



Somme de Riemann milieu de f sur le segment $[a, b]$ pour une équisubdivision en n points. 2 pt.



Comparez $\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} a_1^1 & -a_1^2 & a_1^3 & -a_1^4 \\ -a_2^1 & a_2^2 & -a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & -a_3^2 & a_3^3 & -a_3^4 \\ -a_4^1 & a_4^2 & -a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$ et en dimension n généralisez (avec formule

et preuve). 4 pt. Écrivez un script Python qui prend en entrée la première matrice et retourne la seconde avec les signes moins. 2 pt.

A : $\forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt = 0 \right) \Rightarrow (\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0)$
 B : $\forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt = 0 \right) \Rightarrow (\exists t \in [-1, 1], f(t) = 0)$
 C : $\forall P \in \mathbb{R}[X], \left(\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0 \right) \Rightarrow (\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0)$
 D : $\forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{C}), \left(\int_{-1}^1 (f(t))^2 dt = 0 \right) \Rightarrow (\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0)$
 E : $\forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 f(t) dt = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0)$
 F : $\forall f \in C_\infty([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 |f(t)| dt = 0 \right) \Leftrightarrow (\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0)$

A à F : Vrai / Faux ? 6 pt.

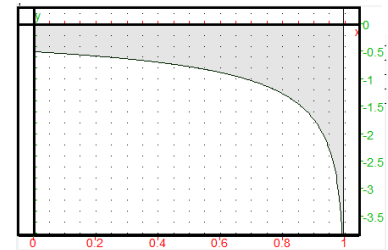
Montrez que

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 1 \\ y & 1 & 4 & 0 \\ z & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

est l'équation du plan passant par $A(2, 1, 1)$, $B(3, 4, 1)$ et $C(1, 0, 2)$. 3 pt.

L'objectif est de donner un sens (et calculer) $\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx$. Montrez que $x \mapsto \frac{x + \ln(1-x)}{x^2}$ notée f se prolonge par continuité en 0 mais pas en 1. 2 pt. Donnez une primitive de f sur $]0, 1[$. 2 pt. Calculez

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ b \rightarrow 1}} \int_a^b \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx. \quad \text{2 pt.}$$



Donnez une primitive (x fixé dans $]0, +\infty[$) de $t \mapsto \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t}$ puis calculez $\int_{t=0}^{+\infty} e^{-x \cdot t} \cdot \sin(t) dt$. 3 pt.



Calculez ensuite $\int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{t=0}^{+\infty} e^{-x \cdot t} \cdot \sin(t) dt \right) dx$. 1 pt.



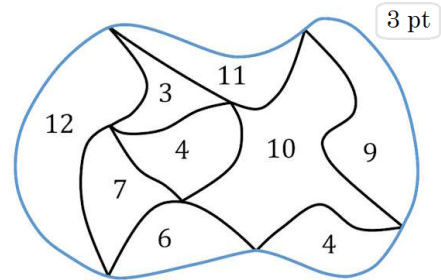
Calculez (t fixé non nul) : $\int_{x=0}^{+\infty} \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} dx$. 1 pt. Si vous êtes en physique ou Timothée, et utilisez sans preuve le théorème de Fubini $\int_{x=a}^b \left(\int_{t=c}^d F(x, t) dt \right) dx = \int_{y=c}^d \left(\int_{x=a}^b F(x, t) dx \right) dt$ qu'avez vous prouvé ? 2 pt.

Lewis Carroll said «I can walk 4 miles per hour on a level, flat surface ; 3 miles per hour uphill ; and 6 miles per hour downhill. Yesterday, I left my home and walked on a flat surface , and then up a hill. I returned home on the same path, taking a total of 6 hours. Can you determine the distance he walked ? 2 pt.

On constate : $468^2 = 219\,024$ et $468^3 = 102\,503\,232$ surtout $4 + 6 + 8 = 2 + 1 + 9 + 0 + 2 + 4 = 1 + 0 + 2 + 50 + 3 + 2 + 3 + 2$.

Écrivez un script qui cherche les nombres à cinq chiffres qui vérifient $sc(n) = sc(n^2) = sc(n^3)$ ($sc(p)$ est la somme des chiffres de l'écriture décimale de p). Finalement, non. Je le poserai en Défi des fous d'info.

Each number = perimeter of region in km. Perimeter of boundary?



LYCEE CHARLEMAGNE
M.P.S.I.2



2024

IS25
15- points

2025



IS25

Déterminants.



$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & -a_1^2 \\ -a_2^1 & a_2^2 \end{vmatrix} \text{ puis } \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & -a_1^2 & a_1^3 \\ -a_2^1 & a_2^2 & -a_2^3 \\ a_3^1 & -a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & -a_1^2 & a_1^3 & -a_1^4 \\ -a_2^1 & a_2^2 & -a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & -a_3^2 & a_3^3 & -a_3^4 \\ -a_4^1 & a_4^2 & -a_4^3 & a_4^4 \end{vmatrix}$$

On le prouve de plusieurs façons. On note a_i^k le terme général de la matrice « normale » et $a_i^k = (-1)^{i+k} \cdot a_i^k$ le déterminant de la matrice « en damier ».

On veut montrer que les deux matrices ont le même déterminant.

Avec la formule brute : $\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n (-1)^{i+\sigma(i)} \cdot a_i^k$.

On factorise $\prod_{i=1}^n (-1)^{i+\sigma(i)} \cdot a_i^k$ en $\left(\prod_{i=1}^n (-1)^i \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n (-1)^{\sigma(i)} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^n a_i^k \right)$.

Les deux produits $\left(\prod_{i=1}^n (-1)^{\sigma(i)} \right)$ et $\left(\prod_{i=1}^n (-1)^{i+\sigma(i)} \right)$ ont la même valeur $(-1)^{1+2+3+\dots+n}$, et le produit des deux donne 1.

On a donc $\sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_i^{\sigma(i)} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n (-1)^{i+\sigma(i)} \cdot a_i^k = \sum_{\sigma \in S_n} \text{Sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_i^k = \det(A)$.

Avec des produits matriciels, rédigé en taille 4 :

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & -a_1^2 & a_1^3 & -a_1^4 \\ -a_2^1 & a_2^2 & -a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & -a_3^2 & a_3^3 & -a_3^4 \\ -a_4^1 & a_4^2 & -a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & a_1^4 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On passe au déterminant $\det(A') = \det(A) \cdot (\det(D))^2$ où D est une matrice diagonale dont le déterminant vaut -1 ou 1 .

Ensuite si vous tenez à essayer une démonstration par récurrence, je vous laisse faire.

```
def signesmoins(M): #list of list of float -> list of list of float
...MS = [] #on va construire une liste de listes
...for i in range(len(M)): #les lignes une à une
.....L = [] #on va construire une ligne
.....for k in range(len(M[0])): #élément par élément
.....if (i+k) % 2 == 0: #condition pour garder le signe
.....L.append(M[i][k])
.....else:
.....L.append(-M[i][k])
.....MS.append(L) #ligne complète
...return MS
```

En version « je copie puis je change un signe sur deux :

```
def signesmoins(M):
...MS = [[M[i][k] for k in range(len(M[0]))] for i in range(len(M))] #on copie la matrice
...for i in range(len(M)):
.....for k in range(len(M[0])):
.....if (i+k) % 2 != 0:
.....MS[i][k] *= -1
...return MS
```

Pour vous tout doit tenir en une ligne ? Allons y :

```
def signesmoins(M) :
...return [[M[i][k]*(-1)**(i+k) for k in range(len(M[0])) for i in range(len(M))]
```

Toutes ces solutions ont le même ordre de grandeur de complexité.

IS25

Séparation.



On rappelle le résultat du cours :

si φ est continue de $[a, b]$ ($a < b$) dans $\mathbb{R}^+$ (positive) et si on a $\int_a^b \varphi(t).dt = 0$ alors f est identiquement nulle ($\forall t \in [a, b], f(t) = 0$).

Preuve par l'absurde :

on suppose φ non identiquement nulle, c'est à dire non nulle en au moins un point x_0 .

Alors par continuité, φ est plus grande que $\frac{\varphi(x_0)}{2}$ sur un intervalle $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$.

Par calcul, $\int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \varphi(t).dt$ est strictement positif.

Par relation de Chasles et positivité, $\int_a^{x_0 - \eta} \varphi(t).dt + \int_{x_0 - \eta}^{x_0 + \eta} \varphi(t).dt + \int_{x_0 + \eta}^b \varphi(t).dt$ est strictement positive, donc non nulle.

Preuve par gros théorème.

L'application $x \mapsto \int_a^x \varphi(t).dt$ (notée ϕ) est définie en tout point x de $[a, b]$, nulle en a .

Elle est croissante (relation de Chasles et positivité $\int_x^y \varphi(t).dt \geq 0$ pour $a \leq x \leq y \leq b$).

Elle est nulle en b par hypothèse.

Elle est donc identiquement nulle ($a < x < b \Rightarrow 0 = \phi(a) \leq \phi(x) \leq \phi(b) = 0$).

Sa dérivée est donc identiquement nulle (théorème pas cher).

Et comme sa dérivée est $\phi' = \varphi$ (théorème cher), l'application φ est identiquement nulle.

On peut alors attaquer une par une les affirmations.

$A : \forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 (f(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right) : \text{Non.}$

Rapidement : $\left(\int_0^1 (f(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \right) \not\Rightarrow \left(\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right)$

L'application $x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$

$B : \forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 (f(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\exists t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right) : \text{Oui.}$

Rapidement : $\left(\int_0^1 (f(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \right) \not\Rightarrow \left(\exists t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right)$ par exemple $t = 1/2$.

$C : \forall P \in \mathbb{R}[X], \left(\int_0^1 (P(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [-1, 1], P(t) = 0 \right) : \text{Oui.}$

On prend un polynôme P . L'hypothèse $\int_0^1 (P(t))^2 . dt = 0$ donne : P est identiquement nul sur $[0, 1]$. Le polynôme P a une infinité de racines. Il est identiquement nul.

$D : \forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{C}), \left(\int_{-1}^1 (f(t))^2 . dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right) : \text{Oui.}$

C'est le théorème du cours. Ah non, tiens. A valeurs dans $\mathbb{C}$. On ne peut donc pas parler de signe, de positivité. Et on a un contre-exemple avec $x \mapsto i.x$.

$$E : \forall f \in C_0([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 f(t).dt = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\forall t \in]-1, 1], f(t) = 0 \right) : \text{Oui.}$$

La flèche est dans le sens agréable : il suffit.

Et par continuité, si f est nulle sur tout $] -1, 1]$, elle l'est sur $[-1, 1]$.

$$F : \forall f \in C_\infty([-1, 1], \mathbb{R}), \left(\int_0^1 |f(t)|.dt = 0 \right) \Leftrightarrow \left(\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right)$$

C'est tentant de dire oui. Dans le sens $\Leftarrow$, c'est vrai.

Dans l'autre sens, on a l'implication $\left(\int_0^1 |f(t)|.dt = 0 \right) \Rightarrow \left(\forall t \in [0, 1], f(t) = 0 \right)$. A priori, ceci n'entraîne pas $\left(\forall t \in [-1, 1], f(t) = 0 \right)$. On a un contre-exemple au début. Mais notre contre-exemple n'est pas dérivable en 0. Et là, on demande à f d'être de classe C^∞ .

Peut-on construire f de classe C^∞ qui soit nulle sur tout $[0, 1]$ mais réussisse à décoller de l'autre côté.

Une idée que pourrait donner Timothé : on regarde les dérivées en 0.

Comme f est nulle sur tout $[0, 1]$, toutes les dérivées en 0 sont nulles (à droite, mais finalement une dérivée, c'est une dérivée) : $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = \dots = 0$.

On écrit un développement de Taylor $f(0+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} . h^k = 0$ pour tout h , même négatif.

C'est presque convaincant.

Mais c'est faux. Il existe des applications qui décollent, même avec de telles dérivées : $t \mapsto \begin{cases} \exp(1/t) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$.

Le raccordement est de classe C^∞ en 0.

Comme quoi il ne faut pas transformer un DL en développement de Taylor. L'infini n'est pas au bout du couloir.

IS25

Déterminant et plan de $\mathbb{R}^3$.



L'équation $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 & 1 \\ y & 1 & 4 & 0 \\ z & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ est bien une équation de plan, car de la forme $a.x + b.y + c.z + d = 0$ si on développe par rapport à la première colonne (on imagine, on ne le fait pas, ce serait idiot, et on n'est pas idiot).

Ce plan passe par $A(2, 1, 1)$: $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (deux colonnes égales).

Il passe par B pour les mêmes raisons. De même par C .

Or, par A , B et C ne passe qu'un plan. Donc ce n'est plus l'équation d'un plan, c'est l'équation du plan.

Variante bourrine : je développe $3.x - y + 2.z = 7$.

Je vérifie en A , en B et en C .

Variante stupide sauf si j'adore calculer comme un émeu qui tente de voler. J'écris $a.x + b.y + c.z + d = 0$ et je sais $a.2 + b.1 + c.1 + d = 0$, $a.3 + b.4 + c.1 + d = 0$ et $a.1 + b.0 + c.2 + d = 0$. Ça fait un gros système que je résous en les inconnues a , b , c et d .

Variante plus géométrique : je remplace le déterminant par le même mais en faisant des combinaisons sur les colonnes

$$\begin{vmatrix} x & 2-x & 3-2 & 1-2 \\ y & 1-y & 4-1 & 0-1 \\ z & 1-z & 1-1 & 2-1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Je développe par rapport à la dernière ligne $\begin{vmatrix} 2-x & 3-2 & 1-2 \\ 1-y & 4-1 & 0-1 \\ 1-z & 1-1 & 2-1 \end{vmatrix} = 0$. Je reconnais que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires. C'est la définition du plan (origine A et vecteurs directeur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$).

Comme souvent en algèbre linéaire, il n'y a pas une unique solution (on n'est plus en train de passer le bac), mais des solutions, plus ou moins élégantes. Et souvent même plusieurs sont élégantes.

IS25

Une intégrale.



L'application f n'est définie ni en 0 ni en 1.

En 0, on va utiliser un développement limité obtenu par intégration

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + o(x^2)_{x \rightarrow 0} \\ -\ln(1-x) + \ln(1) &= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)_{x \rightarrow 0} \end{aligned}$$

On effectue donc jusqu'à avoir un développement d'ordre 1

$$\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = \frac{x - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x^2} = -\frac{1}{2} - \frac{x}{3} + o(x)_{x \rightarrow 0}$$

On pourra poser $f(0) = -\frac{1}{2}$ et ajouter $f'(0) = -\frac{1}{3}$.

En 1 (par valeur inférieure), le logarithme tend vers $-\infty$, le x tend vers 1 et le x^2 aussi. La limite est $-\infty$.

Sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, 1[$, on peut intégrer par parties (fonctions C^1) :

$$\int_a^b (x + \ln(1-x)) \cdot \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{x + \ln(1-x)}{x} \right] + \int_a^b \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) \cdot \frac{1}{x} dx$$

puis voir disparaître la seconde intégrale en simplement $\int_a^b \frac{-x}{1-x} \cdot \frac{1}{x} dx = \int_a^b \frac{-1}{1-x} dx = \left[\ln(1-x) \right]_a^b$.

Bref, tous calculs faits une primitive est $x \mapsto \ln(1-x) - \frac{x + \ln(1-x)}{x}$ ou même $\boxed{x \mapsto \frac{(x-1) \cdot \ln(1-x)}{x}}$ car $\frac{x}{x}$ est peu utile dans une primitive.

Et on peut rédiger en proposant et vérifiant. D'ailleurs, c'est toujours bon de vérifier.

Reste à évaluer cette intégrale puis faire tendre a vers 0 et b vers 1.

Dans $(a-1) \cdot \frac{\ln(1-a)}{a}$ on identifie un taux d'accroissement $\frac{\ln(1-a) - \ln(1)}{a}$ qui va tendre vers -1 , et un facteur $a-1$ qui tend vers -1 .

Pour $\frac{(b-1) \cdot \ln(1-b)}{b}$, par changement de variable, la forme indéterminée $(1-b) \cdot \ln(1-b)$ est notre classique $x \cdot \ln(x)$ avec x qui tend vers 0. Il ne reste donc rien (le b du dénominateur ne nous gênera pas).

La fonction f n'a pas de limite en 1, mais chaque primitive en a une : $\boxed{\int_a^b (x + \ln(1-x)) \cdot \frac{1}{x^2} dx = -1}$

IS25

Jeu sans rigueur sur des intégrales doubles.



Pour x fixé, l'application $t \mapsto \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t}$ est continue, dont localement intégrable.

On peut calculer $\int \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} dt$ (avec des bornes, sinon c'est du travail de porc) en intégrant une fois ou deux par parties

$$\begin{aligned} \int_{t=c}^d \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} dt &= \left[-\cos(t) \cdot e^{-x \cdot t} \right]_c^d - \int_{t=c}^d \cos(t) \cdot (-x \cdot e^{-x \cdot t}) dt & \begin{array}{l} \sin(t) \leftrightarrow -\cos(t) \\ e^{-x \cdot t} \leftrightarrow -x \cdot e^{-x \cdot t} \end{array} \\ \int_{t=c}^d \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} dt &= \left[-\cos(t) \cdot e^{-x \cdot t} \right]_c^d - \left[\sin(t) \cdot x \cdot e^{-x \cdot t} \right]_c^d - \int_c^d \sin(t) \cdot (x^2 \cdot e^{-x \cdot t}) dt & \begin{array}{l} \cos(t) \leftrightarrow \sin(t) \\ x \cdot e^{-x \cdot t} \leftrightarrow -x^2 \cdot e^{-x \cdot t} \end{array} \end{aligned}$$

En faisant passer de l'autre côté par linéarité, on a

$$(1+x^2) \cdot \int_{t=c}^d \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} dt = \left[-\cos(t) \cdot e^{-x \cdot t} - \sin(t) \cdot x \cdot e^{-x \cdot t} \right]_c^d$$

Maintenant, comme on est en maths, on se la joue efficace.

On sait qu'une primitive sera de la forme $t \mapsto (\alpha \cdot \cos(t) + \beta \cdot \sin(t)) \cdot e^{-x \cdot t}$ (ou même, on tente sa chance et tant mieux si ça marche).

On dérive $t \mapsto (-\alpha \cdot \sin(t) + \beta \cdot \cos(t)) \cdot e^{-x \cdot t} - x \cdot (\alpha \cdot \cos(t) + \beta \cdot \sin(t)) \cdot e^{-x \cdot t}$.

On demande alors juste $\left\{ \begin{array}{cc} -\alpha & -x \cdot \beta \\ \beta & -x \cdot \alpha \end{array} \right. = \begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}$ (une fois de plus, ce n'est pas « on identifie », c'est « on propose/.on vérifie »).

On trouve α et β . Et on a une primitive valide : $t \mapsto \frac{\cos(t) + x \cdot \sin(t)}{1 + x^2} \cdot e^{-x \cdot t}$ (même pour x nul).

On va intégrer sans trop poser de question pour t de 0 à l'infini. Ou dans un premier temps « à horizon fini »

$$\int_{t=0}^D \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{1 + x^2} \cdot \left[-\cos(t) \cdot e^{-x \cdot t} - \sin(t) \cdot x \cdot e^{-x \cdot t} \right]_0^D = \frac{-(\cos(D) + x \cdot \sin(D)) \cdot e^{-x \cdot D} + 1}{1 + x^2}$$

Quand D tend vers l'infini, le terme $\cos(D) + x \cdot \sin(D)$ reste borné tandis que l'exponentielle tend vers 0 (merci « $x \in]0, +\infty[$ »). Le produit tend vers 0.

$$\int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot dt = \frac{1}{1 + x^2}$$

Pour x nul, l'intégrale n'a pas de sens.

On travaille à horizon fini puis on passe à la limite

$$\int_{x=0}^{x=B} \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot dx = \left[\frac{\sin(t) \cdot e^{-x \cdot t}}{-t} \right]_{x=0}^B = \sin(t) \cdot \frac{1 - e^{-B \cdot t}}{t} \xrightarrow{B \rightarrow +\infty} \frac{\sin(t)}{t}$$

On utilise alors sans preuve le théorème de Fubini, avec même des bornes infinies (et là, il y a de gros problème qu'on ne va pas aborder) avec comme fonction de deux variables $(x, t) \mapsto \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t}$ (en oubliant aussi que pour $x = 0$ ou $t = 0$ aucune des formules n'est valable)

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{+\infty} \left(\int_{t=0}^{+\infty} \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot dt \right) \cdot dx &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\int_{x=0}^{+\infty} \sin(t) \cdot e^{-x \cdot t} \cdot dx \right) \cdot dt \\ \int_{x=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1 + x^2} \right) \cdot dx &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) \cdot dt \\ \frac{\pi}{2} &= \int_{t=0}^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right) \cdot dt \end{aligned}$$

Et on vient de « calculer » l'intégrale impropre (dite de Dirichlet) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \cdot dt = \frac{\pi}{2}$

L'intégrale est impropre car en 0 l'application n'est pas définie (mais on la prolonge par continuité). Et en $+\infty$ on n'a pas de primitive explicite et il faut justifier que $B \mapsto \int_0^B \frac{\sin(t)}{t} \cdot dt$ admet bien une limite en $+\infty$ (application qui oscille avec des oscillations de plus en plus amorties). Ensuite, il y a des arnaques dans notre preuve, comme dans certaines manipulations sur les transformées de Laplace.

IS25

A question by Lewis Carroll.



On décrit la promenade de Lewis : distance a en terrain plat, distance b en montée (et en descente, c'est la même).

On calcule la durée de son trajet : $\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right) + \left(\frac{b}{6} + \frac{a}{4}\right)$. C'est fou, ça fait $\frac{a+b}{2}$.

Comme il a marché six heures, on trouve $a + b = 6.2$ (en miles). La promenade fait donc un total de 24 miles.

Si on n'avait pas eu $2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (histoire de moyennes) il aurait manqué des hypothèses pour conclure.

On note qu'on connaît la distance parcourue au total, mais pas sa répartition.

IS25

Somme des chiffres.



On va créer la fonction qui calcule la somme des chiffres d'un entier passé en valeur puis l'utiliser en boucle :

```
def sc(n):
    ....s = 0
    ....while n != 0:
    .....s += n%10
    .....n = n//10
    ....return s
```

```
L = [ ]
for n in range(10000, 100000):
    ....s1, s2 = sc(n), sc(n*n)
    ....if s1 == s2:
    .....s3 = sc(n*n*n):
    .....if s1 == s3:
    .....L.append(n)
```

Évidemment il y aura les puissances de 10, solution de facilité avec une somme des chiffres égale à 1.

On évitera de calculer $sc(n^{**3})$ si on n'a pas déjà $sc(n) == sc(n*n)$.

On pouvait quand même se permettre $sc(n) == sc(n*n) == sc(n*n*n)$ qui est un test direct.

En effet, si $sc(n) == sc(n*n)$ n'est pas valide, Python s'arrête et ne va pas tester $sc(n*n) == sc(n*n*n)$.

Au fait, voici les solutions à cinq chiffres : 10000, 28845, 46800, 58500, 58510, 58680, 58968. Certaines étaient pré-visibles.

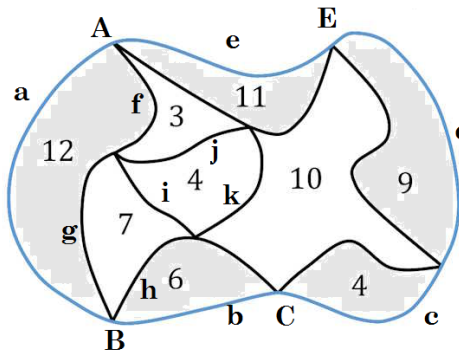
IS25

Circulation.



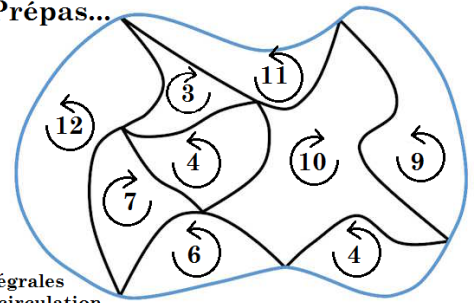
On cherche $a + b + c + d + e$

On sait $a + f + g = 12$
 $g + h + i = 7$
 mais aussi
 $i + j + k = 4$



La bonne
 combinaison
 est alors
 $a + b + c + d + e$
 $=$
 $12 + 6 + 4 + 9 + 11$
 $- 7 - 10 - 3 + 4$

Et sinon, ce dessin explicatif me
 rappelle follement mes cours de
 Prépas...



intégrales
 de circulation,
 flux...

...en électrostatique.

LYCÉE CHARLEMAGNE
 M.P.S.I.2



2024

IS25
 15- points

2025