (a-b)^5 \\ p.(-c) & +q & = & (a-c)^5 \end{array} \right|$.

Et tout ce qui nous intéresse est la valeur en $x=0$, c'est à dire q. On le récupère par simple combinaison des deux lignes : $\boxed{q = \dfrac{c.(a-b)^5 - b.(a-c)^5}{c-b}}$

Comme quoi en regardant le problème de plus loin, en créant une variable de plus qu'on efface ensuite, on l'a rendu plus simple. Encore une fois, ce n'est pas des maths, c'est l'esprit ingénieur.

◁27▷ On va étudier le déterminant de $\begin{pmatrix} -b.c & b.c+b^2 & b.c+c^2 \\ a.c+a^2 & -a.c & a.c+c^2 \\ a.b+a^2 & a.b+b^2 & -a.b \end{pmatrix}$, et même généraliser, autrement qu'en développant comme un bourrin.

◇ 0 ◇ On se donne trois réels non tous nuls a, b et c. On pose alors $s = a+b+c$, $\sigma = a.b+a.c+b.c$, $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix}$, puis $M = W.({}^tU)$. Calculez ${}^tU.W$ à l'aide de s et σ. Vérifiez que M est une matrice carrée, et montrez que $(M^2,\ M)$ est liée *(inutile d'en revenir aux neuf coefficients, c'est par associativité)*.

Sachant $U = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a ${}^tU = (a\ b\ c)$ et ${}^tU.W = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix} = a.(s-a) + b.(s-b) + c.(s-c)$.
On trouve le réel $(a+b+c).s - a^2 - b^2 - c^2 = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = 2.(a.b + a.c + b.c) = 2.\sigma$: $\boxed{{}^tU.W = 2.\sigma}$

En revanche

$$M = W.{}^tU = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.(s-a) & b.(s-a) & c.(s-a) \\ a.(s-b) & b.(s-b) & c.(s-b) \\ a.(s-c) & b.(s-c) & c.(s-c) \end{pmatrix}$$

c'est une matrice carrée de taille 3 sur 3.
Pour montrer que $(M,\ M^2)$ est liée, il faut et il suffit de montrer que M^2 est un multiple de M.
On effectue : $M^2 = M.M = \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s-a \\ s-b \\ s-c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$.

Le terme du milieu a été calculé, c'est $2.\sigma$: $M^2 = W.(2.\sigma).{}^tU = (2.\sigma).W.{}^tU = 2.\sigma.M$: $\boxed{M^2 = 2.\sigma.M}$

◇ 1 ◇ On pose $K = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tU.X = 0\}$. Montrez que K est un espace vectoriel et donnez sa dimension.

On pose $K = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid {}^tU.X = 0\}$. C'est une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur nul : ${}^tU.0_3 = 0_3$.
On prend X et Y dans cet ensemble, puis λ et μ dans $\mathbb{R}$: ${}^tU.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.{}^tU.X + \mu.{}^tU.Y = 0$.
On pousse le calcul jusqu'au bout pour avoir une base : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in K \Leftrightarrow a.x + b.y + c.z = 0$. on a des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -(a.x+b.y)/c \end{pmatrix}$ par exemple, et on dispose d'une base $\left(\begin{pmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ -b \end{pmatrix} \right)$. La dimension est bien 2.

◇ 2 ◇ On pose $H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid M.X = 2.\sigma.X\}$. Montrez que H est un espace vectoriel contenant $\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$.

On pose $H = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid M.X = 2.\sigma.X\}$. On a encore une partie de $\mathbb{R}^3$ contenant le vecteur nul.
On montre la stabilité en prenant deux hypothèses : $M.X = 2.\sigma.X$ et $M.Y = 2.\sigma.Y$ et en les combinant $M.(\lambda.X + \mu.Y) = 2.\sigma.(\lambda.X + \mu.Y)$.
On nous propose un vecteur, il suffit de le vérifier

$$\begin{pmatrix} a.(b+c) & b.(b+c) & c.(b+c) \\ a.(a+c) & b.(a+c) & c.(a+c) \\ a.(a+b) & b.(a+b) & c.(a+b) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix} = 2.(a.b + a.c + b.c). \begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$$

Les trois lignes répondent au même type de calcul :

$$a.(b+c)^2 + b.(b+c).(a+c) + c.(b+c).(a+b) = (b+c).\Big(a.(b+c) + b.(a+c) + c.(a+b)\Big) = (b+c).(2.a.b + 2.a.c + 2.b.c)$$

Les deux autres lignes sont sur le même modèle.

H est donc au moins de dimension 1 puisqu'on y trouve au moins un vecteur non nul.
Mais si finalement il était nul ? On ne pourrait pas conclure si vite.
Quoi qu'il en soit, $b+c = a+c = a+b = 0$ donne vite $a = b = c = 0$ car chaque réel est son propre opposé.
On rejette donc cette possibilité.
H est bien de dimension 1.

◇ 3 ◇ Démontrez $H \cap K = \{0_3\}$.Calculez $\dim(H)$. Déduisez $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

Comme demandé, on détermine $H \cap K$. On sait qu'on y trouve le vecteur nul, puisque chaque sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ le contient.
Ce qui manque est donc l'autre sens : il n'y a que le vecteur nul.
Prenons U dans H et K à la fois : ${}^tU.X = 0$ et $M.X = 2.\sigma.X$ c'est à dire $(W.{}^tU).X = 2.\sigma.X$.
Mais par associativité, en reportant :

$$(W.{}^tU).X = W.({}^tU.X) = W.O = 0_3$$

On aboutit à ${}^tU.X = 0$ et $2.\sigma.X = 0$.
Comme σ est non nul, on trouve $X = 0_3$.

Comme l'intersection de H et K est réduite à $\overrightarrow{0}$, on a $\dim(H \cap K) = 0$.
On reporte dans la formule de Grassmann :

$$\dim(H + K) = \dim(H) + \dim(K) - 0 = 2 + \dim(K)$$

Comme c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, sa dimension ne peut dépasser 3.
C'est donc que K est au plus de dimension 1.

Mais comme on a déjà prouvé qu'il est de dimension au moins égale à 1, le voilà de dimension 1.
Et le vecteur $\begin{pmatrix} b+c \\ a+c \\ a+b \end{pmatrix}$ est une base de K.

Ayant à la fois $\dim(H + K) = 3$ et l'inclusion $H + K \subset \mathbb{R}^3$, on a sans effort $H + K = \mathbb{R}^3$.
Comme l'intersection est réduite à $\overrightarrow{0}$, la somme est directe : $H \oplus K = \mathbb{R}^3$.

◊ 4 ◊ Déduisez que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$.

Comme on a $H \oplus K = \mathbb{R}^3$, on sait qu'en mettant bout à bout une base de H et une base de k, on a une base de $\mathbb{R}^3$.
Prenons deux vecteurs formant une base de H et un vecteur formant une base de K et faisons en une matrice.
Cette matrice (pas exemple $\begin{pmatrix} -b & -c & b+c \\ a & 0 & a+c \\ 0 & a & a+b \end{pmatrix}$) est donc inversible (base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$).
Notons la P et calculons $M.P$ en calculant les trois colonnes les unes après les autres.
$M.C_1 = 0_3$ car C_1 est dans H
On a donc $M.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.\sigma.(b+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+b) \end{pmatrix}$.
Mais on a aussi $P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2.\sigma.(b+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+c) \\ 0 & 0 & 2.\sigma.(a+b) \end{pmatrix}$.
On a obtenu $M.P = P.D$ avec P inversible. C'est la définition de « *matrices semblables* ».

En fait, H et K s'appellent sous-espaces propres de M associés aux deux valeurs propres 0 *et* $2.\sigma$.
La formule $H \oplus K = \mathbb{R}^3$ *raconte la diagonalisation de M, avec valeurs propres* 0 *(double) et* $2.\sigma$.

◊ 5 ◊ Calculez alors $\det(M)$ et $\det(M - \sigma.I_3)$. Concluez.

Comme M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2.\sigma \end{pmatrix}$, elle a le même déterminant : $\det(M) = 0$.
On le savait déjà, puisqu'il existait des vecteurs X non nuls vérifiant $M.X = 0_3$ *(ce qui est incompatible avec l'existence de* M^{-1}*)*.

Mais en écrivant $M = P.D.P^{-1}$ on a aussi $M - \sigma.I_3 = P.D.P^{-1} - \sigma.P.I_3.P^{-1} = P.(D - \sigma.I_3).P^{-1}$.
On passe au déterminant :

$$\det(M - \sigma.I_3) = \det(\begin{pmatrix} -\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix}) = \sigma^3$$

Mais qui est $M - \sigma.I_3$ quand on revient aux coefficients ?

$$\begin{pmatrix} a.(b+c) & b.(b+c) & c.(b+c) \\ a.(a+c) & b.(a+c) & c.(a+c) \\ a.(a+b) & b.(a+b) & c.(a+b) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a.b+a.c+b.c & 0 & 0 \\ 0 & a.b+a.c+b.c & 0 \\ 0 & 0 & a.b+a.c+b.c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -bc & b.(b+c) & c.(b+c) \\ a.(a+c) & -a.c & c.(a+c) \\ a.(a+b) & b.(a+b) & -a.b \end{pmatrix}$$

C'est bien la matrice de l'énoncé, et son déterminant vaut bien σ^3.

Le sujet d'oral de Centrale faisait conjecturer le résultat en créant la matrice, calculant son déterminant pour des valeurs de a, bet c particulières.

Ensuite, il montrait des choses un peu plus générales sur des matrices $W.^tU$ avec des sous-espaces supplémentaires comme H et K.
Évidemment, les élèves de Spé ont quelques théorèmes de plus que vous sur la diagonalisation des matrices.

◇ 6 ◇

Complétez et justifiez

$$\begin{vmatrix} & b^2+b.c+b.d & c^2+b.c+c.d & b^2+b.d+c.d \\ a^2+a.c+a.d & -a.c-a.d-c.d & & d^2+a.d+c.d \\ a^2+a.b+a.d & b^2+a.b+b.d & -a.b-a.d-b.d & \\ a^2+a.b+a.c & & c^2+a.c+b.c & -a.b-a.c-b.c \end{vmatrix} = -(a.b+a.c+\ldots+b.d+c.d)^4.$$

En suivant une démarche similaire avec des matrices plus grandes et quatre réels, un vecteur w et un vecteur u, des matrices $\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&2.\sigma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -\sigma&0&0&0\\0&-\sigma&0&0\\0&0&-\sigma&0\\0&0&0&\sigma \end{pmatrix}$, on arrive à prouver

$$\begin{vmatrix} -b.c-b.d-c.d & b^2+b.c+b.d & c^2+b.c+c.d & b^2+b.d+c.d \\ a^2+a.c+a.d & -a.c-a.d-c.d & c^2+c.a+c.d & d^2+a.d+c.d \\ a^2+a.b+a.d & b^2+a.b+b.d & -a.b-a.d-b.d & d^2+d.a+d.b \\ a^2+a.b+a.c & b^2+b.a+b.c & c^2+a.c+b.c & -a.b-a.c-b.c \end{vmatrix} = -(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d+c.d)^4$$

◃28▹

z est un complexe plus petit que 1 en module.
Montrez : $\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} z^k$. Montrez $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \dfrac{z}{1-z}$.

La première égalité, c'est du cours (série géométrique, pour les complexes de module strictement plus petit que 1 : $\sum\limits_{n=0}^{N} z^n = \dfrac{1-z^{N+1}}{1-z}$ et z^{N+1} tend vers 0 quand N tend vers l'infini).
On part ensuite de cette formule, qu'on applique à $z^{2^{n+1}}$ (lui aussi pluspetit que 1).

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(z^{2^{n+1}}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k.2^{n+1}}$$

On multiplie :

$$\frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = z^{2^n}.\sum_{k=0}^{+\infty} \left(z^{2^{n+1}}\right)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{k.2^{n+1}.2^n}$$

On somme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n,k} z^{(2.k+1).2^n}$$

Et tout entier naturel N (non nul) s'écrit $2^n.(2.k+1)$ pour n et k bien choisi.
Ceci consiste à prendre la décomposition en produit de facteurs premiers de N et à isoler $2^n.(3^a.5^b.7^d\ldots)$ avec le contenu de la parenthèse impair.

On a donc $\sum\limits_{N>0} z^N$ et ceci vaut justement $\dfrac{z}{1-z}$ puisqu'il manque z^0.

◃29▹

Une matrice est un carré vraiment magique si la somme des termes de chacune de ses lignes est égale à la somme des termes de chacune de ses colonnes, ainsi que la somme des termes de ses deux diagonales *(exemple* $\begin{pmatrix} 1&4&-2\\-2&1&4\\4&-2&1 \end{pmatrix}$ *; à vous d'en trouver d'autres)*. Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 1.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 2.
♡ Donnez une base de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 3.
♡ Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques de taille 4.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et antisymétriques *($\forall(i,\ k)$, $a_i^k = -a_k^i$)* de taille n.
Donnez la dimension de l'ensemble des carrés vraiment magiques et symétriques *($\forall(i,\ k)$, $a_i^k = a_k^i$)* de taille n.

Toute matrice $\begin{pmatrix} a \end{pmatrix}$ (de taille 1) est vraiment magique.
On a donc un espace vectoriel de dimension 1 (et une base en est $(\begin{pmatrix} a \end{pmatrix})$), avec une parenthèse pour la liste, comme

pour $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et une pour la matrice, même si elle est de taille 1).

En taille 2, que donnent les contraintes sur une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$? On a $a+b=c+d=a+c=b+d=a+d=b+c$. Si on raisonne par conditions nécessaires et qu'on vérifie qu'elles suffisent, il reste $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ et l'espace est de dimension 1.

Dois-je vérifier que c'est un espace vectoriel (stabilités, présence du neutre, pour avoir « sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R}), +, .$)) ?.

En taille 3, on commence par « matrice magique », comme dans le cours : $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & a+b+c-d-e \\ b+c-d & a+c-e & -c+d+e \end{pmatrix}$.

On ajoute ensuite la contrainte des deux diagonales :
$(a)+(e)+(-c+d+e)=a+b+c$ et $(b+c-d)+(e)+(c)=a+b+c$

Si on fait le bilan on trouve un espace de dimension 4.

Je propose les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & -a-b \\ c & 2.a+b+c & -2.a-b-2.c \\ -a-c & -2.a-2.b-c & -3.a+2.b+2.c \end{pmatrix} + s.\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

par une démarche « algèbre linéaire ». J'ai pris déjà celles de somme nulle (en ligne, colonne, diagonale), et j'ai translaté suivant une matrice de sommes 1.

Je peux même donner une base

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

En taille 4, il me semble que la dimension est ...

Ce gant est assoupLi. Il est PRémuni face aux Doutes. Sans Pèze, il manque de Bouffe. Les vieux Masques évitent la FLotte. Pas de Bouffe, pas de Tabac. On manque de CHaises pour attirer les corBeaux. Ne faites pas craMer votre CHambre. Ces SPoliés sont pleins de Germes. J'ai CHIné un gros CALIbre. Les Bars s'enDettente.

◁ 30 ▷

• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons *Aissata* et *Bintou* dans des cases distinctes du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases distinctes du tableau ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, aux symétries, rotations près ?
• Combien de façons de placer deux jetons indistinguables dans deux cases du tableau, sans qu'ils soient sur une même ligne ou une même colonne ?

.	.	.
.	.	.
.	.	.

Aissata et Bintou, c'est juste pour A et B.

On doit placer deux jetons sur neuf places. Neuf choix pour A, neuf choix pour B. Total : 81 configurations.

Si ils doivent occuper deux cases distinctes, neuf choix pour A et seulement huit pour B : 72 (et si B se place en premier, c'est pareil).

Les deux jetons sont indistinguables. On a deux cas :
• ils sont dans la même case : neuf possibilités.
• ils sont dans deux cases distinctes : $\binom{9}{2}$.
Total : 45.

Les deux jetons sont indistinguables, et on peut faire des symétries, rotations.

• ils sont dans la même case :

$\mathcal{O}$	.	.
.	.	.
.	.	.

.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.
.	.	.

.	.	.
.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.

Tout dépend effectivement du type de case.

• ils sont dans deux cases distinctes et l'un occupe la case centrale :

$\mathcal{O}$	.	.
.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.

.	$\mathcal{O}$	.
.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.

• ils sont dans deux cases différentes, personne au centre :

$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}$	.
.	.	.
.	.	.

.	$\mathcal{O}$	.
$\mathcal{O}$	.	.
.	.	.

.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.
.	$\mathcal{O}$	.

.	$\mathcal{O}$	.
.	.	.
$\mathcal{O}$	.	.

$\mathcal{O}$	.	.
.	.	.
.	.	$\mathcal{O}$

$\mathcal{O}$	.	$\mathcal{O}$
.	.	.
.	.	.

Petit jeu : combien de configurations différentes derrière chaque modèle.

◁31▷

			5083
			66
			665
1311	1309	130	

2 3 5 7
11 13 17 19
23

A droite, neuf nombres. Placez les dans les cases du tableau pour que les produits indiqués en ligne et en colonne soient corrects.

On note que certains valeurs sont imposées à cause des décompositions en produits de facteurs premiers :

1311=		3						×19	×23
1309=				7	×11		×17		
130=	2		×5			×13			
665=			5	×7				×19	
66=	2	×3			×11				
5083=						13	×17		×23

23	***17***	***13***	13.17.23
3	***11***	***2***	2.3.11
19	***7***	***5***	5.7.19
3.19.23	7.11.17	2.5.13	

◁32▷

♡ Trouvez une primitive de $t \longmapsto e^{a.t}.\cos(t)$ en intégrant par parties.
Vérifiez que $t \longmapsto e^{(a+i.b).t}$ se dérive bien en $t \longmapsto (a+i.b).e^{(a+i.b).t}$.
Trouvez une primitive de $t \longmapsto e^{a.t}.2.\cos(t)$ en l'écrivant $t \longmapsto e^{(a+i.).t} + e^{(a-i.t)}$.

On trouve que $t \longmapsto e^{a.t}.\cos(t)$ s'intègre en $t \longmapsto e^{a.t}.\frac{a.\cos(t)+\sin(t)}{a^2+1}$.

En effet : $\int e^{a.t}.\cos(t).dt = \Big[e^{a.t}.\sin(t)\Big] - a.\int e^{a.t}.\sin(t).dt = \Big[e^{a.t}.\sin(t)\Big] + a.\Big[e^{a.t}.\cos(t)\Big] - a^2 \int e^{a.t}.\cos(t).dt$.

On a intégré deux fois par parties.

On écrit $e^{(a+i.b).t} = e^{a.t}.e^{i.b.t} = e^{a.t}.(\cos(b.t) + i.\sin(b.t))$.
On dérive le produit $t \longmapsto e^{a.t}.(\cos(b.t) + i.\sin(b.t))$ et on trouve
$t \longmapsto a.e^{a.t}.(\cos(b.t) + i.\sin(b.t)) + e^{a.t}.(-b.\sin(b.t) + i.b.\cos(b.t))$
On compare avec $t \longmapsto (a+i.b).e^{a.t}.(\cos(b.t) + i.\sin(b.t))$ et il y a bien égalité.

Pour intégrer $e^{a.t}.\cos(b.t)$, on peut donc dire qu'il s'agit de la partie réelle de $e^{a.t}.e^{i.b.t}$.

On intègre, grâce à la question précédente $\int e^{a.t}.e^{i.b.t}.dt = \Big[\frac{e^{a.t}.e^{i.b.t}}{a+i.b}\Big] = \Big[\frac{(a-i.b.t).e^{a.t}.e^{i.b.t}}{a^2+b^2}\Big]$ (et à la conjugaison, c'est vrai).

On reprend la partie réelle de $\Big[\frac{(a-i.b.t).e^{a.t}.(\cos(b.t)+i.\sin(b.t))}{a^2+b^2}\Big]$ et on trouve $\boxed{e^{a.t}.\frac{a.\cos(b.t)+b.\sin(b.t)}{a^2+b^2}}$

◁ 33 ▷

```
def truc(n) :
....A = []
....for i in range(n) :
........L = []
........for k in range(n) :
............L.append(abs(i-k))
........A.append(L)
....return A
```

Calculez le déterminant de `Truc(n)` pour n de 0 à 6.

On crée ligne à ligne une matrice, de terme général $|i-k|$ si i est l'indice de ligne et k celui de colonne *(certes, ça ne change rien, la matrice est symétrique)*.

Les premières matrices sont simples en rappelant que la matrice a vide a pour déterminant 1 :

0	1	2	3	4	5
$()$	$\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
1	0	-1	4	-12	32

Et en taille 6, on trouve -80. Et les suivants, à la machine : 192, -448, 1024 et -2304.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & -6 & -8 \\ 0 & 3 & -2 & -7 & -12 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0 \\ L1 \\ L2-2.L1 \\ L3-3.L1 \\ L4-4.L1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & -6 & -8 \\ 3 & -2 & -7 & -12 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -4 \\ 4 & 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} \begin{matrix} L0 \\ L1+L0 \\ L2+L0 \\ L3+L0 \end{matrix} = +2. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{vmatrix} = 4. \begin{vmatrix} -3 & -4 \\ -4 & -8 \end{vmatrix} = 32$$

Il n'y a pas de règle facile à deviner pour généraliser.

L'inflation irrite les *ma*bouls. La gau*ch*e au bou*l*ot. Je n'apprécie pas le *g*éant de taver*n*e. In*tr*us de Bel*g*ique. Les p*ro*fs gèlent dans les f*a*cs. L'*équ*ipe exalte les *p*opulations. L'abî*m*e est dans le con*t*enu. Ce vétérinaire a *ann*ulé l'*enc*aisse. Difficile de *s'en* sortir si on *re*cule. Les footbaleurs ont montré leur f*or*ce dans le p*é*no.

◁ 34 ▷ (♡ en dimension 2 ou 3) En considérant que la base canonique de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ est de la forme
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$ (on promène les 1 le long de chaque ligne dans l'ordre) ;
la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right)$ est elle de même orientation qu'elle (cette fois, les 1 se promènent de colonne en colonne) ?
Rappel : pour dire si deux bases B et $\mathbb{B}$ ont la même orientation, on exprime les vecteurs de B sur la base $\mathbb{B}$ et on regarde le signe du déterminant obtenu.

Il faut donc écrire en colonne la matrice qui exprime les vecteurs de la nouvelle base par rapport à ceux de l'ancienne base.
Et attention, les vecteurs sont eux même des matrices...
Par exemple, pour n égal à 2 *(je ne commence pas par 0 ou 1)* :

1	0	0	0	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	1	0	0	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^*$
0	0	0	1	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^*$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	

La matrice de changement de base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et elle a pour déterminant -1.

Passons à la taille 3 :

1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Si j'ai bien rempli, il y a dans la matrice de taille 9 sur 9 un seul 1 par ligne et par colonne.
C'est une matrice de permutation.
Pour trouver sa signature, il suffit de compter les échanges de colonnes.
Et finalement, il suffit de compter des bicycles :

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Il y en a trois, la signature vaut -1, et le déterminant aussi.
Les deux bases sont orientées en sens contraire.

Pour n quelconque, il a a n matrices qui sont à la même place dans les deux descriptions *(celles où le* 1 *est sur la diagonale)*.
Il reste $n^2 - n$ éléments qui s'échangent deux à deux.

On a besoin de $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ bicycles.

La signature vaut $\boxed{(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}}$ *(et c'est aussi le déterminant du changement de base)*.

◁35▷ Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce déterminant vaudra 2017 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ ? & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$? Si oui, cette valeur sera-t-elle entière, si non, calculez le coefficient de X^{23} dans T_{27}.

Ce déterminant est une fonction affine du terme en position ligne 4 colonne 1 (appelé a).
On développe par rapport à la première colonne. On a trois termes dont la valeur importe peu, et un terme en $-a.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.
On calcule ce déterminant 3 sur 3 : $a - C^{te}$. On peut atteindre la valeur 2017, et même avec un entier.
Si on a le courage : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2020 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2017$.

A part ça :
67108864*x^27-452984832*x^25+1358954496*x^23-2387607552*x^21+2724986880*x^19-2118057984*x^17+
1143078912*x^15-428654592*x^13+109983744*x^11-18670080*x^9+1976832*x^7-117936*x^5+3276*x^3-27*x

---

◁36▷ ♡ a, b, c et d sont quatre réels. Calculez les déterminants de VanDerImmonde :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

Pensez à un déterminant de VanDerMonde, mais de taille 5 : $VdM(a,\ b,\ c,\ d,\ x)$.

On connaît la formule générale :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} (x-a). & (x-b). & (x-c). & (x-d) \\ (d-a). & (d-b). & (d-c). & \\ (c-a). & (c-b). & & \\ (b-a) & & & \\ Van & Der & Monde & \end{matrix}$$

On l'écrit même $\lambda.(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ avec $\lambda = \begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{matrix}$ (produit de six termes).

Mais en développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne, c'est aussi

$$x^4.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ & & & \end{vmatrix} \quad -x^3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ & & & \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad +x^2.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ & & & \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

$$-x.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \quad +1.\begin{vmatrix} & & & \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$$

On peut alors identifier les coefficients des polynômes (après avoir développé $(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ par les formules de Viète) :

x^4		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{matrix}$		$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{matrix}$
x^3		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$		$-\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{matrix} .(a+b+c+d)$
x^2		$\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$		$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{matrix} \times \begin{pmatrix} a.b & +a.c & +a.d \\ & b.c & +b.d \\ & & +c.d \end{pmatrix}$
1		$\begin{matrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{matrix}$		$\begin{matrix} (d-a). & (d-b). & (d-c). \\ (c-a). & (c-b). & \\ (b-a) & & \end{matrix} .a.b.c.d$

Deux d'entre eux sont déjà « de VanDerMonde », quitte pour l'un à factoriser chaque colonne.

◃37▹ a, b , c et d sont quatre entiers tirés au hasard entre 0 et 4. Quelle est la valeur maximale de $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a & a^3 \\ 1 & b^2 & b & b^3 \\ 1 & c^2 & c & c^3 \\ 1 & d^2 & d & d^3 \end{vmatrix}$?

C'est l'opposé d'un déterminant de VanDerMonde (en permutant des colonnes).

On l'écrit $-\begin{matrix} (b-a). & (c-a). & (d-a) \\ & (c-b). & (d-b) \\ & & (d-c) \end{matrix}$. Pour le maximiser, on va éviter d'en prendre deux égaux.

On a donc quatre nombres pour finalement cinq entiers possibles.

C'est donc qu'on en évite un et un seul. Par exemple $0 < 1 < 3 < 4$. Ou $0 < 1 < 2 < 4$.

Les rôles étant symétriques au signe près à la fin, on va prendre $a < b < c < d$.

Si d vaut 3 et non 4, on le fait passer à 4, les distances augmentent, et le déterminant grandit.

De même, si a ne vaut pas 0 (il vaut donc 1), on peut agrandir en prenant $a = 0$.

Il ne reste que quelques possibilités à tester : $0 < 2 < 3 < 4$, $0 < 1 < 3 < 4$ ou $0 < 1 < 2 < 4$.
C'est la solution $\boxed{0 < 1 < 3 < 4}$ qui l'emporte. Le déterminant vaut $\boxed{72}$ Les autres choix donnent 48.

◃38▹ Inversez ces trois matrices là $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (calcul direct)

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}$ Comment je l'ai eue ? par cofacteurs et déterminant. Ou en tâtonnant.

Pour la dernière, une piste agréable est de l'élever au carré :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pas loin.
On sort un 4 et on multiplie par une matrice de permutation :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice $\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vient comme inverse « naturel ».
Et on peut généraliser en dimension plus grande.

On peut dire qu'inverser la matrice revient à résoudre $\begin{array}{ccccc} x & +y & +z & +t & = & a \\ x & +i.y & -z & -i.t & = & b \\ x & -y & +z & -t & = & c \\ x & -i.y & -z & +i.t & = & d \end{array}$ d'inconnues x, y, z et t.

Et ce système se résout aussi sans inverser la matrice, mais en sommant les lignes : $x+z=\frac{a+c}{2}$ par exemple, et en continuant avec de bonnes idées comme ça.

◁39▷ Calculez $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Comme on peut remplacer une colonne d par une combinaison $a+b+c+d$ sans modifier le déterminant :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 9 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 12 \\ 9 & 2 & 0 & 12 \\ 1 & 9 & 2 & 12 \\ 0 & 1 & 9 & 12 \end{vmatrix} = 12.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

On peut ensuite soustraire une ligne *(la première)* sur les autres et trouver $12.\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 9 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$

On développe par rapport à la dernière colonne, le déterminant est de taille 3 et on fait appel à Pierre-Frédéric Sarrus. On trouve $\boxed{-5904}$

L'autre se calcule de la même façon et donne $\boxed{5904}$ Il suffit d'ailleurs de remettre les colonnes dans le « bon » ordre pour passer de l'un à l'autre.

◁40▷ Résolvez pour a, b et c complexes distincts donnés : $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 \end{array} \right.$ d'inconnues $(x,\ y,\ z)$.

Le système $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix}$ a pour matrice une matrice de VanDerMonde inversible.
Les formules de Cramer donnent par exemple

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{a.b.c.\begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = a.b.c.\frac{-\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = a.b.c$$

puis $y=-(a.b+a.c+b.c)$ et

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \frac{\begin{vmatrix} b-a & b^3-a^3 \\ c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \frac{(b-a).(c-a).\begin{vmatrix} 1 & b^2+a.b+a^2 \\ 1 & c^2+a.c+c^2 \end{vmatrix}}{(c-a).(c-b).(b-a)} = \ldots = a+b+c$$

On peut aussi utiliser la méthode de Gauss : on écrit simplement

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \end{array}\right]$$

on combien les lignes $L_2 - L_1$, $L_3 - L_1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \end{array}\right]$$

on divise par $b-a$ et $c-a$ sachant $\dfrac{x^3-y^3}{x-y} = x^2 + x.y + y^2$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+a.c+a^2 \end{array}\right]$$

on combine encore :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & c^2+a.c-b^2-a.b \end{array}\right]$$

on divise par $c-a$, on tient z :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+a.b+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & c+b+a \end{array}\right]$$

on remonte par combinaisons $y = (b^2+a.b+a^2) - (a+b).(a+b+c) = -a.b - a.c - b.c$ et on termine avec x.

On peut (?) aussi penser au polynôme $X^3 - (x + y.X + z.X^2)$.
Si x, y et z sont les racines de notre système, alors on a $P(a) = P(b) = P(c) = 0$.
C'est donc qu'on a $P(X) = (X-a).(X-b).(X-c) = 0$.
En développant et identifiant les coefficients

$$x = a+b+c$$
$$y = -(a.b + a.c + b.c)$$
$$z = a.b.c$$

◁ 41 ▷

Complétez cette matrice de VanDerMonde, calculez son déterminant, et complétez son inverse, puis calculez le déterminant de son inverse. $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & & \\ & 4 & & 2 & 2 \\ 1 & 1 & & 6 & \\ 1 & 2 & 2 & & \end{pmatrix}$, $V^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & & 1 & 1 \\ & 2 & 0 & & 5 \\ 3 & & & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & \end{pmatrix}$. *Pardon ? Il y a un truc ? Oui. On travaille sur* $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ *pour l'addition et la multiplication modulo* 7.

Oui, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

Certaines colonnes sont déjà remplies.
Pour d'autres, on complète avec les puissances de 5.
Pour d'autres, on se demande comment passer de 2 à 6.
Enfin, la dernière pourrait contenir les puissances de 3, mais on lui demande d'être inversible, cette matrice. Il n'y a donc pas deux colonnes égales.

Ensuite, comme on nous offre plusieurs coefficients, l'inversion de V se fait juste en complétant les cases :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◁42▷

♡ Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières *(c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle)*.
On lance ce dé, l'espérance du résultat est 47/22. Écrivez l'équation linéaire concernant $P(X=1)$, $P(X=2)$ et $P(X=3)$.
La variance est 365/484 *(rappel : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$)*.
Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.
Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

Notons p_k la probabilité $P(X=k)$.
Comme l'univers se réduit à trois états, on a $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Le calcul de l'espérance donne $1.p_1 + 2.p_2 + 3.p_3 = E(X)$ (moyenne).

De manière similaire $1.p_1 + 4.p_2 + 9.p_3 = E(X^2)$ (moyenne des carrés).

Dans nos moyennes, il n'y a pas de dénominateur, puisque $p_1 + p_2 + p_3$ vaut 1.

Par définition de la variance : $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ (en fait $Var(X) = E((X - E(X))^2)$ mais ça revient au même).
Il suffit de faire ensuite passer de l'autre côté.

On met bout à bout nos informations et on écrit sous forme de système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix}$$

Quitte à inverser la matrice de VanDerMonde :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5/2 & 1/2 \\ -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 47/22 \\ 117/22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/22 \\ 5/22 \\ 10/22 \end{pmatrix}$$

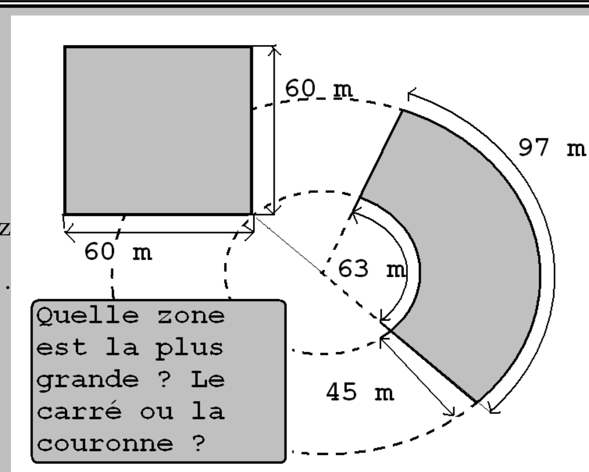
Bonne nouvelle, les probabilités sont positives.

◁43▷

a, b, c et d sont quatre réels, montrez que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \cos(a) & \cos(b) & \cos(c) & \cos(d) \\ \cos(2.a) & \cos(2.b) & \cos(2.c) & \cos(2.d) \\ \cos(3.a) & \cos(3.b) & \cos(3.c) & \cos(3.d) \end{vmatrix}$ est égal à $8.(\cos(d) - \cos(c)).(\cos(d) - \cos(b)) \dots$ *(complétez)*. Indication : Tchebychev, combinaisons et VanDerMonde.

◁44▷

La matrice B a pour valeurs propres 1, 3 et -2. Donnez son polynôme caractéristique : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & & 15 \\ & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
Trouvez un vecteur propre de valeur propre 1.
Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.



Le polynôme caractéristique de la matrice est forcément $X-1).(X-3).(X+2)$ puisqu'on nous a donné les trois valeurs propres ! Pas besoin de chercher plus loin.

Si on est physique, on le développe :
$$X^3 - 2.X^2 - 5.X + 6$$
et le matheux dit « c'est bon, tu as bien retrouvé la somme des racines (2), le produit : (-6) et le troisième terme $(1.3 + 1.(-2) + 3.(-2) = -5)$

Mais alors on en profite pour retrouver les coefficients qui manquent : $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & a & 15 \\ b & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Ou même, sans calcul ou presque.
La trace est la somme des valeurs propres (M et D ont la même trace car elles sont semblables) : $7 + a + 3 = 1 + 3 - 2$.
Le réel a vaut -8.

> *« Ce n'est pas un réel, c'est un entier » s'écrie l'élève.*
> *Oui, cet élève est aussi con que celui qui dit « 3 n'est pas un complexe, c'est un réel ».*

Avec le déterminant (calcul sans intérêt, même financier, désolé Agathe) : $b = -6$.

La matrice est donc $B = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$ et on vérifie le terme qui nous manque. Il coïncide bien.

On cherche alors un vecteur propre de valeur propre 1 en résolvant le système sous-contraint
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
ou le système de Cramer
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$
On trouve le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ses multiples.

Et si vous voulez :
$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & -5 \\ -24 & -8 & 15 \\ -6 & -4 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Le déterminant est un faux VanDerMonde.

Mais il vient d'un déterminant de VanDerMonde. Classique. On considère $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix}$.

C'est un vrai déterminant de VanDerMonde, de valeur $\begin{array}{cccc} (x-a) & (x-b) & (x-c) & (x-d) \\ (d-a) & (d-b) & (d-c) & \\ (c-a) & (c-b) & & \\ (b-a) & & & \end{array}$ qu'on peut considérer comme un polynôme en x.

Et justement, notre déterminant initial de taille 4 est le cofacteur de x^3 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ a & b & c & d & \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & \\ & & & & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & \end{vmatrix}$.

Il nous suffit de trouver le coefficient de x^3 dans $A.(x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$ avec $A = \begin{array}{ccc} (d-a) & (d-b) & (d-c) \\ (c-a) & (c-b) & \\ (b-a) & & \end{array}$

.
Viète nous souffle donc à l'oreille la forme factorisée

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = -\begin{matrix} (d-a) & (d-b) & (d-c) \\ (c-a) & (c-b) & \\ (b-a) & & \end{matrix} .(a+b+c+d)$$

Pour la couronne ou portion de couronne, on introduit des notations naturelles : r, R et α pour le petit rayon, le grand rayon et l'angle au centre.
On a alors plusieurs informations

$$\begin{matrix} r & \times & \alpha & = & 63 \\ R & \times & \alpha & = & 97 \\ R & - & r & = & 45 \end{matrix}$$

La longueur d'arc est proportionnelle à l'angle au centre et quand cet angle vaut $2.\pi$ la longueur vaut $2.\pi.R$.

Trois inconnues pour trois équations, c'est bon.

On calcule ensuite l'aire de la portion de couronne en soustrayant l'aire d'une portion de disque à une autre portion de disque

$$R^2.\frac{\alpha}{2} - r^2.\frac{\alpha}{2}$$

Rappel : l'aire est proportionnelle à l'angle au centre, et quand cet angle vaut $2.\pi$, l'aire vaut $\pi.R^2$.
Qui a appris $\frac{R^2.\alpha}{2}$? pas moi.
Qui a constaté qu'une des formules était la dérivée de l'autre ?

Mais en fait, sans même se précipiter dans les calculs :

$$R^2.\frac{\alpha}{2} - r^2.\frac{\alpha}{2} = \frac{(R-r).(R.\alpha + r.\alpha)}{2} = \frac{45.(97+63)}{2} = 3600$$

Et le carré a pour aire 3600. Égalité parfaite !

◃45▹

Soit A une matrice de taille n sur n et U_1 à U_k des vecteurs propres de A associé à des valeurs propres distinctes λ_1 à λ_k ($A.U_i = \lambda_i.U_i$et $U_i \neq O_n$). Montrez que la famille $(U_1, \dots U_k)$ est libre *(partir de $\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k = 0_n$ et appliquer A autant de fois qu'il faut)*.
Concluez que si A admet n valeurs propres distinctes, alors il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale vérifiant $A.P = P.D$ *(on montrera qu'il existe au moins un vecteur propre pour chaque valeur propre, et on mettra ces vecteurs propres dans le matrice P)*.

On se donne k réels α_1 à α_k (les λ_i sont déjà pris pour désigner les valeurs propres).
On suppose $\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k = 0_n$. Objectif : les α_i sont nuls.

On applique A (formats compatibles) : $A.(\alpha_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.U_k) = A.0_n$.

On distribue : $\alpha_1.A.U_1 + \ldots + \alpha_k.A.U_k = 0_n$ (les réels traversent les produits matriciels : $a.N.P = N.a.P = N.P.a$).

Mais chaque vecteur est vecteur propre $\alpha_1.\lambda_1.U_1 + \ldots + \alpha_k.\lambda_k.U_k = 0_n$.

On écrit même $\lambda_1.(\alpha_1.U_1) + \ldots + \lambda_k.(\alpha_k.U_k) = 0_n$.

On multiplie à nouveau par A à gauche : $A.\Big(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.U_i\Big) = 0_n$.

Même distribution : $\sum_{i=1}^{k} A.\lambda_i.\alpha_i.U_i = 0_n$.

Même traversée : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.A.U_i = 0_n$.

Même propreté : $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i.\alpha_i.\lambda_i.U_i = 0_n$.
Même regroupement : $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^2.\alpha_i.U_i = 0_n$.
On recommence avec le même schéma : $\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^3.\alpha_i.U_i = 0_n$.
Par récurrence naturelle sur l'exposant p (ou sur le nombre de fois où on a multiplié par A) :

$$\sum_{i=1}^{k} (\lambda_i)^p.\alpha_i.U_i = 0_n$$

Ecrivons k formules de cette liste les unes sous les autres :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1.\alpha_1.U_1 & + & 1.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +1.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ \lambda_1.\alpha_1.U_1 & + & \lambda_2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +\lambda_k.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ (\lambda_1)^2.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^2.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^2.\alpha_k.U_k & = & 0_n \\ \vdots & & & & & & & \\ (\lambda_1)^{k-1}.\alpha_1.U_1 & + & (\lambda_2)^{k-1}.\alpha_2.U_2 & + & \dots & +(\lambda_k)^{k-1}.\alpha_k.U_k & = & 0_n \end{array}$$

Matriciellement, ce système s'écrirait $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ (\lambda_1)^2 & (\lambda_2)^2 & \dots & (\lambda_k)^2 \\ \vdots & & & \\ (\lambda_1)^{k-1} & (\lambda_2)^{k-1} & \dots & (\lambda_k)^{k-1} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1.U_1 \\ \alpha_2.U_2 \\ \alpha_3.U_3 \\ \vdots \\ \alpha_k.U_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_n \\ 0_n \\ 0_n \\ \vdots \\ 0_n \end{pmatrix}$
même si la notion de « vecteur de vecteurs » est un peu louche.
De toutes façons, c'est un système linéaire, dont la matrice est « de VanDerMonde ».
Comme les λ_i (les valeurs propres) sont distincts, la matrice de VanDerMonde est inversible.
L'unique solution est donc que chaque $\alpha_i.U_i$ soit égal à 0_n *(vecteur nul)*.
Par définition, un vecteur propre est non nul[2], c'est donc que c'est α_i qui est nul.

On a donc bien prouvé k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de la matrice A sont linéairement indépendants.

On a de même k vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme f sont linéairement indépendants.

Comme la taille des familles libres est plafonnée, le nombre de valeurs propres est limité.

Suppsons que le poynôme caractéristique de A admet n valeurs propres distinctes (n est le format de la matrice, et aussi le degré du polynôme caractéristique).
Pour chaque valeur propre λ, on a $\det(A - \lambda.I_n) = 0$.
La matrice $A - \lambda.I_n$est non inversible.
Il existe une relation de dépendance linéaire sur ses colonnes.
Il existe donc un vecteur non nul U (formé des coefficients d'une telle relation) vérifiant $(M - \lambda.I_n).U = 0_n$.
Quitte à faire passer de l'autre côyté le $\lambda.I_n.U$, on a un vecteur propre : $M.U = \lambda.U$.

Chaque racine du polynôme caractéristique apporte un vecteur propre. Au moins un (pensez au cas des racines doubles qui vont peut être en amener plusieurs).

Comme on a supposé que le polynôme caractéristique avait n racines distinctes, on donc n vecteurs prorpes associés à ces n valeurs propres distinctes.
Mais par le résultat précédent *(appelé parfois « corollaire de VanDerMonde »)*, ces vecteurs propres forment une famille libre.

En tant que famille libre de bon cardinal n, la famille $(U_1, \dots, U_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

---

2. sinon, avec $U = 0_n$, la relation $A.U = \lambda.U$ ne permet pas de déterminer λ)

En prenant pour P la matrice de cette falille de vecteur (changement de base), les relations $A.U_i = \lambda_i.U_i$ donnent, colonne par colonne : $A.P = P.D$ avec $D = Diag(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

On a prouvé que toute matrice ayant autant de valeurs propres distinctes que son format est diagonalisable.

Ce qui va donc empêcher une matrice diagonalisable :
• pas assez de valeurs propres *(sur $\mathbb{R}$ par exemple, avec un spectre non réel)*
• des racines doubles dans le polynôme caractéristique, qui ne vont pas apporter assez de vecteurs propres.

Attention, même avec des valeurs orpres multiples, certaines se diagonalisent, comme I_n qui n'a qu'une valeur propre (c'est 1) mais est déjà diagonale.

Le critère fin sera : chaque valeur propre apporte-t-elle autant de vecteurs propres indépendants que sa multiplicité dans le polynôme caractéristique ?

◁46▷ ♡ Pour tout n, on pose $c_n = (\theta \longmapsto \cos(n.\theta))$ et $\sigma_n = (\theta \longmapsto \cos^n(\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(\sigma_0,\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3,\ \sigma_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ +,\ .)$ et engendre le même sous-espace vectoriel que $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$. Donnez la matrice de changement de base.

On se donne cinq réels a_0 à a_4 quelconques (quantification de $\forall (a_0, \dots a_4) \in \mathbb{R}^5$)
et on suppose $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$ (fonction nulle).
On doit montrer que a_0 jusqu'à a_4 sont nuls.

Une méthode :

on calcule en 0	$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0$
on dérive $a_0.c_0 + a_1.c_1 + a_2.c_2 + a_3.c_3 + a_4.c_4 = 0$	$-a_1.c_1 - a_2.2.c_2 - a_3.3.c_3 - a_4.4.s_4 = 0$
et on re-dérive	$-a_1.c_1 - a_2.4.c_2 - a_3.9.c_3 - a_4.16.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.4 - a_3.9 - a_4.16 = 0$
on re-dérive deux fois	$-a_1.c_1 - a_2.16.c_2 - a_3.81.c_3 - a_4.64.c_4 = 0$
on calcule en 0	$-a_1 - a_2.16 - a_3.81 - a_4.64 = 0$
on recommence	

On finit par obtenir un système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \\ 0 & 1 & 16 & 81 & \\ 0 & 1 & 64 & 729 & \\ 0 & 1 & 256 & 6561 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice est de type VanDerMonde. Inversible.
La seule solution est « tous les $a_k$sont nuls ».

Autres méthodes : regarder aussi en π pour avoir autant de relations sans trop dériver
regarder en quelques points (au lieu de dériver et toujours regarder en 0), et obtenir encore un système de Cramer.

Cette fois, on se donne des b_k et on suppose

$$\forall x,\ b_0.(\cos(x))^0 + b_1.(\cos(x))^1 + b_2.(\cos(x))^2 + b_3.(\cos(x))^3 + b_4.(\cos(x))^4 = 0$$

Le polynôme $b_0 + b_1.X + b_2.X^2 + b_3.X^3 + b_4.X^4$ est nul sur tout $[-1,\ 1]$.
Il a plus de racines que son degré ? Il est nul !
Les b_k sont nuls.

On notera que grâce aux formules de Tchebychev, on peut ramener les c_k en combinaisons des σ_i et profiter de la liberté des uns pour obtenir celle des autres.

Toute combinaison des c_k est effectivement combinaison des σ_i.
On en déduit $Vect(c_0, \dots c_4) \subset Vect(\sigma_0, \dots \sigma_4)$.
Mais les deux espaces ont la même dimension.
Ils sont égaux ;
On exprime même les uns à l'aide des autres :

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 & \sigma_0 \\
0 & 1 & 0 & -3 & 0 & \sigma_1 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -8 & \sigma_2 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \sigma_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & \sigma_4 \\
= & = & = & = & = & \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 &
\end{array}$$

La quatrième colonne nous renseigne : $c_3 = 4.\sigma_3 - 3.\sigma_0$ (à l'étage des fonctions)

$$\forall x,\ \cos(3.x) = 4.\cos^3(x) - 3.\cos(x)$$

à l'étage des réels
colonne de coefficients $0, -3, 4, 0, 0$ pour dire ce qu'on sait de c_3.

On peut inverser la matrice « à la main » : $\begin{array}{ccccc}
1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 0 & -8 \\
0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{array}$ c'est à dire

$$\begin{array}{ccccc|c}
1 & 0 & -1/2 & 0 & 3/8 & \sigma_0 \\
0 & 1 & 0 & 1/4 & 0 & \sigma_1 \\
0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & \sigma_2 \\
0 & 0 & 0 & 3/4 & 0 & \sigma_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/8 & \sigma_4 \\
= & = & = & = & = & \\
c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 &
\end{array}$$

On retrouve par exemple $\forall x,\ \cos^3(x) = \dfrac{3.\cos(3.x) + \cos(x)}{4}$.

◁ 47 ▷

Calculez en fonction de n le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\
1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\
1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}$ après avoir donné la forme de son terme général (a_i^k en fonction de i et k).

En fait, dès que n est trop grand, ce déterminant est nul, car il y a deux colonnes égales.

Remarque :	Suivant votre recul :	famille liée déterminant nul (réaction normale MP !) on soustrait la première colonne sur la dernière et on développe par rapport à cette colonne de 0 (démarche de qui a fini par ne voir que des méthodes de calcul et n'a plus le recul sur ce qu'est un déterminant.. PSI !

Pour la définir, disons en indexation classique : $\begin{array}{llllll}
1 & si & i=1 & ou & i=n & \\
 & ou & k=1 & ou & k=n & . \\
2 & sinon & & & &
\end{array}$

Avec `Python` :

```
A = [[2 for k in range(n)] for i in range(n)]
for i in range(n) :
....A[0][i] = 1
....A[n-1][0] = 1
....A[i][0] = 1
....A[i][n-1]=1
```

Et tant pis si les coins sont changés deux fois.
On peut aussi utiliser un seul constructeur direct

```
A = [[1+int(0<i<n-1 and 0<k<n-1) for k in range(n)] for i in range(n)]
```

◃48▹

♡ Calculez $\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ e & d & c & b & a-X \end{vmatrix}$ en combinant les colonnes. Montrez que pour tout polynôme donné de degré n il existe une matrice dont il est le polynôme caractéristique.

Avec des notations naturelles, le déterminant ne change pas si on remplace C_0 par $C_0 + X.C_1 + X^2.C_2 + X^3.C_3$

$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ e & d & c & b & a-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -X & 1 \\ S & d & c & b & a-X \end{vmatrix}$$

avec $S = e + d.X + c.X^2 + b.X^3 + a.X^4 - X^5$.

On développe par rapport à la première colonne, on trouve $S.1$ puisque $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -X & 1 \end{vmatrix} = 1$.

Le déterminant vaut $-(X^5 - a.X^4 - b.X^3 - c.X^2 - d.X - e)$.

Et c'est par définition le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e & d & c & b & a \end{pmatrix}$. *(rappel : $\det(A - X.I_5)$)*.

Vous voulez une matrice de polynôme caractéristique $X^5 - X^4 + 2.X^3 - 3.X^2 + X + 6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & -1 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vous voulez une matrice de polynôme caractéristique $X^3 - 3.X^2 + X - 7$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Et ainsi de suite. En dimension n, on crée la matrice de Frobenius dont les coefficients de la dernière ligne sont (au signe près) les coefficients du polynôme unitaire cherché.

◃49▹

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nuls en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

Il suffit de vérifier à chaque fois la présence du neutre, la stabilité par addition, et multiplication par un réel.
Ou sinon, on trouve un contre-exemple.

polynômes nuls en 0	oui	polynômes à coefficients positifs ou nuls	non
noyau de $P \longmapsto P(0)$		passage à l'opposé	
polynômes de degré 3	non	polynômes multiples de $X-1$	oui
absence du nul, ou même $(X^3+1)-(X^3+X)$		stabilités...	
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	oui	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$	non
$Vect(X,\ X^3,\ X^5,\ldots)$		stabilité : $2.(X+1)+(X-1)$ n'est multiple d'aucun	
polynômes de terme constant nul	oui	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$	oui
trois lignes plus haut !		de la forme $(X^2-1).P(X)$	
polynômes de terme constant 1	non	polynômes nul en 1 ou en 3	non
où est le nul ?		$(X-1)+(X-3)$ n'est plus nul en 1 ni en 3	
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair			
oui : $Vect(1,\ X^2,\ X^4,\ X^6,\ldots)$			

◃50▹ ♡ S est la matrice d'un Su-Do-Ku convenablement rempli (taille 9 sur 9, sur chaque colonne, sur chaque ligne et sur chaque "maison de taille 3 sur 3", on retrouve les entiers de 1 à 9). Montrez que $\det(S-45.I_9)$ est nul *(indication : le vecteur fait de 9 composantes égales à 1 donne un système non inversible)*.

On construit le vecteur dont tous les coefficients (de taille 9) valent 1.
Quand on le pose sur la matrice, on récupère la somme des coefficients de chaque ligne.
Et comme chaque ligne est formée des entiers de 1 à 9, la somme en question vaut 45.
Bref, $M.U = 45.U$.

On fait passer de l'autre côté : $M.U - 45.U = 0_9$.

On rend les formats plus compatibles : $M.U - 45.I_9.U = 0_9$ (qui aurait été assez stupide pour écrire $(M-45).U = 0_9$? aucun d'entre vous j'espère, vu que j'insiste pour que vous n'écrivez pas des polymères de formules mais visualisiez les objets manipulés...).

On factorise : $(M-45.I_9).U = 0_9$.
Ceci prouve que $M-45.I_9$ ne peut pas être inversible (sinon en multipliant par son inverse, on aurait vite $U = 0_9$).
C'est donc que son déterminant est nul.

Des idées élémentaires à mettre bout à bout. Zéro calcul lourdingue. De l'algèbre linéaire. Des maths.

◁51▷ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez qu'il n'y a pas de matrice M vérifiant $A.M = B$ *(pensez au déterminant, oh non, j'en ai trop dit !).*
Remplacez le coefficient 5 de la matrice B par ce que vous voulez pour que l'équation ait une solution.
Combien en a-t-elle alors *(évidemment, je n'attends pas de vous que vous posiez un système de neuf équations à neuf inconnues, sauf si vous visez la P.S.I.X.).*
Et qu'en est il alors de l'équation $M.A = B$ d'inconnue M ?

◁52▷ ♡ Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{i}$ sur cette base.
Changez la composante d'un de ces vecteurs pour que ce ne soit plus une base de $\mathbb{R}^3$.
Il existe une composante que l'on peut changer comme on veut, sans que la famille cesse d'être une base de $\mathbb{R}^3$. Laquelle ?
(une base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ c'est « tout vecteur $\overrightarrow{u}$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c}$,et ça revient à avoir un système ayant une unique solution, donc à un déterminant non nul, par exemple).

Ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires, puisque $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ est non nul (il vaut $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$[3] ce qui fait 6.

On décompose $\overrightarrow{i}$ par exemple par les formules de Cramer :

$$\overrightarrow{i}.\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a}.\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b}.\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{c}) + +\overrightarrow{c}.\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{i})$$

On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}$: $\overrightarrow{i} = -2.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$.

On peut aussi résoudre un système, ce qui revient au même.

Ou tenter peu à peu des combinaisons :
on nous a donné $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et on veut $\overrightarrow{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
On arrange : $\overrightarrow{b} - 2.\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
On somme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{c} + \overrightarrow{b} - 2.\overrightarrow{a}$$

Pour que ce ne soit plus une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ il fat et il suffit que ces trois vecteurs soient coplanaires (et on ne pourra plus décompser grâce à eux des vecteurs hors du plan).

On change donc un coefficient pour annuler le déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & a \end{vmatrix} = 0$.

On calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 3.a$ et on choisit donc $a = 2$.

On peut aussi se dire « tiens, et si le dernier était une combinaison des deux premiers :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

3. $C_2 := C_2 - 2.C_1$

Les deux premières lignens imposent a et b : $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}=\frac{7}{3}.\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{-2}{3}.\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$

et la troisième complète alors $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=\frac{7}{3}.\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\frac{-2}{3}.\begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$.

On peut aussi chosir arbitrairement un plan contenant les deux premiers $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$: $z=2.x$

Il ne reste qu'à ajuster une composant du dernier pour qu'il soit aussi dans ce plan.

C'est ça l'algèbre linéaire.
Il n'y a pas qu'un chemin pour parvenir à la solution.
Il y en a beaucoup, et parfois, il y en a plusieurs qui sont esthétiques et efficaces.
C'est ce qui va inquiéter les élèves besogneux qui aiment les « fiches synthèse » (mais on peut en faire).
Et faire plaisir à ceux qui aiment varier les points de vue et tenter des choses.

Regardons maintenant le déterminant en détail : $\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&3\\2&4&0\end{vmatrix}$. Il contient un petit déterminant de taille 2 qui est nul : $\begin{vmatrix}1&2&\\&&*\\2&4&\end{vmatrix}$.

On en déduit que dans le développement du déterminant par rapport à la dernière colonne, on aura

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&3\\2&4&0\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}&\\1&-1\\2&4\end{vmatrix}-3.\begin{vmatrix}1&2\\&\\2&4\end{vmatrix}+0.\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\\&\end{vmatrix}$$

Le cofacteur du 3 est nul. Donc

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\1&-1&a\\2&4&0\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}&\\1&-1\\2&4\end{vmatrix}-a.\begin{vmatrix}1&2\\&\\2&4\end{vmatrix}+0.\begin{vmatrix}1&2\\1&-1\\&\end{vmatrix}$$

ne change pas de valeur si on change a.
On aura beau modifier le3 et le remplacer par autre chose, e déterminant vaudra toujours 6, et la famille restera une base.

◁53▷ ♡ Décomposez $x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}$ sur la base $(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ puis sur la base $(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$.

$$x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}=\frac{-x+y+z}{2}.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})+\frac{-x+y+z}{2}.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})+\frac{x+y-z}{2}.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$$

en résolvant le système $\left\{\begin{array}{cccc}&b&+c&=x\\a&&+c&=y\\a&+b&&=z\end{array}\right|$.

Pour le résoudre, sommez : $\left\{\begin{array}{cccccc}&b&+c&=x&&\\a&&+c&=y&&\\a&+b&&=z&&\\2.a&+2.b&+2.c&=x&+y&+z\end{array}\right|$, divisez $\left\{\begin{array}{cccccc}&b&+c&=x&&\\a&&+c&=&y&\\a&+b&&=&&z\\a&+b&+c&=\frac{x}{2}&+\frac{y}{2}&+\frac{z}{2}\end{array}\right|$.

Comparez ensuite les trois premières lignes à la dernière.
Après, il suffit de proposer/vérifier (en étant sûr qu'il y a unicité de la solution).

De même

$$x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}=\left(\frac{y+z}{2}\right).(-\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})+\frac{x+z}{2}.(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})+\frac{x+y}{2}.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$$

◁54▷ Montrez qu'on n'a pas $\det(\Re(M)) = \Re(\det(M))$.

◁55▷ Complétez $\begin{pmatrix} & -5 \\ 2 & \end{pmatrix}$ pour qu'elle se diagonalise en $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} a & -5 \\ 2 & b \end{pmatrix}$ a pour trace $a+b$ et pour déterminant $a.b+10$.
On veut qu'elle ait pour trace 5 et déterminant 4.
a et b vérifient $a+b=5$ et $a.b=-6$.
On trouve tout de suite le couple $(-1,\ 6)$ et son « symétrique ».

Mais on ne s'arrête pas là. Pour l'instant, on a juste raisonné par conditions nécessaires.
Reste à être sûr qu'elle se diagonalise bien. C'est à dire à trouver effectivement P et à vérifier que P est inversible...

$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Remarque :
S'arrêter à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *n'est pas répondre à la question.*
C'est n'avoir raisonné que par conditions nécessaire, comme douze fois sur dix au lycée et au collège.
Mais raisonner juste par implications (conditions nécessaires), ce n'est pas raisonner.
C'est agir en automate (facile, tu apprends quarante trois règles, et tu ne te poses quasiment aucune question...).
Mais ensuite, se demander « ai je répondu à la question ? », c'est faire des maths
des sciences
de l'ingénierie
En arrivant à $\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ *vous avez juste prouvé que « si il y a des solutions, ce ne peut être que ».*
Mais avez vous prouvé qu'elles se diagonalisaient vraiment ainsi ? Non. pas tant que vous n'avez pas trouvé P[4]*.*
Dans un devoir de maths, si vous résolvez mal l'équation du second degré conduisant à -1 et 6, vous perdrez un petit quart des points.
Si vous ne prouvez pas que P existe, vous perdez la moitié des points.
Faites votre choix.

◁56▷ ♡ Montrez qu'il n'existe pas d'application f linéaire[a] de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant
$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$
(mot clef : relation de dépendance linéaire).

a. l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images

En gros, avec les images de quatre vecteurs de $(\mathbb{R}^3, +, .)$, on donne trop de conditions. Et elles finissent par être incompatibles.

Considérons $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$. La famille est liée.

Par exemple, on reconstruit $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ avec les trois premiers :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}.\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{4}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. *ou cité un théorème qui dit qu'« avec autant de valeurs propres distinctes que le format de la matrice c'est bon »*

On recombine : $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}.\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{2}.\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$

(on a une relation de dépendance linéaire).

Si f est linéaire, on doit avoir $f(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}) = \frac{1}{2}.f(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}) - \frac{1}{2}.f(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}) + \frac{3}{2}.f(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix})$.

Et ce n'est pas le cas.

Remarque : si cela avait été vrai, on aurait pu définir f.
En fait, f est définie dès qu'on connait l'image de chacun des vecteurs d'une base.
Ici, on connaissait l'image de chacun des vecteurs d'une famille génératrice. C'était peut être trop.

◃57▹ Pourquoi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+2)}$ vaut $\ln(2)$ alors que quand l'élève écrit $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+1).(t+2)} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right).dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1} - \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+2}$ il arrive à une erreur ?
Pourquoi $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t+1}$ n'existe pas alors que $\frac{1}{t+1}$ tend vers 0 quand t tend vers l'infini.