LYCEE CHARLEMAGNE

Merdredi 14 mai

M.P.S.I.2

2024 2025

IS27

♡ 0 ♡ Montrez que $z \longmapsto \overline{z}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C},+,.)$ vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel, et donnez sa trace et son déterminant. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que $z \longmapsto \overline{z}$ est n'est pas un endomorphisme de $(\mathbb{C},+,.)$ vu comme $\mathbb{C}$ espace vectoriel 1 pt.

♡ 2 ♡ Montrez que $z \longmapsto (1+2.i).z+(1-i).\overline{z}$ est un endomorphisme de $(\mathbb{C},+,.)$ vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel, et donnez sa trace et son déterminant. 2 pt.

♡ 3 ♡ Montrez que les matrices bistochastiques ne forment pas un sous espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$. 1 pt.

Comme ça, je pourra enfin rendre à Solal la semaine prochaine le devoir sur les matrices stochastiques : l'I.S.27.

♡ 4 ♡ Montrez que deux matrices carrées semblables de même format ont le même polynôme caractéristique. 3 pt.

♡ 5 ♡ Enoncez le théorème des bornes atteintes. 1 pt.

♡ 6 ♡ Montrez que le théorème des valeurs intermédiaires implique le théorème des bornes atteintes. 1 pt.

♢ 0 ♢ Montrez que $P(X) \longmapsto X^3.P\left(\frac{1}{X}+1\right)$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$. Donnez sa matrice sur la base canonique et calculez son déterminant. 4 pt.

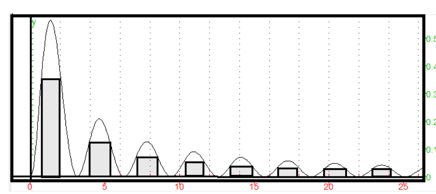
♢ 1 ♢ Le constructeur est

```
def matrik(n, a, b) : #int, float, float -> list of list of float
....M = [[0 for k in range(n)] for n in range(n]
....for i in range(n) :
........M[i][i] = a
........M[i][n-i-1] = b
....return M
```

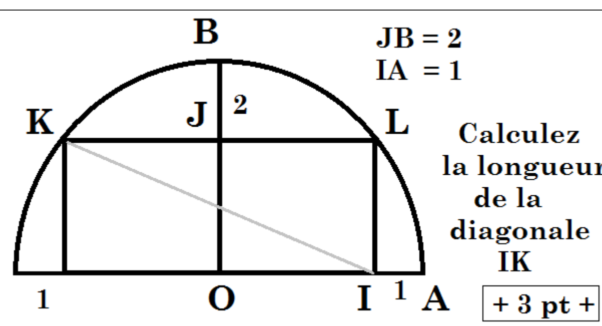
Donnez la matrice `matrik(n, a, b)` ainsi construite pour n de 0 à 5 (inclus), ainsi que son déterminant. 4 pt.
Calculez son déterminant pour n quelconque. 3 pt.

Montrez que l'application $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{t^2+1}.dt$ est croissante, majorée sur $[0,\ +\infty[$. 2 pt.

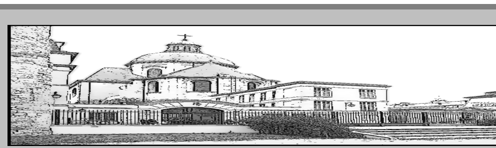
Montrez que l'application $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{t^2+1}}.dt$ est croissante, non majorée sur $[0,\ +\infty[$. 3 pt.



Montrez que $u = t \longmapsto t.\cos(\ln(t))$ et $v = t \longmapsto t.\sin(\ln(t))$ sont solutions sur $]0,\ +\infty[$ de l'équation différentielle $\forall t > 0,\ t^2.f''(t) - t.f'(t) + 2.f(t) = 0$ d'inconnue f (équation notée (E)). Montrez que si f est solution de l'équation (E), alors pour tout réel a strictement positif, l'application $t \longmapsto f(a.t)$ (notée f_a) est solution de (E). En admettant que l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E) est de dimension 2, donne la trace et le déterminant de $f \longmapsto f_a$. 6 pt.



LYCEE CHARLEMAGNE
Merdredi 14 mai
M.P.S.I.2



2024 2025
IS27
CORRECTION

IS27 Endomorphisme (ou pas) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

L'application $z \longmapsto \overline{z}$ va bien de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (et $\mathbb{C}$est un espace vectoriel).
On se donne ensuite z et z' (complexes) puis λ et μ (réels).
$\overline{\lambda.z+\mu.z'}$ est bien égal à $\lambda.\overline{z}+\mu.\overline{z'}$.

Ensuite, on calcule les images de 1 et i (deux vecteurs de base). On a la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
La trace est nulle et le déterminant vaut -1.

On recommence avec $z \longmapsto (1+2.i).z+(1-i).\overline{z}$ qui va bien de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Pour la linéarité, en introduisant encore deux complexes et deux réels et en comparant

$$(1+2.i).(\lambda.z+\mu.z')+(1-i).\overline{(\lambda.z+\mu.z')} \text{ et } \lambda.\big((1+2.i).z+(1-i).\overline{z}\big)+\mu.\big((1+2.i).z'+(1-i).\overline{z'}\big)$$

Tout ce qu'il faut penser à faire : dire que λ est égal à $\overline{\lambda}$.
Tout ce qu'il ne faut pas faire : écrire $z = x+i.y$ ce qui fait perdre un temps fou et montre qu'on reste le nez dans ses ornières sans chercher à grandir un peu un jour.

On calcule les images des deux vecteurs de la base canonique $\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & (1+2.i) & + & (1-i) \\ i & \longrightarrow & (i-2) & + & (-i-1) \end{array}$.

$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	trace	2
	déterminant	3

Erreur possible : je mets des i dans la matrice alors que i n'est pas un coefficient mais un vecteur.

Enfin, $z \longmapsto \overline{z}$ n'est plus linéaire si les coefficients λ sont pris dans $\mathbb{C}$: $\overline{\lambda.z} \neq \lambda.\overline{z}$ en général.
On donne un contre-exemple avec $z = 1$ et $\lambda = i$.

IS27 Questions de cours.

Les matrices bistochastiques ne forment pas un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ car on n'y trouve même pas la matrice nulle.
Et on n'a pas de stabilité par addition (les sommes en ligne valent 2).

Il me reste un doute en dimension 0. L'espace des matrices vides contient il la matrice nulle vide. Et cette matrice vide est elle bistochastique ?

Soit $[a,\ b]$ un segment de $\mathbb{R}$. Toute application continue f de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ est alors bornée et atteint ses bornes.

$$\exists(\alpha\ \beta) \in [a,\ b]^2,\ \forall x \in [a,\ b],\ f(\alpha) \leqslant f(x) \leqslant f(\beta)$$

Quant à savoir si le théorème des valeurs intermédiaires implique celui des bornes atteintes, c'est oui.
Cette affirmation est de la forme $TVI \Rightarrow BA$ avec TVI vrai et BA vrai.
L'implication $\boxed{Vrai \Rightarrow Vrai}$ est vraie.

Mais elle n'indique aucun lien de cause à effet.

On se donne deux matrices carrées de même format A et B. On les suppose semblables, c'est à dire qu'on suppose qu'il existe P inversible de même format vérifiant $A = P.B.P^{-1}$.

On calcule alors
$$\begin{array}{rcl}\chi_A(\lambda) & = & \det(A-\lambda.I_n)\\ & = & \det(P.B.P^{-1}-\lambda.I_n)\\ & = & \det(P.B.P^{-1}-\lambda.P.I_n.P^{-1})\\ & = & \det(P.(B-\lambda.I_n).P^{-1})\\ & = & \det(P).\det(B-\lambda.I_n).\det(P^{-1})\\ & = & \det(P).\det(P^{-1}).\det(B-\lambda.I_n) \quad = \quad 1.\chi_B(\lambda)\end{array}$$

IS27 Endomorphisme sur les polynômes.

Si $P(X)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, qu'est ce qui assure que $X^3.P\Big(\dfrac{1}{X}+1\Big)$ est aussi un polynôme ?

Il y a quand même ces $\dfrac{1}{X}$.

Posons alors $P(X)=a.X^3+b.X^2+c.X+d$ et calculons (en notant f la transformation)

$$f(P(X)) = X^3.a.\Big(\frac{1}{X}+1\Big)^3 + X^3.b.\Big(\frac{1}{X}+1\Big)^2 + X^3.c.\Big(\frac{1}{X}+1\Big) + X^3.d$$

$$f(P(X)) = X^3.a.\Big(\frac{1}{X^3}+\frac{3}{X^2}+\frac{3}{X}+1\Big) + X^3.b.\Big(\frac{1}{X^2}+\frac{2}{X}+1\Big)^2 + X^3.c.\Big(\frac{1}{X}+1\Big) + X^3.d$$

$$f(P(X)) = X^3.(a+b+c+d) + X^2(3.a+2.b+c) + X.(3.a+b) + (a)$$

On a un polynôme, et son degré ne dépasse pas 3.

Et la linéarité ? On doit juste vérifier en se donnant P et Q et deux réels λ et μ.

On compare alors $X^3.\Big(\lambda P\Big(\dfrac{1}{X}+1\Big)+\mu.Q\Big(\dfrac{1}{X}+1\Big)\Big)$ et $\lambda.\Big(X^3.P\Big(\dfrac{1}{X}+1\Big)\Big)+\mu.\Big(X^3.Q\Big(\dfrac{1}{X}+1\Big)\Big)$.

Il y a égalité.

On a deux approches pour la matrice sur la base canonique (c'est $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$).

On calcule les quatre image :

1	$\longrightarrow$	X^3	$0+0.X+0.X^2+1.X^3$
X	$\longrightarrow$	$X^3.\Big(\frac{1}{X}+1\Big)$	$0+1.X+1.X^2+1.X^3$
X^2	$\longrightarrow$	$X^3.\Big(\frac{1}{X^2}+\frac{2}{X}+1\Big)$	$0+1.X+2.X^2+1.X^3$
X^3	$\longrightarrow$	$X^3.\Big(\frac{1}{X^2}+\frac{2}{X}+1\Big)$	$1+3.X+3.X^2+1.X^3$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&3\\0&1&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Autre point de vue : on reprend la formule

$$d+c.X+b.X^2+a.X^3 \longrightarrow (a)+(3.a+b).X+(3.a+2.b+c).X^2+(a+b+c+d).X^3$$

qui donne en version « composantes sur la base canonique »

$$\begin{pmatrix}d\\c\\b\\a\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}a\\b+3.a\\c+2.b+3.a\\d+c+b+a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&3\\0&1&2&3\\1&1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}d\\c\\b\\a\end{pmatrix}$$

La question « trace et déterminant » devient un cadeau

trace	déterminant
3	1

IS27 Un constructeur de matrices.

On commence par créer visiblement une liste de liste de taille n sur n dont tous les coefficients valent 0.

Ensuite, on affecte à tous les `M[i][i]` la valeur a (diagonale de a).

Et on affecte à tous les `M[i][n-i-1]` la valeur b : $m_0^{n-1}=b$, ${}_1^{n-2}=b$ jusqu'à $m_{n-1}^0=b$. On a cette fois l'autre diagonale remplie de b.

On pourrait écrire en taille n : $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{pmatrix}$ mais il reste une ou deux ambigüités.

> *Que donne la matrice pour $n = 0$? En maths, la matrice est vide. Et avec Python, toutes les boucles for le sont aussi.*
> *La matrice est effectivement `[ ]` (et même pas `[[ ] ]`).*

Mais il reste aussi le problème des formats impairs. Qui est « au milieu de la matrice, là où les diagonales se croisent ». Est-ce a ou b ?
Mais en fait, il n'y a pas de problème.
Les instructions se succèdent, et par exemple pour $n = 5$, on passe par la valeur i=2 das la boucle et on affecte M[2][2] = a, puis M[2][5-2-1] =b. La valeur a est écrasée, et il ne reste que le b.

On résume et on calcule tout de suite les déterminants (avec la convention « matrice vide donne déterminant 1 »)

n	0	1	2	3	4	5
matrice	$()$	$\begin{pmatrix} b \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$
déterminant	1	b	$a^2 - b^2$	$b.(a^2 - b^2)$	$(a^2 - b^2)^2$	$b.(a^2 - b^2)^2$

On note Δ_n le déterminant obtenu.
On affirme $\Delta_{2.n+1} = b.\Delta_{2.n}$en développant par rapport à la colonne du milieu (le facteur b est sur la diagonale, coefficient $+1$).
On affirme aussi $\Delta_{2.n} = (a^2 - b^2)^n$ par récurrence sur n.
C'est initialisé, et on passe de $\Delta_{2.n}$ à $\Delta_{2.n+2}$ en développant $\Delta_{2.n+2}$ par rapport à sa première colonne puis par rapport à sa dernière colonne

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = a. \begin{vmatrix} & & & & \\ a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & a & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} + (-1)^{2.n+1}.b. \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 \\ b & 0 & \dots & a & 0 \\ & & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = a.a. \begin{vmatrix} & & & \\ a & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ b & 0 & \dots & a \\ & & & \end{vmatrix} + (-1)^{2.n+1}.b.(-1)^{2.n-1+1}.b. \begin{vmatrix} & & & \\ a & 0 & \dots & b \\ 0 & a & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ b & 0 & \dots & a \\ & & & \end{vmatrix}$$

Mais il y a plus classe.
On réordonne les lignes. Et les colonnes.

Et on a une matrice par blocs $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & a \end{pmatrix}$

On étudie u et ses dérivées

$u(t)$	$t.\cos(\ln(t))$			$v(t)$	$t.\sin(\ln(t))$	
$u'(t)$	$1.\cos(\ln(t))$	$-t.\frac{1}{t}.\sin(\ln(t)$		$v'(t)$	$1.\sin(\ln(t))$	$+\cos(\ln(t)$
$u''(t)$	$-\frac{1}{t}.\sin(\ln(t))$	$+\frac{1}{t}.\cos(\ln(t))$		$v''(t)$	$\frac{1}{t}.\cos(\ln(t))$	$-\frac{1}{t}.\sin(\ln(t))$

On multiple la première ligne par 2, la deuxième par $-t$ et la dernière par t^2.
Tout passe bien.
On a deux solutions.

Anticipons sur la suite :
ces deux solutions sont non proportionnelles (et ne me dites pas « sauf en $t = \dots$ », ça n'a aucun sens, on parle de fonctions).
elles forment donc une famille libre de cardinal 2
on nous dit que l'espace vectoriel E est de dimension 2
on a donc une base de E.

L'opérateur proposé prend une fonction et crée une nouvelle fonction, toujours définie sur $]0, +\infty[$.
Reste à établir que la nouvelle fonction est encore solution de l'équation différentielle.
On dérive $f_a(t) = f(a.t)$, $(f_a)'(t) = a.f'(a.t)$ et $(f_a)''(t) = a^2.f''(a.t)$

$$t^2.(f_a)''(t) - t.(f_a)'(t) + 2.f_a(t) = a^2.t^2.f''(a.t) - a.t.f'(a.t) + f(a.t) = (a.t)^2.f''(a.t) - (a.t).f'(a.t) + 2.f(a.t)$$

et ceci vaut 0 car la relation $T^2.f''(T) - T.f'(T) + f(T) = 0$ est vraie en tout point T du demi axe réel (ici, $T = a.t$).

Pour la linéarité, on se donne f et g et on compare $(\lambda.f + \mu.g)_a$ et $\lambda.f_a + \mu.g_a$ (qui n'est autre que $t \longmapsto \lambda.f(a.t) + \mu.f(a.t)$).

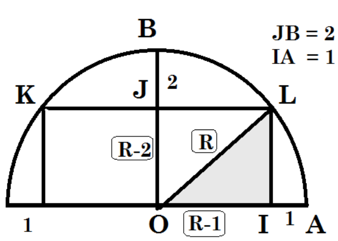
Maintenant, on regarde l'application $f \longmapsto f_a$ en ne regardant que nos deux vecteurs de base : u_a et v_a.

Par définition,
$$\begin{array}{rcl} u_a & = & t \longmapsto a.t.\cos(\ln(a.t)) \\ u_a & = & t \longmapsto a.t.\cos(\ln(t) + \ln(a)) \\ u_a & = & t \longmapsto a.t.\cos(\ln(t)).\cos(\ln(a)) \quad -a.t.\sin(\ln(t)).\sin(\ln(a)) \\ u_a & = & a.\cos(\ln(a)).u \quad -a.\sin(\ln(a).v \\ v_a & = & a.\sin(\ln(a)).u \quad +a.\cos(\ln(a).v \end{array}$$

On trouve la matrice $\begin{pmatrix} a.\cos(\ln(a)) & a.\sin(\ln(a)) \\ -a.\sin(\ln(a)) & a.\cos(\ln(a)) \end{pmatrix}$

trace	$2.a.\cos(\ln(a))$
déterminant	a^2

IS27 Un peu de géométrie.



On note R le rayon du cercle. On applique le théorème de Pythagore dans le triangle (O I L). L'équation du second degré permet de trouver R, puis de calculer la diagonale IK (encore Pythagore).

On nomme R le rayon du cercle (présent en OA, OB et OL).
Par soustraction : $OI = R - 1$ et $OJ = R - 2$.
Par théorème de Pythagore dans $(O\ I\ L)$: $(R-2)^2 + (R-1)^2 = R^2$.
On développe, simplifie et résout : R vaut 1 ou 5.
Mais si R vaut 1, la figure n'a pas de sens avec $R - 2$. C'est donc que R vaut 5.
Le triangle rectangle $(I\ L\ K)$ a alors pour côtés $IL = 5 - 2$ et $KL = 2.(5 - 1)$.

L'application du théorème de Pythagore et néanmoins numérique [1] donne $\boxed{IK = \sqrt{73}}$

IS27 Intégrales.

Par continuité, chaque intégrale $\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt$ et $\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt$ existe.

Par positivité de la fonction sous le signe somme, chacune de ces applications est croissante.

1. je ne suis pas peu fier de ce zeugme application du théorème de Pythagore / application numérique

Preuve de physicien : $\left(x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt\right)' = \left(x \longmapsto \frac{\sin^2(x)}{1+x^2}\right)$.
La dérivé est positive, l'application est croissante sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$.

Preuve de matheux : on se donne x et y avec $x < y$ et on calcule la différence

$$\int_0^y \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt - \int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt = \int_x^y \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt \geqslant 0$$

positive en tant qu'intégrale d'une application continue et positive sur un intervalle pris dans le sens croissant.

La preuve de physicien ne contient aucune arnaque, aucune erreur, mais utilise deux gros théorèmes pour y arriver.
La preuve du matheux n'utilise que la relation de Chasles et la positivité de l'intégrale...

Pour tout x on majore puis on intègre

$$\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{1+t^2}.dt = [Arctan(t)]_{t=0}^x = Arctan(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Majorer par $Arctan(x)$ ne suffit pas puisque cette quantité dépend encore de x.
Prétendre calculer l'intégrale est avoir la naïveté de celui qui se dit « elle m'a souri, c'est qu'elle est amoureuse de moi » quand une fille cligne des yeux juste à cause d'un éclairage violent.

Pour l'autre, on peut majorer, mais cette fois, le majorant fonction de x n'a pas de limite finie

$$\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt \leqslant \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.dt = [\ln(t+\sqrt{t^2+1}]_{t=0}^x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

Mais ça ne prouve rien, sauf si on est aussi con que celui qui achète des bit-coins sur les conseils d'un type rencontré chez ds amis.
Et en plus, il faut connaître une primitive pas si usuelle que ça dans un autre cours que celui de maths.

Cela dit, $\sqrt{1+t^2}$ peut se comparer à $1+t$ et $\frac{1+t}{2}$ qui vont permettre des intégrations plus simples.

Alors on minore ? Mais le seul minorant spontané est 0.

Une piste : Cauchy et Schwarz

$$\int_0^x \frac{\sin(t)}{\sqrt{1+t^2}}.\sin(t).dt \leqslant \sqrt{\int_0^x \frac{\sin^2(t)}{1+t^2}.dt}.\sqrt{\int_0^x \sin^2(t).dt} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}.\sqrt{\int_0^x \frac{1-\cos(t)}{2}.dt}$$

Mais là encore, on majore par quelquechose qui diverge (rappel : $\int_0^x \sin^2(t).dt = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2.x)}{4}$), et ceci ne permet pas de conclure.

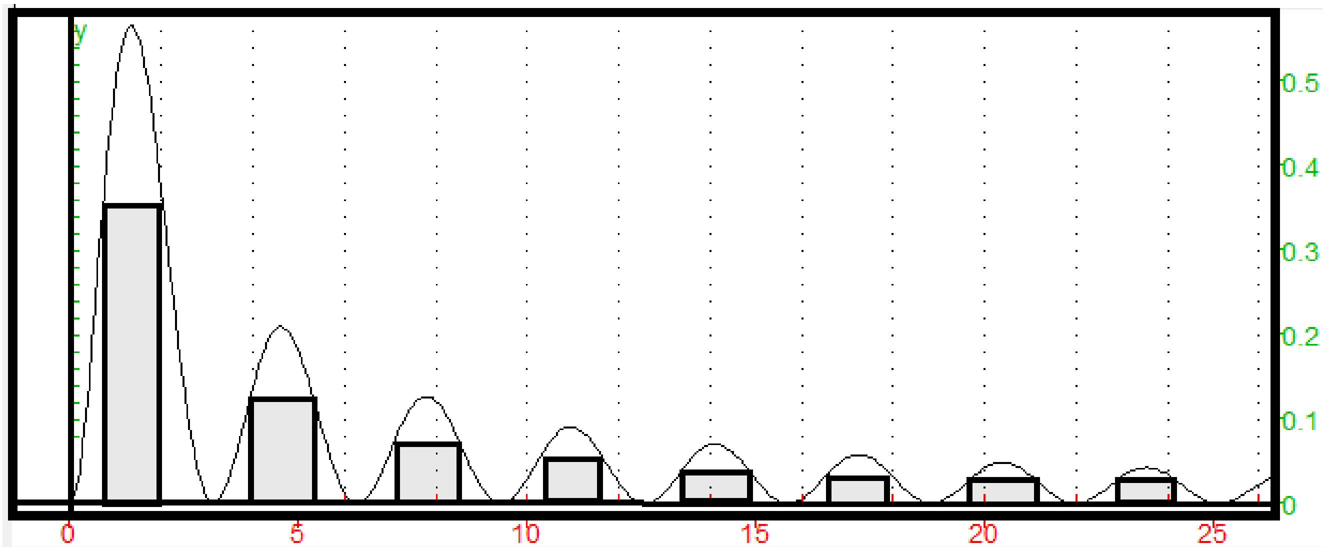
Une piste : découper et mettre en valeur des intervalles sur lesquels le sinus est « loin de 0 ».
On se donne n et on regarde simplement

$$\int_0^{n.\pi} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k.\pi}^{(k+1).\pi} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k.\pi+\frac{\pi}{3}}^{(k+1).\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt$$

en comparant avec des intervalles plus petits (on laisse tomber des morceaux positifs)

$$\int_0^{n.\pi} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k.\pi+\frac{\pi}{3}}^{(k+1).\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{3/4}{\sqrt{1+t^2}}.dt$$

en minorant le sinus sur ces intervalles centrés sur des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$.



On continue les minorations en regardant la plus faible valeur (à droite de chaque intervalle)

$$\int_0^{n.\pi} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k.\pi+\frac{\pi}{3}}^{(k+1).\pi-\frac{\pi}{3}} \frac{3/4}{\sqrt{1+((k+1).\pi)^2}}.dt$$

Bref, avec des aires de petits rectangles

$$\int_0^{n.\pi} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1+t^2}}.dt \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{3}.\frac{3/4}{\sqrt{1+((k+1).\pi)^2}}$$

Et cette fois, le minorant se compare à la série harmonique et diverge vers l'infini.