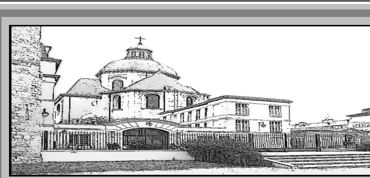
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 12 mai

M.P.S.I.2



2024 2025

TD27

◁ 0 ▷ ♣**Le permanent.** On rappelle la définition du déterminant d'une matrice de taille n : $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$. Un objet largement moins utile s'appelle le permanent et vaut $\sum_{\sigma\in S_n}\prod_{i=1}^{n} a_i^{\sigma(i)}$. Calculez déterminant et permanent des six matrices de permutations de taille 3 :

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

Une matrice est dite bistochastique si elle est à coefficients positif et que la somme des coefficients de chaque ligne et de chaque colonne vaut 1. Exemple $\begin{pmatrix}0,5&0,3&0,2\\0&0,4&0,6\\0,5&0,3&0,2\end{pmatrix}$.

Calculez déterminant et permanent des matrices bistochastique de taille 2. Déterminez maximum et minimum de chacune des deux fonctions.

♠ Si vous en avez le courage : même question en taille 3.

◁ 1 ▷ ♡ L'élève doit résoudre et discuter en fonction de λ le système $\left\{\begin{array}{lll}\lambda.x & +(1-\lambda).y & =2\\ 2.x & +\lambda.y & =3\end{array}\right|$. Expliquez moi pourquoi à cause de son crétinisme congénital qui lui fait raisonner par substitutions $x=\dfrac{2+(\lambda-1).y}{\lambda}$ ou $y=\dfrac{2-\lambda x}{1-\lambda}$ il traite à part les cas $\lambda=0$ ou $\lambda=1$.

Quelles sont les seules valeurs à traiter à part pour λ ?

◁ 2 ▷ Discutez en fonction de a, b et c l'existence de solutions au système $\left\{\begin{array}{ccccc}2.x & +y & -z & = & a\\ x & +4.y & -2.z & = & b\\ x & -3.y & +z & = & c\end{array}\right|$.

Même question avec $\left\{\begin{array}{ccccc}2.x & +y & +z & = & a\\ x & +4.y & -3.z & = & b\\ -x & -2.y & +z & = & c\end{array}\right|$.

◁ 3 ▷ Complétez $\begin{pmatrix}6&11&-5\\4&4&-2\\26&37&.\end{pmatrix}$ pour qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $M.U=-U$ (pensez à $\det(M+I_3)$).

◁ 4 ▷ ♡ Calculez par récurrence sur n les déterminants des matrices de la forme suivante :

$\begin{pmatrix}3&2&0&0&\dots&0\\-2&3&2&0&\dots&0\\0&-2&3&2&\dots&0\\0&0&-2&3&\dots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&&3\end{pmatrix}$ *(après avoir aussi donné un script* `Python` *qui crée de telles matrices)*.

(évidemment, pas de $\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma)\prod_{k=1}^{n} a_k^{\sigma(k)}$, mais plutôt du développement par rapport à la première colonne...)

◁ 5 ▷ Montrez que pour toute matrice carrée A de taille 2 sur 2, la famille I_2, A, A^2 est liée[a]. Montrez que $Com(A)$ contient toujours I_2, A et A^2. Montrez que $Com(A)$ est un espace vectoriel dont la dimension ne peut valoir que 2 ou 4. Quelles sont les dimensions possibles de $Com(A)\cap Com({}^tA)$? On rappelle : $Com(A)=\{M \mid A.M=M.A\}$, oui, je sais, c'est trompeur car la même notation peut être utilisée pour la Comatrice !).

Montrez que $\begin{pmatrix}0&1&0\\-2&3&0\\-1&1&1\end{pmatrix}$ a un commutant de dimension 5.

a. c'est un théorème qu'est laid, et on a mis l'tomps à le prouver

◁6▷ Peut on choisir a, b et c réels pour que $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{pmatrix}$ admette pour spectre $\{0,\ 1,\ 2\}$?

On calcule de deux façons les trois coefficients du polynôme caractéristique :

Trace	$a+b+c$	$=0+1+2$
Mineurs	$a.b-1+a.c-1+b.c-1$	$=0.1+0.2+1.2$
Déterminant	$a.b.c+1+1-a-b-c$	$=0.1.2$

On résout donc $\begin{array}{cccccc} a & +b & +c & = & 3 \\ a.b & +a.c & +b.c & = & 5 \\ a & \times b & \times c & = & 1 \end{array}$.

L'ami Viète dit alors : $X^3-3.X^2+5.X-1$.
Et ce polynôme n'a qu'une racine réelle.
Sa dérivée ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et reste de signe constant.
C'est donc impossible.

En revanche, avec a, b et c complexes c'est possible.
Et il y a six matrices (permutation des six nombres).
Mais ne me demandez pas les valeurs.

◁7▷ On note $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Est elle inversible dans $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$?
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ pour les opérations modulo 5. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.
Est elle inversible si le corps de base est $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ pour les opérations modulo 7. Si oui, inversez la, si non, décomposez en produit de facteurs premiers $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$.

Son déterminant vaut 30. Elle est inversible sur $\mathbb{R}$.

Si on raisonne modulo 5, elle ne l'est plus ; son déterminant est nul.
D'ailleurs, on a cette relation sur les colonnes :

$$1.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}+4.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On écrit aussi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mais aussi $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et encore une...

De même, les vecteurs colonne sont coplanaires dans le plan d'équation $z=2.x$.

Vérifiez pour $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ou même : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque l'équation $z-2.x=0$ c'est aussi $x+2.z=0$.

Modulo 7, le déterminant est non nul et a pour inverse 4.

La matrice inverse vaut $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme il y a une question où la réponse fut « non », on décompose $\prod_{k=1}^{15} k^{3+2.(-1)^k}$ en produit d facteurs premiers.

Les exposants valent 5 ou 1.

	1^1	2^5	3^1	4^5	5^1	6^5	7^1	8^5	9^1	10^5	11^1	12^5	13^1	14^5	15^1
$p = 2$		5		10		5		15		5		10		5	
$p = 3$			1			5			2			5			1
$p = 5$					1					5					1
$p = 7$							1							5	
$p = 11$											1				
$p = 13$													1		

On a donc $\boxed{2^{55}.3^{14}.5^7.7.11.13}$

Remarque : *Le non matheux aura calculé* 226 496 573 093 250 911 491 829 268 480 000 000 *puis décomposé en produit de facteurs premiers.*
Sincèrement, je ne peux rien pour lui. A part lui dire « bon courage dans tes études ».
Et il me répondra « je m'en fous, je ne veux pas faire de maths comme vous, je veux juste faire des trucs qui me rassurent ».

◃ 8 ▹

On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Pour P dans E, on définit $\phi(P) =^t (P(0),\ P'(0),\ P(1),\ P'(1))$. Calculez l'image par ϕ de chacun des vecteurs de la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$.

On pose

$B_0 = (X-1)^2.(2.X+1)$	$B_1 = (X-1)^2.X$	$B_2 = X^2.(3-2.X)$	$B_3 = X^2.(X-1)$

Calculez $\phi(B_k)$ pour chaque valeur de k [a].

Montrez que la famille $(B_0,\ B_1,\ B_2,\ B_3)$ est une base de $(E, +, .)$ et donnez la matrice de passage de la base canonique vers cette base *(exprimez les B_k à l'aide des X^i)*. Est elle orientée dans le même sens que la base canonique ?

Inversez cette matrice *(réfléchissez avant de calculer, on est en maths, exploitez ce que vous avez fait avant).*

a. si vous êtes enfin plus intelligent, vous me faites des tableaux...

◃ 9 ▹

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nul en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

polynômes nul en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
oui, mais avec un s à « nuls »	non (opposé !)
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
non (somme !)	oui
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
oui	non (somme à cause du « ou »)
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
oui	oui
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
non (le neutre !)	non $((X-3)+(X-1))$
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	
oui	

◃ 10 ▹

♡ On veut calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & b & b & b \\ c & a & b & b & b \\ c & c & a & b & b \\ c & c & c & a & b \\ c & c & c & c & a \end{pmatrix}$ *(notée M)* sans effort. On note U la matrice de terme général 1. Montrez que $\det(M + x.U)$ est un polynôme en x de degré 1 *(pensez à combiner les colonnes)*. Calculez sa valeur en $-b$. Calculez sa valeur en $-c$. Déduisez sa valeur en 0 *(si vous êtes profil PC déterminez d'abord la forme du polynôme, si vous êtes profil MP/PSI, raisonnez sur des points alignés sur le graphe de ce polynôme affine)*.

L'exercice est normalement posé en dimension n. Mais rien ne change.

$$\begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+x & b-a & b-a & b-a & b-a \\ c+x & a-c & b-c & b-c & b-c \\ c+x & 0 & a-c & b-c & b-c \\ c+x & 0 & 0 & a-c & b-c \\ c+x & 0 & 0 & 0 & a-c \end{vmatrix}$$

en soustrayant la première colonne à toutes les autres (mais on peut aussi effectuer $C_i = C_i - C_{i-1}$ par exemple).
On développe par rapport à la première colonne, et on a $(a+x).A - (c+x).B + (c+x).D - (c+x).E$ où A, B, C, D et E sont des coefficients qui ne dépendent que de a, b et c (et pas de x).
On a bien un polynôme en x de degré inférieur ou égal à 1 (serait il de degré 0 ? on va voir).

Remarque : On peut accéder au même résultat par un argument de multilinéarité sur les colonnes.
Sinon, dites moi ce qui cloche dans
« $\begin{vmatrix} a+x & b+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & a+x & b+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & a+x & b+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & a+x & b+x \\ c+x & c+x & c+x & c+x & a+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 & b-a \\ c-a & a-b & 0 & 0 & b-c \\ 0 & c-a & a-b & 0 & b-c \\ 0 & 0 & c-a & a-b & b-c \\ 0 & 0 & 0 & c-a & a-c \end{vmatrix}$ et il n'y a même plus de x »
où l'on a effectué $C_1 = C_1 - C_2$, $C_2 = C_2 - C_3$, $C_3 = C_3 - C_4$, $C_4 = C_4 - C_5$ et $C_5 = C_5 - C_1$.
Si vous ne réagissez pas au quart de tour sur cette arnaque, votre place 'a jamais été en M.P.S.I.

Maintenant que l'on sait que le polynôme est en fait une fonction affine, il suffit de le calculer en deux points pour le connaître partout !
Et ces deux points, on les connaît : $-b$ et $-c$.

Remarque : Ah oui, c'est ça l'idée de l'exercice.
Si vous restez le nez collé sans vous dire « et pourquoi ce x en plus, et pourquoi en $-b$ et pourquoi en $-c$ », vous aurez besoin de faire les mille six cent exercices possibles sur les déterminants pour avoir des chances d'avoir une bonne note aux concours. Si vous comprenez l'esprit, vous n'avez plus besoin que de quatre vingt dix sept exercices. Faites votre choix...

$$\begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c-b & a-b & 0 & 0 & 0 \\ c-b & c-b & a-b & 0 & 0 \\ c-b & c-b & c-b & a-b & 0 \\ c-b & c-b & c-b & c-b & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^5 \text{ (matrice triangulaire).}$$

De même, en $-c$, on trouve $(a-c)^5$.

Une fonction affine connue en deux points est connue partout.
Méthode de bourrin sous-cartésien : je pose $f(x) = \alpha.x + \beta$
je sais en $-b$: $-\alpha.b + \beta = (a-b)^5$
en $-c$: $-\alpha.c + \beta = (a-c)^5$
je déduis : $\beta = \dfrac{c.(a-b)^5 - b.(a-c)^5}{c-b}$ par combinaison $c.L_1 - b.L_2$
(et si je suis vraiment mais vraiment con, je calcule aussi α et surtout, pour avoir l'air plus que crétin, je le fais en écrivant $\beta = (a-b)^5 + \alpha.b$ et en reportant dans la deuxième au lieu de faire des combinaisons).
et la valeur cherchée est « le déterminant en $x = 0$ », c'est donc β

La méthode est rapide, efficace, et donne la réponse sans effort.
Mais si vous vous en tenez à cette méthode, vous irez vite... mais pas loin.
En effet, vous aurez la démarche « je mets tout en équations, je calcule je calcule ».
Elle vous permet de traiter des exercices de niveau BAC+1. Mais elle ne vous permet pas d'intégrer une école. Ou en tout cas pas une grande école.
Alors que vous en avez la capacité.

Mais la bonne méthode est celle qui se généralise. [1]
Et ici, il y en a deux.

Lagrange : le polynôme est de la forme $P(X) = P(-b).\dfrac{(X+b)}{(-b+c)} + P(-c).\dfrac{(X+c)}{(-c+b)}$

on le calcule en 0 : $P(-b).\dfrac{b}{(-b+c)} + P(-c).\dfrac{c}{(-c+b)}$

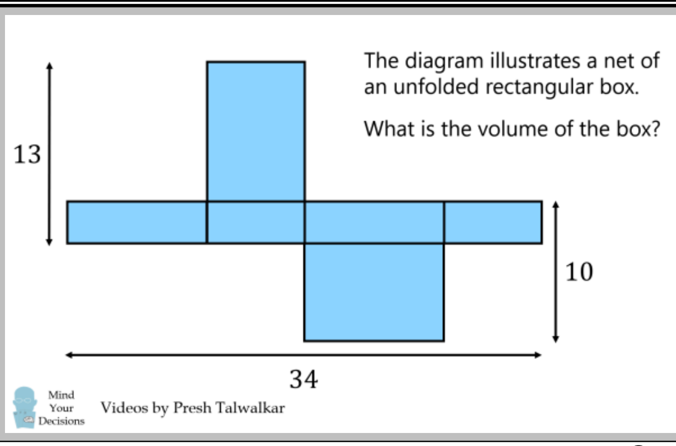
1. peut être estimez vous que vous pouvez généraliser la méthode « je calcule je calcule » en « je calcule, je calcule, je calcule, je calcule, je calcule, je calcule, je calcule ». Et dans ce cas, tant mieux pour vous et tant mieux pour quelques sciences et tant pis pour les maths.

Géométrie : on retrouve le coefficient directeur qui ne sert à rien : $\dfrac{P(-c)-P(-b)}{-c-(-b)}$

et l'ordonnée en un point quelconque par théorème de Thalès :
entre $-b$ et x, l'ordonnée a augmenté dans le même rapport qu'entre $-b$ et $-c$:
$\dfrac{P(x)-P(-b)}{x-(-b)} = \dfrac{P(-c)-P(-b)}{-c-(-b)}$

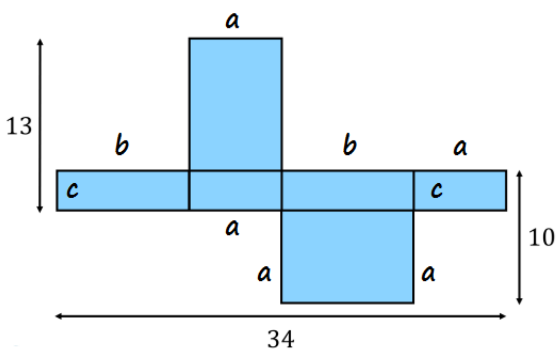
Elles ne vous semblent pas naturelles ?
C'est dommage, car c'est là que commencent les maths. Et que finit le règle absurde de « écris des équations et calcule, calcule, tu seras une machine, mon fils ».

◁ 11 ▷



Donnez un polynôme P vérifiant $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$. Que vaut il en 0 ?

Quel est le minimum sur $]0, +\infty[$ de $t \longmapsto t^{(t^2)}$?



On note a, b et c les trois longueurs des côtés du parallélépipède.

On a alors $\left\{\begin{array}{cccccc} 2.a & +2.b & & = & 34 \\ a & & +c & = & 10 \\ & b & +c & = & 13 \end{array}\right|$ et donc

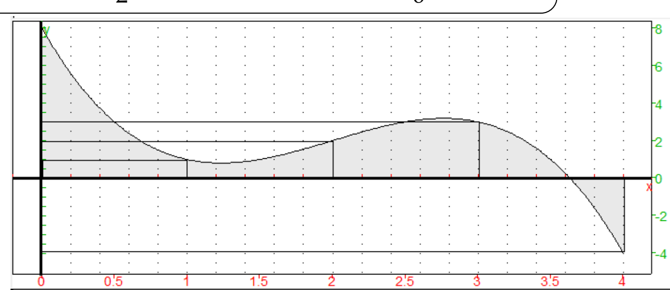
$\left\{\begin{array}{cccccc} a & +b & & = & 17 \\ a & & +c & = & 10 \\ & b & +c & = & 13 \end{array}\right|$

Avec $L_1 + L_2 - L_3$ on trouve $a = 7$, puis avec $L_1 + L_3 - L_2$ on trouve $b = 10$ et enfin $c = 3$.
Le pavé droit a pour volume $\boxed{3 \times 7 \times 10 \text{ unités de volume}}$

On veut $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = -4$.

x	1	2	3	4
P(x)	1	2	3	-4
Lagrange propose				
$\dfrac{(X-2).(X-3).(X-4)}{-6}$	1	0	0	0
$\dfrac{(X-1).(X-3).(X-4)}{2}$	0	1	0	0
$\dfrac{(X-1).(X-2).(X-4)}{-2}$	0	0	1	0
$\dfrac{(X-1).(X-2).(X-3)}{6}$	1	0	0	0

La combinaison cherchée est donc
$$\boxed{\frac{(X-2).(X-3).(X-4)}{-6} + 2.\frac{(X-1).(X-3).(X-4)}{2} + 3.\frac{(X-1).(X-2).(X-4)}{-2} - 4.\frac{(X-1).(X-2).(X-3)}{6}}$$



En 0, on trouve 8.

$t \longmapsto t^{(t^2)}$ est définie sur $]0,\ +\infty[$ sous la forme $t \longmapsto \exp(t^2.\ln(t))$.
Cette application a le même sens de variations que $t \longmapsto t^2.\ln(t)$ de dérivée $t \longmapsto 2.t.\ln(t) + t$.

◃12▹

♡Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 2 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?
Combien existe-t-il de polynômes de degré inférieur ou égal à 3 vérifiant $P(1) = 2$, $P(2) = 2$ et $P(3) = 6$?

On suit la démarche de Joseph Louis Lagrange :

	valeur en 1	valeur en 2	valeur en 3	
$(X-2).(X-3)$	2	0	0	oui
$(X-1).(X-3)$	0	-1	0	
$-2.(X-1).(X-3)$	0	2	0	oui
$(X-1).(X-2)$	0	0	2	
$3.(X-1).(X-2)$	0	0	6	oui
$(X-2).(X-3)$ $-2.(X-1).(X-3)$ $+3.(X-1).(X-2)$	2	2	6	

Le polynôme $\boxed{2.X^2 - 6.X + 6}$ est une solution.
Est ce la seule ?

Si on écrit sur la base canonique $a.X^2 + b.X + c$ on un système de trois équations à trois inconnues. Il semble logique qu'il n'y ait qu'une solution.

Sinon, soient P_1 et P_2deux solutions. On a alors $P_1 - P_2$ qui est de degré inférieur ou égal à 2, nul en 1, en 2 et en ". Pas le choix, ce polynôme est nul. la solution et tu niques.

Ayant un polynôme de degré 2 qui convient, on lui ajoute $(X-1).(X-2).(X-3)$ (ou même m\lambda.(X-1).(X-2).(X-3)) et on a encore les mêmes valeurs en 1, 2 et 3. On a donc une infinité de solutions : $\boxed{2.X^2 - 6.X + 6 + \lambda.(X-1).(X-2).(}$

◃13▹

♣ Montrez que $n \longmapsto 2^n$ de $\mathbb{F}_7$ dans lui même peut s'écrire sous forme d'un polynôme.
La notation $\mathbb{F}_7$ c'est le corps modulo 7.

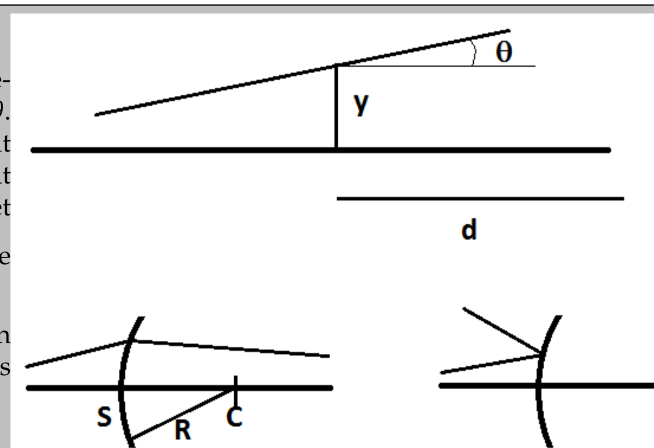
Il y a si peut d'éléments qu'on peut calculer toutes les images.

n	0	1	2	3	4	5	6
2^n	1	2	4	1	2	4	1

Les images des sept éléments sont connues, on peut construire de toutes pièces le polynôme.
Il suffit de faire appel à Lagrange.
La formule explicite sera laide.

◃14▹

En optique géométrique, quand les angles sont petits, on fait l'approximation $\sin(\theta) \simeq \tan(\theta) \simeq \theta$. Les équations deviennent alors linéaires en θ. On peut donc tout traduire matriciellement. Un rayon passant par un point I est alors décrit par une ordonnée y et un angle « homogénéisé » : $\begin{pmatrix} y \\ n.\theta \end{pmatrix}$ (où n est l'indice du milieu).



Justifiez alors que les phénomènes suivants son traduits par les actions des matrices suivantes $\begin{pmatrix} y_1 \\ n.\theta_1 \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} y_0 \\ n.\theta_0 \end{pmatrix}$

translation dans un milieu homogène	$\begin{pmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
réfraction à travers un dioptre sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{n_2-n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$
réflexion sur un miroir sphérique	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2.n_1}{R} & 1 \end{pmatrix}$

Je croyais que la traversée d'un dioptre plan avec changement d'indice utilisait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_2/n_1 \end{pmatrix}$. Pourquoi ai-je tort ?

Justifiez que n est algébrique *(c'est à dire qu'il a un signe ! on tient compte du sens dans lequel on avance)*.

Montrez qu'il n'y a plus qu'à multiplier ces matrices entre elles.

Justifiez qu'on peut toujours remonter le trajet inverse *(d'ailleurs, qui sont les inverses de ces matrices ?)*

◁ 15 ▷

♡ Trente pour cent des élèves de cette classe sont des filles. Quarante pour cent des filles ont pris SI Hard, trente-cinq pour cent ont pris SI Light, la fille/les filles qu'il reste a/ont pris Info. Trente pour cent des garçons ont pris SI Hard, cinquante pour cent ont pris SI Light, le reste a pris Info. Vous tirez un élève au hasard parmi les SI Hard. Quelle est la probabilité que ce soit un garçon ?

Notons N le nombre d'élèves.

On a alors des découpages natures (si on suppose qu'il n'est question que de sexe et pas de genre pour ne pas créer dix catégories) :

	Total N
Garçons	$\frac{7.N}{10}$
Filles	$\frac{3.N}{10}$

puis

		SII Hard	SII Light	Info
Garçons	$\frac{7.N}{10}$			
Filles	$\frac{3.N}{10}$	$\frac{4.3.N}{10.10}$	$\frac{35.3.N}{100.10}$	$\frac{25.3.N}{100.10}$

La case Info Filles a été remplie pour que la somme de la ligne soit cohérente : vingt cinq pour cent.

Passons aux garçons :

		SII Hard	SII Light	Info
Garçons	$\frac{7.N}{10}$	$\frac{3.7.N}{10.10}$	$\frac{5.7.N}{10.10}$	$\frac{2.7.N}{10.10}$
Filles	$\frac{300.N}{1000}$	$\frac{120.N}{1000}$	$\frac{105.N}{1000}$	$\frac{75.N}{1000}$

Isolons l'univers réduit du SII Hard (sans sous-entendu, « Univers réduit » c'est du vocabulaire des probabilités conditionnelles) :

		SII Hard	SII Light	Info
Garçons	$\frac{700.N}{10}$	$\frac{210.N}{1000}$	$\frac{350.N}{1000}$	$\frac{140.N}{1000}$
Filles	$\frac{300.N}{1000}$	$\frac{120.N}{1000}$	$\frac{105.N}{1000}$	$\frac{75.N}{1000}$

donne

	SII Hard
Garçons	$\frac{210.N}{1000}$
Filles	$\frac{120.N}{1000}$
	$\frac{330.N}{1000}$

La proportion de filles dans cet univers est $\frac{120}{330}$. Simplifiez si vous voulez.

◁ 16 ▷

Lycee Charlemagne — MPSI2 — Annee 2023/24

DEPHASAGES

Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel, on pose $\tau_a(f) = x \longmapsto f(x+a)$.

I∼0) Qui est τ_0 ? Montrez : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a = \tau_{a+b}$ pour tout couple (a, b) de réels.

Pour toute application f, on a $\tau_0(f) = \big(x \longmapsto f(x)\big) = f$. Ceci est à l'étage des applications.

Un étage plus haut : τ_a est l'identité de $C_0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Si vous vouliez l'écrire à l'étage des réels parce que vous n'êtes pas capable de raisonner plus haut que le bout de vos orteils : $\forall f \in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\forall x$, $\tau_0(f)(x) = f(x)$.
En tout cas, ne m'écrivez pas "$\tau_a = f$", qui serait une absurdité complète.
Je tolèrerai "$\tau_a(f) = f$" si il y a ensuite un "$\forall f$".

On se donne f et on calcule :

$\tau_a(f)$	$x \longmapsto f(x+a)$	
$\tau_b(\tau_a(f))$	$x \longmapsto \tau_a(f)(x+b)$	$x \longmapsto f(x+b+a)$
$\tau_{a+b}(f)$	$x \longmapsto f(x+(a+b))$	

On a donc pour toute application f de $C_0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$: $\tau_b(\tau_a(f)) = \tau_{a+b}(f)$.
A l'étage des opérateurs : $\tau_b \circ \tau_a = \tau_{a+b}$.
De même, par symétrie des rôles : $\tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}$, d'où la grande égalité finale.

I$\sim$1) Explicitez $\tau_a(\cos)$ à l'aide de cos et sin.
Attention, ce sont des questions de mathématiques, et pas juste de calcul. Surveillez vos variables, ne vous trompez pas d'étages, et comprenez tout de suite pourquoi si vous écrivez $\tau_a(f(x))$ votre copie ne sera pas corrigée.

On prend pour f l'application cos. On calcule

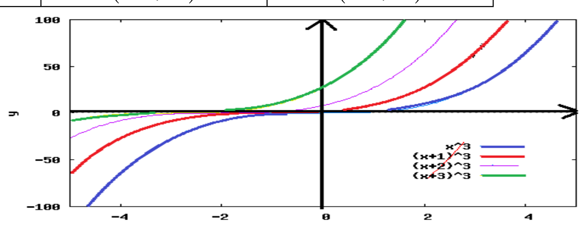
$$\tau_a(\cos) = \big(x \longmapsto \cos(x+a)\big) = \big(x \longmapsto \cos(a).\cos(x) - \sin(a).\sin(x)\big)$$

En restant à l'étage des fonctions : $\boxed{\tau_a(\cos) = \cos(a).\cos - \sin(a).\sin}$
On aurait eu de même $\tau_a(\sin) = \cos(a).\sin + \sin(a).\cos$.

I$\sim$2) On pose $\gamma = x \longmapsto x^3$. Représentez graphiquement sur un même graphe $\tau_k(\gamma)$ pour k de 0 à 3. Trouvez les α_k vérifiant $\tau_4(\gamma) = \sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\tau_k(\gamma)$.

On prend l'application $x \longmapsto x^3$. On doit représenter sur un même graphe cette application et ses trois déphasées

nom	$\tau_0(\gamma)$	$\tau_1(\gamma)$	$\tau_2(\gamma)$	$\tau_3(\gamma)$
application	$(x \longmapsto x^3)$	$(x \longmapsto (x+1)^3)$	$(x \longmapsto (x+2)^3)$	$(x \longmapsto (x+3)^3)$
coupe $0x$ en	$(0,\ 0)$	$(-1,\ 0)$	$(-2,\ 0)$	$(-3,\ 0)$



On a quatre "paraboles cubiques" :
On en prend une de plus : $x \longmapsto (x+4)^3$.
On doit l'écrire sous la forme $x \longmapsto \sum_{k=0}^{3} \alpha_k.(x+4)^k$.
C'est à dire qu'on veut

$$(x+4)^3 = \alpha_0.x^3 + \alpha_1.(x+1)^3 + \alpha_2.(x+2)^3 + \alpha_3.(x+3)^3$$

Mais attention, il ne faut pas que les α_k dépendent de x puisque tout doit avoir lieu à l'étage des applications.
On développe par la formule du binôme et on écrit un système.

Petit détail : *vous allez passer de*

$$(x^3 + 12.x^2 + 48.x + 64 = \alpha_0.x^3 + \alpha_1.(x + 3.x^2 + 3.x + 1) + \alpha_2.(x^3 + 6.x^2 + 12.x + 8) + \alpha_3.(x^3 + 9.x^2 + 27.x + 27)$$

au système par un argument d'identification : (égalité implique système)*.*
*C'est hélas encore avoir des réflexes bourrins du type "*mathématiques égale calcul de Terminable *ou calcul plus compliqué". Hélas, c'est une erreur, ici encore.*
Il est juste demandé une combinaison qui marche. C'est donc juste que si les α_k sont solutions du système, alors tout va bien : (système implique égalité)*.*
Mais on vous a hélas tant et tant formaté à résoudre des équations au lieu de manipuler des variables que vous ne cherchez même pas à comprendre dans quel sens vous raisonnez. Si vous ne quittez pas cette peau, vous serez les "petites mains", assistants/assistantes de ceux et celles qui auront sû prendre du recul.
Bon, d'accord, il y a pire : celui qui ne sait même plus qui sont les inconnues et cherche x.

Que penser de celui ou celle qui n'aura pas été capable de résoudre le système ? S'il a correctement raisonné, ce n'est pas grave, c'est lui qui sera chef de projet, et c'est vous qui ferez les calculs à sa place. Vous ou un ordinateur...

On résout donc à présent $\left\{\begin{array}{lllll|l} \alpha_0 & +\alpha_1 & +\alpha_2 & +\alpha_3 & =1 & x^3 \\ & \alpha_1 & +2.\alpha_2 & +3.\alpha_3 & =4 & x^2 \\ & \alpha_1 & +4.\alpha_2 & +9.\alpha_3 & =16 & x \\ & \alpha_1 & +8.\alpha_2 & +27.\alpha_3 & =64 & 1 \end{array}\right.$.

C'est un peu laborieux, mais on y arrive : $\alpha_0 = -1$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = -6$ et $\alpha_3 = 4$.

On peut vérifier : $\boxed{(x+4)^3 = -x^3 + 4.(x+1)^3 - 6.(x+2)^3 + 4.(x+3)^3}$

C'est vrai en $x = 0$, en $x = 1$, en $x = -1$, $x = 2$ et $x = -2$. Et c'est donc vrai en tout point, car quand deux polynômes de degré 3 coïncident en tant de points, c'est qu'ils sont égaux.

On dit que f est d'ordre n si il existe n réels a_1 jusqu'à a_n vérifiant que pour tout u, $\tau_u(f)$ soit une combinaison linéaires de $(\tau_{a_1}(f), \ldots \tau_{a_n}(f))$.

II∼0) Montrez que l'exponentielle est d'ordre 1.

On commence avec l'exponentielle, c'est à dire $x \longmapsto e^x$. Chaque $\tau_a(\exp)$ est égale à $e^a.\exp$. En effet, on a $\boxed{\big(x \longmapsto e^{a+x}\big) = e^a.\big(x \longmapsto e^x\big)}$

Toutes les $\tau_a(\exp)$ sont des combinaisons de $\tau_0(\exp)$. On a bien une application d'ordre 1.

II∼1) Pour montrer que l'identité est d'ordre 1, l'élève Hursafé-Leuvailpin écrit $(x+\alpha) = (1-\alpha).x + \alpha.(x+1)$. Il me semble qu'il a compris. A vous de rédiger proprement à sa place.

L'identité est l'application $x \longmapsto x$. L'énoncé parle d'elle au bon étage.
Ses translatées $\tau_\alpha(Id)$ sont les applications de la forme $x \longmapsto (x+\alpha)$.
Quand l'élève écrit

$$(x+\alpha) = (1-\alpha).x + \alpha.(x+1)$$

il n'est pas du tout au bon étage. Il est au rez de chaussée.
On reprend au premier étage :

$$\big(x \longmapsto (x+\alpha)\big) = \big(x \longmapsto (1-\alpha).x + \alpha.(x+1)\big)$$

On traduit $\boxed{\tau_\alpha(Id) = (1-\alpha).\tau_0(Id) + \alpha.\tau_1(Id)}$

Chaque $\tau_\alpha(Id)$ est bien combinaison de $\tau_0(Id)$ et $\tau_1(Id)$. Id est d'ordre 2.

II∼2) Montrez que $x \longmapsto x^2$ est d'ordre 3.

On note f l'application $x \longmapsto x^2$. On doit trouver deux réels a et b tels que chaque $x \longmapsto (x+\alpha)^2$ soit combinaison de $x \longmapsto (x+a)^2$, $x \longmapsto (x+b)^2$ et $x \longmapsto (x+c)^2$.
On se sent autorisé à prendre $a = 0$, $b = 1$ et $c = 2$. On va bien voir.
Il faut alors que pour tout α donné, on exprime $x \longmapsto (x+a)^2$ comme combinaison linéaire de $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto (x+1)^2$ et $x \longmapsto (x+2)^2$.
On trouve

$$\forall x,\ (x+\alpha)^2 = (1-\alpha).x^2 + \frac{4.\alpha - \alpha^2}{3}.(x+1)^2 + \frac{\alpha^2 - \alpha}{3}.(x+2)^2$$

en résolvant un petit système.

La résolution du système est de niveau Terminale.
Comprendre ce qu'il fallait chercher, se dire que les trois coefficients à trouver ont le droit de dépendre de α, mais pas de x : c'est ça qui est de niveau Sup.

Chaque $\tau_\alpha(f)$ s'écrit donc

$$(1-\alpha).\tau_0(f) + \frac{4.\alpha - \alpha^2}{3}.\tau_1(f) + \frac{\alpha^2 - \alpha}{3}.\tau_2(f)$$

C'est tout ce qu'on voulait.

II∼3) Qui sont les applications d'ordre 0 ?

Une application f d'ordre 0 est telle que chaque $\tau_\alpha(f)$ soit un multiple d'une même $\tau_a(f)$. C'est à dire qu'il existe

a tel que chaque $x \longmapsto f(x+\alpha)$ soit de la forme $(x \longmapsto \lambda.f(x+a))$.
Quand on translate le graphe de f, on doit retrouver le même graphe, à constante multiplicative près.

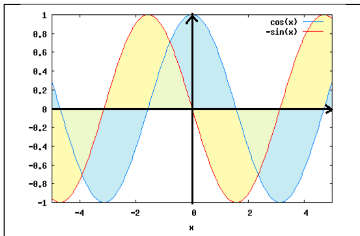
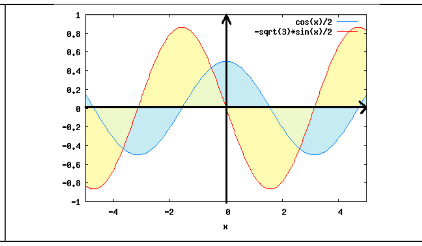
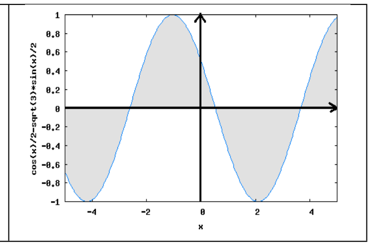
II∼4) **Montrez que le cosinus et le sinus sont toutes deux d'ordre 2.**

L'application cos *(et pas* $\cos(x)$*, on est d'accord)* a des translatés de la forme $\tau_\alpha(\cos)$ qui sont des combinaisons de cos et sin, comme déjà vu :

$$\tau_\alpha(\cos) = \big(x \longmapsto \cos(\alpha).\cos(x) - \sin(\alpha).\sin(x)\big) = \cos(\alpha).\cos - \sin(\alpha).\sin$$

Or, cos n'est autre que $\tau_0(\cos)$ et $-\sin$ n'est autre que $\tau_{\pi/2}(\cos)$.
On résume :

$$\forall \alpha,\ \tau_\alpha(\cos) = \cos(\alpha).\tau_0(\cos) + \sin(\alpha).\tau_{\pi/2}(\cos)$$

$\tau_0(\cos)$ et $\tau_{\pi/2}(\cos)$	$\cos(\alpha).\tau_0(\cos)$ et $\sin(\alpha).\tau_{\pi/2}(\cos)$	$\tau_\alpha(\cos)$
		

Pour le sinus, c'est pareil, les $\tau_a(\sin)$ sont des combinaisons de $\tau_0(\sin)$ et $\tau_{\pi/2}(\sin)$.

Attention, ce ne sont pas des combinaisons de $\tau_0(\sin)$ *et* $\tau_\pi(\sin)$*, mais ceci ne prouve rien...*

II∼5) **De quel ordre est $x \longmapsto e^x.\cos(x)$?**

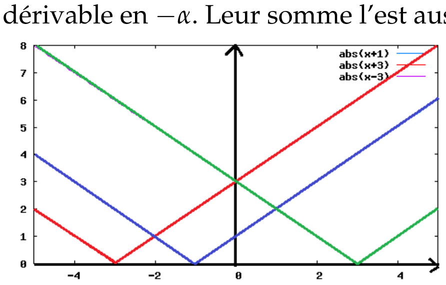
On se demande à quoi ressemblent les $\tau_\alpha(f)$ quand on pose $f = x \longmapsto e^x.\cos(x)$. On trouve
$\tau_\alpha(f) = \Big(x \longmapsto e^{a+x}.\cos(a+x)\Big) = \Big(x \longmapsto e^a.e^x.\cos(a).\cos(x) - e^a.e^x.\sin(a).\sin(x)\Big)$
On a une combinaison de $x \longmapsto e^x.\cos(x)$ et de $x \longmapsto -e^x.\sin(x)$.
La première est $\tau_0(f)$. La seconde est presque $\tau_{\pi/2}(f)$.
En fait : $\boxed{\tau_\alpha(f) = \cos(\alpha).\tau_0(f) + \sin(\alpha).e^{-\pi/2}.\tau_{\pi/2}(f)}$
Chaque $\tau_\alpha(f)$ est bien combinaison de $\tau_0(f)$ et $\tau_{\pi/2}(f)$. L'application est d'ordre 2.

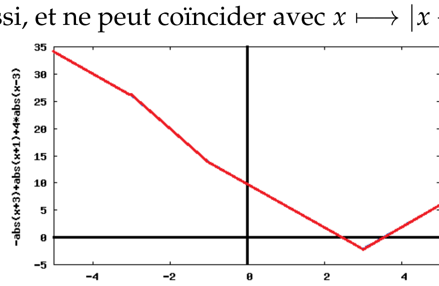
II∼6) **Montrez que la valeur absolue n'est pas d'ordre n *(et ce, quel que soit n)*.**

L'application $x \longmapsto |x|$ a un point anguleux en 0.
Si on prend des $\tau_{a_k}(abs)$, ce sont des $x \longmapsto |x+a_k|$, et elles ont des points anguleux en $-a_k$.
Par l'absurde. On suppose que chaque $\tau_\alpha(abs)$ est combinaison d'une famille $(\tau_{a_1}(abs), \dots \tau_{a_n}(abs))$. Ceci revient à dire que $\tau_\alpha(abs)$ est de la forme $\sum_{i=1}^{n} \beta_i.\tau_i(abs)$. Ou si vous préférez

$$x \longmapsto |x+\alpha| = \left(x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i.|x+a_i|\right)$$

Or, si on prend pour α un réel qui n'est pas un des a_i, alors chaque application du membre $x \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \beta_i.|x+a_i|$ est dérivable en $-\alpha$. Leur somme l'est aussi, et ne peut coïncider avec $x \longmapsto |x+\alpha|$. Il y a une contradiction.





II∼7) Soient s et p deux réels. Montrez que si f vérifie $\forall t,\ f''(t) - s.f'(t) + p.f(t) = 0$ alors elle est d'ordre inférieur ou égal à 2.

On prend y solution de $y'' - s.y' + p.y = 0$. On trouve en général une combinaison d'exponentielles.
On traitera après les cas particuliers.
f est de la forme $t \longmapsto K_1.e^{\lambda_1.t} + K_2.e^{\lambda_1.t}$ avec λ_1 et λ_2 solutions de l'équation caractéristique.
Toute application $\tau_a(f)$ est de la forme $t \longmapsto K_1.e^{\lambda_1.a}.e^{\lambda_1.t} + K_2.e^{\lambda_2.a}.e^{\lambda_2.t}$.
On va l'écrire comme combinaison de $t \longmapsto K_1.e^{\lambda_1.t} + K_2.e^{\lambda_2.t}$ et $t \longmapsto K_1.e^{\lambda_1}.e^{\lambda_1.t} + K_2.e^{\lambda_2}.e^{\lambda_2.t}$ c'est à dire sous la forme $\alpha_0.\tau_0(f) + \alpha_1.\tau_1(f)$ en résolvant un petit système :

$$\left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_0 & +\alpha_1.e^{\lambda_1} & = & e^{\lambda_1.a} \\ \alpha_0 & +\alpha_1.e^{\lambda_2} & = & e^{\lambda_2.a} \end{array} \right|$$

(de déterminant non nul).

On aurait pu aussi dire que chaque exponentielle est d'ordre 1, puis établir un petit lemme : la somme de deux applications d'ordre fini est encore une application d'ordre fini.

Il faut ensuite s'intéresser aux cas particuliers, tels que celui de la racine double.
On a alors des solutions de la forme $t \longmapsto (K_1.t + K_2).e^{\lambda.t}$.
On doit, pour tout a trouver α_0 et α_1 vérifiant

$$(K_1.(t+a) + K_2).e^{\lambda.a}.e^{\lambda.t} = \alpha_0.(K_1.t + K_2).e^{\lambda.t} + \alpha_1.(K_1.(t+1) + K_2).e^{\lambda}.e^{\lambda.t}$$

Il s'agit encore de résoudre un petit système linéaire non dégénéré.

J'ai plus joli et plus proche de l'esprit des Prépas.
L'ensemble des solutions de $y''_t - s.y'_t + p.y_t = 0$ est un espace vectoriel de dimension 2.
Quand on prend une solution f, ses translatées $\tau_a(f)$ sont encore solutions *(appliqué en $t+a$ au lieu de t, ça reste vrai $y''_{t+a} - s.y'_{t+a} + p.y_{t+a} = 0$).*
Les $\tau_a(f)$ vivent dans un espace vectoriel de dimension 2, il suffit donc d'en prendre deux linéairement indépendantes pour en avoir une base.
Et toc !

II∼8) Soient s, d et p trois réels. On suppose que f vérifie $f^{(3)} - s.f''(t) + d.f' - p.f = 0$. Montrez que chaque $\tau_a(f)$ vérifie encore la même équation. Déduisez que f est alors d'ordre inférieur ou égal à 3.

A reprendre avec les idées du dessus.

III∼0) Soit f une application dérivable d'ordre 2 *(il existe a et b tels que chaque $\tau_h(f)$ soit combinaison de $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$).*
Montrez : $\exists(\alpha_0,\ \beta_0) \in \mathbb{R}^2,\ f = \alpha_0.\tau_a(f) + \beta_0.\tau_b(f)$.

On suppose donc que chaque $\tau_h(f)$ est combinaison de $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$ pour a et b bien choisis *(attention, je ne connais pas les valeurs de a et b, ce n'est pas à moi de les choisir, sinon, c'est que je n'ai rien compris aux variables...).*
L'hypothèse est en $\forall h$. On peut l'appliquer à un h particulier : $\tau_0(f)$ s'écrit

$$\alpha_0.\tau_a(f) + \beta_0.\tau_b(f)$$

C'est une question "cadeau" si on lit les hypothèses. Sauf si on n'a toujours pas passé le cap de la Terminable et qu'on n'est toujours pas capable de lire une définition avec des variables en $\exists$ et $\forall$. Je crains hélas que ce soit encore le cas de certains élèves. Vite, pour eux, un aspirine et une option S.I.Hard.

III∼1) Montrez : $\exists(\alpha_1,\ \beta_1) \in \mathbb{R}^2,\ f' = \alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$.

On rappelle que pour tout x, on définit $f'(x) = \lim\limits_{h \mapsto 0} \dfrac{f(x+h) - f(a)}{h}$. Le taux d'accroissement de droite s'écrit $\dfrac{\tau_h(f)(x) - \tau_0(f)(x)}{h}$. C'est donc une application de la forme $\dfrac{\tau_h(f) - \tau_0(f)}{h}$. Le numérateur est par hypothèse combinaison de $\tau_a(f)$ et $\tau - b$(f) *(avec les a et b de l'énoncé).* La division n'y change rien.
Chaque $x \longmapsto \frac{f(x+h)-f(a)}{h}$ est dans $Vect(\tau(f),\ \tau_b(f))$.
Par passage à la limite, f' est dans $Vect(\tau(f),\ \tau_b(f))$.
Il existe donc α_1 et β_1 vérifiant $f' = \alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$.

III~2) $\boxed{\text{Montrez : } \exists(\alpha_2,\ \beta_2) \in \mathbb{R}^2,\ f'' = \alpha_2.\tau_a(f) + \beta_2.\tau_b(f).}$

On étudie pour h fixé chaque application $x \longmapsto \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$.

On y identifie $\dfrac{\tau_h(f') - \tau_0(f')}{h}$. L'application $\tau_0(f')$ est dans $Vect(\tau_a(f),\ \tau_b(f))$, de la forme $\alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$.

Il en est de même pour $\tau_h(f')$ qui s'écrit $\alpha_1.\tau_{a+h}(f) + \beta_1.\tau_{b+h}(f)$, sachant que $\tau_{a+h}(f)$ et $\tau_{b+h}(f)$ sont dans $Vect(\tau_a(f),\ \tau_b(f))$.

La division par h n'y change rien.

Par passage à la limite, f'' est dans $Vect(\tau_a(f),\ \tau_b(f))$.

On l'écrit donc $\alpha_2.\tau_a(f) + \beta_2.\tau_b(f)$ pour α_2 et β_2 bien choisis.

Il manque un détail : qui nous dit que f' est aussi dérivable ?

On a supposé f juste dérivable une fois.

Mais alors $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$ sont encore dérivables *(translation)*.

Leur combinaison $\alpha_1.\tau_a(f) + \beta_1.\tau_b(f)$ l'est donc encore.

III~3) **Éliminez $\tau_a(f)$ et $\tau_b(b)$ et déduisez que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.**

On devine qu'on pourrait recommencer : f est dérivable autant de fois qu'on veut, et chaque $f^{(n)}$ peut s'écrire $\alpha_n.\tau_a(f) + \beta_n.\tau_b(f)$ et appartient à $Vect(\tau_a(f),\ \tau_b(f))$.

Mais on va partir dans une autre direction.

On part de $\left\{\begin{array}{ccccc} f & = & \alpha_0.\tau_a(f) & + & \beta_0.\tau_b(f) \\ f' & = & \alpha_1.\tau_a(f) & + & \beta_1.\tau_b(f) \\ f'' & = & \alpha_2.\tau_a(f) & + & \beta_2.\tau_b(f) \end{array}\right|$ et on cherche une relation entre f, f' et f''.

Il suffit d'éliminer $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$ entre ces lignes.

Une démarché suggérée par l'énoncé est d'extraire $\tau_a(f)$ et $\tau_b(f)$ à partir des deux premières lignes : $\tau_a(f) = \dfrac{\beta_1.f - \beta_0.f'}{\alpha_0.\beta_1 - \alpha_1.\beta_0}$ et $\tau_b(f) = \dfrac{\alpha_0.f' - \alpha_1.f}{\alpha_0.\beta_1 - \alpha_1.\beta_0}$.

On reporte dans la dernière

$$f'' = \alpha_2.\frac{\beta_1.f - \beta_0.f'}{\alpha_0.\beta_1 - \alpha_1.\beta_0} + \beta_2.\frac{\alpha_0.f' - \alpha_1.f}{\alpha_0.\beta_1 - \alpha_1.\beta_0}$$

En notant s et p les deux coefficients qui apparaissent ici *(que je ne préciserai pas car ce n'est que du calcul sans intérêt)* : $f'' = s.f' - p.f$.

Les deux coefficients s et p ne dépendent pas de x, mais juste de f.

C'est donc bien que f est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

On pouvait aussi s'inspirer du résultat du cours :

dans le plan de base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, si on prend trois vecteurs $\left\{\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{u} & = & \alpha_0.\overrightarrow{i} & + & \beta_0.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} & = & \alpha_1.\overrightarrow{i} & + & \beta_1.\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{w} & = & \alpha_2.\overrightarrow{i} & + & \beta_2.\overrightarrow{j} \end{array}\right|$*, alors l'un est combinaison*

linéaire des autres...

On a démontré ici en petite dimension un résultat :

une application f est d'ordre n pour les translations si et seulement si elle est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants.

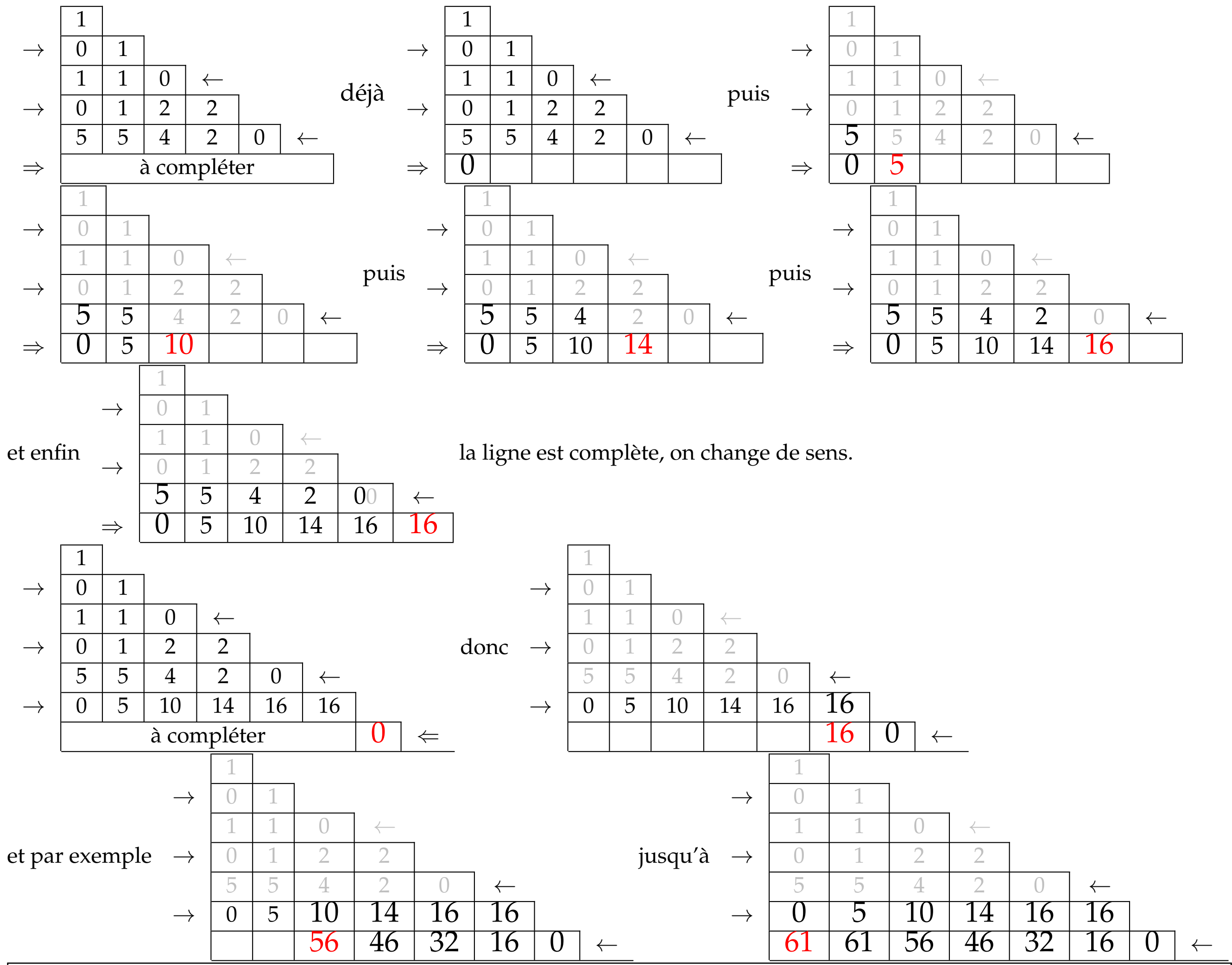
Il fait l'objet d'un exercice d'oral de Concours en pas trop de lettres *(X, E.N.S. ou Mines, je ne sais plus lequel)*.

◃17▹ L'algorithme boustrophédon, c'est ça :

	1								
→	0	1							
	1	1	0	←					
→	0	1	2	2					
	5	5	4	2	0	←			
→	0	5	10	14	16	16			
	61	61	56	46	32	16	0	←	
→	0	61	122	178	224	256	272	272	
								272	

Quand on parcourt une ligne, on commence par 0, et ensuite, chaque terme est la somme du dernier terme calculé et d'un terme de la ligne au dessus (à vous de voir lequel), ou si vous préfèrerez le cumul des termes de la ligne au dessus. Ah oui, et à chaque bout de ligne, on change de sens.

Mettez le en place pour que, pour n donné, il donne la n^{ieme} ligne du boustrophédon.




```
#algorithme boustrophedon

def Boustro(n) :
....L = [1]
....for k in range(n) :
........NewLine = [0]
........if k %2 == 0 :
............for i in range(len(L)) :
................NewLine.append(NewLine[-1]+L[i])
........else :
.............for i in range(len(L)) :
.................NewLine=[NewLine[0]+L[-i-1]]+NewLine  #ajout à gauche
........L = NewLine[ :]
........print('nouvelle',L)
....return L
```

```
Boustro(8)
nouvelle [0, 1]
nouvelle [1, 1, 0]
nouvelle [0, 1, 2, 2]
nouvelle [5, 5, 4, 2, 0]
nouvelle [0, 5, 10, 14, 16, 16]
nouvelle [61, 61, 56, 46, 32, 16, 0]
nouvelle [0, 61, 122, 178, 224, 256, 272, 272]
nouvelle [1385, 1385, 1324, 1202, 1024, 800, 544, 272, 0]
nouvelle [0, 1385, 2770, 4094, 5296, 6320, 7120, 7664, 7936, 7936]
```

```
nouvelle [50521, 50521, 49136, 46366, 42272, 36976, 30656, 23536, 15872, 7936, 0]
nouvelle [0, 50521, 101042, 150178, 196544, 238816, 275792, 306448, 329984, 345856, 353792, 353792]
```

A quoi sert cet algorithme ?
En bout de lignes, on a les coefficients du développement limité de la tangente en 0.
Et c'est utile, si si !

Surprise : $\tan(x) = 1.x + 0.\dfrac{x^2}{2} + 2.\dfrac{x^3}{6} + 0.\dfrac{x^3}{24} + 16.\dfrac{x^3}{120} + 0.\dfrac{x^3}{720} + 272.\dfrac{x^7}{5040} + o(x^7)_{x\to 0}$
ne prouvez rien, mais énoncez le résultat qui semble vrai (et il l'est).

Cherchez le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{\cos(\theta)}$ à l'ordre 7. Trouvez le rapport avec le tableau.

◁ 18 ▷ Résolvez $16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)} = 10$ d'inconnue réelle x.

Déjà, il va y avoir des solutions. En effet, en 0, la fonction $x \longmapsto 16^{\cos^2(x)} + 16^{\sin^2(x)}$ prend la valeur 17, tandis qu'en $\pi/4$ elle prend la valeur $2.\sqrt{16}$ qui vaut 8. Le théorème des « valeurs par lesquelles on passe » assure l'existence d'au moins une solution (et de plusieurs par parité/périodicité).

On commence par remplacer $\sin^2(x)$ par $1 - \cos^2(x)$ et on change de variable : $X = 10^{\cos^2(x)}$.
L'équation $X + 16.X^{-1} = 10$ a deux racines : 2 et 8.

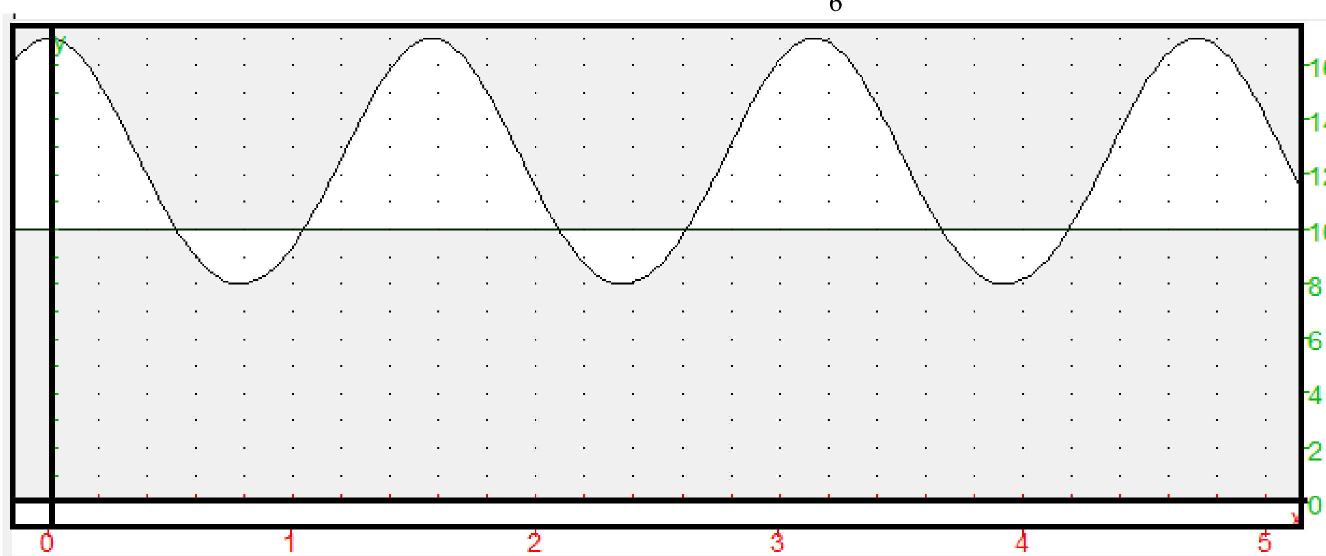
On résout les deux : $16 = 2$ donne $\cos^2(x) = \dfrac{\ln(2)}{\ln(16)}$ et même $\cos^2(x) = \dfrac{1}{4}$:

$$\frac{\pi}{3} + 2.k.\pi,\ \frac{2.\pi}{3} + 2.k.\pi,\ \frac{4.\pi}{3} + 2.k.\pi,\ \frac{5.\pi}{3} + 2.k.\pi$$

Et l'autre équation, par symétrie sinus/cosinus donne des

$$\frac{\pi}{6} + 2.k.\pi,\ \frac{5.\pi}{6} + 2.k.\pi,\ \frac{7.\pi}{6} + 2.k.\pi,\ \frac{11.\pi}{6} + 2.k.\pi$$

On peut ensuite regrouper les solutions en un bloc compact avec des $\dfrac{k.\pi}{6}$ avec quelques contraintes sur k.



◁ 19 ▷ ♡ Résolvez $(\overrightarrow{i} + ♣.\overrightarrow{j} + \diamondsuit.\overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ sachant que $\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ est une des solutions.
Existe-t-il une solution dont la composante suivant $\overrightarrow{j}$ est nulle ?

L'égalité $\begin{pmatrix} 1 \\ ♣ \\ \diamondsuit \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est vérifiée puisque le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une solution.
On a donc $-♣ - 3.\diamondsuit = 0$, $\diamondsuit + 1 = 1$ et $3 - ♣ = 3$. On trouve les deux valeurs : $♣ = 0$, $\diamondsuit = 0$ et la dernière équation est vérifiée.

On résout à présent $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Mais on connaît une solution. Et les solutions homogènes sont aussi connues.

On a donc toutes les solutions : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Impossible d'annuler la composante suivant $\overrightarrow{j}$.

◁20▷ ♡ Comparez $X \longmapsto A.X$ et $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.
En étudiant $A.B.X$, retrouvez la formule du double produit vectoriel.

On se donne un vecteur quelconque $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on compare

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b.z - c.y \\ c.x - a.z \\ a.y - b.x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On se donne alors deux vecteurs a et b. Puisque chaque application $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{b} \longmapsto \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}$ s'écrit matriciellement $U \longmapsto M_A.U$ et $U \longmapsto M_B.U$, on peut les composer.
$\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u})$ s'écrit $U \longmapsto M_B.(M_A.U)$.
Par associativité, on va calculer $M_B.M_A$ (formats compatibles).

$$\begin{pmatrix} 0 & -c' & b' \\ c' & 0 & -a' \\ -b' & a' & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c.c' - b.b' & a.b' & a.c' \\ b.a' & -a.a' - c.c' & b.c' \\ c.a' & c.b' & -a.a' - b.b' \end{pmatrix}$$

On l'écrit $\begin{pmatrix} a.a' & a.b' & a.c' \\ b.a' & b.b' & b.c' \\ c.a' & c.b' & c.c' \end{pmatrix} - \lambda.I_3$ avec $\lambda = a.a' + b.b' + c.c'$.

C'est même $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} - \lambda.I_3$.

Si on revient à la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & b' & c' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \lambda. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On reconnaît alors $\mu \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} - \lambda \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, c'est à dire $\mu \times \overrightarrow{a} - \lambda \times \overrightarrow{u}$, avec $\mu = \overrightarrow{b}.\overrightarrow{u}$ et $\lambda = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$.

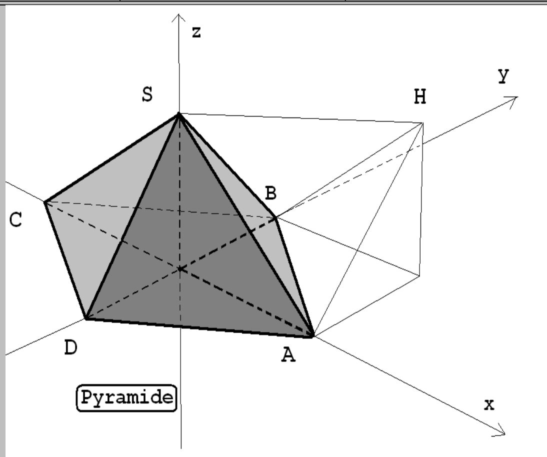
On a donc démontré :

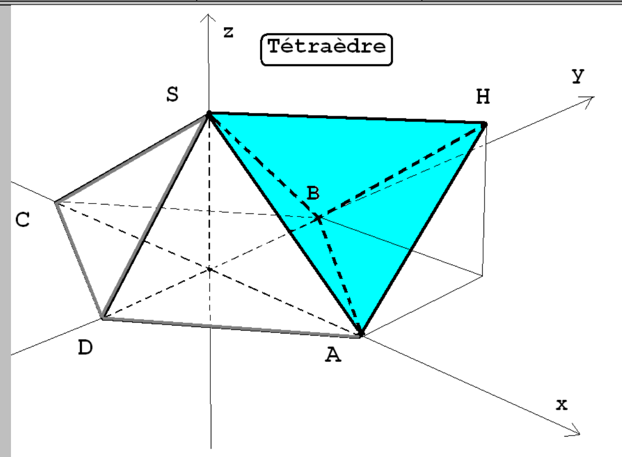
$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{u}) = (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{u}) \times \overrightarrow{a} - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{u}$$

C'est la formule du double produit vectoriel.

◃21▹ ♡♣ **La pyramide et le tétraèdre.** On définit :

A	B	C	D	S	H
$(1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ 1,\ 0)$	$(-1,\ 0,\ 0)$	$(0,\ -1,\ 0)$	$(0,\ 0,\ 1)$	$(1,\ 1,\ 1)$





Montrez que $(A,\ B,\ C,\ D,\ S)$ est une pyramide à base carrée et à faces équilatérales *(nombre de faces ?)*.

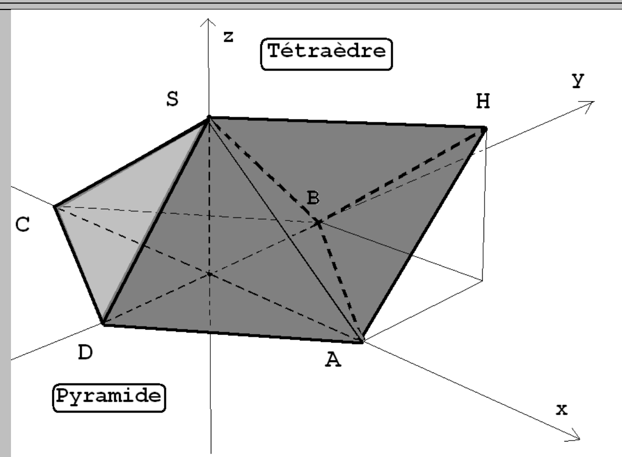
.

Montrez que $(A,\ B,\ S,\ H)$ est un tétraèdre régulier “posé sur une face de la pyramide” *(nombre de faces ?)*.

.

Montrez que A, D, S et H sont coplanaires.
Combien de faces a le solide formé de tous nos points ?

.



Base carrée :

on doit vérifier que les quatre longueurs sont égales : $AB = BC = CD = DA = \sqrt{2}$ puisque

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{pmatrix} \text{ par exemple}$$

que les côtés sont deux à deux orthogonaux : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$

$(-1).(-1) + 1.(-1) + 0.0 = 0$

On peut aussi prouver que les diagonales ont la même longueur, ce qui prouvera que ce losange est un carré.
Par sécurité, on montrer que ces points sont coplanaires : plan d'équation $z = 0$.

Pyramide à faces équilatérales :

chaque face a trois côtés égaux : $AB = AS = BS = \sqrt{2}$ puisque $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

La pyramide a cinq sommets $S = 5$, cinq faces (dont quatre triangulaires) $F = 5$ et huit arêtes $A = 8$.
On valide la formule d'Euler (encore lui !) : $S - A + F = 2$.

La face ABS est déjà un triangle équilatéral, on le sait.

Reste à prouver alors $AH = BH = SH = \sqrt{2}$ avec par exemple $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{SH} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La tétraèdre a quatre sommets $S = 4$, quatre faces (dont trois triangulaires) $F = 4$ et six arêtes $A = 6$.
On valide la formule d'Euler : $S - A + F = 2$.

A priori, le nouvel objet a

sommets	faces	arêtes
$5+4$	$5+4$	$8+6$

Mais trois sommets sont mis en commun

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H		
6	9 ?	14 ?

Et une face disparaît dans l'objet, deux fois :

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H	AHS CDS BHS ADS ABH BCS $ABCD$	
6	7 ?	14

Et trois arêtes ont été fusionnées :

sommets	faces	arêtes
A, B, C, D, S, H	AHS CDS BHS ADS ABH BCS $ABCD$	AB AS SH BC BS AH CD CS AB DA DS
6	7 ?	11 ?
$S-A+F=2$		

Mais il y a une surprise : A, D, S et H sont coplanaires.
On calcule le volume du parallélépipède, ou on vérifie que les trois vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AS}$ et $\overrightarrow{AH}$ forment une famille liée.

$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix}-1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&1\end{vmatrix}$	$=0$
$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AD}$				

On peut aussi deviner l'équation d'un plan contenant les quatre points : $x-y+z=1$.

On vérifie :

A	H	S	D
$1-0+0=1$	$1-1+1=1$	$0-0+1=1$	$1-(-1)+1=1$

Comment avoir trouvé cette équation : $\begin{vmatrix}x-1&-1&-1\\y-0&-1&0\\z-0&0&1\end{vmatrix}=0$ (c'est $\det(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AS})=0$.

On peut avoir trouvé un vecteur normal : $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ d'où une équation en $-x+y-z=C^{te}$.
On peut aussi poser a priori $a.x+b.y+c.z+d=0$ (équation d'un plan),
dire qu'il passe par A, par D, par S et par H $\left\{\begin{array}{ccccccc|}a&&&+d&=&0\\&-b&&+d&=&0\\&&c&+d&=&0\\a&+b&+c&+d&=&0\end{array}\right.$
et voir que le système est par chance dégénéré $\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&1&1\\1&1&1&1\end{vmatrix}=0$,
ce qui assure l'existence d'au moins une solution non nulle, donc un vrai plan.

Ah le plaisir de l'algèbre linéaire, trouver quatre chemins au moins qui mènent à la réponse, avec plus ou moins de beauté (ici tous beaux et efficaces).
*C'est aussi quand même ce qui déroute les élèves trop gentillets qui veulent des fiches « face à ça, je fais **systématiquement** ça ».*
Toute la différence entre maths de Sup (approches variées) et maths de terminale (un chemin à apprendre par cœur).

◃22▹ Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)}+6.y=2.y''+5.y'$.
Donnez une base de cet espace vectoriel des solutions, puis donnez la matrice de la dérivation sur cette base.

Si f vérifie $f^{(3)}(t)+6.f(t)=2.f''(t)+5.f'(t)$ pour tout t, alors elle est C^∞ en mettant en boucle « $f^{(3)}=2.f''+5.f'-2.f$ est dérivable quand on la regarde comme membre de droite ».
On dérive : $f^{(4)}(t)+6.f'(t)=2.f^{(3)}(t)+5.f''(t)$ pour tout t.
On pose $\varphi=f'$ et on reconnait que φ est encore solution de l'équation différentielle...

Sinon, que la dérivation soit linéaire, c'est acquis : $(\alpha.f+\beta.g)' = \alpha.f' + \beta.g'$, que f et g soient ou non solutions d'équations différentielles, du moment qu'elles sont dérivables.

Le cours d'analyse nous donne une base de l'espace des solutions, en résolvant l'équation caractéristique $\lambda^3 - 2.\lambda^2$-$5.\lambda + 6 = 0$ d'inconnue (réelle/complexe) λ.
Le spectre réel est $[3,\ 1,\ -2]$.
Une base des solutions est $(t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-2.t})$.
Et l'ensemble des solutions est $Vect(t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-2.t})$.
Et les solutions s'écrivent $t \longmapsto A.e^{3.t} + B.e^t + C.e^{-2.t}$ avec A, B et C dépendant des conditions initiales.

Choisissez la formulation que vous voulez parmi les trois ci dessus... Et dites moi si le physicien a vraiment conscience qu'il fait de l'algèbre linéaire.

On dérive chaque vecteur de la base proposée et on écrit alors la matrice de la dérivation : $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

La trace vaut 2 et le déterminant -6.

> *Question : d'accord, mais c'est parce qu'on a choisi cette base là... mais si on en avait pis une autre, comme* $(t \longmapsto e^{-2.t},\ t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^t)$ *ou même* $(t \longmapsto e^{3.t} + e^{2.t},\ t \longmapsto e^t - e^{2.t},\ t \longmapsto 3.e^{-2.t})$ *ou pire encore...*
> *Eh bien, la matrice n'aurait pas été la même, mais elle aurait été semblable à celle ci.*
> *Et on aurait eu la même trace et le même déterminant...*

Une étourderie m'a fait une année taper $y'' + 6.y = 2.y'' + 5.y'$ comme énoncé.
Le raisonnement est le même, mais cette fois, le spectre est $[1,\ -6]$.
On a alors $Vect(t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{-6.t})$ et la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$.

◁23▷ Une liste L de longueur 365 indique les bénéfices de votre restaurant chaque jour de l'année écoulée. Écrivez un script qui détermine quelle a été la période de dix jours consécutifs où le bénéfice total a été le moins élevé, pour déterminer quand vous auriez pu le fermer pour prendre des congés.

La liste `L` contient donc 365 valeurs. Le nombre `L[k]` représente donc le bénéfice du jour d'indice `k` *(éventuellement négatif, je ne sais pas comment vous gérez votre affaire, ni comment était la météo)*.
On doit donc étudier des sommes sur le modèle `L[k]+L[k+1]+...+L[k+9]` et trouver le `k` *(de `0` à `355`)* pour lequel elle sera la plus petite. Trouver l'indice du minimum, on sait faire, par simple parcours.
On peut le faire en deux fois, même si ce n'est pas très intelligent et très redondant :

```
Cumul = []
for k in range(355) :
....somme = 0 #on initialise à chaque fois une somme nulle
....for i in range(10) :
........somme = somme+L[k+i] #on calcule la somme sur dix jours
....Cumul.append(somme) #on place dans la liste Cumul
```

La liste `Cumul` contient le bilan comptable de chacun des `355` segments de longueur `10`.

```
Minimum, index = Cumul[0], 0 #on initialise avec les dix premiers jours de l'année
for k in range(1, 355) : #un simple parcours
....if Cumul[k]<Minimum : #si on a fait pire sur le segment
........Minimum = Cumul[k] #on mémorise le nouveau minimum
........index = k #et on mémorise l'indice
```

La réponse est alors l'indice `index` et le bénéfice cumulé sur la période est `Minimum`.
Bien que joliment méthodique, cette approche calcule bien trop de fois les mêmes sommes partielles.
On va donc le faire au fur et à mesure. Pour passer d'un cumul au suivant, on ajoute un terme et on en efface un, c'est tout.

```
k, DixJours = 0, 0
for i in range(10) :
....DixJours = DixJours+L[i]  #on a créé la première somme cumulée
Minimum, index = DixJours, 0
for k in range(1, 355) :
....DixJours = DixJours-L[k-1]+L[k+9]  #on efface un terme et on en ajoute un autre
....if DixJours < Minimum :
........Minimum = DixJours
........index = k
```

Ensuite, on aura intérêt à rendre le programme adaptatif et à poser deux variables `NbJours` et `duree` qu'on met égales à `365` et `10` et on écrit des `for k in range(1, NbJours-duree) :`.

◃24▹

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Poincaré

On note $\mathbb{P}$ en hommage à Henri Poincaré le demi plan des complexes de la forme $a+i.b$ avec a et b réels et b strictement positif.
On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des matrices réelles de taille 2 de déterminant 1.
On note $\mathbb{T}$ l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ décrivant $\mathbb{R}$.
On note S l'ensemble des matrices réelles de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ avec t décrivant $\mathbb{R}$.
Pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ notée M et tout complexe z de $\mathbb{P}$, on note $M * z$ le complexe $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$.

I∼0) Montrez que $(\mathbb{D},\ \times)$ est un groupe non commutatif.
I∼1) Montrez que $(\mathbb{T},\ \times)$ est un sous-groupe commutatif de $(\mathbb{D},\ \times)$.
I∼2) Montrez que pour toute M de $\mathbb{D}$ et tout z de $\mathbb{P}$, $M * z$ existe et est dans $\mathbb{P}$.
I∼3) Montrez : $\forall (A,\ B) \in \mathbb{D}^2,\ \forall z \in \mathbb{P},\ A*(B*z) = (A.B)*z$.
I∼4) Montrez : $\forall M \in \mathbb{T},\ M*i = i$.
I∼5) Montrez : $\forall M \in \mathbb{D},\ M*i = i \Leftrightarrow M \in \mathbb{T}$.

II∼0) On définit sur $\mathbb{D}$ la relation $\risingdotseq$ par $A \risingdotseq B \Leftrightarrow A^{-1}.B \in \mathbb{T}$. Montrez que c'est une relation d'équivalence.

III∼0) On définit pour M de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $N(M) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Montrez que N est une norme, c'est à dire :
• pour toute M de $\mathbb{D}$: $N(M) \geqslant 0$ et $(N(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0)$ *(matrice nulle)*
• pour toute M de $\mathbb{D}$ et tout λ de $\mathbb{R}$: $N(\lambda.M) = |\lambda|.N(M)$
• pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$ ah, non, celle là, on la garde pour la fin.

III∼1) Montrez pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $A \risingdotseq B \Rightarrow N(A) = N(B)$.
III∼2) La réciproque est elle vraie ? Indication : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

IV∼0) Montrez : $\forall z \in \mathbb{P},\ \exists A \in \mathbb{D},\ A*i = z$.
IV∼1) Déduisez : $\forall (z,\ Z) \in \mathbb{P}^2,\ \exists A \in \mathbb{D},\ A*z = Z$. A-t-on unicité de A ?

V∼0) Plus précisément, montrez $\forall z \in \mathbb{P},\ (\exists A \in \mathbb{D},\ A*i = z)$ *et* $(\forall M \in \mathbb{D},\ M*i = z \Rightarrow N(M) = N(A)$. On décide alors de nommer "hauteur de z" la quantité $N(A)$ pour toute matrice A de $\mathbb{D}$ vérifiant $A*i = z$.
Calculez la hauteur de i. Calculez la hauteur de $\lambda.i$ pour tout réel λ strictement positif, et indiquez pour quel λ cette hauteur est minimale. Calculez la hauteur de $1+i$.

VI∼0) On rappelle que pour deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^4$ ($\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$), on peut calculer leur produit scalaire de deux façons : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$
mais aussi $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}})$. Montrez la propriété mise de côté : • pour tout couple $(A,\ B)$ de $\mathbb{D}^2$: $N(A+B) \leqslant N(A)+N(B)$.

En considérant les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$, montrez que toutes les matrices A de $\mathbb{D}$ vérifient $N(A) \geqslant \sqrt{2}$. Déduisez que les complexes ont tous une hauteur au moins égale à $\sqrt{2}$.

TD27 Le demi plan de Poincaré.

L'ensemble des matrices réelles de taille 2 et de déterminant 1 est un groupe car :

• la loi est interne : le produit de deux matrices carrées réelles est encore carrée réelle, et son déterminant vaut 1 *(déterminant du produit égal au produit des déterminants)*

• la loi est associative *(c'est dans le cours, que le déterminant vaille* 1 *ou non)*

• on connaît un neutre : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$: c'est bien une matrice carrée réelle de taille 2 et son déterminant vaut 1 [2]

• les matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de cet ensemble sont inversibles *(déterminant non nul)*, et leurs inverses $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ sont encore de déterminant 1 [3]

Pour prouver que ce groupe n'est pas commutatif, on donne un contre-exemple, comme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> *Évidemment, on ne se contente pas de vagues déclarations comme* "le produit matriciel n'est pas commutatif". *Il se pourrait en effet que la condition* "déterminant égal à 1" *fasse qu'on se limite alors à des matrices particulières obligées de commuter entre elles.*
> *D'autre part, évidemment, dans le contre-exemple, on prend des matrices de déterminant* 1.

Les matrices de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ont toutes un déterminant égal à 1, elles sont dans $\mathbb{D}$ *(ceci nous assure de l'associativité du produit matriciel et de l'existence d'inverses)*.

Le produit de deux matrices de cette forme est encore une matrice de cette forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

en utilisant les formules d'addition sur les angles, ou justement en se disant qu'on les retrouvera grâce à ces matrices.

La matrice neutre est de cette forme : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{pmatrix}$.

L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, et elle est encore de la bonne forme : $\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$.

Enfin, la multiplication est ici commutative :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

> *Les élèves qui confondent mathématiques et calcul et ne savent pas qu'il faut avant tout raisonner tartinnent des lignes de calculs inutiles et oublient les vraies questions : appartenance à l'ensemble. Je ne peux rien pour ceux là, ils se sont trompés de filière. Mais ce n'est pas grave, on a autant besoin de militaires et de bouchers que d'ingénieurs.*

---

2. oubliez de dire que son déterminant vaut 1 et vous n'avez rien prouvé
3. là aussi, si vous ne dites pas que l'inverse est dans $\mathbb{D}$, vous avez tout perdu

Pour les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}$ les arguments sont de la même forme :
• déterminant égal à 1
• neutre $\begin{pmatrix} ch(0) & sh(0) \\ sh(0) & ch(0) \end{pmatrix}$
• inverse $\begin{pmatrix} ch(-t) & sh(-t) \\ sh(-t) & ch(-t) \end{pmatrix}$
• stabilité $\begin{pmatrix} ch(t) & sh(t) \\ sh(t) & ch(t) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} ch(u) & sh(u) \\ sh(u) & ch(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch(t+u) & sh(t+u) \\ sh(t+u) & ch(t+u) \end{pmatrix}$ *(et commutativité).*

TD27 Notation $M * z$.

Si z est un complexe de partie imaginaire strictement positive, on peut déjà regarder si $c.z + d$ peut être nul. Pour ce faire, il faudrait annuler sa partie imaginaire $c.\Im m(z)$, c'est à dire annuler c. Il faudrait ensuite annuler sa partie réelle d. Mais alors la matrice M serait de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et ne serait pas inversible.

On regarde alors $\dfrac{a.z+b}{c.z+d}$ qui existe bien, et on calcule sa partie imaginaire et sa partie réelle, en multipliant par la quantité conjuguées :

$$\frac{a.z+b}{c.z+d} = \frac{(a.z+b).(c.\overline{z}+d)}{(c.z+d).(c.\overline{z}+d)} = \frac{a.|z|^2 + (a.d.z + b.c.\overline{z}) + b.d}{|c.z+d|^2}$$

Le dénominateur est un réel strictement positif, on écrit le numérateur sous forme cartésienne en posant $z = x + i.y$ avec $(x,\ y)$ dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$:

$$\frac{a.z+b}{c.z+d} = \frac{a.(x^2+y^2) + (a.d+b.c).x + i.(a.d - +b.c.).y}{|c.z+d|^2}$$

La partie imaginaire $\dfrac{i.(a.d - +b.c.).y}{|c.z+d|^2}$ est du signe de y car $a.d - b.c$ vaut 1.

On a bien $M * z \in \mathbb{P}$. Là, c'est vrai, c'est juste du calcul. Simplement, il ne vaut mieux pas prendre $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et en même temps $z = a + i.b$, vous voyez pourquoi...

On prend cette fois deux matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et on calcule

$B * z = \dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta}$	$A * (B * z) = \dfrac{a.\dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta} + b}{c.\dfrac{\alpha.z+\beta}{\gamma.z+\delta} + d}$	$(A.B) * z = \dfrac{(a.\alpha + b.\gamma).z + (a.\beta + b.\delta)}{(c.\alpha + d.\gamma).z + (c.\beta + d.\delta)}$

Il y a bien égalité *(c'est dans le cours : "*composer les homographies, c'est multiplier les matrices*")*.

On prend ensuite une matrice de la forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$ et on calcule l'image de i : $\dfrac{i.\cos(\theta) - \sin(\theta)}{i.\sin(\theta) + \cos(\theta)}$.

On reconnaît : $\dfrac{i.(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))}{\cos(\theta) + i.\sin(\theta)}$ et après simplification par le réel non nul $e^{i.\theta}$ il reste encore i.

Pour l'équivalence, un sens est acquis. Sinon, on suppose que i est "un point fixe" de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *(à coefficients réels et de déterminant* 1*)*. On a donc : $\dfrac{a.i+b}{c.i+d} = i$. On effectue un produit en croix : $a.i + b = -c + i.d$. On identifie parties réelles et parties imaginaires : $a = d$ et $b = -c$. La matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$. Mais son déterminant vaut 1, ne l'oublions pas : $a^2 + c^2 = 1$. Le points $(a,\ c)$ est sur le cercle trigonométrique. On peut mettre ses coordonnées sous la forme $(\cos(\theta),\ \sin(\theta))$ pour θ bien choisi *(en l'occurrenceArccos(a) au signe près, sachant que la relation $a^2 + c^2 = 1$ entraîne bien que a est entre -1 et 1)*.

La matrice est donc bien de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$. On a l'équivalence.

TD27 Relation d'équivalence.

On se donne A et B à coefficients réels et de déterminant 1. On peut donc calculer $A.B^{-1}$ et s'interroger sur son appartenance à $\mathbb{T}$. La question "$A \eqcirc B$" a bien un sens.

	quantification	argument
R	$\forall A,\ A \eqcirc A$	$A^{-1}.A = I_2 \in \mathbb{T}$
S	$\forall (A,\ B),\ (A \eqcirc B) \Rightarrow (B \eqcirc A)$	si $A^{-1}.B$ est dans $\mathbb{T}$, son inverse $B^{-1}.A$ y est aussi
T	$\forall \dots,\ (A \eqcirc B\ et\ B \eqcirc C) \Rightarrow (A \eqcirc C)$	si $A^{-1}.B$ et $B^{-1}.C$ sont dans $\mathbb{T}$, leur produit $A^{-1}.C$ y est aussi

On note qu'on utilise une à une toutes les propriétés du sous-groupe.

> *Attention, l'élève qui rédige la réflexivité de la sorte :*
> $\forall A \in \mathbb{D},\ A \eqcirc A \Leftrightarrow A^{-1}.A = I_2 \in \mathbb{T}$ *n'a pas écrit ce qu'il fallait.*
> *Il n'a fait que recopier quasiment la définition.*
> *Quand il écrit* $\forall A \in \mathbb{D},\ A \eqcirc A \Leftrightarrow A^{-1}.A \in \mathbb{T}$, *ce peut être Vrai* $\Leftrightarrow$ *Vrai que Faux* $\Leftrightarrow$ *Faux puisque c'est une définition.*
> *Ce qu'il écrit, c'est* "pour que A soit en relation avec A, il faut et il suffit que $A.A^{-1}$ soit dans $\mathbb{T}$". *Il sous-entend alors :* "or, $A^{-1}.A \in \mathbb{T}$ est évidemment vrai, donc $A \eqcirc A$ l'est aussi".
> *Mais il* sous-entend *cette phrase mais ne l'écrit pas.*
> *Bref, cet élève a fait de la bouillie de mathématiques.*
> *Le vrai élève qui maitrise le langage mathématique* (et ne jargonne pas comme un étudiant d'Histoire qui prend des notes en mélangeants sténographie et symbolisme mathématique mal assumé) *écrit :*
> $\forall A \in \mathbb{D},\ A \eqcirc A$, *en effet* $A^{-1}.A = I_2 \in \mathbb{T}$
> *et la différence est capitale. Si vous n'en avez pas conscience, écrivez des livres de physique ou biologie pour le collège, mais ne faites pas de sciences.*

TD27 Norme de matrices.

On se donne une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Le réel $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ est positif. Sa racine carrée existe et est positive[4]

Si la matrice est nulle, la somme des carrés l'est aussi, la norme est nulle.
Supposons en contrepartie que la norme est nulle. On a alors $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. Comme ce sont des réels, la seule possibilité est $a = b = c = d = 0$.

> *Pour ceux qui veulent les détails :* $0 \leqslant a^2 \leqslant a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$. *Par antisymétrie :* $a^2 = 0$ *et par intégrité :* $a = 0$. *On fait de même avec les autres. Argument classique* "seule solution pour qu'une somme de carrés de réels soit nulle". *S'il vous plait, n'oubliez pas le mot* "réels".

On se donne $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et λ et on calcule la norme de $\begin{pmatrix} \lambda.a & \lambda.b \\ \lambda.c & \lambda.d \end{pmatrix}$.
C'est $\sqrt{(\lambda.a)^2 + (\lambda.b)^2 + (\lambda.c)^2 + (\lambda.d)^2}$. On développe, on factorise : $\sqrt{\lambda^2.(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}$. En sortant de la racine, λ^2 donne bien $|\lambda|$ en facteur.

TD27 Norme et relation d'équivalence.

On se donne deux matrices A et B *(de la forme* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$*)* qu'on suppose en relation par $\eqcirc$: $A^{-1}.B$ est dans $\mathbb{T}$. On doit alors comparer $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2$ *(les racines ne servant à rien).*
L'hypothèse dit que $A^{-1}.B$ est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ pour un certain θ. On écrit alors $B = A.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ soit encore

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. = \begin{pmatrix} a.\cos(\theta) + b.\sin(\theta) & b.\cos(\theta) - a.\sin(\theta) \\ c.\cos(\theta) + d.\sin(\theta) & d.\cos(\theta) - c.\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

4. qui a juste rédigé la positivité sans mentionner l'existence ?

On développe alors $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$:

$$(a.\cos\theta+b.\sin\theta)^2+(b.\cos\theta-a.\sin\theta)^2+(c.\cos\theta+d.\sin\theta)^2+(d.\cos\theta-c.\sin\theta)^2$$

Les termes mixtes en $2.\sin(\theta).\cos(\theta)$ se simplifient ; on utilise le relation de Pythagore $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ et au final il ne reste que $a^2+b^2+c^2+d^2$.

Simple question calculatoire une fois qu'on a pensé à écrire $B=A.R_\theta$.

Pour la réciproque *(fausse)*, on donne deux matrices ayant même "norme", mais qui ne sont pas en relation par la relation $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$. Elles ont bien la même somme des carrés des coefficients, mais ne sont pas en relation.
Par l'absurde, sinon, le produit $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}^{-1}$ serait une matrice de $\mathbb{T}$. Or, cette matrice se calcule $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$, elle ne peut vraiment pas être de la forme $\begin{pmatrix}c&-s\\s&c\end{pmatrix}$.

TD27 Equation $A*i=z$ d'inconnue A.

On se donne z de la forme $x+i.y$ avec x dans $\mathbb{R}$ et y dans $\mathbb{R}^{+*}$. Il faut pouvoir l'écrire $\dfrac{a.i+b}{c.i+d}$ avec a, b, c et d réels vérifiant de surcroit $a.d-b.c=1$.
On effectue un produit en croix : $a.i+b=(c.i+d).(x+i.y)$. On développe et on identifie *(raisonnement par équivalences)* :
$a=c.x+d.y$ et $b=d.x-c.y$ et aussi $a.d-b.c=1$ *(les données sont x et y, les inconnues sont a, b, c et d)*.

On semble avoir le choix quand même, avec trois équations pour quatre inconnues.

On veut montrer qu'il existe une solution, on ne les cherche pas toutes. On peut donc s'imposer des conditions.

Je demande $c=0$. Le système devient $a=d.y$ et $b=d.x$ puis enfin $(d.y).d-d.x.0=1$. On isole et choisit $d=1/\sqrt{y}$ *(l'existence est assurée par $y>0$)*. On remonte : $a=\sqrt{y}$ et $b=x/\sqrt{y}$.

Je résume pour vérifier : $A=\begin{pmatrix}\sqrt{y}&x/\sqrt{y}\\0&1/\sqrt{y}\end{pmatrix}$ est à coefficients réels, a pour déterminant 1 et vérifie $A*i=\dfrac{\sqrt{y}.i+x/\sqrt{y}}{1/\sqrt{y}}=i.(\sqrt{y})^2+x=x+i.y$.
On a envoyé i sur z par une matrice de $\mathbb{D}$.

Il n'y a pas unicité, puisque l'on a pu choisir $c=0$. Une autre solution pouvait provenir de $b=0$ par exemple.

On se donne cette fois z et Z et on veut passer de l'un à l'autre par un élément de $\mathbb{D}$. On peut certes poser un affreux système. Mais on nous demande de le déduire de la question précédente.
On sait déjà qu'il existe A dans $\mathbb{D}$ vérifiant $A*i=z$ et qu'il existe B aussi dans $\mathbb{D}$ vérifiant $B*i=Z$.
On compose la première relation par A^{-1} : $A^{-1}*(A*i)=A^{-1}*z$. Mais on connaît les propriétés de $*$: $A^{-1}*(A*i)=(A^{-1}.A)*i=I_2*i=i$.
On peut donc écrire : $i=A^{-1}*z$. On reporte : $B*(A^{-1}*z)=Z$. On utilise encore le lien entre $*$ et le produit matriciel : $(B.A^{-1})*z=Z$.
La matrice $B.A^{-1}$ est encore dans $\mathbb{D}$ *(groupe)* et permet de passer de z à Z. On a répondu à la question.

En fait, on a montré que par action $*$ on pouvait passer de i à n'importe quel z. On en déduit que pour passer de z à Z, il suffit de transiter par i.

On n'a pas unicité. On peut passer de i à i par plusieurs matrices : toutes celles de T.
On a $i=T*i$ pour toute matrice T de $\mathbb{T}$. Ensuite, si on se donne z et Z vérifiant $A*i=z$ et $B*i=Z$ comme ci dessus, on a bien $(B.A^{-1})*z=Z$; mais on a aussi $(A.T)*i=z$ et $(B.T')*i=Z$ pour tout couple $(T,\ T')$ de $\mathbb{T}^2$, et on a donc aussi $(B.T'.T^{-1}.A^{-1})*z=Z$.

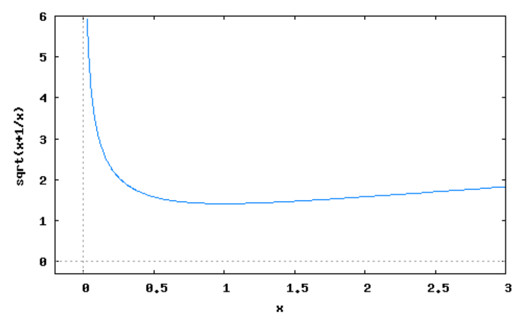
TD27 Hauteur d'un complexe.

On se donne un complexe z. On sait déjà qu'il existe au moins une matrice A vérifiant $A * i = z$ (*"permettant de passer de i à z"*). Mais on le sait, il en existe d'autres. Ce qu'on doit montrer : si on en prend une autre, alors elle a la même norme que la première matrice A.
Supposons en effet qu'on a à la fois $A * i = z$ et $M * i = z$. Alors, en comparant, on a $M * i = A * i$. En composant par A^{-1} *(qui existe car A est dans $\mathbb{D}$)*, on a alors $A^{-1} * (M * i) = A^{-1} * (A * i)$. Avec les règles de composition des homographies : $(A^{-1} * M) * i = I_2 * i = i$.
Or, si une matrice P de $\mathbb{D}$ vérifie $P * i = i$, elle est nécessairement dans $\mathbb{T}$. Comme $A^{-1}.M$ est dans le groupe $\mathbb{D}$, on a $A^{-1}.M \in \mathbb{T}$. On reconnaît $A \doteq M$, et on déduit $N(A) = N(M)$ comme déjà prouvé *(les questions s'enchaînent)*.

> *Si une matrice permet de passer de i à z, toutes les autres matrices qui permettent de passer de i à z ont la même norme. On peut donc en prendre une "au hasard" et calculer sa norme ; ce sera la même pour toutes.*

On cherche une matrice qui permette de passer de i à i. Il y a I_2 *(et en fait toutes les matrices de $\mathbb{T}$)*. Sa norme vaut $\sqrt{2}$ *(de même que pour toutes les matrices de $\mathbb{T}$)*.

On cherche une matrice pour passer de i à $\lambda.i$. On peut proposer $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ puisque $\dfrac{\lambda.i+0}{0.i+1}$ vaut $\lambda.i$. Mais cette matrice n'a pas pour déterminant 1. On peut proposer $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$ puisque $\dfrac{\sqrt{\lambda}.i+0}{0.i+1/\sqrt{\lambda}}$ vaut aussi $\lambda.i$.
La norme de cette matrice *(et de toute matrice de $\mathbb{D}$ vérifiant $M * i = \lambda.i$)* est $\boxed{\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{\lambda}}}$



On cherche le minimum de cette application en la dérivant. Cela dit, on comprend que $\sqrt{\lambda + \dfrac{1}{\lambda}}$ est minimum quand $\lambda + \dfrac{1}{\lambda}$ est minimum.
C'est donc cette application que l'on dérive : $\lambda \longmapsto 1 - \dfrac{1}{\lambda^2}$. Le minimum est atteint pour $\lambda = 1$ *(on ne regarde que les λ positifs)*. La hauteur la plus courte pour les $\lambda.i$ est $\sqrt{2}$, atteinte pour i lui même.

On veut cette fois passer de i à $1+i$. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ convient et a pour déterminant 1. On calcule la norme : $\sqrt{3}$.

TD27 Inégalités à partir du produit scalaire.

On veut montrer ce qu'on appelle l'inégalité triangulaire : On se donne deux matrices. On doit comparer $\sqrt{(a+\alpha)^2+(b+\beta)^2+(c+\gamma)^2+(d+\delta)^2}$ et la somme

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2} + \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$$

> *Disons le tout net, l'élève qui affirme "il est évident que" ou "par un calcul rapide" n'a pas sa place en Prépas, c'est un futur danger public.*

Pour comparer ces réels positifs, on va comparer leurs carrés en effectuant la différence de leurs carrés : $(\sqrt{\ldots} + \sqrt{\ldots})^2 - (\sqrt{\ldots + \ldots})^2$.
Il reste

$$(a^2+b^2+c^2+d^2) + (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) + 2.\sqrt{\ldots}.\sqrt{\ldots} - \Big((a+\alpha)^2 + \ldots + (d+\delta)^2\Big)$$

On développe les carrés et on élimine, il reste

$$2.\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2} - 2.(a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta)$$

Notre objectif est de montrer que ce réel est positif.
Si $a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + d.\delta$ est négatif, c'est gagné.

Mais de toutes façons, en posant $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$, on reconnaît $2.|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| - 2.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$. Or, $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ s'écrit aussi $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}})$. Il est donc plus petit que $|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|$ (un cosinus ne dépasse pas 1). La différence $2.|\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}| - 2.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$ est donc positive. C'est ce que l'on voulait obtenir.

On se donne une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *(notée A)* de déterminant 1 : $a.d - b.c = 1$. On calcule sa norme $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$. Comme indiqué, on introduit les deux vecteurs $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} d \\ -c \\ -b \\ a \end{pmatrix}$ et on calcule de deux façons leur produit scalaire :

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = a.d + b.(-c) + c.(-b) + d.a = 2.(a.d - b.c) = 2$$

car la matrice est dans $\mathbb{D}$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = |\overrightarrow{u}|.|\overrightarrow{v}|.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}) = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}.\sqrt{d^2+(-c)^2+(-b)^2+a^2}.\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}) = N(A).\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}})$$

On égalise : $N(A).\cos(\widehat{\overrightarrow{u}\ \overrightarrow{v}}) = 2$. Comme la norme est positive, tandis que le cosinus ne dépasse pas 1, on a forcément $N(A) \geqslant 2$.

Comme la hauteur d'un complexe z du demi-plan se calcule par la norme d'une matrice A de $\mathbb{D}$ vérifiant $A * i = z$, la hauteur d'un complexe vaut au moins $\sqrt{2}$ *(atteinte pour $z = i$)*.

◃25▹ $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ va de $(\mathbb{R}^4, +, .)$ dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Donnez son image et son noyau (base et équations cartésiennes).

On ne demande pas de prouver que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & +4.b & -c & \\ & b & +c & \\ a & & +3.c & +d \end{pmatrix}$ est un endomorphisme ? Dommage, il est sous la forme $U \longmapsto M.U$.

Pour avoir son noyau, on résout $\begin{array}{ccccl} a & +4.b & -c & & = 0 \\ & b & +c & & = 0 \\ a & & +3.c & +d & = 0 \end{array}$. On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \\ -8 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Le noyau est de dimension 1, l'image est de dimension 3.

Elle est engendrée par $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Elle a pour base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix})$ par exemple (trois vecteurs indépendants), on a efface le dernier qui est combinaison linéaire des autres :

$5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 8.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$

Dimension 3 dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. L'image est $\mathbb{R}^3$, d'équation $0.x + 0.y + 0.z = 0$ si on y tient.

Quant au noyau, il est formé des vecteurs vérifiant justement $\begin{array}{ccccl} a & +4.b & -c & & = 0 \\ & b & +c & & = 0 \\ a & & +3.c & +d & = 0 \end{array}$. Que voulez vous d'autre comme jeu d'équations ?

◁26▷ ♡ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M.B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Montrez que c'est un automorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
Calculez l'image de chacun des quatre vecteurs de la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Donnez la matrice de cet endomorphisme sur cette base canonique.
Calculez son déterminant. Inversez la sans trop d'effort.

Existence : OK par formats compatibles.
Endo : formats là encore.
Morphisme : $A.(\alpha.M + \beta.N).B = \ldots$
Auto : $A.M.B = 0_{2,2} \Leftrightarrow M = 0_{2,2}$ en multipliant à droite comme à gauche par A^{-1} et B^{-1}.
l'endomorphisme en injectif
on est en dimension finie, il est bijectif.
On pouvait aussi créer sa réciproque à droite et à gauche $M \longmapsto A^{-1}.M.B^{-1}$.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \\ 2 & . & . & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ 0 & -2 & . & . \\ 2 & 6 & . & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & . \\ 1 & 3 & 3 & . \\ 0 & -2 & 0 & . \\ 2 & 6 & 5 & . \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\longmapsto \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -5 & 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$

La matrice sur la base canonique de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ est donc $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 0 & -5 \\ 2 & 6 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ qu'on lit par blocs $\begin{pmatrix} 0 & -1 & . & 0 & -3 \\ 1 & 3 & . & 3 & 9 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & -2 & . & 0 & -5 \\ 2 & 6 & . & 5 & 15 \end{pmatrix}$.

On reconnaît quatre multiples de ${}^tB$: $\begin{pmatrix} {}^tB & 3.{}^tB \\ 2.{}^tB & 5.{}^tB \end{pmatrix}$. Et les coefficients sont ceux de A.

Et son inverse ?
Esprit P.C. : pivot de Gauss.
Esprit MP et PSI : l'endomorphisme inverse est $M \longmapsto \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.M.\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où l'on a remplacé A par A^{-1} et B par B^{-1}.

La matrice sera donc $\begin{pmatrix} -5.{}^tB^{-1} & 3.{}^tB^{-1} \\ 2.{}^tB^{-1} & -{}^tB^{-1} \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} -15 & -5 & . & 9 & 3 \\ 5 & 0 & . & -3 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 6 & 2 & . & -3 & -1 \\ -2 & 0 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Et si vous avez un doute : guess and check...

◁27▷ Inversez `[[1, 2, 1, 0], [1, 3, 3,-1], [1, 1, 0, 2], [1, 3, 5, 2]]` par méthode du pivot de Gauss.

Calcul du déterminant si on veut juste ça :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array} \end{array}$$

Le déterminant vaut 1, la matrice est inversible.
Mais si on met un second membre ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-a \\ d-a \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ b+d-2.a \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b-a \\ b+c-2.a \\ 4.a-3.b-2.c+d \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array} \end{array}$$

Connaissant $t = 4.a - 3.b - 2.c + d$, on peut remonter dans les lignes au dessus et trouver $c = -6.a + 4.c + 3.c - d$ puis $b = 15.a - 10.b - 8.c + 3.d$ et ainsi de suite.

On interprète : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & 16 & 13 & -5 \\ 15 & -10 & -8 & 3 \\ -6 & 4 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

Et la matrice qui exprime les inconnues à l'aide des paramètres est justement A^{-1}.

Mais on peut aussi coder le membre de droite sous forme matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ L2 & = & L2 & -L1 \\ L3 & = & L3 & -L1 \\ L4 & = & L4 & -L1 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ L3 & = & L3 & +L2 \\ L4 & = & L4 & -L2 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} & & L1 & \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ L4 & = & L4 & -2.L3 \end{array} \end{array}$$

Et pourquoi s'arrêter là ? On remonte :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & \\ L2 & = & L2 & +L4 \\ L3 & = & L3 & -L4 \\ & & L4 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & -2.L2 \\ & & L2 & \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & -7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{rcll} L1 & = & L1 & -L3 \\ L2 & = & L2 & -2.L3 \\ & & L3 & \\ & & L4 & \end{array}$$

on a reconstruit M^{-1}

Et c'est ainsi que Gauss est grand, même si ce n'est pas de lui l'idée.

Je vous le refais ?

On crée le domino et on combine

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \\ L_4 - L_1 \end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ L_3 + L_2 \\ L_4 - L_2 \end{array}$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ L_4 - 2.L_3 \end{array}$$
$$\rightarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_4 \\ L_3 - L_4 \\ \end{array}$$
$$\uparrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 7 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_3 \\ L_2 - 2.L_3 \\ \\ \end{array}$$
$$\uparrow$$

La matrice de droite est l'inverse cherché.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -23 & 16 & 13 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 15 & -10 & -8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -6 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

◁ 28 ▷

Montrez que $f \longmapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image.

Dans « endomorphisme », il y a « endomorph » et « isme ».
Mais surtout il y a « endo » et « morphisme ».
Morphisme, c'est « linéaire ».
En notant T notre transformation, il faut vérifier $T(\alpha.f + \beta.g) = \alpha.T - f) + \beta.T(g)$ pour tout quadruplet de fonctions et réels.
On a bien $(\alpha.f + \beta.g)'' + (\alpha.f + \beta.g)' = \alpha.(f'' + f') + \beta.(g'' + g')$.

Difficulté ?

> *La seule difficulté ici, si il y en a une,*
> *c'est de bien voir que ce qu'on appelle vecteurs, ce sont les fonctions.*
> *Et la linéarité, c'est pour $\alpha.f + \beta.g$, combinaison de vecteurs.*
> *Et pas $f(\alpha.x + \beta.y)$, qui n'aurait aucun rapport et serait d'ailleurs faux.*
> *Argument direct : la dérivation est linéaire.*
> *Et j'ai bien dit « dérivation » et pas « dérivée ».*

« Endo », c'est d'un espace vectoriel dans lui même.
Si f est une combinaison de $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$, son image $f'' + f'$ est elle aussi combinaison de $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.

Le réflexe est de poser $f = a.ch + b.sh + c.ch^2 + d.sh^2 + e.ch.sh$ et de dériver deux fois, regrouper et mettre sous la forme

$$\begin{array}{llllll} a.(& ch & +sh) & & & \\ +b.(& sh & +ch) & & & \\ +c.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch & &) \\ +d.(& 2.ch^2 & +2.sh^2 & +2.sh.ch) & & \\ +e.(& 4.ch.sh & & & ch^2 & +sh^2) \end{array}$$

Mais c'est un réflexe qui manque de recul. Soyons matheux.
Si on prouve la propriété pour chacun des cinq vecteurs de la base, on aura le résultat général par linéarité. Et on aura moins de constantes inutiles comme a, b, c, d et e à trainer.
Et ordonnons un peu :

ch	a pour image	ch	$+sh$			
sh	a pour image	ch	$+sh$			
ch^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
sh^2	a pour image			$2.ch^2$	$+2.sh^2$	$+2.ch.sh$
$ch.sh$	a pour image			ch^2	$+sh^2$	$+4.ch.sh$

On peut d'ailleurs créer une matrice qui liste colonne par colonne l'image de chaque vecteur de base sur la base :

ch a pour image $ch+sh$ donc $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$	sh a pour image $ch+sh$ donc $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$
ch^2 a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$	sh^2 a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\2\\2\\2\end{pmatrix}$
$ch.sh$ a pour image … donc $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ a pour image $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\\4\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}$

On vérifie $\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&1\\0&0&2&2&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\\e\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b\\a+b\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+e\\2.c+2.d+4.e\end{pmatrix}$ Vous voyez le rapport avec l'approche « image d'une combinaison » ?
Sinon, c'est vrai qu'une application linéaire en dimension finie est toujours associée à une matrice.
Et comme on a un endomorphisme, la matrice est carrée.

Qui est l'ensemble image ? C'est toutes les images.
Certes, elles sont dans $Vect(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
Mais elles ont une forme particulière.
On aura beau faire, les images ont toujours les deux mêmes premières composantes (avec nos notations : $a+b$).

On n'a donc pas $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ mais on a juste $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$.

de même, les deux composantes suivantes sont aussi égales.

On a des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\beta\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

L'ensemble image est de dimension 3.

D'ailleurs, en toute rigueur, on part de la base canonique $(ch,\ sh,\ ch^2,\ sh^2,\ ch.sh)$.
L'image de cette base est une famille génératrice de l'ensemble image.

On a donc
$$Im(T) = Vect(T(ch),\ T(sh),\ T(ch^2),\ T(sh^2),\ T(ch.sh))$$
On remplace :
$$Im(T) = Vect(ch+sh,\ ch+sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ ch^2+sh^2+2.ch.sh)$$
On élimine les vecteurs inutiles :
$$Im(T) = Vect(ch+sh,\ 2.ch^2+2.sh^2+2.ch.sh,\ ch^2+sh^2+2.ch.sh)$$
On combine un peu mieux pour la lisibilité :
$$Im(T) = Vect(ch+sh,\ ch^2+sh^2,\ 2.ch.sh)$$
Ou si on préfère :
$$Im(T) = Vect((t \longmapsto e^t),\ (t \longmapsto ch(2.t)),\ t \longmapsto sh(2.t))$$

On a perdu deux dimensions dans l'image.
On va trouver un noyau de dimension 2.
Partant de $T(ch) = T(sh)$, on a aisément $T(ch - sh) = 0$ (linéarité).
On identifie : $ch - sh \in Ker(T)$.

De même $T(ch^2) = T(sh^2)$, donc $T(ch^2) - T - (sh^2) = 0$ puis $T(ch^2 - sh^2) = 0$.
$ch^2 - sh^2$ est dans le noyau. Normal, c'est $t \longmapsto -1$. Et cette application disparait par dérivation.

On a donc $Ker(T) = Vect(ch - sh,\ ch^2 - sh^2)$.
Et il n'est pas utile d'en chercher plus, sauf à vouloir contredire « $\dim(Ker(T)) + \dim(Im(T)) = \dim(depart)$ ».

◃29▹ ♡ La matrice A_n, de taille n, a pour terme général $Min(i+1,\ j+1)$ *(indexation pythonienne)*. Calculez son déterminant et inversez la par pivot de Gauss.
Même question avec $Max(i,\ j)$.

◃30▹ Calculez les déterminants des matrices $A.B.C$, B, C et A :
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \cos(2.\theta) & \sin(2.\theta) & 2.\cos(2.\theta) & 2.\sin(2.\theta) \\ \cos(3.\theta) & \sin(3.\theta) & 3.\cos(3.\theta) & 3.\sin(3.\theta) \\ \cos(4.\theta) & \sin(4.\theta) & 4.\cos(4.\theta) & 4.\sin(4.\theta) \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2.\theta & -\sin 2.\theta \\ 0 & 0 & \sin 2.\theta & \cos 2.\theta \end{pmatrix}$$
celle avec des 1 et des 0 a pour déterminant 0. Celle par blocs a pour déterminant 1. Le produit a pour déterminant 0.
La première a pour déterminant 0 (colonnes égales).
Mais à quoi sert cet exercice ?

◃31▹ Inversez par pivot de Gauss la matrice de terme général $Max(i,k) + 2.Min(i,k)$ *(indexation non pythonienne, de 1 à n)*.

◃32▹

Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode du pivot de Gauss.

$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$
	$L2 = L2 - 2.L1$ $L3 = L3 - 2.L1$	$L3 = L3 - L2$
$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$	$\left[\begin{array}{ccc\|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & -9 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$	$\begin{pmatrix} 5 & -9 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
$L1 = L1 + L3$ $L2 = L2 - 3.L3$	$L1 = L1 - 2.L2$	c'est elle

◁33▷ Résolvez par pivot de Gauss, et discutez :

$\begin{cases} x+2.y=1\\ 2.x+y=2\\ 3.x+4.y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1\\ 2.x-2.y+z=3\\ 2.x-y-z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1\\ 2.x+y=2\\ 3.x+4.y=3 \end{cases}$
a	b	c
$\begin{cases} x-2.y+z=1\\ -x+3.z=5\\ x-3.y+z=1\\ x+4.y-z=a \end{cases}$	$\begin{cases} a.x+b.y+z=1\\ x+a.b.y+z=b\\ x+b.y+a.z=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y+z+2.t+3.u=1\\ x+3.y+z+2.t=1\\ y-3.u=-1 \end{cases}$
d	e	f
$\begin{cases} x+y-z=a\\ x-y=b\\ x+4.y+z=c \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+z=\lambda.x\\ 2.x-5.y+4.z=\lambda.y\\ 2.x-7.y+6.z=\lambda.z \end{cases}$	$\begin{cases} x+y+z+t=1\\ x+2.y+2.z+2.t=3\\ x+2.y+3.z+3.t=5\\ x+2.y+3.z+4.t=9 \end{cases}$
g	h	i

$\begin{cases} x+2.y=1\\ 2.x+y=2\\ 3.x+4.y=1 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1\\ 2.x-2.y+z=3\\ 2.x-y-z=0 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1\\ 2.x+y=2\\ 3.x+4.y=3 \end{cases}$
$\begin{cases} x+2.y=1\\ -3.y=0\\ -2.y=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x-y+3.z=1\\ -5.z=1\\ y-7.z=-2 \end{cases}$	$\begin{cases} x+2.y=1\\ -3.y=0\\ -2.y=0 \end{cases}$
$S_{(x,y)}=\emptyset$	$\begin{cases} x-y=8/5\\ y=-17/5\\ z=-1/5 \end{cases}$	$\begin{cases} x=1\\ y=0\\ y=0 \end{cases}$
	$\begin{cases} x=-9/5\\ y=-17/5\\ z=-1/5 \end{cases}$	$S_{(x,y)}=\{(1,0)\}$
	$S_{(x,y,z)}=\left\{\left(\frac{-9}{5},\frac{-17}{5},\frac{-1}{5}\right]\right\}$	

◁34▷ Montrez : $\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}}+\sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}}\leqslant 5,5.$

Le physicien dira : je calcule avec la calculatrice.
Le matheux dira : je vais prouver

$$\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}}+\sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}}\leqslant\frac{11}{2}$$

pour n'avoir que des entiers dans l'écriture.
On note

$$\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}}=\sqrt{2.\sqrt{6}}=2^{1/2}.6^{1/4}=\sqrt[4]{2.2.2.6}$$

On note aussi

$$\sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}}=2.\sqrt[4]{3.\sqrt{2}}=2.\sqrt[8]{3^2.2}=2.\sqrt[8]{3.3.2.1.1.1.1.1}$$

Pourquoi faire tout ça ? Parce qu'on connaît la comparaison des moyennes :

$$\sqrt{a.b}\leqslant\frac{a+b}{2},\ \sqrt[4]{a.b.c.d}\leqslant\frac{a+b+c+d}{4},\ \sqrt[8]{a_1.a_2\dots a_8}\leqslant\frac{a_1+a_2+\ldots+a_8}{8}$$

(on a la première de multiples façons dans le cours, et on emboite la première dans elle même pour avoir les autres).
On a donc

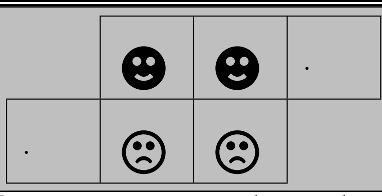
$$\sqrt{2.\sqrt{3.\sqrt{4}}}=\sqrt[4]{2.2.2.6}\leqslant\frac{2+2+2+6}{4}=3$$

$$\sqrt{4.\sqrt{3.\sqrt{2}}}=2.\sqrt[8]{3.3.2.1.1.1.1.1}\leqslant 2.\frac{3+3+2+1+1+1+1+1}{8}=\frac{13}{4}$$

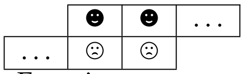
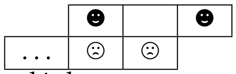
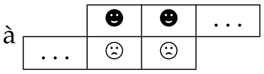
Voilà, c'est fini, c'est super joli...
et ça ne serrt à rien ajoute le physicienqui repose sa calculatrice.
Et le même physicien ira à un concert, ou dans un musée ou face à un coucher de soleil et il dira c'est beau.

Mais il lui manquera une partie du sens de la beauté pour trouver jolie cette démonstration.

◁ 35 ▷



Chaque jeton peut se déplacer d'une case horizontalement ou verticalement. Deux jetons ne peuvent pas occuper la même case. Trois non plus. Il faut échanger les les noirs et les blancs. Pour quelles valeurs de n existe-t-il une solution en n déplacements ?

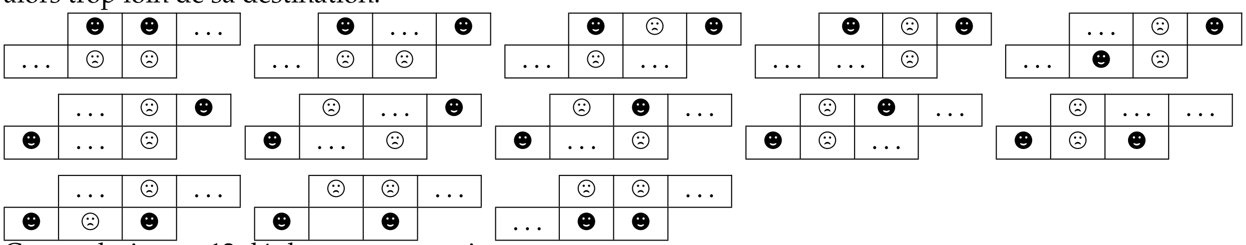
Comme quatre pions doivent bouger, le nombre de déplacements est forcément au moins égal à 4.
Si on a une solution en n mouvements, alors on a une solution en $n+2$ mouvements.
En effet, il suffit de faire faire un aller retour à un pion avant de commencer
 puis  puis retour à  et là on y va.
. Et ceci compte pour deux déplacements.
Si on trouve une solution en N coups, alors tous les entiers de la forme $N+2.p$ sont aussi solutions.
On notera que si on trouve deux solutions de parité différente, alors on aura tous les entiers à partir d'un certain rang.
Mais les solutions ont forcément un nombre pair de déplacements.

En effet, si on numérote les cases ainsi :

	0	1	0
0	1	0	

- au départ, les deux cases libres ont pour total 0
- à la fin, les deux cases libres ont pour même total 0
- à chaque déplacement, on libère une case d'une parité, et on comble une case de la parité opposée (un pion de case 1 va sur une case 0, ou alors un pion de case 0 va sur une case 1).
- il s'ensuit que si on a déplace $2.p+1$ pions, la somme des deux cases libres est impaire, on ne peut pas avoir gagné.

On élimine donc tous les entiers impairs, ainsi que 0, 2 et 4. sauf à être daltonien et affirmer : c'est bon pour $n=0$.
On montre qu'en six coups, ce n'est pas possible : un pion doit quitter une place pour aller dans un coin, et il est alors trop loin de sa destination.



Cette solution en 12 déplacements convient.
Tous les entiers pairs plus grands que 12 conviennent.
Reste à trouver un argument pour éliminer 8 et 10.

◁ 36 ▷ On suppose $x_n = a_n + b_n$. Montrer $(x_n \sim a_n) \Leftrightarrow (b_n = o(a_n))$.

$$\begin{array}{lll} & \text{entre} & \dfrac{a_n+b_n}{a_n} \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers l'infini} \\ \text{Il y a équivalence} & \text{et} & 1+\dfrac{b_n}{a_n} \text{ tend vers 1 quand } n \text{ tend vers l'infini} \\ & \text{et} & \dfrac{b_n}{a_n} \text{ tend vers 0 quand } n \text{ tend vers l'infini} \end{array}$$

◁ 37 ▷ ♡ On donne : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + \dfrac{4}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$. Donnez le développement de $u_{n+1} - u_n$ sous la forme $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n^2} + \dfrac{c}{n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)_{n\to+\infty}$.
Même question avec $2.u_{2.n} - u_n$.

On a $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{3}{n^3} + \dfrac{4}{n^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$ mais aussi $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{2}{(n+1)^2} + \dfrac{3}{(n+1)^3} + \dfrac{4}{(n+1)^4} + o\left(\dfrac{1}{n^4}\right)_{n\to+\infty}$.

Oui, $\alpha_n = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\alpha_n = o\left(\frac{1}{n+1}\right)$ c'est pareil, il suffit de revenir à la définition.

On a donc

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+1}+\frac{2}{(n+1)^2}+\frac{3}{(n+1)^3}+\frac{4}{(n+1)^4}+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)_{n\to+\infty}-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}-\frac{4}{n^4}$$

Inutile de cumuler les petits o. Mais sinon, on n'écrit quand même pas $o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)_{n\to+\infty}-o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)_{n\to+\infty}=0$.
Ce n'est pas forcément « le même petit o ».

On regroupe

$$u_{n+1}-u_n=\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\Big)+2.\Big(\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{(n)^2}\Big)+3.\Big(\frac{1}{(n+1)^3}-\frac{1}{(n)^3}\Big)+4.\Big(\frac{1}{(n+1)^4}-\frac{1}{(n)^4}\Big)+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

Quitte à regrouper :

$$u_{n+1}-u_n=\Big(\frac{-1}{n.(n+1)}\Big)-2.\Big(\frac{2.n+1}{n^2.(n+1)^2}\Big)-3.\Big(\frac{3.n^2+3.n+1}{n^3.(n+1)^3}\Big)-4.\Big(\frac{4.n^3+6.n^2+4.n+1}{(n+1)^4}\Big)+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

Le premier est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ et les suivants sont des $o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

On a déjà $u_{n+1}-u_n\sim\frac{-1}{n^2}$

On soustrait :

$$u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n^2}=\Big(\frac{-1}{n.^2(n+1)}\Big)-2.\Big(\frac{2.n+1}{n^2.(n+1)^2}\Big)-3.\Big(\frac{3.n^2+3.n+1}{n^3.(n+1)^3}\Big)-4.\Big(\frac{4.n^3+6.n^2+4.n+1}{(n+1)^4}\Big)+o\Big(\frac{1}{n^4}\Big)$$

On a cette fois $u_{n+1}-u_n-\frac{1}{n^2}\sim\frac{-3}{n^2}$ (les deux premiers termes sont en $\frac{1}{n^3}$avec coefficients -2 et -1)
d'où $u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$.

On peut recommencer encore une fois :

$$u_{n+1}-u_n=-\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^2}-\frac{4}{n^4}o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

Remarque : on demandait un terme en $\frac{a}{n}$, il est nul.

Avec la même méthode :

$$2.u_{2.n}-u_n=-\frac{1}{n^2}-\frac{9}{4.n^3}-\frac{7}{2.n^4}o\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$$

◃38▹ On pose $P_1=X^3+2.X^2+3.X$, $P_2=X^2+X+2$, $P_3=X^3+X-1$, $P_4=X^3+4.X^2+5.X+4$.
Montrez que $(P_1,\ P_2)$ est libre, de même que $(P_3,\ P_4)$. La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est elle libre ?

Quand il n'y a que deux vecteurs dans une famille, elle est libre si et seulement si ils sont non proportionnels.
C'est bien le cas pour $(X^3+2.X^2+3.X,\ X^2+X+2)$,
De même pour $(X^3+X-1,\ X^3+4.X^2+5.X+4)$.

Mais pour la famille de quatre, on n'en sait rien.
Mais on a de la chance. Ce sont quatre vecteurs dans l'espace vectoriel $Vect(X^3,X^2,X,1)$ de dimension 4.
On va donc écrire un déterminant et le calculer

$$\begin{vmatrix}1&0&1&1\\2&1&0&4\\3&1&1&5\\0&2&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\2&1&-2&2\\3&1&-2&2\\0&2&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&2\\1&-2&2\\2&-1&4\end{vmatrix}=0$$

on a détecté deux lignes égales !
La famille $(P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4)$ est liée.

On peut même écrire $P_4=P_1+2.P_2$, ce qui montre bien que cette famille est liée.

◁ 39 ▷

On se place dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$. Montrez qu'il y a $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.

♣ 0 ♣ Montrez qu'il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2)$ familles libres de trois vecteur. Combien y-a-t-il de familles liées de deux vecteurs ?

♣ 1 ♣ Combien y a-t-il de familles génératrices de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de trois vecteurs ?

♣ 2 ♣ Combien y a-t-il de familles libres de $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de deux vecteurs ?

♣ 3 ♣ Montrez pour $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ libre :

$$Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) \Leftrightarrow (\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ \overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2}\ et\ \alpha.\delta \neq \beta.\gamma)$$

♣ 4 ♣ Déduisez qu'il y a $\dfrac{(7^4-1).(7^4-7)}{(7^2-1).(7^2-7)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{/7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

Dans $(\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}}, +, .)$ il y a 7^4 vecteurs et un seul est nul.
Il y a donc une famille liée de un vecteur, et $7^4 - 1$ familles libres de un vecteur.

On cherche les familles libres de deux vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.
Le premier doit être non nul : $7^4 - 1$ choix pour $\overrightarrow{a}$.
Le second doit juste ne pas être colinéaire au premier $\overrightarrow{b} \neq \lambda.\overrightarrow{a}$.
Combien de multiples de $\overrightarrow{a}$? Un par choix de λ. Et λ peut valoir 1, 2, 3, 4, 5, 6 ou même 0 ($\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ que l'on va donc refuser aussi).
On a donc $(7^4-1).(7^4-7)$ familles libres de deux vecteurs.

Et pour trois vecteurs $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$?
On choisit $\overrightarrow{a}$ comme on veut, mais non nul : $7^4 - 1$ chois.
On choisit $\overrightarrow{b}$ non colinéaire à $\overrightarrow{a}$: $7^4 - 7$ choix.
Reste à choisir $\overrightarrow{c}$. On doit refuser tous les $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ (les vecteurs coplanaires à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$).
On a 7^2 choix de couple (α, β), donc 7^2 vecteur dans $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, et $7^4 - 7^2$ vecteurs dans $E - Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.
On a donc cette fois $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2)$ familles libres de trois vecteurs.

Je vous laisse démontrer qu'il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2).(7^4-7^3)$ familles libres de quatre vecteurs (des bases).
Enfin, de manière purement logique, il y a $(7^4-1).(7^4-7).(7^4-7^2).(7^4-7^3).(7^4-7^4)$ familles libres de cinq vecteurs.
Et ça fait bien 0.

Comme il a $(7^4)^3$ familles de trois vecteurs, il y a $7^{12} - (7^4-1).(7^2-7).(7^4-7^2)$ familles liées de trois vecteurs.

Il n'y a pas de famille génératrice de $((\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$ formées de trois vecteurs.

La question est maintenant : combien de familles engendrent le même plan ?
On prend deux vecteurs $\overrightarrow{a_1}$ et $\overrightarrow{a_2}$ formant une famille libre. ils engendrent un plan.

Passons à un sens d'implication.

Supposons $Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}) = Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})$.
Les vecteurs $\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ sont dans $Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.
Ils s'écrivent donc sous la forme $\overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2}$ et $\overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2}$.
On tient une partie de la réponse. Mais pourquoi $\alpha.\delta \neq \beta.\gamma$?
Si tel n'était pas le cas, $\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ auraient un déterminant nul sur la base $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.
Ils seraient colinéaires et n'engendreraient qu'une droite.
On aurait donc bien $Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) \subset Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$ mais pas $Vect(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}) = Vect(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2})$.

Passons à l'autre sens.

Supposons $(\exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta),\ \overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2}\ et\ \alpha.\delta \neq \beta.\gamma)$. Déjà,

$$\overrightarrow{b_1} = \alpha.\overrightarrow{a_1} + \beta.\overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{b_2} = \gamma.\overrightarrow{a_1} + \delta.\overrightarrow{a_2}$$

$\overrightarrow{b_1}$ et $\overrightarrow{b_2}$ sont dans $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.
Par transitivité (ou par combinaison) : $Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2}) \subset Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2})$.

Mais la non nullité de $\alpha.\delta - \beta.\gamma$ permet de renverser :

$$\overrightarrow{a_2} = \frac{\delta.\overrightarrow{b_1} - \beta.\overrightarrow{b_2}}{\alpha.\delta - \beta.\gamma},\ \overrightarrow{a_2} = \frac{-\gamma.\overrightarrow{b_1} + \alpha.\overrightarrow{b_2}}{\alpha.\delta - \beta.\gamma}$$

(résolution de système 2 sur 2).
On a donc l'autre inclusion $Vect(\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2}) \subset Vect(\overrightarrow{b_1},\ \overrightarrow{b_2})$.

On tient notre réponse finale.
On a $(7^4 - 7^0).(7^4 - 7^1)$ familles libres de deux vecteurs.
Pour chaque quadruplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ vérifiant $\alpha.\delta \neq \beta.\gamma$ on a le même plan.
Il faut donc diviser $(7^4 - 7^0).(7^4 - 7^1)$ par le nombre de matrices 2 sur 2 inversibles.
Une telle matrice est faite d'un premier vecteur colonne non nul : $7^2 - 1$ choix,
et d'un second vecteur non colinéaire au premier : $7^2 - 7$ choix.
On a donc bien $\dfrac{(7^4 - 7^0).(7^4 - 7^1)}{(7^2 - 7^0).(7^2 - 7^1)}$ plans dans $((\mathbb{Z}_{7.\mathbb{Z}})^4, +, .)$.

◁40▷

> L'élève affirme : a divise c et b divise c, donc $a.b$ divise c.
> Montrez que c'est faux, mais montrez que c'est vrai si on ajoute l'hypothèse « a et b sont premiers entre eux ».

Contre-exemple le plus simple : $a = b = c = 2$. On a bien $2|2$ et $2|2$ mais on n'a pas $(2 \times 2)|2$.

◁41▷

> On pose $f = x \longmapsto \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Calculez $f\Big(\dfrac{1}{1997}\Big) + f\Big(\dfrac{2}{1997}\Big) + f\Big(\dfrac{3}{1997}\Big) + \dots f\Big(\dfrac{1996}{1997}\Big)$ en regroupant les termes deux à deux judicieusement.

La clef :

$$f(1-x) + f(x) = \frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{4}{4+2.4^x} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{2}{2+4^x} + \frac{4^x}{4^x+2} = \frac{2+4^x}{2+4^x} = 1$$

Notre somme, faite de 1996 termes s'écrit $\sum_{k=1}^{1996} f\Big(\dfrac{k}{1997}\Big)$ et se renverse en $\sum_{p=1}^{1997} f\Big(\dfrac{1997-p}{1997}\Big)$.

On la demi somme

$$\sum_{k=1}^{1996} f\Big(\frac{k}{1997}\Big) = \frac{\sum_{k=1}^{1996} f\Big(\frac{k}{1997}\Big) + \sum_{k=1}^{1996} f\Big(1 - \frac{k}{1997}\Big)}{2} = \frac{\sum_{k=1}^{1996} 1}{2} = \frac{1996}{2} = 998$$

◁42▷

> On définit : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$. Montrez que 2 est valeur propre de A. Montrez que 3 est valeur propre de A.
> Donnez une base du plan d'équations $\left\{ \begin{array}{cccc|} x & +2.y & -t & = 0 \\ & y \quad +2.z & -t & = 0 \end{array} \right.$ et montrez que ce plan est stable par A.
> Donnez une base d'un autre plan, stable par A. Combien de plans stables par A pouvez vous trouver ?

Il suffit de trouver des vecteurs propres en résolvant $M.U = 2.U$ soit encore $(M - 2.I_4).U = 0_4$:
Mais en fait, c'est évident :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour 3, c'est plus délicat :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

il a fallu résoudre $\begin{array}{ccccc} 2.x & & -4.z & +t & = & 3.x \\ & -y & -4.z & 2.z & = & 3.y \\ & & z & & = & 3.z \\ & -4.y & -8.z & 5.t & = & 3.t \end{array}$ donnant $z = 0$ et $\begin{array}{cccccc} 2.x & & +t & = & 3.x \\ & -y & 2.z & = & 3.y \\ & -4.y & 5.t & = & 3.t \end{array}$
x et t sont égaux, on reporte, et le système dégénère en imposant juste $x = 2.y = t$.

Deux équations dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$, c'est un plan.
Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} 4.z - t \\ t - 2.z \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
On sépare en $z.\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t.\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On tient une base. Et d'ailleurs, sans se fatiguer, on pouvait dire aussi : « dimension 2, donc il suffit de piocher dans ce plan deux vecteurs linéairement indépendants, et on aura une base ». Il suffit de savoir être flemmard en algèbre linéaire.

Plutôt que de montrer que l'image de toute vecteur du plan est dans le plan, il suffit de le montrer pour une base du plan. Ça fait moins de variables à trainer.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bon, là c'est clair

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

encore un qui fait le coup du vecteur propre ! c'est facile.

En fait, le plan P est le sous-espace propre de valeur propre 1. Tous ses vecteurs vérifient $M.U = U$.

Le plan $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix})$ est stable par A puisque pour tout vecteur de la forme $\alpha.E_2 + \beta.E_3$ (vous comprenez la notation), on a $A.(\alpha.E_2 + \beta.E_3) = (2.\alpha).E_2 + (3.\beta).E_3$. Il est resté dans le plan.
Remarque : | Le plan est facile à trouver sous sa description $Vect(E_2, E_3)$.

On veut des plans stables. Il suffit de prendre $Vect(E_2, E_1)$ où E_1 est un vecteur propre de valeur propre 1. Et il y en a une infinité avec des directions toutes différentes, vivant dans le plan P.

◃43▹ Montrez que si f est une application continue strictement positive de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.dt$ vaut $1/2$.

Qu'est on tenté de faire quand on voit t et $1 - t$? Surtout quand t va de 0 à 1 ? De renverser en posant $u = 1 - t$ (comme on pose $i = n - k$ dans une somme comme $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k}.b_k$).
On a alors $\int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.dt = \int_{u=1}^{u=0} \frac{f(1-u)}{f(1-u) + f(u)}.(-du)$.
On renverse par relation de Chasles, et on nomme I notre intégrale :
$I = \int_0^1 \frac{f(t)}{f(t) + f(1-t)}.dt = \int_0^1 \frac{f(u)}{f(u) + f(1-u)}.du$.
La variable étant muette, on peut sommer les deux par linéarité :

2.$I=\int_0^1 \frac{f(x)+f(1-x)}{f(x)+f(1-x)}.dx=1$ et l'exercice est fini.

◁44▷

On note (E) l'équation $x+1+\frac{1}{x}=0$, dont une racine sera notée x justement.
On multiplie par x^2 : $x^3+x^2+x=0$.
On factorise : $x^3+x.(x+1)=0$.
On remplace $x+1$ par $\frac{-1}{x}$: $x^3+x.\frac{1}{x}=0$.
On trouve $x^3=-1$ qu'on résout : $x=-1$.
On reporte dans l'équation (E) : $1+1+1=0$. Problème ?

Bon, on est dans quel ensemble ?
Si on est dans $\mathbb{R}$ ce n'est pas un problème.
L'équation initiale n'a pas de racine. On peut déduire ce qu'on veut alors, sur le modèle « Faux implique Faux ».
On peut dire aussi qu'on a montré « si il y a une racine réelle, ce ne peut être que -1, mais à cause des conditions nécessaires, il faut reporter, et on constante que -1 n'est pas racine ».

Si on est sur $\mathbb{C}$,le passage $x^3=-1 \Rightarrow x=-1$ est faux.
On a juste $x^3=-1 \Leftarrow x=-1$. Mais sinon, il y a aussi les deux racines de $x^2+x+\frac{1}{x}$, comme par hasard...

◁45▷

Y a-t-il plus de parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments que de parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments ?

parties à 11 éléments dans un ensemble à 33 éléments	$\binom{33}{11}$	$\frac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}$
parties à 15 éléments dans un ensemble à 30 éléments	$\binom{30}{15}$	$\frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}$

Sans calculatrice, on fait quoi ? On fait des maths.

On calcule le quotient de ces deux entiers, pour le comparer à 1 :

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{\frac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11}}{\frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23}{\frac{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}{12.13.14.15}}$$

$$\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{(33.32.31.30.29.28.27.26.25.24.23).(12.13.14.15)}{30.29.28.27.26.25.24.23.22.21.20.19.18.17.16}$$

On note la cohérence au passage : 15 termes en haut, 15 termes en bas.

On simplifie les éléments communs : $\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{33.32.31.12.13.14.15}{22.21.20.19.18.17.16}$.

On simplifie par 11, 6, 7 : $\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{3.32.31.2.13.2.15}{2.3.20.19.3.17.16}$

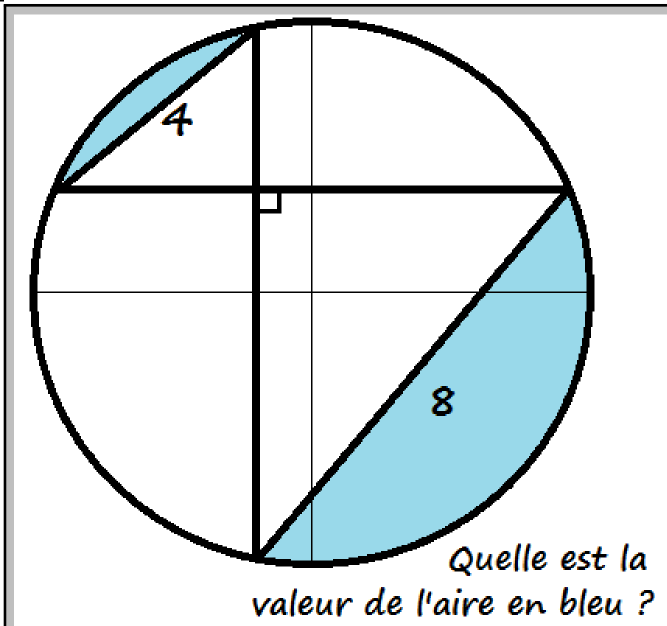
On simplifie par 5 et 16 : $\frac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}}=\frac{3.2.31.2.13.2.3}{2.3.4.19.3.17.1}$.

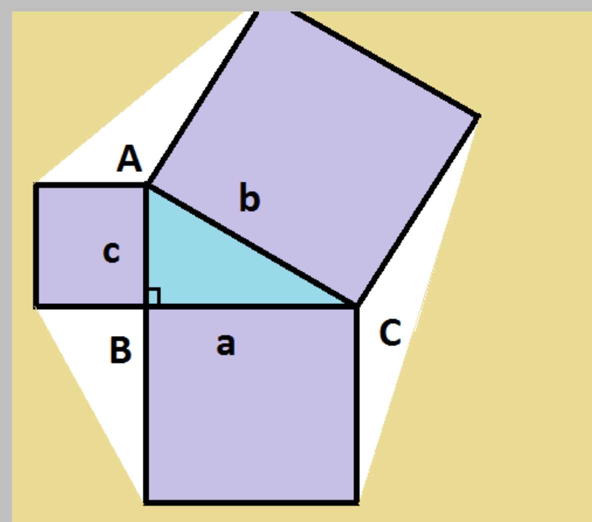
Allez, pour finir : $\dfrac{\binom{33}{11}}{\binom{30}{15}} = \dfrac{13.31}{17.19} = \dfrac{403}{323}$.

On a donc $\binom{33}{11} > \binom{30}{15}$ (c'est même 193536720 face à 155117520).

Le chemin pour arriver à la réponse est mille fois plus beau que la réponse elle même...
Sauf si on utilise une calculatrice. Mais quel est alors l'intérêt de faire des maths ? Autant faire tout de suite de la physique !

◃46▹





Le concours Kangourou propose l'exercice suivant : $(A,\ B,\ C)$ est un triangle rectangle en B *(côtés a, b etc, hypoténuse b)*. On construit des carrés sur les côtés.On obtient ainsi une figure qu'on complète en hexagone. Montrez que l'aire de l'hexagone est $2.a.c + 2.(a^2 + c^2)$.

On a évidemment des pièces faciles à déterminer.

Le triangle $(A,\ B,\ C)$ d'aire $a.c/2$. Son symétrique par rapport à B de même aire $a.c/2$. Ou alors, on colle les deux triangles rectangles et on récupère un rectangle de côtés a et c.	Les deux « petits » carrés d'aires a^2 et c^2.	Le grand carré d'aire b^2. mais par théorème de Pythagore, il a pour aire $a^2 + c^2$.	Il reste deux triangles basés sur le grand carré. Prenons celui en C pour des raisons de symétrie des rôles. Il a pour côtés a et c *(et l'autre est plus lourd à déterminer)*.

L'aire d'un triangle est le produit des deux côtés fois le sinus de l'angle, divisé par 2. C'est la formule base fois hauteur divisé par 2.

Il faut donc déterminer le sinus de l'angle obtus en C. Par complémentarité, on le mesure en faisant un tour autour de C : $\gamma + \dfrac{\pi}{2} + inconnu + \dfrac{\pi}{2} = 2.\pi$.

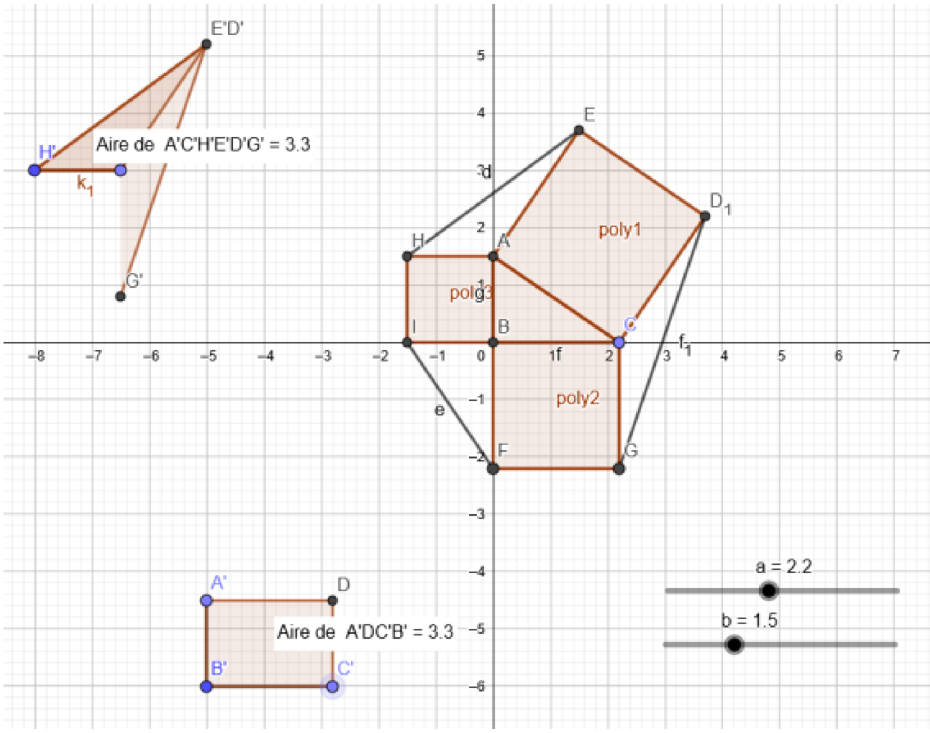
L'angle obtus en C vaut $\pi - \gamma$. Son sinus vaut donc $\sin(\pi - \gamma)$ c'est à dire $\sin(\gamma)$. Dans le triangle rectangle en B, on a $\sin(\gamma) = \dfrac{oppose}{hypothenuse} = \dfrac{c}{b}$.

L'aire du triangle marqué en C est donc $a.b.\dfrac{c}{b}.\dfrac{1}{2}$. On trouve $\dfrac{a.c}{2}$.

Il en va de même pour l'autre triangle.[5]

L'aire totale est donc $\boxed{2.a.c + 2.(a^2 + c^2)}$

5. on peut le prouver d'autres façons, en déformant le triangle initial



Plus un cadeau de Tristan : (MPSI2 du premier confinement, passé en MP à Decour, entré à l'ESILV (Léonard de Vinci / la Défese) et maintenant informaticien fou

.

.

.

.