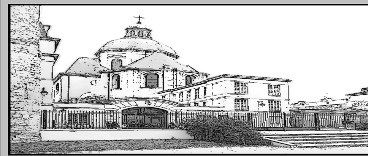
LYCEE CHARLEMAGNE Lundi 19 mai $\mathcal{M.P.S.I.}$2		2024 2025 TD28

◁0▷ - a - Soit $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)}+3.y''+2.y'+5.y=0$. Montrez que la translation $\tau = \Big(f \longmapsto \big(t \longmapsto f(t+1)\big)\Big)$ est un endomorphisme de $(E,+,.)$, donnez sa trace ou son déterminant (ne cherchez pas les racines de l'équation caractéristique, on n'en a pas besoin, mais attention, deux d'entre elles sont complexes conjuguées).

- b - Montrez que la dérivation d est un endomorphisme de E et calculez sa trace et son déterminant.

- c - Justifiez : $\tau\circ d = d\circ\tau$.

- d - Montrez que $(f,\ g) \longmapsto f(0).g(0)+f'(0).g'(0)+f''(0).g''(0)$ est un produit scalaire sur $(E,+,.)$. Existe-t-il une base orthonormée de $(E,+,.)$ pour ce produit scalaire ?

- e - Trouvez une équation différentielle linéaire dont l'espace des solutions contient tous les carrés des éléments de $(E,+,.)$.

◁1▷ ♡ Montrez que selon que vous regardez $(\mathbb{C}^3,+,.)$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille
$\left(\begin{pmatrix}1+i\\ i\\ 1-i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1-i\\ 2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1+4.i\\ 2-3.i\\ 0\end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.
Liée : un vecteur est combinaison linéaire des autres. Libre : au contraire pas de relation de dépendance linéaire.

◁2▷ Soit M une matrice carrée. On note P son polynôme caractéristique. On suppose que M est diagonalisable (semblable à D). Montrez $P(D)=0$ et $P(M)=0$.

◁3▷ -a- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{j})$ en le donnant sous la forme $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$.
-b- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$.
-c- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$.
-d- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?
-e- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?
-f- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?
Le plus simple sera de donner leur matrice sur la base canonique.

◁4▷ ♡ f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E,+,.)$. On suppose $f\circ g = g\circ f$ *(on dit que f et g sont permutables, et non pas que f et g commutent, mais l'erreur n'est pas grave)*. Montrez :

$\forall\overrightarrow{u}\in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u})\in Ker(g)$	$\forall\overrightarrow{u}\in Ker(f),\ f(\overrightarrow{u})\in Ker(f)$
$\forall\overrightarrow{u}\in Im(g),\ g(\overrightarrow{u})\in Im(g)$	$\forall\overrightarrow{u}\in Im(g),\ f(\overrightarrow{u})\in Im(g)$

Rappel : un raisonnement du type $\forall\overrightarrow{b}\in Im(f)$ commence par « soit $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$; alors il existe $\overrightarrow{a}$ dans E verifiant $\overrightarrow{b}$ =f(\va) , etc ».

◁5▷ ♡ Sachant $A=\begin{pmatrix}1&2\\ 1&3\end{pmatrix}$, montrez que $M\longmapsto M.A-Tr(M).A$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$. Donnez la dimension de son noyau.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

◁6▷ ♠ Donnez la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ *(notée I_n)*. Calculez I_0 et I_1. Donnez une relation de récurrence sur la suite I.

Donnez un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x^2).dx$.

◁7▷ ♡ f et g sont linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f) \cap Kar(g) \subset Ker(\alpha.f+\beta.g)$.
Rappel : $Ker(f)$ est l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par f est nulle.

◁8▷ ♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.
b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.
c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\big(\ln(x)\big)^{\ln(e-x)}$.
d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\dfrac{1}{x.\big(x-\ln(x)\big)^x}$.

◁9▷ Montrez que $M \longmapsto {}^tM + 2.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Déterminez son noyau. Est-ce un automorphisme.
Montrez que c'est un automorphisme de $(S_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Montrez que c'est un automorphisme de $(A_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Donnez la matrice de cette application sur la base canonique de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ *(attention, elle est de taille 9 sur 9, mais rassurez vous, elle contient beaucoup de 0)*.
Calculez sa trace, et calculez *(sans effort, S.V.P.)* son déterminant.

◁10▷ Combien d'endomorphismes de $(P^2,+,.)$ ont pour noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et vérifient $f \circ f = 0$? $(P,+,\times)$ est le corps des entiers de 0 à 10 pour l'addition modulo 11.
On pourra les représenter par leur matrice sur la base canonique.

◁11▷ Connaissez vous le principe mathématique de l'évidence ?
Beh je vous laisse le deviner !

◁12▷ Racines carrées de la dérivation *(oral de concours)*. On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ *(racine carrée de la dérivation)*. On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset Ker(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Déduisez que la dimension de $Ker(T)$ vaut 0 ou 1.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

◁13▷ Sur les trois angles de $(A,\ B,\ C)$, le plus grand angle est le triple du plus petit, et le dernier angle est le double du petit. Que pouvez vous déduire ?

◁14▷

$X^3+X^2-3.X+1$	$X^2-3.X+2$	$2.X^3+3.X^2+X-6$	$4.X^3-5.X^2+1$

Montrez que ces polynômes sont tous nuls en 1. Montrez (astucieusement ?) que la famille est liée.

◁15▷

Le but de ce petit (?) problème : étudier les matrices réelles symétriques. On va montrer le théorème spectral : elles se diagonalisent en base orthonormée. On montrera donc que leurs valeurs propres sont réelles, et qu'on peut construire une base faite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et normés pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{R}^n,+,.)$. On commencera par une étude rapide en dimension 2, puis un exemple en dimension 3. Ensuite, on montre le théorème spectral par récurrence sur la taille des familles faites de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. Le théorème spectral fera partie de votre cours l'an prochain.

I∼0) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles.
I∼1) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 5.

I~2) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 2.
I~3) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

II~0) *On définit :* $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Donnez son spectre *(indice : il est dans $\mathbb{Z}$)*.
II~1) Trouvez un vecteur propre de norme 1 pour chaque valeur propre. Montrez qu'ils forment alors une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
II~2) Déduisez l'existence d'une matrice P et d'une matrice D vérifiant $M = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

III~0) On pose $U = P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez ${}^tU.M.U$.
III~1) Trouvez un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$.
III~2) Trouvez un vecteur normé V_0 vérifiant ${}^tV_0.M.V_0 = 0$ et ${}^tV_0.U_0 = 0$.(calcul atroce)
III~3) Montrez que $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et montrez que la matrice de f sur cette base a non seulement une trace nulle, mais même une diagonale nulle.(aucun calcul)

IV~0) *$(E, +, ., \phi)$ est un espace pré-hilbertien*[1]*, dans lequel on a pris deux vecteurs unitaires et orthogonaux $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. On définit $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$.* Montrez que f est un endomorphisme de E. Donnez son noyau.
IV~1) Donnez son spectre et ses sous-espaces propres.
IV~2) Montrez : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u})$.

V~0) *$(\mathbb{R}^n, +, .)$ est l'espace euclidien muni de son produit scalaire usuel ϕ, et f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ de matrice S sur la base canonique vérifiant $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ \phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b},\ f(\overrightarrow{a}))$.* Déduisez : ${}^tS = S$.
On pose note D_f l'ensemble des familles ϕ-orthonormées formées de vecteurs propres de f.
V~1) Montrez que $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme admettant au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Déduisez qu'il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ et μ dans C vérifiant $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$. En montrant ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U + {}^tV.S.V = \mu.({}^tU.U + {}^tV.V)$, montrez que μ est réel, et que U ou V est vecteur propre de S.
V~2) Déduisez qu'il y a dans D_f des familles de cardinal 1.

VI~0) *On suppose qu'une famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$ est une famille de D_f, avec $k < n$. On pose alors $P = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k})$* (donnez sa dimension) *et* $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$. Montrez que Q est un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Montrez : $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ f(\overrightarrow{u}) \in P$. Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in Q,\ f(\overrightarrow{a}) \in Q$.
VI~1) Montrez qu'il existe dans Q au moins un vecteur propre de f de norme 1, noté $\overrightarrow{c}$.
VI~2) Montrez que $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{c})$ est dans D_f.
VI~3) Déduisez qu'il existe dans D_f une famille de cardinal n.

◃16▹

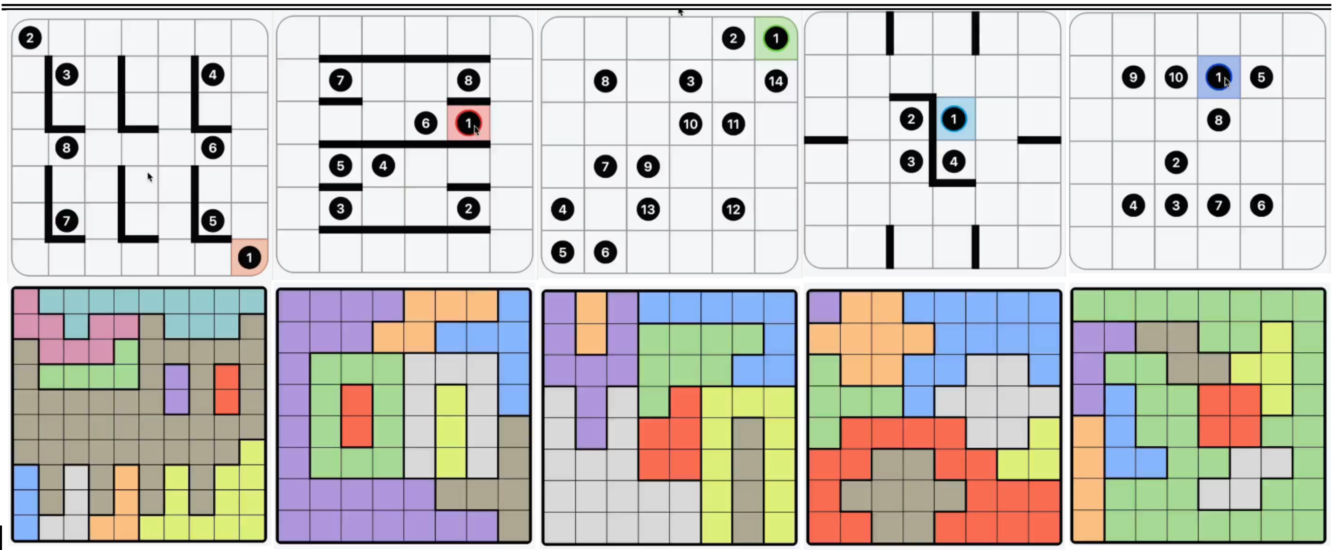
$\overrightarrow{\varepsilon_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_1} = x \longmapsto \dfrac{x}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_2} = x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^3 - 3.x + 2}$
$\overrightarrow{e_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x - 1}$	$\overrightarrow{e_1} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$	$\overrightarrow{e_2} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)}$

Donnez la matrice de changement de base entre $\beta = (\overrightarrow{\varepsilon_0},\ \overrightarrow{\varepsilon_1},\ \overrightarrow{\varepsilon_2})$ et $B = (\overrightarrow{e_0},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ *(exprimez les $\overrightarrow{e_i}$ à l'aide des $\overrightarrow{\varepsilon_k}$)*.
Inversez la matrice.
Décomposez $\dfrac{9}{X^3 - 3.X + 2}$, $\dfrac{9.X}{X^3 - 3.X + 2}$ et $\dfrac{9.X^2}{X^3 - 3.X + 2}$ en éléments simples.

◃17▹ ♡ On donne la formule du double produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:
$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$ pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$
Vérifiez la pour des triplets de la base canonique comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à $\overrightarrow{c}$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
Démontrez la formule si vous en avez le courage avec neuf coefficients pour les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ *(si cette partie de l'exercice vous plait, ne m'adressez plus la parole)*.
Comparez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

1. *espace vectoriel avec un produit scalaire*

◁18▷



◁19▷ ♡ Montrez que $(\mathbb{R},+,.)$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel (c'est à dire les λ_k sont dans $\mathbb{Q}$).
♡ Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est une famille libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est une famille libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est une famille liée.

♣ On admet (usage de l'axiome du choix) qu'on peut définir une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel. Montrez qu'elle est infinie, non dénombrable.
Montrez qu'on peut imposer qu'un de ses éléments soit 1 (ce qui entraine $Vect(1) = \mathbb{Q}$). Montrez que tous les autres e_k sont irrationnels.
On la note $(e_k)_{k\in K}$ (K est donc un ensemble infini de cardinal $\aleph_1$, les e_k sont des réels, et un cerrtain e_{k_0}est égal à 1), et tout réel x s'écrit $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k.e_k$ avec les λ_k rationnels.
♣♡ Montrez que la famille $(e_k,\ i.e_k)_{k\in K}$ est une base de $(\mathbb{C},+,.)$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
Montrez (par un argument sur le cardinal de $\mathbb{K}$) qu'on peut l'écrire « en vrac » $(\varepsilon_k)_{k\in K}$ (où « la moitié des ε_k sont des e_p et « l'autre moitié » des $i.e_q$), et montrez qu'on peut même imposer $e_{k_0} = \varepsilon_{k_0} = 1$.

On définit alors f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par
si x est un réel, on l'écrit $x = \sum\limits_{k\in K} \lambda_k.e_k$ (décompoosition unique sur la base) alors $f(x) = \sum\limits_{k\in K} \lambda_k.\varepsilon_k$ (décomposition aussi unique sur la base « deux fois plus grande »).
Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrez : $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,\ f(x+x') = f(x)+f(x')$. Déduisez : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z') = f^{-1}(z)+f^{-1}(z')$.
Montrez : $f(1) = 1$.

Montrez que l'addition est une loi de groupe commutatif sur $\mathbb{R}$.

♣ Pour z dans $\mathbb{C}$ et x dans $\mathbb{R}$, on définit $z\otimes x = f^{-1}(z\times f(x))$.
Montrez alors $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (z+z')\otimes x = z\otimes x + z'\otimes x$
$\forall z\in\mathbb{C},\ \forall (x,x')\in\mathbb{R}^2,\ z\otimes(x+x') = z\otimes x + z\otimes x'$
$\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ (z\times z')\otimes x = z\otimes(z'\otimes x)$
$\forall z\in\mathbb{C}^2,\ \forall x\in\mathbb{R},\ 1\otimes x = x$
en utilisant juste les propriétés $f(x+x) = f(x)+f(x')$ et $f(1) = 1$
Concluez : $(\mathbb{R},\ +,\ \otimes)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (attention, la multiplication complexe fois réel n'est vraiment pas la multiplication classique).

◁20▷ ♡ Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée de taille 2.
Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée inversible de taille n.
Montrez que si A une matrice de taille 3 non inversible, alors $Com(Com(A))$ est la matrice nulle.

◁21▷ Résolvez $(\overrightarrow{i}\wedge\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{u}+\overrightarrow{j}\wedge\overrightarrow{u}+\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$.

◁22▷ ♡ Montrez que $z \longmapsto a.z + b.\overline{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même *(vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel)*. Trouvez a et b sachant que 1 a pour image $2 - i$ et que son spectre est $\{3,\ 5\}$.

◁23▷ Pouvez vous trouver f de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pouvez vous trouver f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_a^b f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

◁24▷ ♡ Calculez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b}$.

Montrez que l'équation $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ a une infinité de solutions.

On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on veut résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$. Montrez qu'il faut déjà que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux.

On suppose à présent $\overrightarrow{a}$ orthogonal à $\overrightarrow{b}$. Montrez que $\dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ *(noté $\overrightarrow{u_0}$)* est une solution de l'équation *(utilisez ici la formule du double produit vectoriel)*.
Montrez que $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement si $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{a}$.
Donnez toutes les solutions de l'équation.
(Quelle est celle dont la norme est la plus courte ?)

◁25▷ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ est liée.

◁26▷ ♡ $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent sachant que $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ est liée par la relation $2.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

◁27▷ L'élève affirme : si on réunit deux familles libres n'ayant aucun vecteur de l'une colinéaire à un vecteur de l'autre, on a une nouvelle famille libre. Prouvez lui qu'il a tort.

◁28▷ Montrez que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille alors qu'elle reste liée.
Quelles sont les valeurs de n pour lesquelles vous pouvez enlever n vecteurs de la famille pour qu'elle devienne libre.

◁29▷ La magazine « Tél 7 jeux » a inventé le Tétonor (dites moi de quel nom de jeu de réflexion est issu ce nom en passant aux antonymes (ou contraires si vous préférez)).
Le principe : neuf couples de nombres entiers naturels $(a_k,\ b_k)$ (exemple : $(11,\ 24)$).
neuf sommes $a_k + b_k$ et neuf produits $a_k \times b_k$ (pour notre exemple : 35 et 264).
Problème : la liste des $a_k$et b_ka été triée dans l'ordre croissant, de même que la liste des s_k et p_k.

entiers	2	3	3	3	5	6	11	12	18	24	37	37	45	63	86	115
sommes et produits	30	35	40	43	50	66	89	111	117	189	216	222	225	230	258	264

A vous de retrouver les quadruplets

11	24		_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_
35	264		_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_

On recommence ?

entiers	1			5	6			10			21	23	24		28	
sommes et produits	13	21	22	25	30	30	30	36	40	46	48	56	144	224	252	260

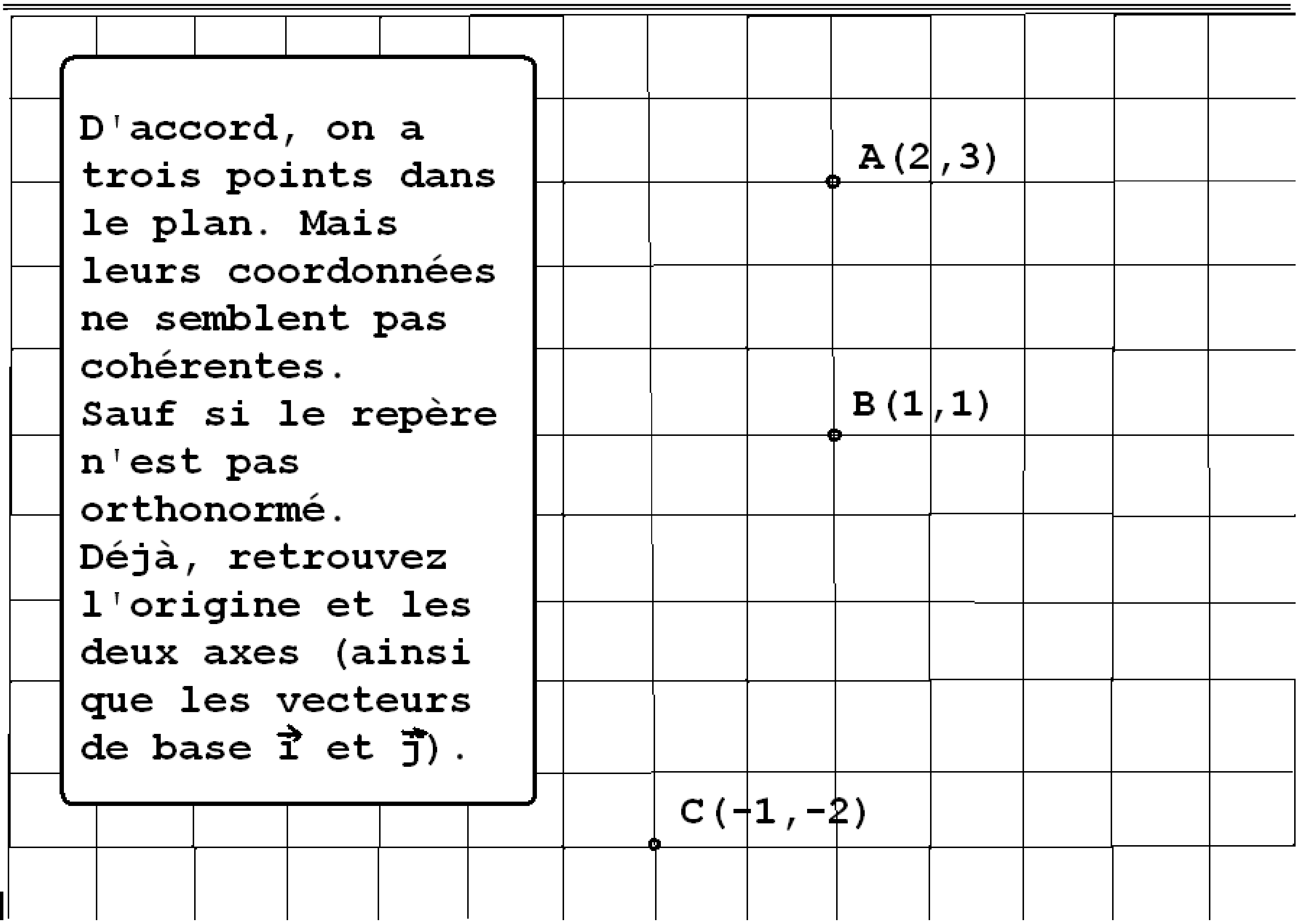
A vous de retrouver les quadruplets

10		_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_
	260	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_	_

◃30▹ Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. Montrez que la famille $(A^2,\ B^2,\ A.B,\ A.B.A,\ B.A.B)$ est liée.

◃31▹ ♡ Un élève a l'intention de démontrer que la famille $(\cos,\ \cos^2,\ \cos^3,\ \sin)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),+,.)$. Il veut pour un quadruplet donné $(a,\ b,\ c,\ d)$: $a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0$ *(fonction nulle)*. Il calcule en 0 en $\pi/4$ et en $\pi/2$.

Il aboutit au système $\left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$. Il trouve une solution non nulle $(a,b,c,d) = (\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)$ *(vérifiez)*. Pourquoi son raisonnement est il faux ?



◃32▹

◃33▹ Montrez que si $(S_1,\dots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ et $(A_1,\dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$, alors $(S_1,\dots S_p, A_1,\dots A_q)$ n'est pas forcément une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$.
Montrez que si $(S_1,\dots S_p)$ est une famille libre de $(S_n(\mathbb{R}),+,.)$ et $(A_1,\dots A_q)$ est une famille libre de $(A_n(\mathbb{R}),+,.)$, alors $(S_1,\dots S_p, A_1,\dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$.
Rappel : $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur n ; S_n en est le sous-espace des matrices symétriques (définition : ${}^tS = S$) et enfin A_n en est le sous-espace des matrices antisymétriques (définition : ${}^tA = -A$) .

◃34▹ Montrez que dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est liée pour tout

θ.
Pour quelles valeurs de θ dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est-elle libre ?
$\theta=0, \theta=\frac{\pi}{3}, \theta=\frac{\pi}{12}, \theta=\frac{\pi}{4}, \theta=\frac{\pi}{2}, \theta=\frac{\pi}{5}$

◃35▹ On définit $\phi = (u,\ v) \longmapsto (x,\ y)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $x = u^2 - v^2$ et $y = u.v$. Déterminez $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ (c'est $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$).
Résolvez $\det\left(\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\right) = 0$ d'inconnues u et v.
Montrez : $\phi(a+h,\ b+k) = \phi(a,b) + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}.\frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \overrightarrow{o(\sqrt{h^2+k^2})}$ (et expliquez la présence de cette flèche sur le petit o).
On admet que ϕ^{-1} est différentiable en $(0,\ 1)$. Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 1)$.

◃36▹ ♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$?

◃37▹ ♡ A et B sont deux matrices carrées de taille n. On suppose A inversible. Simplifiez $A^{-1}.(A.B - x.I_n).A$. Déduisez que $A.B$ et $B.A$ ont le même spectre.
On suppose que ni A ni B n'est inversible. Montrez que $A - 2^{-p}.I_n$ *(notée A_p)* est inversible pour une infinité de valeurs de p. Montrez que pour ces valeurs de p, on a $\chi_{A_p.B}(X) = \chi_{B.A_p}(X)$. Déduisez $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$.

◃38▹ Vrai ou faux (un vrai, un faux) :
Dans $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.
Dans $(M_n(\mathbb{C}),+,.)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.

◃39▹ ♡ Soit $(U_1,\dots U_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et M une matrice carrée de taille n, inversible. Montrez que si $(U_1,\dots U_p)$ est liée, alors $(M.U_1,\dots M.U_p)$ est liée.
On suppose M inversible ; montrez que si $(U_1,\dots U_p)$ est libre, alors $(M.U_1,\dots M.U_p)$ est libre.

◃40▹ ♡ F et G sont deux sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, vérifiant $F\cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. $(\overrightarrow{f_1},\dots \overrightarrow{f_p})$ est une famille de vecteurs de F et $(\overrightarrow{g_1},\dots \overrightarrow{g_q})$. Montrez que $(\overrightarrow{f_1},\dots \overrightarrow{f_p},\overrightarrow{g_1},\dots \overrightarrow{g_q})$ est libre si et seulement si $(\overrightarrow{f_1},\dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1},\dots \overrightarrow{g_q})$ le sont.

◃41▹ Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel $(E,+,.)$. Montrez que $\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{R}^4 \mid \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension si la famille $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c},\ \overrightarrow{d})$ est libre ?
Quelle est sa dimension si cette famille est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$?
Donnez un exemple où sa dimension vaut 1.

◃42▹ Montrez que $(\mathbb{R},+,.)$ est un $(\mathbb{Q},+,\times)$ espace vectoriel (pour x dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathbb{Q}$, on pose évidemment $\lambda.x = \lambda.x$ au sens classique de la multiplication dans $\mathbb{R}$). Attention, ici, on doit tout démontrer (même si ce sont des évidences), car on n'est pas face à un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel.
Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est libre. $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est elle libre ?

◃43▹ Montrez que $(9.\overrightarrow{i} + 12.\overrightarrow{j} + 32.\overrightarrow{k},\ -10.\overrightarrow{i} - 13.\overrightarrow{j} - 35.\overrightarrow{k},\ 2.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 4.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

◃44▹

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

suites bornées	suites décroissantes à partir d'un certain rang
suites périodiques	suites qui convergent vers 0
suites monotones	suites équivalentes à $1/n$ quand n tend vers l'infini
suites en $O\left(\frac{1}{n}\right)$	suites dont le terme général est plus petit que 1 à partir d'un certain rang
suites en $o\left(\frac{1}{n}\right)$	

◁45▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C_A = \{M \mid M.A = A.M\}$, $R_A = \{M \mid A.M + M.A = 0\}$, $T_A = \{M \mid Tr(A.M) = 0\}$.
Montrez que C_A, R_A, T_A, $C_A \cap R_A$ et $C_A + R_A$ sont des espaces vectoriels, et donnez une base et la dimension de chacun.
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$?
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$?

◁46▷ ♣ Pouvez vous construire une matrice A de spectre réel $[1]$ et tel que le spectre de A^2 soit $[1, 4, 9]$? Même question avec cette fois $[1, 2]$ et $[1, 4, -9, -9]$?

◁47▷ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur (caractérisation : $A^2 = A$). Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez en une base et la dimension.

◁48▷ ♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$, y'a pas écrit PCici, mais cherchant déjà le sous-espace propre de valeur propre 0. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.
Et en taille n ?

◁49▷ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ *(base canonique* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l})$*)*. Donnez une base du sous-espace H d'équation $x + y - z + 3.t = 0$. Donnez un jeu d'équations du plan P engendré par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{l}$. Donnez une base de $H \cap P$.

◁50▷ Un carré magique est une matrice dont les sommes en lignes et les sommes en colonnes sont toutes égales (la somme commune est appelée valeur caractéristique du carré).
Montrez que M est un carré magique de valeur caractéristique s si et seulement si on a $M.U = s.U$ et $V.M = s.V$ où U (repspectivement V) est le vecteur colonne (respectivement ligne) dont tous les coefficients valent 1.
Déduisez que le produit de deux carrés magiques de même format est encore un carré magique.

◁51▷ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ Un élève dit que B est une base du sous-espace d'équation $x + y + z = t$ dans $\mathbb{R}^4$. Il dit ensuite que C est une base du sous-espace d'équation $2.x + y = t$. Il déduit que l'intersection a pour base D. Trouvez l'erreur.

Vos Mi*ss* m'ont dé*ch*u. Ils cherchent des *t*aillis avec des *s*apins. Ma*r*ine fait bien *p*ire. Ils éva*c*uent l'é*l*u. C'est une bonne pause pour la Chine. Attention aux pi*r*es des *can*ailles (circulaire). Ne vous *b*attez plus, *t*aisez vous ! Il faut éliminer l'é*c*art des *d*us. Montrez moi vos pe*n*sions, je suis cons*ul*tante. Ah, les *l*uttes des c*r*assses. Le traiteur *c*olorie ses *and*ouilles.

◁52▷ Soit la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + 5.\overrightarrow{j}, 2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} + 3.\overrightarrow{k})$. Combien de familles libres peut on en extraire ? Combien de familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ peut on en extraire ?

◁53▷ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).