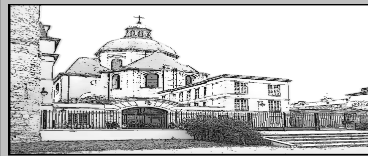
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 12 mai
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD27

◁ 0 ▷ ♣**Le permanent.** On rappelle la définition du déterminant d'une matrice de taille n : $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$. Un objet largement moins utile s'appelle le permanent et vaut $\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$. Calculez déterminant et permanent des six matrices de permutations de taille 3 :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Une matrice est dite bistochastique si elle est à coefficients positif et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1. Exemple $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

Calculez déterminant et permanent des matrices bistochastique de taille 2. Déterminez maximum et minimum de chacune des deux fonctions.

♠ Si vous en avez le courage : même question en taille 3.

◁ 1 ▷ ♡ L'élève doit résoudre et discuter en fonction de λ le système $\left\{\begin{array}{lll} \lambda.x & +(1-\lambda).y & = 2 \\ 2.x & +\lambda.y & = 3 \end{array}\right.$. Expliquez moi pourquoi à cause de son crétinisme congénital qui lui fait raisonner par substitutions $x = \dfrac{2+(\lambda-1).y}{\lambda}$ ou $y = \dfrac{2-\lambda x}{1-\lambda}$ il traite à part les cas $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

Quelles sont les seules valeurs à traiter à part pour λ ?

◁ 2 ▷ Discutez en fonction de a, b et c l'existence de solutions au système $\left\{\begin{array}{rrrcl} 2.x & +y & -z & = & a \\ x & +4.y & -2.z & = & b \\ x & -3.y & +z & = & c \end{array}\right.$.

Même question avec $\left\{\begin{array}{rrrcl} 2.x & +y & +z & = & a \\ x & +4.y & -3.z & = & b \\ -x & -2.y & +z & = & c \end{array}\right.$.

◁ 3 ▷ Complétez $\begin{pmatrix} 6 & 11 & -5 \\ 4 & 4 & -2 \\ 26 & 37 & . \end{pmatrix}$ pour qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $M.U = -U$ (pensez à $\det(M + I_3)$).

◁ 4 ▷ ♡ Calculez par récurrence sur n les déterminants des matrices de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -2 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

(après avoir aussi donné un script `Python` *qui crée de telles matrices).*

(évidemment, pas de $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sigma(k)}$, mais plutôt du développement par rapport à la première colonne...)

◁ 5 ▷ Montrez que pour toute matrice carrée A de taille 2 sur 2, la famille I_2, A, A^2 est liée[1]. Montrez que $Com(A)$ contient toujours I_2, A et A^2. Montrez que $Com(A)$ est un espace vectoriel dont la dimension ne peut valoir que 2 ou 4. Quelles sont les dimensions possibles de $Com(A) \cap Com({}^tA)$? On rappelle : $Com(A) = \{M \mid A.M = M.A\}$, oui, je sais, c'est trompeur car la même notation peut être utilisée pour la Comatrice !).

Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a un commutant de dimension 5.

◁ 6 ▷ Peut on choisir a, b et c réels pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ admette pour spectre $\{0,\ 1,\ 2\}$?

1. c'est un théorème qu'est laid, et on a mis l'tomps à le prouver

◃7▹ On note $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Est elle inversible dans $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$?
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour les opérations modulo 5. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ pour les opérations modulo 7. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.

◃8▹ On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour P dans E, on définit $\phi(P) =^t (P(0),\ P'(0),\ P(1),\ P'(1))$. Calculez l'image par ϕ de chacun des vecteurs de la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$.
On pose

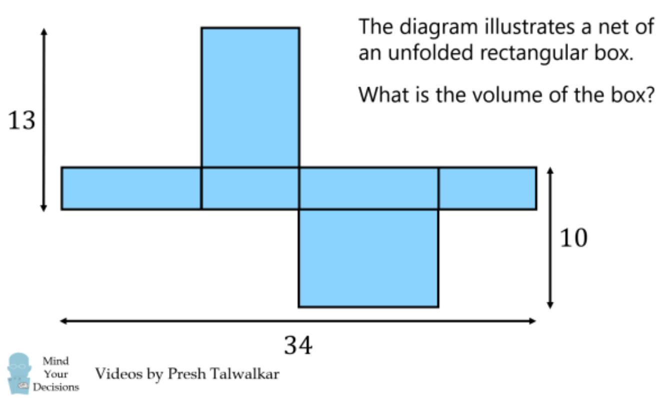
$B_0 = (X-1)^2.(2.X+1)$	$B_1 = (X-1)^2.X$	$B_2 = X^2.(3-2.X)$	$B_3 = X^2.(X-1)$

Calculez $\phi(B_k)$ pour chaque valeur de k [2].
Montrez que la famille $(B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3)$ est une base de $(E, +, .)$ et donnez la matrice de passage de la base canonique vers cette base *(exprimez les B_k à l'aide des X^i)*. Est elle orientée dans le même sens que la base canonique ? Inversez cette matrice *(réfléchissez avant de calculer, on est en maths, exploitez ce que vous avez fait avant)*.

◃9▹ Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nul en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

◃10▹ ♡ On veut calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{pmatrix}$ *(notée M)* sans effort. On note U la matrice de terme général 1. Montrez que $\det(M + x.U)$ est un polynôme en x de degré 1 *(pensez à combiner les colonnes)*. Calculez sa valeur en $-b$. Calculez sa valeur en $-c$. Déduisez sa valeur en 0 *(si vous êtes profil PC déterminez d'abord la forme du polynôme, si vous êtes profil MP/PSI, raisonnez sur des points alignés sur le graphe de ce polynôme affine)*.



◃11▹

Donnez un polynôme P vérifiant $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$. Que vaut il en 0 ?

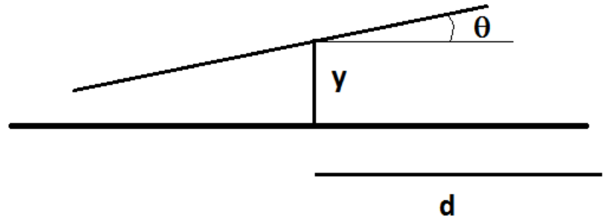
Quel est le minimum sur $]0,\ +\infty[$ de $t \longmapsto t^{(t^2)}$?

◃12▹ ♡Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?
Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?

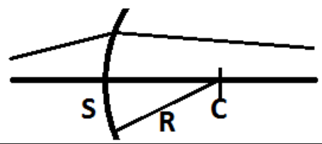
◃13▹ ♣ Montrez que $n \longmapsto 2^n$ de $\mathbb{F}_7$ dans lui même peut s'écrire sous forme d'un polynôme.
La notation $\mathbb{F}_7$ c'est le corps modulo 7.

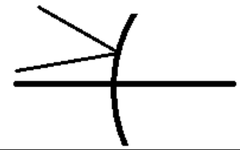
2. si vous êtes enfin plus intelligent, vous me faites des tableaux...

◃14▹



En optique géométrique, quand les angles sont petits, on fait l'approximation $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$. Les équations deviennent alors linéaires en θ. On peut donc tout traduire matriciellement. Un rayon passant par un point I est alors décrit par une ordonnée y et un angle « homogénéisé » : $\begin{pmatrix} y \\ n.\theta \end{pmatrix}$ (où n est l'indice du milieu).
Justifiez alors que les phénomènes suivants son traduits par les actions des matrices suivantes $\begin{pmatrix} y_1 \\ n.\theta_1 \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} y_0 \\ n.\theta_0 \end{pmatrix}$





translation dans un milieu homogène	$\begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	Je croyais que la traversée d'un dioptre plan avec changement d'indice utilisait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2/n_1 \end{pmatrix}$. Pourquoi ai-je tort ? Justifiez que n est algébrique *(c'est à dire qu'il a un signe ! on tient compte du sens dans lequel on avance)*.
réfraction à travers un dioptre sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$	
réflexion sur un miroir sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2.n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$	

Montrez qu'il n'y a plus qu'à multiplier ces matrices entre elles.
Justifiez qu'on peut toujours remonter le trajet inverse *(d'ailleurs, qui sont les inverses de ces matrices ?)*

◃15▹ ♡ Trente pour cent des élèves de cette classe sont des filles. Quarante pour cent des filles ont pris SI Hard, trente-cinq pour cent ont pris SI Light, la fille/les filles qu'il reste a/ont pris Info. Trente pour cent des garçons ont pris SI Hard, cinquante pour cent ont pris SI Light, le reste a pris Info. Vous tirez un élève au hasard parmi les SI Hard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

◃16▹

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

DEPHASAGES

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel, on pose $\tau_a(f) = x \longmapsto f(x+a)$.

I∼0) Qui est τ_0 ? Montrez : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a = \tau_{a+b}$ pour tout couple (a, b) de réels.

I∼1) Explicitez $\tau_a(\cos)$ à l'aide de cos et sin.
Attention, ce sont des questions de mathématiques, et pas juste de calcul. Surveillez vos variables, ne vous trompez pas d'étages, et comprenez tout de suite pourquoi si vous écrivez $\tau_a(f(x))$ votre copie ne sera pas corrigée.

I∼2) On pose $\gamma = x \longmapsto x^3$. Représentez graphiquement sur un même graphe $\tau_k(\gamma)$ pour k de 0 à 3. Trouvez les α_k vérifiant $\tau_4(\gamma) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\tau_k(\gamma)$.

On dit que f est d'ordre n si il existe n réels a_1 jusqu'à a_n vérifiant que pour tout u, $\tau_u(f)$ soit une combinaison linéaires de $(\tau_{a_1}(f), \dots \tau_{a_n}(f))$.

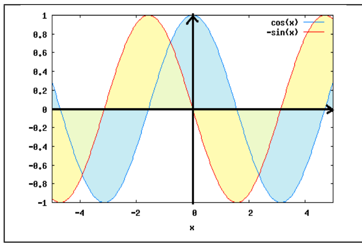
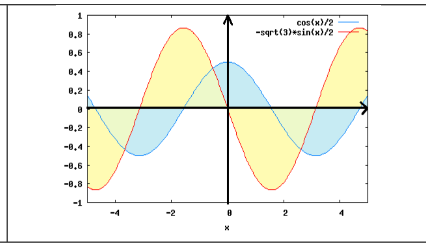
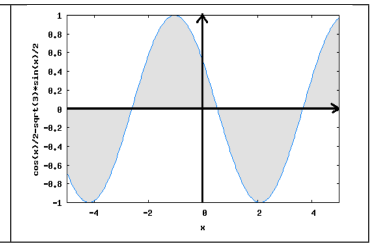
II∼0) Montrez que l'exponentielle est d'ordre 1.

II∼1) Pour montrer que l'identité est d'ordre 1, l'élève Hursafé-Leuvailpin écrit $(x+\alpha) = (1-\alpha).x + \alpha.(x+1)$. Il me semble qu'il a compris. A vous de rédiger proprement à sa place.

II∼2) Montrez que $x \longmapsto x^2$ est d'ordre 3.

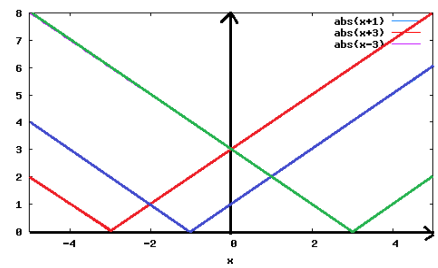
II∼3) Qui sont les applications d'ordre 0 ?

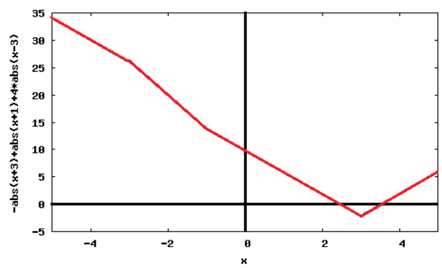
II∼4) Montrez que le cosinus et le sinus sont toutes deux d'ordre 2.

$\tau_0(\cos)$ et $\tau_{\pi/2}(\cos)$	$\cos(\alpha).\tau_0(\cos)$ et $\sin(\alpha).\tau_{\pi/2}(\cos)$	$\tau_\alpha(\cos)$
		

II~5) De quel ordre est $x \longmapsto e^x.\cos(x)$?

II~6) Montrez que la valeur absolue n'est pas d'ordre n *(et ce, quel que soit n)*.





II~7) Soient s et p deux réels. Montrez que si f vérifie $\forall t,\ f''(t) - s.f'(t) + p.f(t) = 0$ alors elle est d'ordre inférieur ou égal à 2.

II~8) Soient s, d et p trois réels. On suppose que f vérifie $f^{(3)} - s.f''(t) + d.f' - p.f = 0$. Montrez que chaque $\tau_a(f)$ vérifie encore la même équation. Déduisez que f est alors d'ordre inférieur ou égal à 3.

III~0) Soit f une application dérivable d'ordre 2 *(il existe a et b tels que chaque $\tau_h(f)$ soit combinaison de $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$)*. Montrez : $\exists(\alpha_0,\ \beta_0) \in \mathbb{R}^2,\ f = \alpha_0.\tau_a(f) + \beta_0.\tau_b(f)$.

III~1) Montrez : $\exists(\alpha_1,\ \beta_1) \in \mathbb{R}^2,\ f' = \alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$.

III~2) Montrez : $\exists(\alpha_2,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^2,\ f'' = \alpha_2.\tau_a(f) + \beta_2.\tau_b(f)$.

III~3) Éliminez $\tau_a(f)$ et $\tau_b(b)$ et déduisez que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

◁ 17 ▷ L'algorithme boustrophédon, c'est ça :

	1								
→	0	1							
	1	1	0	←					
→	0	1	2	2					
	5	5	4	2	0	←			
→	0	5	10	14	16	16			
	61	61	56	46	32	16	0	←	
→	0	61	122	178	224	256	272	272	
								272	

Quand on parcourt une ligne, on commence par 0, et ensuite, chaque terme est la somme du dernier terme calculé et d'un terme de la ligne au dessus (à vous de voir lequel), ou si vous préfèrerez le cumul des termes de la ligne au dessus. Ah oui, et à chaque bout de ligne, on change de sens.
Mettez le en place pour que, pour n donné, il donne la n^{ieme} ligne du boustrophédon.

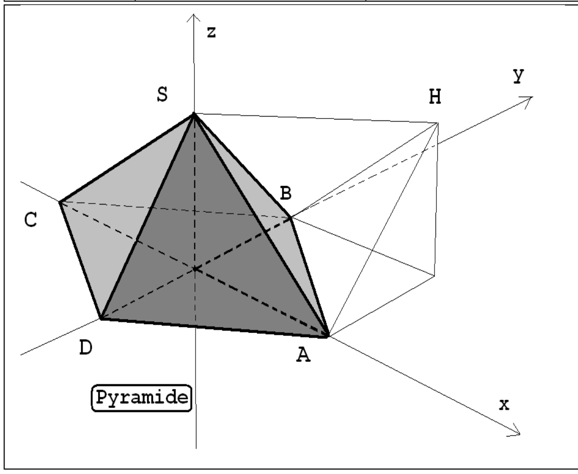
◁ 18 ▷ Résolvez $16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)} = 10$ d'inconnue réelle x.

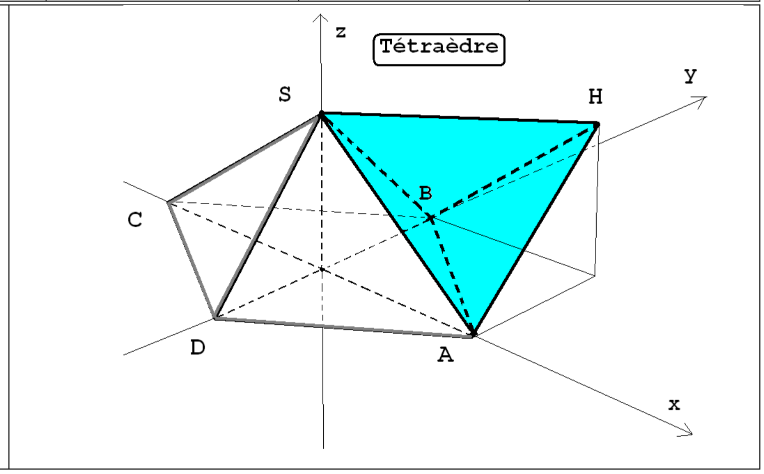
◁ 19 ▷ ♡ Résolvez $(\overrightarrow{i} + \clubsuit.\overrightarrow{j} + \diamondsuit.\overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ sachant que $\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est une des solutions.
Existe-t-il une solution dont la composante suivant $\overrightarrow{j}$ est nulle ?

◁ 20 ▷ ♡ Comparez $X \longmapsto A.X$ et $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
En étudiant $A.B.X$, retrouvez la formule du double produit vectoriel.

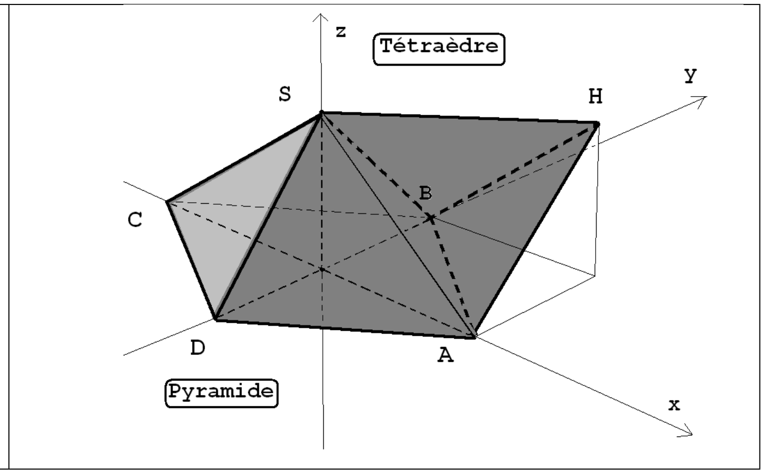
◁ 21 ▷ ♡♣ **La pyramide et le tétraèdre.** On définit :

A	B	C	D	S	H
$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$





Montrez que $(A,\ B,\ C,\ D,\ S)$ est une pyramide à base carrée et à faces équilatérales *(nombre de faces ?)*.
.
Montrez que $(A,\ B,\ S,\ H)$ est un tétraèdre régulier “posé sur une face de la pyramide” *(nombre de faces ?)*.
.
Montrez que A, D, S et H sont coplanaires.
Combien de faces a le solide formé de tous nos points ?
.



◁ 22 ▷ ♡ Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l’espace vectoriel des solutions de l’équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$.
Donnez une base de cet espace vectoriel des solutions, puis donnez la matrice de la dérivation sur cette base.

◁ 23 ▷ Une liste L de longueur 365 indique les bénéfices de votre restaurant chaque jour de l’année écoulée. Écrivez un script qui détermine quelle a été la période de dix jours consécutifs où le bénéfice total a été le moins élevé, pour déterminer quand vous auriez pu le fermer pour prendre des congés.

◁ 24 ▷

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Poincaré	.

On note $\mathbb{P}$ en hommage à Henri Poincaré le demi plan des complexes de la forme $a + i.b$ avec a et b réels et b strictement positif.
On note $\mathbb{D}$ l’ensemble des matrices réelles de taille 2 de déterminant 1.
On note $\mathbb{T}$ l’ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ décrivant $\mathbb{R}$.
On note $\mathbb{S}$ l’ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ avec t décrivant $\mathbb{R}$.
Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ notée M et tout complexe z de $\mathbb{P}$, on note $M * z$ le complexe $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$.

I∼0) Montrez que $(\mathbb{D},\ \times)$ est un groupe non commutatif.
I∼1) Montrez que $(\mathbb{T},\ \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{D},\ \times)$.
I∼2) Montrez que pour toute M de $\mathbb{D}$ et tout z de $\mathbb{P}$, $M * z$ existe et est dans $\mathbb{P}$.

I$\sim$3) Montrez : $\forall (A,\ B) \in \mathbb{D}^2,\ \forall z \in \mathbb{P},\ A * (B * z) = (A.B) * z$.
I$\sim$4) Montrez : $\forall M \in \mathbb{T},\ M * i = i$.
I$\sim$5) Montrez : $\forall M \in \mathbb{D},\ M * i = i \Leftrightarrow M \in \mathbb{T}$.

II$\sim$0) On définit sur $\mathbb{D}$ la relation $\risingdotseq$ par $A \risingdotseq B \Leftrightarrow A^{-1}.B \in \mathbb{T}$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

III$\sim$0) On définit pour M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $N(M) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Montrez que N est une norme, c'est à dire :
• pour toute M de $\mathbb{D}$: $N(M) \geqslant 0$ et $(N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0)$ *(matrice nulle)*
• pour toute M de $\mathbb{D}$ et tout λ de $\mathbb{R}$: $N(\lambda.M) = |\lambda|.N(M)$
• pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$ ah, non, celle là, on la garde pour la fin.

III$\sim$1) Montrez pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $A \risingdotseq B \Rightarrow N(A) = N(B)$.
III$\sim$2) La réciproque est elle vraie ? Indication : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV$\sim$0) Montrez : $\forall z \in \mathbb{P},\ \exists A \in \mathbb{D},\ A * i = z$.
IV$\sim$1) Déduisez : $\forall (z,\ Z) \in \mathbb{P}^2,\ \exists A \in \mathbb{D},\ A * z = Z$. A-t-on unicité de A ?

V$\sim$0) Plus précisément, montrez $\forall z \in \mathbb{P},\ (\exists A \in \mathbb{D},\ A * i = z)$ *et* $(\forall M \in \mathbb{D},\ M * i = z \Rightarrow N(M) = N(A)$. On décide alors de nommer "hauteur de z" la quantité $N(A)$ pour toute matrice A de $\mathbb{D}$ vérifiant $A * i = z$.
Calculez la hauteur de i. Calculez la hauteur de $\lambda.i$ pour tout réel λ strictement positif, et indiquez pour quel λ cette hauteur est minimale. Calculez la hauteur de $1 + i$.

VI$\sim$0) On rappelle que pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^4$ ($\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$), on peut calculer leur produit scalaire de deux façons : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$
mais aussi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}})$. Montrez la propriété mise de côté : • pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $N(A+B) \leqslant N(A) + N(B)$.
En considérant les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, montrez que toutes les matrices A de $\mathbb{D}$ vérifient $N(A) \geqslant \sqrt{2}$. Déduisez que les complexes ont tous une hauteur au moins égale à $\sqrt{2}$.

◃25▹ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ va de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Donnez son image et son noyau (base et équations cartésiennes).

◃26▹ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Montrez que c'est un automorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
Calculez l'image de chacun des quatre vecteurs de la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donnez la matrice de cet endomorphisme sur cette base canonique.
Calculez son déterminant. Inversez la sans trop d'effort.

◃27▹ Inversez `[[1, 2, 1, 0], [1, 3, 3,-1], [1, 1, 0, 2], [1, 3, 5, 2]]` par méthode du pivot de Gauss.

◃28▹ Montrez que $f \longmapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image.

◁29▷ ♡ La matrice A_n, de taille n, a pour terme général $Min(i+1,\ j+1)$ *(indexation pythonienne)*. Calculez son déterminant et inversez la par pivot de Gauss.
Même question avec $Max(i,\ j)$.

◁30▷ Calculez les déterminants des matrices $A.B.C$, B, C et A :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2.\theta) & \sin(2.\theta) & 2.\cos(2.\theta) & 2.\sin(2.\theta) \\ \cos(3.\theta) & \sin(3.\theta) & 3.\cos(3.\theta) & 3.\sin(3.\theta) \\ \cos(4.\theta) & \sin(4.\theta) & 4.\cos(4.\theta) & 4.\sin(4.\theta) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2.\theta & -\sin 2.\theta \\ 0 & 0 & \sin 2.\theta & \cos 2.\theta \end{pmatrix}$$

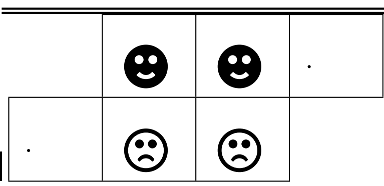
◁31▷ Inversez par pivot de Gauss la matrice de terme général $Max(i,k) + 2.Min(i,k)$ *(indexation non pythonienne, de 1 à n)*.

◁32▷ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss.

◁33▷ Résolvez par pivot de Gauss, et discutez :

$\begin{cases} x + 2.y = 1 \\ 2.x + y = 2 \\ 3.x + 4.y = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + 3.z = 1 \\ 2.x - 2.y + z = 3 \\ 2.x - y - z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2.y = 1 \\ 2.x + y = 2 \\ 3.x + 4.y = 3 \end{cases}$
a	b	c
$\begin{cases} x - 2.y + z = 1 \\ -x + 3.z = 5 \\ x - 3.y + z = 1 \\ x + 4.y - z = a \end{cases}$	$\begin{cases} a.x + b.y + z = 1 \\ x + a.b.y + z = b \\ x + b.y + a.z = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2.y + z + 2.t + 3.u = 1 \\ x + 3.y + z + 2.t = 1 \\ y - 3.u = -1 \end{cases}$
d	e	f
$\begin{cases} x + y - z = a \\ x - y = b \\ x + 4.y + z = c \end{cases}$	$\begin{cases} x - y + z = \lambda.x \\ 2.x - 5.y + 4.z = \lambda.y \\ 2.x - 7.y + 6.z = \lambda.z \end{cases}$	$\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + 2.y + 2.z + 2.t = 3 \\ x + 2.y + 3.z + 3.t = 5 \\ x + 2.y + 3.z + 4.t = 9 \end{cases}$
g	h	i

◁34▷ Montrez : $\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}} + \sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}} \leqslant 5,5$.
C'est une comparaison de moyennes.

◁35▷ 

Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

◁36▷ On suppose $x_n = a_n + b_n$. Montrer $(x_n \sim a_n) \Leftrightarrow (b_n = o(a_n))$.

◁37▷ ♡ On donne : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + \dfrac{4}{n^4} + o\Big(\dfrac{1}{n^4}\Big)_{n\to+\infty}$. Donnez le développement de $u_{n+1} - u_n$ sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \dfrac{c}{n^3} + o\Big(\dfrac{1}{n^3}\Big)_{n\to+\infty}$.
Même question avec $2.u_{2.n} - u_n$.

◁38▷ On pose $P_1 = X^3 + 2.X^2 + 3.X$, $P_2 = X^2 + X + 2$, $P_3 = X^3 + X - 1$, $P_4 = X^3 + 4.X^2 + 5.X + 4$.
Montrez que $(P_1,\ P_2)$ est libre, de même que $(P_3,\ P_4)$. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est elle libre ?

◁39▷ On se place dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$. Montrez qu'il y a $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.

♣ 0 ♣ Montrez qu'il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2)$ familles libres de trois vecteur. Combien y-a-t-il de familles liées de deux vecteurs ?

♣ 1 ♣ Combien y a-t-il de familles génératrices de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de trois vecteurs ?

♣ 2 ♣ Combien y a-t-il de familles libres de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de deux vecteurs ?

♣ 3 ♣ Montrez pour $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ libre :

$$Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) \Leftrightarrow (\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ \overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2}\ et\ \alpha.\delta \neq \beta.\gamma)$$

♣ 4 ♣ Déduisez qu'il y a $\dfrac{(7^4-1).(7^4-7)}{(7^2-1).(7^2-7)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

◁ 40 ▷ L'élève affirme : a divise c et b divise c, donc $a.b$ divise c.
Montrez que c'est faux, mais montrez que c'est vrai si on ajoute l'hypothèse « a et b sont premiers entre eux ».

◁ 41 ▷ On pose $f = x \longmapsto \dfrac{4^x}{4^x+2}$. Calculez $f\left(\dfrac{1}{1997}\right) + f\left(\dfrac{2}{1997}\right) + f\left(\dfrac{3}{1997}\right) + \dots f\left(\dfrac{1996}{1997}\right)$ en regroupant les termes deux à deux judicieusement.

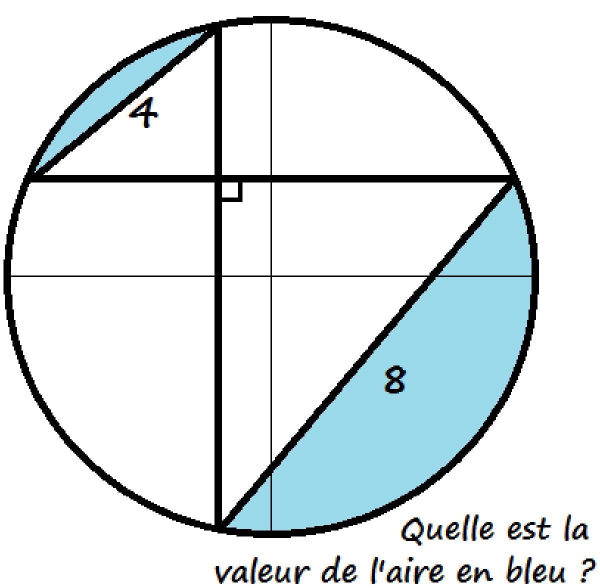
◁ 42 ▷ On définit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez que 2 est valeur propre de A. Montrez que 3 est valeur propre de A.
Donnez une base du plan d'équations $\left\{ \begin{array}{ccccc} x & +2.y & & -t & =0 \\ & y & +2.z & -t & =0 \end{array} \right|$ et montrez que ce plan est stable par A. Donnez une base d'un autre plan, stable par A. Combien de plans stables par A pouvez vous trouver ?

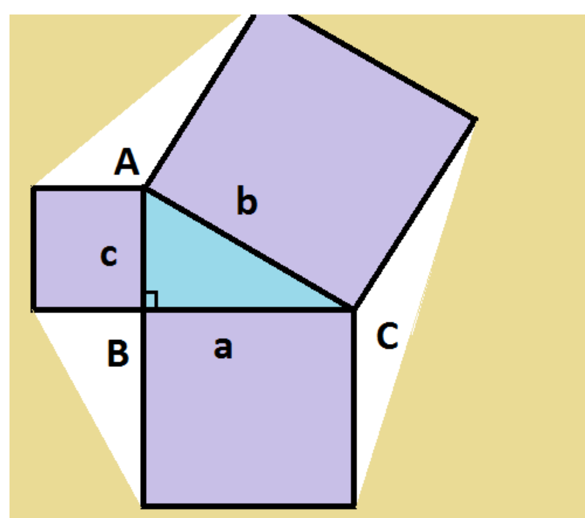
◁ 43 ▷ Montrez que si f est une application continue strictement positive de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t)+f(1-t)}.dt$ vaut $1/2$.

◁ 44 ▷ ☺ On note (E) l'équation $x + 1 + \dfrac{1}{x} = 0$, dont une racine sera notée x justement.
On multiplie par x^2 : $x^3 + x^2 + x = 0$.
On factorise : $x^3 + x.(x+1) = 0$.
On remplace $x+1$ par $\dfrac{-1}{x}$: $x^3 + x.\dfrac{1}{x} = 0$.
On trouve $x^3 = -1$ qu'on résout : $x = -1$.
On reporte dans l'équation (E) : $1 + 1 + 1 = 0$. Problème ?

◁ 45 ▷ Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?

◁ 46 ▷





Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : (A, B, C) est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.