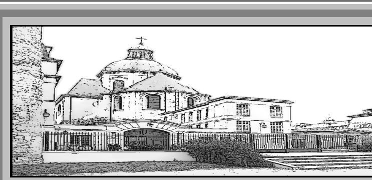
LYCEE CHARLEMAGNE

Mercredi mai

M.P.S.I.2



2024 2025

IS26

♡ 0 ♡ Vrai ou faux : toute partie bornée de $\mathbb{Z}$ a un plus petit et un plus grand élément. 1 pt.

♡ 1 ♡ Justifiez $\displaystyle\sum_{k=0}^{2025} \cos\left(\frac{k.\pi}{15}\right) = 0$. 2 pt.

♡ 2 ♡ Calculez $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3.dt}{(t^2+1).(t^2+4)}$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{3.dt}{(t+1).(t+4)}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3.dt}{(|t|+1).(|t|+4)}$. 4 pt.

♡ 3 ♡ On note Δ_n le déterminant de la matrice de taille n construite sur ce principe $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrez $\Delta_{n+1} = \Delta_n + 6.\Delta_{n-1}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$.
Déduisez la forme explicite de Δ_n comme combinaison de deux suites géométriques à que vous préciserez. 4 pt.

♢ 0 ♢ Inversez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ en commençant par calculer leur carré et leur puissance quatrième. Généralisez. 5 pt.

♢ 1 ♢ Prouvez $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a & a & b & c & d \\ a & a & a & b & c \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & a \end{vmatrix} = a.(a-b)^4$. Généralisez en dimension n en donnant le terme général de la matrice, le résultat et la démonstration. 4 pt.

Use each number once
1 2 3 4 5 6 7 8 9

9	+		-	6	=		-	3
-		=		-		=		×
4	+		×	5	-		=	6
÷		+		+		-		-
8	-	5	=		-		×	2
×		-		-		-		×
	+	1	+	7	-	4	=	8
=		-		=		+		=
7	=		×	3	-		-	2

♉$_0$ Montrez 3 pt.

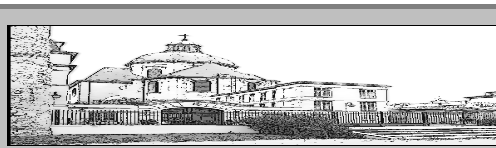
$$\begin{vmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{vmatrix} = \big((a-b).(a-c).(b-c)\big)^2$$

♉$_1$ Écrivez un programme qui prend en entrée une liste L de réels strictement positifs et retourne la matrice de terme général $\dfrac{\prod_{j=0}^{n-1} L[j]}{L[i]*L[k]}$. 2 pt.

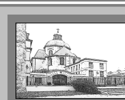
♉$_2$ Écrivez la matrice obtenue quand la liste est de taille 4 et montrez que son déterminant est nul. 2 pt.

♉$_3$ Complétez le tableau ci-contre. 2 pt.

♉$_4$ $\left\{\begin{array}{llllll} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 \end{array}\right|$ (a, b et c sont distincts). Trouvez x. 3 pt.

LYCEE CHARLEMAGNE Mercredi mai M.P.S.I.2		2024 2025 IS26 CORRECTION

IS26 Questions de cours.



Une partie bornée de $\mathbb{Z}$ n'a qu'un nombre fini d'éléments.
Comme l'ordre est total, l'un est le plus petit, et un autre (pas forcément) est le plus grand.

Sauf que la partie peut être vide. Et dans ce cas, ni plus petit, ni plus grand élément.

Pour calculer $\sum_{k=0}^{2025}\cos\left(\frac{k.\pi}{2025}\right)$, celui qui connaît son cours répond tout de suite $\dfrac{\sin\left(\frac{2.2025+1}{2}.\frac{\pi}{15}\right)}{2.\sin\left(\frac{\pi}{30}\right)}+\frac{1}{2}$.

Celui qui a des bases solides dit « partie réelle de $\sum_{k=0}^{2025}e^{i.k.\pi/15}$ » et trouve $\Re e\left(\dfrac{1-e^{i.\frac{2026.\pi}{15}}}{1-e^{i.\frac{2026.\pi}{15}}}\right)$.

Celui qui se doute qu'il doit se passer quelquechose regroupe par paquets de 30. Chaque paquet a une somme nulle.

L'application sous le signe somme est continue donc intégrable sur tout segment (« localement intégrable »). On décompose en éléments simples $\dfrac{3}{(t^2+1).(t^2+4)}=\dfrac{1}{t^2+1}-\dfrac{1}{t^2+4}$ et on intègre donc entre a et b (sur un segment, on peut séparer)

$$\int_a^b\frac{3.dt}{(t^2+1).(t^2+4)}=\int_a^b\frac{dt}{t^2+1}-\int_a^b\frac{dt}{t^2+4}=\Big[Arctan(x)\Big]_a^b-\frac{1}{2}.\int_a^b\frac{dt/2}{(t/2)^2+1}=\Big[Arctan(x)-\frac{Arctan(t/2)}{2}\Big]_a^b$$

A l'infini, $Arctan(b)$ et $Arctan(b/2)$ tendent vers $\dfrac{\pi}{2}$, et de l'autre côté $Arctan(a)$ et $Arctan(a/2)$ tendent vers $-\pi/2$.

Tous calculs faits $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{3.dt}{(t^2+1).(t^2+4)}=\dfrac{\pi}{2}}$

On fait de même, avec une borne nulle et l'autre destinée à tendre vers l'infini

$$\int_0^b\frac{3.dt}{(t+1).(t+4)}=\int_0^b\frac{dt}{t+1}-\int_0^b\frac{dt}{t+4}=\Big[\ln(t+1)-\ln(t+4)\Big]_0^b=\ln\left(\frac{b+1}{b+4}\right)+\ln(4)$$

Quand b tend vers $+\infty$, le quotient $\dfrac{b+1}{b+4}$ tend vers 1 et son logarithme tend vers 0 : $\boxed{\int_0^{+\infty}\dfrac{3.dt}{(t+1).(t+4)}=\ln(4)}$

Enfin, par parité

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{3.dt}{(|t|+1).(|t|+4)}=\int_{-\infty}^{0}\frac{3.dt}{(-t+1).(-t+4)}+\int_0^{+\infty}\frac{3.dt}{(t+1).(t+4)}=\int_0^{+\infty}\frac{3.du}{(u+1).(u+4)}+\ln(4)=2.\ln(4)$$

IS26 Déterminant de taille n.

On développe $\begin{vmatrix}1&-3&0&\dots&0\\2&1&-3&&0\\0&2&1&&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}$ (taille $n+1$) par rapport à sa première colonne.

On a un facteur 1 (signe plus) avec comme cofacteur Δ_n, puis un facteur 2 (signe moins) et un cofacteur qu'il va falloir développer par rapport à sa première colonne :

$$\begin{vmatrix}1&-3&0&0&\dots&0\\2&1&-3&0&\dots&0\\0&2&1&-3&\dots&0\\0&0&2&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}=1.\begin{vmatrix}1&-3&0&\dots&0\\2&1&-3&\dots&0\\0&2&1&&0\\\vdots&&&&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}-2.\begin{vmatrix}-3&0&0&\dots&0\\2&1&-3&\dots&0\\0&2&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\dots&1\end{vmatrix}=\Delta_n-2.(-3)\begin{vmatrix}1&-3&\dots&0\\2&1&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&1\end{vmatrix}$$

On a une suite récurrente linéaire d'ordre 2 : $\Delta_{n+1} = \Delta_n + 6.\Delta_{n-1}$.

On écrit l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 6$ de racines -2 et 3.
On sait qu'il existe deux réels à déterminer A et B vérifiant $\forall n,\ \Delta_n = A.(-2)^n + B.3^n$.

On détermine A et B par les condition initiales $\left\{\begin{array}{ccccccc} n=0 & : & A & + & B & = & 1 \\ n=1 & : & -2.A & + & 3.B & = & 1 \end{array}\right|$ (matrice vide et matrice de taille 1).

Avec $A = \dfrac{2}{5}$ et $B = \dfrac{3}{5}$: $\boxed{\Delta_n = \dfrac{2.(-2)^n + 3.3^n}{5}}$

IS26 Inversion de matrices.

On constate $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$,

puis $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$

On inverse (proposer, vérifier) : $(V_n)^4 = n^2.V_n$ et $(V_n)^{-1} = \dfrac{1}{n^2}.(J_n)^3$.

On se donne n, on note ρ le complexe $e^{2.i.\pi/n}$, et on construit la matrice V_n de terme général $a_l^k = \rho^{l.k}$ (l'exposant est le produit) en indexation pythonienne.

On calcule le terme général de la matrice produit $V_n.V_n$

$$c_l^k = \sum_{j=0}^{n-1} a_l^j.a_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{l.j}.\rho^{l.k} = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{j.(l+k)}$$

On a une série géométrique de terme général ρ^{l+k}, dont la somme se calcule

$$\frac{1-(\rho^{l+k})^n}{1-\rho^{l+k}} = \frac{1-\rho^{(l+k).n}}{1-\rho^{l+k}} = \frac{1-(\rho^n)^{j+k}}{1-\rho^{l+k}} = \frac{1-(1)^{l+k}}{1-\rho^{l+k}} = 0$$

Tous les termes de la matrice produit sont nuls ?
Non car il faut toujours vérifier qu la raison de la série ne vaut pas 1 (vous voyez où ça sert dans la démonstration $(1-z).\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \ldots$?).
Et justement, la raison ρ^{l+k} vaut 1 lorsqu'on a $l+k=0$ ou même $l+k=0$ modulo n.
Il y a donc le cas $k=l=0$: $c_0^0 = n$ (car la somme est $c_0^0 = \sum_{j=0}^{n-1} a_0^j.a_j^0 = \sum_{j=0}^{n-1} 1.1 = n$).

Il y a aussi les cas $l = n-k$, l'espèce de « diagonale » remontante $\begin{pmatrix} n & & & & \\ & & & & n \\ & & & n & \\ & & n & & \\ & n & & & \end{pmatrix}$.

Résumé : $c_l^k = \left\{\begin{array}{lll} 1 & si & (l+k)\%n = 0 \\ 0 & sinon & \end{array}\right|$.

Passons à la puissance quatrième : $(V_n)^4 = ((V_n)^2)^2$ qui a pour terme général

$$q_l^k = \sum_{j=0}^{n-1} c_l^j.c_j^k = \sum_{j=0}^{n-1} n.1_{(l+j)\%n=0}.n.1_{(j+k)\%n=0} = n^2.\sum_{j=0}^{n-1} 1_{(l+j)\%n=0}.1_{(j+k)\%n=0}$$

Que vaut ce nouveau terme général ? C'est une somme de termes qui valent $n\times n$, $n\times 0$ ou 0×0. On obtient au total un entier entre 0 et $n\times n^2$.
Mais peut on avoir des termes non nuls dans la somme ?
Et si oui combien ?
Pour un terme non nul, il faut avoir un indice j vérifiant $(l+j)\%n=0$ et $(j+k)\%n=0$ (les deux à la fois).

Il y a quatre cas a priori

	$l=j=0$	$j=n-l$
$j=k=0$	$j=k=l=0$	$j=n$ impossible
$j=n-k$	$k=n$ impossible	$l=k$ et $j=n-l$

Il y a le cas $l=j=k=0$. Et c'est alors la somme q_0^0 dans laquelle il y a un $n\times n$ et tous les autres termes nuls : $q_0^0=n^2$.
Il y a deux cas impossibles.
Et le dernier cas $l=k$ donne une seul terme non nul dans la somme.
En résumé $q_l^k=\left\{\begin{array}{ccc} n^2 & si & l=k=0 \\ n^2 & si & l=k \\ 0 & sinon & \end{array}\right|$. C'est la matrice $n^2.I_n$.

Si on regarde sur un exemple : $\begin{pmatrix} n &&&& \\ &&&& n \\ &&& n & \\ && n && \\ & n &&& \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} n &&&& \\ &&&& n \\ &&& n & \\ && n && \\ & n &&& \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n^2 &&&& \\ & n^2 &&& \\ && n^2 && \\ &&& n^2 & \\ &&&& n^2 \end{pmatrix}$

On aurait pu aussi envisager des produits par blocs avec une matrice Δ_{n-1} de carré I_n :

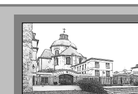
$$((J_n)^2)^2=\begin{pmatrix} 1 & (0_n)^T \\ 0_n & \Delta_{n-1}\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & (0_n)^T \\ 0_n & \Delta_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & (0_n)^T \\ 0_n & I_{n-1}\end{pmatrix}=I_n$$

On repart de $(V_n)^4=n^2.I_n$, on passe au déterminant $(\det(V_n))^4=(n^2)^n$. On en déduit $\det(V_n)=\sqrt{n}$ ou $\det(V_n)=i.\sqrt{n}$ ou $\det(V_n)=-\sqrt{n}$ ou $\det(V_n)=-i.\sqrt{n}$ (oui, on est dans $\mathbb{C}$).

Et la relation $V_n.\dfrac{V_n^3}{n^2}=I_n$ permet de dire $(V_n)^{-1}=\dfrac{(V_n)^3}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}.V_n.(V_n)^2=\dfrac{1}{n}.V_n.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \\ \vdots &&& \\ 0 & 1 & & 0\end{pmatrix}$

On doit donc non seulement diviser par n, mais aussi permuter les dernières colonnes.
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2\end{pmatrix}$,
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i\end{pmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{4}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}$

IS26 Un déterminant à généraliser.



$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ a & a & b & c & d \\ a & a & a & b & c \\ a & a & a & a & b \\ a & a & a & a & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & d & e-d \\ a & a & b & c & d-c \\ a & a & a & b & c-b \\ a & a & a & a & b-a \\ a & a & a & a & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & b & c & d-c & e-d \\ a & a & b & c-b & d-c \\ a & a & a & b-a & c-b \\ a & a & a & 0 & b-a \\ a & a & a & 0 & 0\end{vmatrix}=\ldots=\begin{vmatrix} a & b-a & c-b & d-c & e-d \\ a & 0 & b-a & c-b & d-c \\ a & 0 & 0 & b-a & c-b \\ a & 0 & 0 & 0 & b-a \\ a & 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la dernière ligne $(-1)^{1+5}.a.\begin{vmatrix} b-a & c-b & d-c & e-d \\ 0 & b-a & c-b & d-c \\ 0 & 0 & b-a & c-b \\ 0 & 0 & 0 & b-a\end{vmatrix}$ et la matrice obtenue est triangulaire d'où un déterminant $a.(b-a)^4$ (ou $a.(a-b)^4$ c'est pareil).

En taille n, on se donne une liste d'éléments λ_0 à λ_{n-1} et on prend la matrice de terme général $a_i^k = \left\{\begin{array}{lll} \lambda_0 & si & i \geqslant k \\ \lambda_{k-i} & sinon & \end{array}\right.$ (pour saisir $\begin{pmatrix} \lambda_{0-0} & \lambda_{1-0} & \lambda_{2-0} & \lambda_{3-0} \\ \lambda_0 & \lambda_{1-1} & \lambda_{2-1} & \lambda_{3-1} \\ \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_{2-2} & \lambda_{3-2} \\ \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_0 & \lambda_{3-3} \end{pmatrix}$). Plus astucieux même si c'est inutile $\boxed{a_i^k = \lambda_{Min(0,\, k-i)}}$

On effectue l'une après l'autre les opérations $C_{n-1} = C_{n-1} - C_{n-2}$, $C_{n-2} = C_{n-2} - C_{n-3}$ jusqu'à $C_1 = C_1 - C_0$ (on n'a pas touché à C_0).

Le terme général est alors $b_i^k = \left\{\begin{array}{lllr} \lambda_0 & si & k = 0 & premiere\ colonne \\ 0 & si & i > k \neq 0 & sous\ la\ diagonale \\ \lambda_{k-i} - \lambda_{k-i-1} & si & k \geqslant i & \end{array}\right.$ (cette fois $\begin{pmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 - \lambda_0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_0 & \lambda_2 - \lambda_1 \\ \lambda_0 & 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_0 \\ \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$).

On développe par rapport à la dernière ligne (un seul terme non nul) : coefficient $(-1)^{n-1}$, facteur λ_0 et cofacteur « une matrice de taille $n-1$, triangulaire supérieure de diagonale faite de $n-1$ termes égaux à $\lambda_2 - \lambda_1$.

Le déterminant vaut $(-1)^{n-1}.\lambda_0.(\lambda_0 - \lambda_1)^{n-1}$ et on écrit même $\boxed{\lambda_0.(\lambda_1 - \lambda_0)^{n-1}}$

IS26 Grille à compléter.

9	+	1	-	6	=	7	-	3
-		=		-		=		×
4	+	2_{4}	×	5	-	8_{5}	=	6
÷		+		+		-		-
8	-	5	=	9_{2}	-	3_{3}	×	2
×		-		-		-		×
4_{1}	+	1	+	7	-	4	=	8
=		-		=		+		=
7	=	5_{6}	×	3	-	6_{7}	-	2

On vérifie sur la colonne complète (la dernière) que les priorités des opérations sont bien appliquées.

On traite les cases dans l'ordre du chiffre dans le coin à droite de chaque cas.

1 : la colonne, mais aussi la ligne donnent 4.

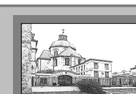
2 : la colonne donne 9.

3 : la ligne donne 3.

4 : que mettre devant le 5 : $4 + 1 \times 5$ donne 9, il faudrait soustraire 3 pour avoir 6, mais le 3 est déjà pris.
$4 + 2 \times 5$ donne 14, en soustrayant 8 c'est bon.
$4 + 3 \times 5$ donne 19, on ne peut pas redescendre à 6 et c'est pire encore avec les autres.
La seule solution est donc 2.
5 : C'est donc un 8 on vient de le voir.

Dernière ligne : $7 = (*) \times 3 - (\#) - 2$ avec $(\#)$ qui vaut au plus 7 et $(*)$ qui vaut au moins 5 (1 est disponible mais pas cohérent).
La seule solution est $7 = 5 \times 3 - 6 - 2$

IS26 Un déterminant.



On nous invite à montrer que la matrice de l'énoncé a pour déterminant le carré du déterminant de VanDerMonde.

Il suffit peut être de le retrouver caché dans cette matrice. Allez, je balance l'idée :

$$\begin{pmatrix} 3 & a+b+c & a^2+b^2+c^2 \\ a+b+c & a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 \\ a^2+b^2+c^2 & a^3+b^3+c^3 & a^4+b^4+c^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$$

Il n'y a plus qu'à passer au déterminant.

IS26 Construction Python.

Le mieux sera de calculer déjà le produit, puis de diviser à chaque fois par L[i] et L[k] (y compris pour i égal à k).

```
def matrice(L) :
....n = len(L)
....p = 1
....for terme in L :
........p *= terme
....M = [ ]
....for i in range(n) :
........L = [ ]
........for k in range(n) :
............L.append(p / (L[i]*L[k]))
........M.append(L)
....return M
```

```
def matrice(L) :
....n = len(L)
....p = 1
....for terme in L :
........p *= terme
....M = [[p for k in range(n)] for i in
range(n) ]
....for i in range(n) :
........for k in range(n) :
............M[i][k] /= L[i]*L[k]
....return M
```

Et il a d'autres idées encore. Et on précise les spécifications plus des commentaires.

En petite taille $\begin{pmatrix} \frac{L[1]}{L[0]} & 1 \\ 1 & \frac{L[0]}{L[1]} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{L[1].L[2]}{L[0]} & L[2] & L[1] \\ L[2] & \frac{L[0].L[2]}{L[1]} & L[0] \\ L[1] & L[0] & \frac{L[0].L[1]}{L[2]} \end{pmatrix}$ car quand i est égal à k, on doit diviser par un carré, ce qui non seulement efface un terme mais surcharge en le mettant en double au dénominateur.

Et avec des lettres latines plutôt que des index $\begin{pmatrix} \frac{b.c.d}{a} & c.d & b.d & b.c \\ c.d & \frac{a.c.d}{b} & a.d & a.c \\ b.d & a.d & \frac{a.b.d}{c} & a.b \\ b.c & a.c & a.d & \frac{a.b.c}{d} \end{pmatrix}$ en taille 4.

Pourquoi ce déterminant est nul ? Quelle relation existe entre toutes ces colonnes ?

Elles sont toutes colinéaires. Pensez à la colonne $\begin{pmatrix} b.c.d \\ a.c.d \\ a.b.d \\ a.b.c \end{pmatrix}$ et divisez la une fois par a, une fois par b, une fois par c et une fois par d.

Ou alors passez de la première colonne à la seconde en multipliant par $\frac{a}{b}$.

Bref, on pourra dire que la matrice est de rang 1, et de déterminant nul (sauf en format 1 sur &).

IS26 Cramer et VanDerMonde.

Le système $\begin{array}{ccccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 \end{array}$ s'écrit $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{pmatrix}$ et il est de Cramer, car son déterminant est un déterminant de VanDerMonde (non nul car a, b et c sont distincts).

Les formules de Cramer donnent $x = \dfrac{\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}} = \dfrac{\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix}}{(b-a).(c-a).(c-b)}$ et des formules similaires pour les

deux autres m(ais on ne nous les demande pas).
Reste à calculer le déterminant du numérateur par multilinéarité

$$\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = a.b.c. \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix}$$

puis antisymétrie

$$\begin{vmatrix} a^3 & a & a^2 \\ b^3 & b & b^2 \\ c^3 & c & c^2 \end{vmatrix} = a.b.c. \begin{vmatrix} a^2 & 1 & a \\ b^2 & 1 & b \\ c^2 & 1 & c \end{vmatrix} = -a.b.c. \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a \\ 1 & b^2 & b \\ 1 & c^2 & c \end{vmatrix} = +a.b.c. \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

Après ce retour du déterminant de VanDerMonde, l'inconnue x vaut $a.b.c$.

On peut déterminer les autres, moins sympathiques.

On peut proposer d'autres approches.
Le polynôme $x + y.X + z.X^2$ vaut a^3 en a, b^3 en b et c^3 en c, que vaut il en 0 (non pas 0^3).

On peut aussi résoudre par combinaisons en n'extrayant peut être pas tout de suite x : $\begin{array}{cccc} x & +a.y & +a^2.z & = a^3 \\ & (b-a).y & +(b^2-a^2).z & = b^3 \\ & (c-a).y & +(c^2-a^2).z & = c^3 \end{array}$

puis $\begin{array}{cccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ & y & +(b+a).z & = & b^3/(b-a) \\ & y & +(c+a).z & = & c^3/(c-a) \end{array}$ et enfin $\begin{array}{cccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 \\ & y & +(b+a).z & = & b^3/(b-a) \\ & & (c-b).z & = & c^3/(c-a) - b^3/(b-a) \end{array}$.

On extrait z un peu moche et on remonte.

On peut aussi chercher la bonne combinaison entre lignes de $\begin{array}{cccccc} x & +a.y & +a^2.z & = & a^3 & L1 \\ x & +b.y & +b^2.z & = & b^3 & L2 \\ x & +c.y & +c^2.z & = & c^3 & L3 \end{array}$ qui va conserver x et effacer les deux autres.

On peut aussi avoir un coup de génie et proposer $x = a.b.c$, $y = -a^{.b-a.c-b.c}$et $z = a + b + c$ puis vérifier.
Attention, proposer seulement x et dire qu'on vérifie ne prouve rien.
A part prouver que vous êtes un escroc.