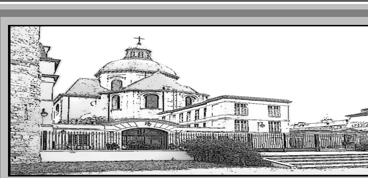
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 19 mai
$\mathcal{M.P.S.I.}2$



2024 2025

TD28

◁0▷ - a - Soit $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$. Montrez que la translation $\tau = \Big(f \longmapsto \big(t \longmapsto f(t+1)\big)\Big)$ est un endomorphisme de $(E, +, .)$, donnez sa trace ou son déterminant (ne cherchez pas les racines de l'équation caractéristique, on n'en a pas besoin, mais attention, deux d'entre elles sont complexes conjuguées).
- b - Montrez que la dérivation d est un endomorphisme de E et calculez sa trace et son déterminant.
- c - Justifiez : $\tau \circ d = d \circ \tau$.
- d - Montrez que $(f,\ g) \longmapsto f(0).g(0) + f'(0).g'(0) + f''(0).g''(0)$ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$. Existe-t-il une base orthonormée de $(E, +, .)$ pour ce produit scalaire ?
- e - Trouvez une équation différentielle linéaire dont l'espace des solutions contient tous les carrés des éléments de $(E, +, .)$.

L'équation différentielle $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$ admet des solutions de la forme $t \longmapsto a.e^{\lambda_1.t} + b..e^{\lambda_2.t} + +c..e^{\lambda_3.t}$. On a un espace vectoriel de dimension 3, engendré par trois fonctions exponentielles. En tout cas, sur $\mathbb{C}$.
Si y_t est solution, alors $y_t^{(3)} + 3.y_t'' + 2.y_t' + 5.y_t = 0$ pour tout t. Comme t est aussi quelconque que $t+1$, on a $y_{t+1}^{(3)} + 3.y_{t+1}'' + 2.y_{t+1}' + 5.y_{t+1} = 0$ pour tout t.
D'ailleurs, on écrit la matrice de cette application sur la base des $t \longmapsto e^{\lambda.t}$. Pour un tel vecteur $\overrightarrow{e}$, on a $\tau(e) = (t \longmapsto e^{\lambda.(t+1)}) = (t \longmapsto e^{\lambda}.e^{\lambda.t})$.
La matrice cherchée est donc $\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} \end{pmatrix}$.
On ne connait aucun des λ_i , racines de l'équation caractéristique $\lambda^3 + 3.\lambda^2 + 2.\lambda + 5 = 0$.
Mais au moins, on calcule le déterminant : $e^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} = e^{-3}$.

Ah, au fait, $\tau(f+g) = (t \longmapsto f(t+1) + g(t+1)) = (t \longmapsto f(t+1)) + (t \longmapsto g(t+1)) = \tau(f) + \tau(g)$.
De même $\tau(\mu.f) = \mu.\tau(f)$.
Mais il est aisé sur ce type de question d'écrire des choses sans queue ni tête comme $\tau \circ f$ ou $\tau(f(t))$. En revanche, $(\tau(f))(t)$a bien du sens, c'est $f(t+1)$.

La dérivation est linéaire. C'est un endomorphisme de $(E, +, .)$ car si on a $y^{(3)} + 3.y'' + 2.y' + 5.y = 0$, on a aussi $y^{(4)} + 3.y^{(3)} + 2.y'' + 5.y' = 0$ juste en dérivant.
Pour ce qui est de la matrice : $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$. Sa trace vaut -3 *(somme des racines)* et son déterminant -5 *(produit des racines)*.

Mais au fait, comme il y a des racines complexes, est ce que cela change quelquechose à nos matrices ? On a un spectre de la forme $[\lambda,\ \mu + i.\omega,\ \mu - i.\omega]$.
Si on veut à tout prix travailler sur $\mathbb{R}$, on crée une base avec $t \longmapsto e^{\lambda.t}$ et $t \longmapsto e^{\mu.t}.\cos(\omega.t)$ et $t \longmapsto e^{\mu.t}.\sin(\omega.t)$.
La dérivation a pour matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \omega \\ 0 & -\omega & \mu \end{pmatrix}$. La trace vaut $\lambda + 2.\mu$, c'est toujours la somme des racines.
Le déterminant vaut $\lambda.(\mu^2 + \omega^2)$. C'est encore le produit des racines.
Pour la translation, on aura $\begin{pmatrix} e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\mu}.\cos(\omega) & e^{\mu}.\sin(\omega) \\ 0 & -e^{\mu}.\sin(\omega) & e^{\mu}.\cos(\omega) \end{pmatrix}$ et j'espère que vous aurez reconnu $e^{\mu+\mu.t}.\cos(\omega + \omega.t)$ et les formules en $\cos.\cos - \sin.\sin$.
Le déterminant vaut alors $e^{\lambda}.e^{2.\mu}$ et c'est bien $e^{\lambda+(\mu+i.\omega)+(\mu-i.\omega)}$ qui donne e^{-3}.

La formule $\tau \circ d = d \circ \tau$ doit se vérifier sur toute fonction :
pour $\tau \circ d(f)$, on applique τ à $d(f)$ c'est à dire à f' ; on trouve $t \longmapsto f'(t+1)$
pour $d \circ \tau(f)$, on applique d à $\tau(f)$ c'est à dire qu'on dérive $t \longmapsto f(t+1)$; on trouve aussi $t \longmapsto f'(t+1)$
On notera que si on avait pris $d \circ \gamma$ et $\gamma \circ d$, avec $\gamma = t \longmapsto f(2.t)$, on n'aurait pas obtenu la même chose.
C'est pourquoi la formule $(f(2.t))'$ est bien trop ambigüe.

Pour f et g solutions de l'équation différentielle, le réel $f(0).g(0)+f'(0).g'(0)+f''(0).g''(0)$ existe *(les éléments de $(E,+,.)$ sont de classe C^∞)*.
Par commutativité de la multiplication, cette forme est symétrique.
Pour la bilinéarité, on se donne f, g et h ainsi que μ et on compare

$$f(0).(\mu.g)(0)+f'(0).(\mu.g)'(0)+f''(0).(\mu.g)''(0)$$

et

$$f(0).g(0)+f'(0).g'(0)+f''(0).g''(0)$$

puis on compare

$$f(0).(g+h)(0)+f'(0).(g+h)'(0)+f''(0).(g+h)''(0)$$

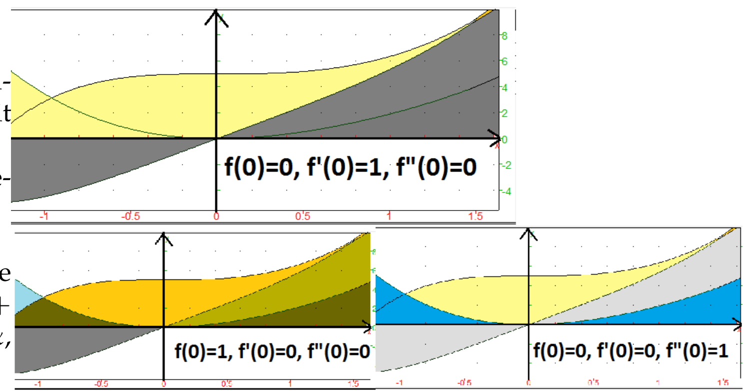
et une autre somme.
On se donne un seul élément f, la somme $\big(f(0)\big)^2+\big(f'(0)\big)^2+\big(f''(0)\big)^2$ est positive *(somme de carrés de réels)*.
Allons plus loin, on se donne f et on suppose $\big(f(0)\big)^2+\big(f'(0)\big)^2+\big(f''(0)\big)^2=0$. On a alors classiquement $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ *(simple : $0\leqslant f(0)^2\leqslant \big(f(0)\big)^2+\big(f'(0)\big)^2+\big(f''(0)\big)^2=0$ et on peut conclure par antisymétrie)*.
De là à conclure que f est nulle ?
Mais f est dans $(E,+,.)$, donc de la forme $t\longmapsto a.e^{\lambda_1.t}+b.e^{\lambda_2.t}+c.e^{\lambda_3.t}$. Le lot de conditions donne $a+b+c=0$, puis $\lambda_1.a+\lambda_2.b+\lambda_3.c=0$ et enfin $(\lambda_1)^2.a+(\lambda_2)^2.b+(\lambda_3)^2.c=0$. Le système est digne de VanDerMonde, et son unique solution est $a=b=c=0$ d'où $f=0$.

On veut des applications f, g et h vérifiant un lot de conditions comme $f(0).g(0)+f'(0).g'(0)+f''(0).g''(0)=0$, $f(0).h(0)+f'(0).h'(0)+f''(0).h''(0)=0$ et

$$\big(f(0)\big)^2+\big(f'(0)\big)^2+\big(f''(0)\big)^2=1$$

Le choix est vaste.

Mais Il y a une piste. Raisonner façon « base canonique ». Si on demandait
$\begin{array}{lll} f(0)=1 & g(0)=0 & h(0)=0 \\ f'(0)=0 & g'(0)=1 & h'(0)=0 \\ f''(0)=0 & g''(0)=0 & h''(0)=1 \end{array}$? Ce serait efficace !
Or, pour tout triplet (α,β,γ) imposé, il existe une solution $t\longmapsto a.e^{\lambda.t}+b.e^{\mu.t}.\cos(\omega.t)+c.e^{\mu.t}.\sin(\omega.t)$ (notée f) vérifiant $f(0)=\alpha$, $f'(0)=\beta$ et $f''(0)=\gamma$.
Il existe donc de telles application.



On veut que les carrés des fonctions soient solutions. Ceci force le nouvel espace vectoriel à contenir $t\longmapsto (e^{\lambda_i.t})^2$, c'est à dire chaque $t\longmapsto e^{2.\lambda_i.t}$.
On est tenté de demander juste un ordre 3 dont l'équation caractéristique ait pour racines les carrés des λ_i .
Mais si on part d'une combinaison $(t\longmapsto a.e^{\lambda_1.t}+b.e^{\lambda_2 t}+c.e^{\lambda_3.t})^2$ on voit qu'on attend aussi les $t\longmapsto e^{(\lambda_1+\lambda_2).t}$ à cause des double produits.
On va donc demander une équation caractéristique dont les racines soient non seulement les $2.\lambda_i$ mais aussi les $\lambda_i+\lambda_j$.
On va donc avoir besoin du degré 6.On crée le polynôme caractéristique :

$$X^6-(2.\lambda_1+2.\lambda_2+2.\lambda_3+\lambda_1.\lambda_2+\lambda_1.\lambda_3+\lambda_2.\lambda_3).X^5+(\ldots).X^4-(\ldots).X^3+(\ldots).X^2-(\ldots).X+(\ldots)$$

et il reste du travail avec les formules de Viète.

◁1▷ ♡ Montrez que selon que vous regardez $(\mathbb{C}^3,+,.)$ comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ou un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, la famille
$\left(\begin{pmatrix}1+i\\ i\\ 1-i\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 1-i\\ 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+4.i\\ 2-3.i\\ 0\end{pmatrix}\right)$ est libre ou liée.

Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $(\mathbb{C}'',+,.)$ de dimension 3 (base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$), cette famille est liée, car de

cardinal 4.
Si on y tient :

$$(15-13.i).\begin{pmatrix}1+i\\ i\\ 1-i\end{pmatrix}+(-26+6.i).\begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 1\end{pmatrix}+(12+11.i).\begin{pmatrix}0\\ 1-i\\ 2\end{pmatrix}-2.\begin{pmatrix}1+4.i\\ 2-3.i\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

Dans le $\mathbb{R}$−espace vectoriel $(\mathbb{C}^3,+,.)$ (base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix}\right)$), la famille peut être libre (on n'en sait rien à l'avance), mais ne sera pas une base.
On se donne quatre réels a, b, c et d et on suppose que

$$a.\begin{pmatrix}1+i\\ i\\ 1-i\end{pmatrix}+b.\begin{pmatrix}1\\ 1+i\\ 1\end{pmatrix}+c.\begin{pmatrix}0\\ 1-i\\ 2\end{pmatrix}+d.\begin{pmatrix}1+4.i\\ 2-3.i\\ 0\end{pmatrix}$$

est nul. On identifie par composante :

$$\begin{array}{rrrrcl} a.(1+i) & +b & & +d.(1+4.i) & = & 0\\ a.i & +b.(1+i) & +c.(1-i) & +d.(2-3.i) & = & 0\\ a.(1-i) & +b & +2.c & & = & 0\end{array}$$

On identifie sachant que les coefficients sont réels :

$$\begin{array}{rrrrcl} a & +b & & +d & = & 0\\ & b & +c & +2.d & = & 0\\ a & +b & +2.c & & = & 0\end{array}\quad \text{puis}\quad \begin{array}{rrrrcl} a.i & & & +4.d..i & = & 0\\ a.i & +b.i & -c.i & +3.d.i & = & 0\\ -a.i & & & & = & 0\end{array}$$

On trouve $a=b=c=d=0$. C'est la liberté.

◃2▹ Soit M une matrice carrée. On note P son polynôme caractéristique. On suppose que M est diagonalisable (semblable à D). Montrez $P(D)=0$ et $P(M)=0$.

◃3▹ -a- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{j})$ en le donnant sous la forme $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\dots\\ \dots\end{pmatrix}$.
-b- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$.
-c- Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$.
-d- Pouvez vous construire un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?
-e- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?
-f- Pouvez vous construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j})$?

On va plutôt donner des matrices *(sur la base canonique)*.
Pour −a−, on demande que la somme des deux colonnes soit nulle. Et que les colonnes soient de la forme $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$.
On trouve par exemple $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ ou un de ses multiples.

Pour −b− : $\begin{pmatrix}a & b\\ 2.a & 2.b\end{pmatrix}$ pour l'image et $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ pour le noyau.

Pour −c− on a beaucoup de possibilités. On peut remplir les deux premières colonnes avec une base de l'image : $\begin{pmatrix}1 & 1 & ?\\ 2 & 0 & ?\\ 0 & 1 & ?\end{pmatrix}$.
On ajuste alors la troisième pour le noyau : $\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ 2 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$.

Le $-d-$ est une impossibilité à cause de la formule du rang.

Le $-e-$, avec sa condition $Ker = Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ donne déjà que la première colonne est nulle, puis la troisième aussi.

Par exemple $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pour $-f-$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Mais ce n'est pas la seule.

Je vous laisse réfléchir à la forme générale des matrices de la question.

Les deux premières colonnes sont des combinaisons comme $\begin{pmatrix} a+b \\ 2.b \\ 0 \end{pmatrix}$. Et la dernière est combinaison l'opposé de la première.

◁4▷ ♡ f et g sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. On suppose $f \circ g = g \circ f$ *(on dit que f et g sont permutables, et non pas que f et g commutent, mais l'erreur n'est pas grave)*. Montrez :

$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(f),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

Rappel : un raisonnement du type $\forall \overrightarrow{b} \in Im(f)$ commence par « soit $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$; alors il existe $\overrightarrow{a}$ dans E verifiant $\overrightarrow{b}$ =f(\va) , etc ».

Je ne l'ai pas mis dans le cours, ça ?

Alors on y va. Tout ce qu'on pourra utilise c'est $f \circ g = g \circ f$.

$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(g)$ (on traduit et on s'en servira : $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$).

On regarde si $f(\overrightarrow{u})$ est encore dans $Ker(f)$. On calcule donc : $g(f(\overrightarrow{u})) = g \circ f(\overrightarrow{u}) = f \circ g(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

On reconnaît $f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$.

$Ker(g)$ est « stable par f ».

Le résultat $\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$ résulte de la symétrie des rôles.

$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(f),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

La question $\forall \overrightarrow{u} \in Ker(f),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$ est idiote : si $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f)$, alors $f(\overrightarrow{u})$ est égal à $\overrightarrow{0}$. Et $\overrightarrow{0}$ est dans $Ker(f)$!

$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

On prend cette fois $\overrightarrow{u}$ dans $Im(g)$. On l'écrit $\overrightarrow{u} = g(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de $(E, +, .)$.

On calculer $f(\overrightarrow{u}) = f(g(\overrightarrow{a})) = g(f(\overrightarrow{a}))$. Quitte à poser $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{a})$, on vient d'écrire $f(\overrightarrow{u})$ sous la forme $g(\overrightarrow{b})$. Il est dans $Im(g)$.

$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Ker(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Ker(f)$
$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$	$\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ f(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$

Quant à $\forall \overrightarrow{u} \in Im(g),\ g(\overrightarrow{u}) \in Im(g)$, c'est vrai. Que $\overrightarrow{u}$ soit dans $Im(g)$ ou pas...

◁5▷ ♡ Sachant $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, montrez que $M \longmapsto M.A - Tr(M).A$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez la dimension de son noyau.

Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Si M est une matrice carrée de taille 2, alors $M.A - Tr(M).A$ est une matrice de taille 2. Le caractère « endo » est établi.

Pour la linéarité, on se donne M et N ainsi que α : $(M+N).A - Tr(M+N).A = M.A - Tr(M).A + N.A - Tr(N).A$
$(\alpha.M).A - Tr(\alpha.M).A = \alpha.(M.A - Tr(M).A)$
Pour le noyau, on résout $M.A - Tr(M).A = 0_{2,2}$ (matrice carrée de taille 2 sur 2) d'inconnue matricielle M.
Mais ceci donne $(M - Tr(M).I_2).A = 0_{2,2}$ et même $M - Tr(M).I_2 = 0_{2,2}$ car A est inversible.
On obtient alors $M = Tr(M).I_2$ et en passant à la trace : $Tr(M) = 2.Tr(M)$; la trace de M est nulle. On reporte : M est nulle.
Le noyau est réduit à $0_{2,2}$.

Il n'était pas utile de redescendre jusqu'aux coefficients, avec des systèmes de quatre équations à quatre inconnues.

Le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est différent car $(M - Tr(M).I_2).A = 0_{2,2}$ ne conduit pas à $M - Tr(M).I_2 = 0_{2,2}$.
Il conduit à des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$. On repart de $M - Tr(M).I_2 = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$.
On passe à la trace (nécessaire, pas forcément suffisant) : $Tr(M) - 2.Tr(M) = a - b$ donc $Tr(M) = b - a$.
On reporte $M = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} + (b-a).I_2 = \begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix}$.
On a trouvé cette forme par conditions nécessaires. On se demande si elles sont suffisantes.
On vérifie : $\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - (b-a).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} b & -a \\ b & -a \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b-a & 2.(b-a) \\ b-a & 2.(b-a) \end{pmatrix} - (b-a).\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
Le noyau est de dimension 2.

◃6▹ ♠ Donnez la limite de $\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.dx$ *(notée I_n)*. Calculez I_0 et I_1. Donnez une relation de récurrence sur la suite I.
Donnez un équivalent en $+\infty$ de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2).dx$.

Chaque I_n existe.
Chaque I_n se minore par 0 et se majore par $\int_0^1 x^n.dx$.
Avec $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$ on a par encadrement $I_n \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.
On note au passage, par soustraction $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}.(x-1).dx$. On déduit que (I_n) décroit.

I_0 vaut $\frac{\pi}{4}$ (arctangente) et I_1 vaut $\frac{\ln(2)}{2}$.

$I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^{n+1}}{1+x^2}.dx = \int_0^1 x^n.dx = \frac{1}{n+1}$.
On peut donc avancer de deux en deux.

◃7▹ ♡ f et g sont linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f) \cap Kar(g) \subset Ker(\alpha.f + \beta.g)$.

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f) \cap Ker(g)$. On traduit : $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$ et $f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0_F}$.
On calcule $(\alpha.f + \beta.g)(\overrightarrow{a}) = \alpha.f(\overrightarrow{a}) + \beta.f(\overrightarrow{a})$ par définition de la somme d'applications.
On remplace : $(\alpha.f + \beta.g)(\overrightarrow{a}) = \alpha.\overrightarrow{0_F} + \beta.\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$.
On reconnaît : $\overrightarrow{a} \in Ker(\alpha.f + \beta.g)$.

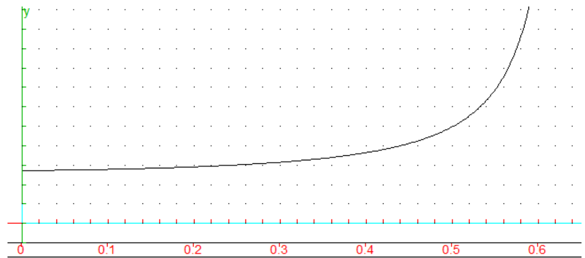
◃8▹ ♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.
b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.
c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\Big(\ln(x)\Big)^{\ln(e-x)}$.
d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\frac{1}{x.\big(x-\ln(x)\big)^x}$.

* ♡ a- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{1+2.\ln(x)}}$.

La fonction n'existe pas en 0 mais sur $\left]0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right[$ elle est C^∞et se met sous la forme $\exp\left(\frac{\ln(x)}{1+2.\ln(x)}\right)$.
Quand x tend vers 0^+, son logarithme tend vers l'infini, et le quotient $\frac{\ln(x)}{1+2.\ln(x)}$ tend vers $\frac{1}{2}$ (équivalent du numérateur et du dénominateur, ou division en haut et en bas par $\ln(x)$).
La quantité cherchée a pour limite $e^{\frac{1}{2}}$ c'est à dire $\sqrt{e}$.

b- Limite en 0 si elle existe de $x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

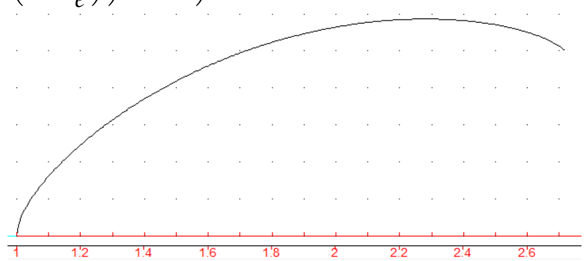
Même retour à l'exponentielle sur un intervalle convenable.



On étudie donc $\frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)} = \frac{\ln(x)}{\ln(x+o(x))} = \frac{\ln(x)}{\ln(x)+\ln(1+o(1))}$.
Ce terme tend vers 1. $\boxed{\exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(e^x-1)}\right) \longrightarrow_{x\to 0^+} e}$

c- Limite en e si elle existe (par valeur inférieure) de $\left(\ln(x)\right)^{\ln(e-x)}$.

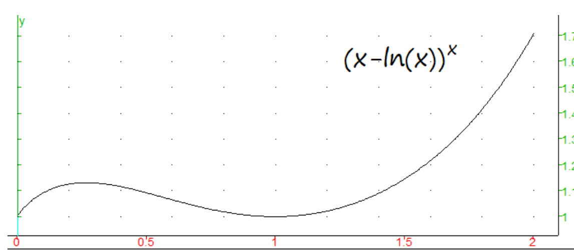
On pose impérativement $x = e-h$ avec h positif qui va tend vers 0.
$\left(\ln(x)\right)^{\ln(e-x)} = \exp\left(\ln\left(\ln(e-h)\right).\ln(h)\right) = \exp\left(\ln\left(1+\ln\left(1-\frac{h}{e}\right)\right).\ln(h)\right)$



Or, $\ln\left(1+\ln\left(1-\frac{h}{e}\right)\right) \sim_{h\to 0^+} \ln\left(1-\frac{h}{e}\right) \sim_{h\to 0^+} -\frac{h}{e}$
et donc $\ln\left(1+\ln\left(1-\frac{h}{e}\right)\right).\ln(h) \sim_{h\to 0^+} -\frac{h.\ln(h)}{2}$ et ceci tend vers 0.
Notre quantité tend vers $\boxed{1}$

d- Limite en 0 si elle existe (par valeur supérieure) de $\frac{1}{x.(x-\ln(x))^x}$.

On va étudier $(x-\ln(x))^x$ ou même son logarithme : $x.\ln(x-\ln(x))$. Dans la parenthèse, c'est $-\ln(x)$ qui l'emporte.
Par souci de rigueur on écrit $x.\ln(x-\ln(x)) = x.\ln\left(-\ln(x).\left(1-\frac{x}{\ln(x)}\right)\right) = x.\ln\left(-\ln(x)\right) + x.\ln.\left(1-\frac{x}{\ln(x)}\right)\right)$
Quand x tend vers 0, $\frac{x}{\ln(x)}$ tend vers 0, et $x.\ln.\left(1-\frac{x}{\ln(x)}\right)\right)$ tend vraiment bien vers 0.



Mais que fait vraiment $x.\ln\left(-\ln(x)\right)$ de la forme $0.\ln(+\infty)$ avec des guillemets ?
Posons $x = e^{-t}$ avec t qui tend vers l'infini. Ce terme devient $e^{-t}.\ln(t)$ et quitte à l'écrire $e^{-t}.t.\frac{\ln(t)}{t}$ il tend vers 0.
Bref : $x.\ln(x-\ln(x))$ tend vers 0 et $(x-\ln(x))^x$ tend vers 1.
La fraction de l'énoncé tend vers l'infini, à la vitesse de $\frac{1}{x}$.
Et l'usage d'une calculatrice graphique est ici utile...

◃9▹ Montrez que $M \longmapsto {}^tM + 2.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Déterminez son noyau. Est-ce un automorphisme.
Montrez que c'est un automorphisme de $(S_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Montrez que c'est un automorphisme de $(A_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Donnez la matrice de cette application sur la base canonique de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ *(attention, elle est de taille 9 sur 9, mais rassurez vous, elle contient beaucoup de 0)*.
Calculez sa trace, et calculez *(sans effort, S.V.P.)* son déterminant.

On prend une matrice carrée et on lui associe une matrice carrée. Ca a un sens.
Et c'est même de $M_3(\mathbb{R})+,.)$ dans lui même : endo.

cette application est linéaire. proprement, il faut quantifier « on se donne M et N, λ et μ » puis on calcule dans le sens de la fusion

$$\lambda.\phi(M)+\mu.\phi(N)=\ldots=\phi(\lambda.M+\mu.N)$$

Sinon, on peut dire que c'est une combinaison de la transposition (linéaire) et de l'identité.

Pour le noyau, on résout ${}^tM+2.M=0$ d'inconnue M.
On peut si on est esprit « P+quelquechose » revenir aux coefficients et résoudre un système de neuf équations à autant d'inconnues.

On peut si on est esprit « M+quelquechose »[1] écrit ${}^tM+2.M=0_{3,3}$ puis transposer : $M+2.{}^tM={}^t0_{3,3}=0_{3,3}$.
Il ne reste qu'à combiner ces deux équations pour aboutir à $M=0_{3,3}$.Le tout sans calcul pour ainsi dire.

Le noyau est réduit à $0_{3,3}$, le morphisme ϕ est injectif.

Mais comme on est en dimension finie avec $\dim(depart)=\dim(arrivee)$ on trouve que ϕ est un isomorphisme (bijectif).

Si on se restreint à $M\in S_3$, on obtient $\phi(M)=3.M$, c'est une homothétie. Automotphisme (réciproque facile à expiciter).

Si on se restreint à $M\in A_3$, on obtient $\phi(M)=M$, c'est une homothétie. Automotphisme (réciproque encore plus facile à expiciter).

On calcule l'image de chaque vecteur de la base canonique

$E_1^1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=3.E_1^1$	$\begin{pmatrix}3&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&2&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&2&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&2&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&3&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&2&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&3\end{pmatrix}$
$E_1^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}0&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2.E_1^2+E_2^1$	
$E_1^3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=2.E_1^3+E_3^1$	
$E_2^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=2.E_2^1+E_1^2$	
$E_2^2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}=3.E_2^2$	
E_2^3	$\longmapsto$	$2.E_2^3+E_3^2$	
E_3^1	$\longmapsto$	$2.E_3^1+E_1^3$	
E_3^2	$\longmapsto$	$2.E_3^2+E_2^3$	
$E_3^3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$	$\longmapsto$	$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}=3.E_3^3$	

Pour agir sur une matrice carrée $\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$, il faut la convertir en un vecteur de taille 9, fait de ses coefficients sur la base cannique.
On le pose sur la matrice caculée au dessus et on trouve les composantes de l'image sur la base canonique. On

1. il ya besoin d'autre chose que M ?

revient ensuite à la forme 3 sur

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \\ g \\ h \\ i \end{pmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{pmatrix} 3.a & 2.b+d & 2.c+g \\ 2.d+b & 3.e & 2.f+h \\ 2.g+c & 2.h+f & 3.i \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice de taille 9 vaut $3.3 + 6.2$ ce qui fait 21.
Pour le déterminant, on dit qu'on a intérêt à travailler sur une autre base.
On prend une base de S_3 suivie d'une base de A_3.

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

Sur cette base, la matrice de l'endomorphisme est $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On retrouve la trace déjà calculée et le déterminant 3^6.

◁10▷ Combien d'endomorphismes de $(P^2, +, .)$ ont pour noyau $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et vérifient $f \circ f = 0$? $(P, +, \times)$ est le corps des entiers de 0 à 10 pour l'addition modulo 11.

On les présente par leur matrice sur la base canonique.

Le noyau nous dit que les deux colonnes doivent être opposées : $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$.

Mais la relation $f^2 = 0$ donne $\begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, mais aussi $Im(f) \subset Ker(f)$ qui est plus facile à raconter : $a = b$.

Ce sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix}$ (on retrouve une trace nulle, normal pour une nilpotente).

On va dire qu'il y a 11 valeurs possibles de 0 à 10.

Mais on refuse la valeur 0 qui donne $Ker(f) = P^2$ et non $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.

Il y a donc dix matrices. par exemple $\begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$.

◁11▷ Connaissez vous le principe mathématique de l'évidence ?

Beh je vous laisse le deviner !

◁12▷ Racines carrées de la dérivation *(oral de concours)*. On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes et D l'endomorphisme de dérivation. On cherche à savoir si il existe un endomorphisme T de E vérifiant $T \circ T = D$ *(racine carrée de la dérivation)*. On suppose qu'un tel endomorphisme T existe. Montrez alors $\{0\} \subset Ker(T) \subset \mathbb{R}_0[X]$.
Déduisez que la dimension de $Ker(T)$ vaut 0 ou 1.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.
Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

On a sû définir la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$ *sur les fonctions dans le cours d'analyse. Celle qui, quand on l'applique deux fois, donne la dérivation classique.*
On a tout fait pour qu'elle soit linéaire. Mais elle a un défaut : elle transforme les polynômes en choses avec des exposants non entiers et des $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ *qui traînent...*
Mais ne peut on rêver de créer une application linéaire qui fasse « la moitié du chemin de la dérivation » ? On veut $T \circ T = (P \longmapsto P')$.

On va montrer par argument de dimensions que c'est impossible.
En gros, la dérivation d'ordre 1 a une noyau de dimension 1 (les constantes), quelle devrait être la dimension du noyau de la dérivation d'ordre $\frac{1}{2}$.
Pour la cohérence aussi, le noyau de $P \longmapsto P''$ est de dimension 2 formé des fonctions affines.

C'est parti. Le cours nous assure que le vecteur nul (ici le polynôme nul) est dans le noyau de T du moment que T est bien un morphisme.
En effet, $T(0) = 0$ par théorème dit de Paris 6.

Ensuite, si P est dans $Ker(T)$, alors on a $T(P) = 0$ et donc $T(T(P)) = T(0) = 0$ (en fait, je devrais écrire 0 avec une flèche au dessus pour bien dire « polynôme nul »).
On reconnaît que P est dans $Ker(T \circ T)$.
Mais comme $T \circ T$ est la dérivation, ceci signifie $P' = 0$. P est donc un polynôme constant.
On a prouvé $P \in Ker(T) \Rightarrow P \in \mathbb{R}_0[X]$.

L'inclusion des espaces se traduit sur les dimensions : $0 = \dim(\{0\}) \leqslant \dim(Ker(T)) \leqslant \dim(\mathbb{R}_0[x]) = 1$.

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 0, alors $Ker(T^2)$ l'est aussi. Concluez.

On suppose donc $\dim(Ker(T)) = 0$, c'est à dire $Ker(T) = \{0\}$.
On s'interroge sur $Ker(T^2)$ sans retourner dire que c'est $Ker(P \longmapsto P')$.
Soit P dans $Ker(T^2)$. On traduit : $T(T(P)) = 0$. On reconnaît $T(P) \in Ker(T)$.
Comme on a supposé $Ker(T) = \{0\}$, ceci donne $T(P) = 0$.
Et en re-commençant : $P = 0$.

En fait, on a aussi directement $(Ker(T) = \{0\}) \Rightarrow (T$ injective$) \Rightarrow (T^2$ injective$) \Rightarrow (Ker(T^2 = \{0\})$.

Mais on avait $Ker(T^2) = \mathbb{R}_1[X]$ d'où contradiction.

$Ker(T)$ ne peut pas être de dimension 0.

Il est donc de dimension 1 ? Beh non..

Montrez que si $Ker(T)$ est de dimension 1, alors $Ker(T^3)$ et $Ker(T^4)$ sont aussi de dimension 1. Concluez.

Si l'on suppose $\dim(Ker(T)) = 1$, alors on a $Ker(T) = \mathbb{R}_0[X] = Ker(T^2)$.[2]

Regardons alors $Ker(T^3)$.
On prend P dans $Ker(T^3)$. On traduit $T^3(P) = 0$ et donc $T^2(T(P)) = 0$.
$T(P)$ est dans $Ker(T^2)$. Mais notre hypothèse sur les dimensions dit $Ker(T^2) = Ker(T)$.
Ayant $T(P) \in Ker(T)$, on a donc $T(T(P)) = 0$ soit $P \in Ker(T^2)$.
On vient de prouver $Ker(T^3) \subset Ker(T^2)$. Et on a toujours $Ker(T^2) \subset Ker(T^2)$.
On vient d'arriver à

$$Ker(T^3) = Ker(T^2) = Ker(T)$$

On poursuit avec un résultat déjà acquis $Ker(T^3) \subset Ker(T^4)$ (facile : $(T^3(P) = 0) \Rightarrow (T(T^3(P)) = 0)$).
On prend P dans $Ker(T^4)$. On traduit : $T^4(P) = 0$ et même $T^2(T^2(P)) = 0$.
On reconnaît $T^2(P) \in Ker(T^2)$.
Mais comme $Ker(T^2)$ est égal à $Ker(T)$, on a donc $T^2(P) \in Ker(T)$.
Ceci se traduit par $T(T^2(P)) = 0$ et P est dans $Ker(T^3)$.

On a donc $Ker(T) = Ker(T^2) = Ker(T^3) = Ker(T^4)$ en ayant juste utilisé $Ker(T) = Ker(T^2)$.

Mais T^4 n'est autre que $P \longmapsto P''$ et il a pour noyau $\mathbb{R}_1[X]$ qui est de dimension 2.
On a une contradiction.

Bref, $Ker(T)$ ne peut être que de dimension 0 ou 1, et chacun des deux cas conduit à une contradiction. On ne peut trouver T vérifiant $T^2 = (P \longmapsto P')$.

---

2. inclusion et égalité des dimensions

Plusieurs parties de cet exercice correspondant au grand classique des noyaux itérés :

$Ker(Id) \subset Ker(f) \subset (Ker(f^2) \subset (Ker(f^3) \ldots \subset Ker(f^n) \subset Ker(f^{n+1}) \subset$
et si à un moment le noyau n'a pas augmenté, il n'augmentera plus.

◁13▷

Sur les trois angles de $(A,\ B,\ C)$, le plus grand angle est le triple du plus petit, et le dernier angle est le double du petit. Que pouvez vous déduire ?

On nomme α, β et γ les trois angles, supposés triés par ordre croissant (symétrie des rôles).

On a alors le système $\begin{array}{llll} \gamma & = 3.\alpha & - & \\ \beta & = 2.\gamma & & \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = \pi \end{array}$. On trouve le triplet $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Un triangle bien connu, celui de votre équerre..

◁14▷

$X^3 + X^2 - 3.X + 1$	$X^2 - 3.X + 2$	$2.X^3 + 3.X^2 + X - 6$	$4.X^3 - 5.X^2 + 1$

Montrez que ces polynômes sont tous nuls en 1. Montrez (astucieusement ?) que la famille est liée.

La première question n'est que calcul.

Pour la seconde, on n'est plus dans $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ de dimension 4.
On est dans un sous-espace strict, celui des polynômes nuls en 0.
Il est donc au mieux de dimension 3.
Et dans cet espace, on a quatre vecteurs. Inutile de chercher d'avantage.

◁15▷

Le but de ce petit (?) problème : étudier les matrices réelles symétriques. On va montrer le théorème spectral : elles se diagonalisent en base orthonormée. On montrera donc que leurs valeurs propres sont réelles, et qu'on peut construire une base faite de vecteurs propres deux à deux orthogonaux et normés pour le produit scalaire usuel sur $(\mathbb{R}^n, +, .)$. On commencera par une étude rapide en dimension 2, puis un exemple en dimension 3. Ensuite, on montre le théorème spectral par récurrence sur la taille des familles faites de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. Le théorème spectral fera partie de votre cours l'an prochain.

I∼0) Montrez que les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique de taille 2 sont réelles.
I∼1) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 5.
I∼2) Pouvez vous construire une matrice réelle symétrique de taille 2 de spectre $\{1,\ 3\}$ dont au moins un coefficient vaut 2.
I∼3) Montrez que la matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique mais non diagonalisable.

II∼0) *On définit :* $M = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$. Donnez son spectre *(indice : il est dans $\mathbb{Z}$).*
II∼1) Trouvez un vecteur propre de norme 1 pour chaque valeur propre. Montrez qu'ils forment alors une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
II∼2) Déduisez l'existence d'une matrice P et d'une matrice D vérifiant $M = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

III∼0) On pose $U = P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculez ${}^tU.M.U$.
III∼1) Trouvez un vecteur normé de $\mathbb{R}^3$ vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$.
III∼2) Trouvez un vecteur normé V_0 vérifiant ${}^tV_0.M.V_0 = 0$ et ${}^tV_0.U_0 = 0$.(calcul atroce)
III∼3) Montrez que $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et montrez que la matrice de f sur cette base a non seulement une trace nulle, mais même une diagonale nulle.(aucun calcul)

IV∼0) $(E,+,.,\phi)$ *est un espace pré-hilbertien*[3]*, dans lequel on a pris deux vecteurs unitaires et orthogonaux* $\overrightarrow{a}$ *et* $\overrightarrow{b}$*. On définit* $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$. Montrez que f est un endomorphisme de E. Donnez son noyau.
IV∼1) Donnez son spectre et ses sous-espaces propres.
IV∼2) Montrez : $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2,\ \phi(f(\overrightarrow{u}),\ \overrightarrow{v}) = \phi(f(\overrightarrow{v}),\ \overrightarrow{u})$.

V∼0) $(\mathbb{R}^n,+,.)$ *est l'espace euclidien muni de son produit scalaire usuel* ϕ*, et* f *est un endomorphisme de* $(\mathbb{R}^n,+,.)$ *de matrice* S *sur la base canonique vérifiant* $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}) \in E^2,\ \phi(\overrightarrow{a},\ f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b},\ f(\overrightarrow{a}))$. Déduisez : ${}^tS = S$.
On pose note D_f *l'ensemble des familles* ϕ*-orthonormées formées de vecteurs propres de* f*.*
V∼1) Montrez que $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme admettant au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Déduisez qu'il existe U et V dans $\mathbb{R}^n$ et μ dans C vérifiant $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$. En montrant ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) ={}^t U.S.U +^t V.S.V = \mu.({}^tU.U +^t V.V)$, montrez que μ est réel, et que U ou V est vecteur propre de S.
V∼2) Déduisez qu'il y a dans D_f des familles de cardinal 1.

VI∼0) *On suppose qu'une famille* $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k})$ *est une famille de* D_f*, avec* $k < n$*. On pose alors* $P = Vect(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k})$ (donnez sa dimension) *et* $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{u}) = 0\}$. Montrez que Q est un espace vectoriel non réduit à $\{\overrightarrow{0}\}$. Montrez : $\forall \overrightarrow{u} \in P,\ f(\overrightarrow{u}) \in P$. Montrez : $\forall \overrightarrow{a} \in Q,\ f(\overrightarrow{a}) \in Q$.
VI∼1) Montrez qu'il existe dans Q au moins un vecteur propre de f de norme 1, noté $\overrightarrow{c}$.
VI∼2) Montrez que $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{c})$ est dans D_f.
VI∼3) Déduisez qu'il existe dans D_f une famille de cardinal n.

TD28 Matrices symétriques de taille 2.

On prend une matrice réelle symétrique de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *(les trois nombres a, b et c sont réels)*.

On écrit son polynôme caractéristique : $X^2 - (a + c).X + (a.c - b^2)$. On en calcule le discriminant : $(a + c)^2 - 4.(a.c - b^2) = (a - c)^2 + 4.b^2$. C'est une somme de carrés de réels, c'est donc un réel positif. On a deux valeurs propres réelles $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2}$ et $\dfrac{a + c + \sqrt{(a-c)^2 + 4.b^2}}{2}$. Mais ce que je préfère encadrer c'est $\boxed{(a - c)^2 + 4.b^2}$ qui est l'argument, et parce que le développement/factorisation $(a + c)^2 - 4.a.c = (a - c)^2$ est à maitriser.

On en veut une de spectre $\{1,\ 3\}$. On pourrait prendre $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Mais il faut qu'au moins un coefficient vaille 5.
C'est quand même jouable si on impose une trace égale à 4 et un déterminant égal à 3 *(relations racines coefficients)*.

- On peut partir de $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & * \end{pmatrix}$ et compléter peu à peu $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} 5 & . \\ . & -1 \end{pmatrix}$ ah non il faut $-5 - a^2 = 3$!
- C'est pareil si on part de $\begin{pmatrix} * & . \\ . & 5 \end{pmatrix}$.
- On recommence $\begin{pmatrix} * & 5 \\ . & * \end{pmatrix}$ puis $\begin{pmatrix} * & 5 \\ 5 & * \end{pmatrix}$ par symétrie ; il faut deux nombres a et b vérifiant $a + b = 4$ et $a.b - 25 = 3$, encore raté.

Bref, c'est impossible.

En revanche avec un coefficient égal à 2 : $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ convient.

La matrice $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ est symétrique, c'est évident. Mais comme elle n'est pas réelle, le théorème spectral ne peut s'appliquer. On va montrer qu'elle n'est pas diagonalisable.

Trace	Déterminant	Polynôme caractéristique	Spectre
2	1	$X^2 - 2.X + 1$	$\{1,\ 1\}$

On trouve un vecteur propre de valeur propre 1 : $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Mais on n'en trouve pas d'autres *(à part ses multiples)*.
On peut même dire que la matrice n'est pas diagonalisable par un bref raisonnement par l'absurde. Si elle l'était, la seule matrice D possible serait $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, mais alors $P.D.P^{-1}$ serait encore I_2, ce qui n'est pas le cas pour M.

3. *espace vectoriel avec un produit scalaire*

A retenir : une matrice de taille 2 ayant une valeur propre double n'est diagonalisable que si elle est déjà diagonale.

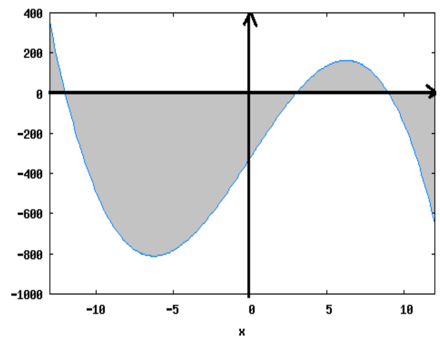
TD28

La matrice $\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

On cherche $\det(M - X.I_3)$. C'est $\begin{vmatrix} -1-X & 8 & -6 \\ 8 & -3-X & 2 \\ -6 & 2 & 4-X \end{vmatrix}$. On développe.

Ou alors on utilise trace *(0)* et déterminant *(−324)*, et somme des mineurs de taille 2 : $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -6 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = -117$. Bref, on trouve : $\boxed{-X^3 + 117.X - 324}$

On cherche les racines.
Pas évident. On ne va quand même pas utiliser les formules de Cardan. Si on profitait de l'indication : les racines sont entières.
Leur produit vaut -324. On factorise $-2.2.3.3.3.3$. Et leur somme est nulle.
On teste donc des racines comme $2, 4, 3, 6, 9$.
On trouve déjà 3. On factorise : $(3 - X).(X^2 + 3.X - 108)$. On résout cette fois l'équation de degré 2. On trouve le spectre : $\boxed{\{3,\ 9,\ -12\}}$



On résout alors $M.X = 3.X$: $\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$.

Le système dégénère $\begin{array}{rrrl} -4.x & +8.y & -6.z & = 0 \\ 8.x & -6.y & +2.z & = 0 \\ -6.x & +2.y & +z & = 0 \end{array}$ qui donne $\begin{array}{rrrll} 2.x & -4.y & +3.z & = 0 & L_1/2 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_2 + 2.L_1 \\ & 10.y & -10.z & = 0 & L_3 et L_1 \end{array}$.

Il reste deux équations : $Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$. On veut un vecteur normé : $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

On fait de même avec les autres valeurs propres

3	9	-12
$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 3.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 3.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 3.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = 9.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = 9.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = 9.z \end{array}$	$\begin{array}{rrrl} -x & +8.y & -6.z & = -12.x \\ 8.x & -3.y & +2.z & = -12.y \\ -6.x & +2.y & +4.z & = -12.z \end{array}$
$Ker(M - 3.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$	$Ker(M - 9.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix})$	$Ker(M + 12.I_3) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$
$\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

Mais pourquoi persistez vous à rédiger comme un élève de collège avec des calculs à peu près bien présentés chacun l'un après l'autre, avec une obéissance butée et bornée à des consignes datant du collège. C'est gentil de montrer que vous savez calculer. mais ce n'est pas des calculateurs qu'on veut, c'est des ingénieurs. Et un ingénieur montre ce qui est essentiel : les résultats, et il les présente sous forme lisible par un tableau. On grandit, les mômes. L'objectif n'est plus d'avoir le brevet.

On vérifie leur orthogonalité deux à deux : $\begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = 0$ et ainsi de suite.
Ils forment une famille orthonormée, donc une famille libre.
Ils sont trois dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, ils forment donc une base.

Qui s'est contenté de montrer "orthonormée" en calculant et a oublié "base" ? Bref, qui a eu encore le nez dans le guidon au lieu de se demander ce qu'on attend de vous ?
Mais sincèrement, j'en ai marre que vous ne preniez pas de recul et que vous soyez juste heureux d'avoir fait le bon calcul. J'ai déjà à la maison des enfants d'une dizaine d'année, j'en ai marre d'en avoir aussi au lycée.

On a des vecteurs propres et des valeurs propres. En quantité suffisante. La matrice est diagonalisée.

On vérifie quand même

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

ou aussi

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On transforme en

$$\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}^{-1}$$

Il faudrait encore prouver que l'inverse de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ est la transposée de $\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$. La démarche effectivement lourde est de calculer l'inverse et de montrer qu'il coïncide avec la transposée *(qui est ici la matrice elle même)*.
Intelligemment, pour prouver $P^{-1} =^t P$, il suffit de prouver ${}^tP.P = 0$.
Or, le calcul de ${}^tP.P$ consiste à faire tomber les colonnes de P sur les lignes de ${}^tP$ *(qui sont en fait les colonnes de P)*. Bref, les colonnes de P se rencontrent deux à deux. On trouve leurs produits scalaires deux à deux. Des 0 et des 1.

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On retient, en notant $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ trois vecteurs colonne qu'on écrit aussi en ligne :

$${}^tP.P = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\overrightarrow{a}|^2 & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} & |\overrightarrow{b}|^2 & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & |\overrightarrow{c}|^2 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de Gram, et si la base est orthonormée, c'est I_3.

L'inverse d'une matrice de base orthonormée est sa transposée. *Et si on l'applique aux matrices de permutations, c'est un cadeau.*

Qu'on ait pris ma matrice de passage P ou une autre, $P.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la somme des trois vecteurs propres. Dans mon exemple et dans les autres (l'ordre dans lequel on cite les vecteurs importe peu, ce qui importe, c'est les signes) :

$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & +2/3 \\ 2/3 & +1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/3 & +2/3 & -2/3 \\ 2/3 & +1/3 & +2/3 \\ 2/3 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 5/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$
$\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & +2/3 \\ 2/3 & -1/3 & -2/3 \\ 2/3 & +2/3 & +1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$	
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 0$	

Même si vous n'avez pas pris le même vecteur que votre voisin, vous trouvez ${}^tU.M.U = 0$.

Et c'est normal. U est la somme de trois vecteurs propres deux à deux orthogonaux $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_9}$ et $\overrightarrow{p_{-12}}$. Le calcul ${}^tU.M.U$ correspond à $(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).f(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ce sont des vecteurs propres, on trouve $(\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_9} + \overrightarrow{v_{-12}}).(3 \times \overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}})$. Comme ces vecteurs sont deux à deux orthogonaux, on trouve $3 \times \overrightarrow{v_3}.\overrightarrow{v_3} + 9 \times \overrightarrow{v_9}.\overrightarrow{v_9} - 12 \times \overrightarrow{v_{-12}}.\overrightarrow{v_{-12}}$. Comme ces vecteurs sont normés, il reste $3.1 + 9.1 - 12.1$ *(somme des valeurs propres)*. Bref, la somme est nulle *(et dans le cas général, c'est la trace)*.

La question suivante veut un vecteur normé vérifiant ${}^tU_0.M.U_0 = 0$. Il suffit de prendre U et de le renormer :

$\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$	ou $\dfrac{1}{3.\sqrt{3}}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

ou même leurs opposés.

On cherche ensuite un vecteur orthogonal au premier vecteur trouvé : $5.x + y + z = 0$ (ou $x + 5.y - z = 0$ ou $x - y + 5.z = 0$). On veut qu'il vérifie une histoire de "trace" $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 8 & -6 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

J'ai fini par trouver le vecteur $\begin{pmatrix} 3.\sqrt{13} - 13 \\ 13 - 15.\sqrt{13} \\ 52 \end{pmatrix}$ si si ! Il ne reste plus qu'à le normer.

On a deux vecteurs normés U_0et V_0, orthogonaux entre eux. Le vecteur $U_0 \wedge V_0$ est par construction orthogonal à U_0 et à V_0. Sa norme vaut $|U_0| \times |V_0| \times \sin(\widehat{U_0, V_0})$, ce qui fait 1.
On a d'ores et déjà : $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est une famille orthonormée. Comme elle a le bon cardinal, c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Va-t-on calculer explicitement la matrice de passage et l'inverser ?
Non ! On sait quand même une chose : la matrice sur cette base est semblable à la matrice initiale. Sa trace reste nulle.
Ensuite, qui est le terme de position $(1,\ 1)$? C'est la composante de $f(U_0)$ suivant le vecteur U_0.

Mais comme la base $(U_0,\ V_0,\ U_0 \wedge V_0)$ est orthonormée, on récupère la composante par produit scalaire : ${}^tU_0.M.U_0$ vaut 0.

De même, le terme de position $(2, 2)$ est la composante de $f(V_0)$ suivant V_0. On la calcule aussi par produit scalaire : $V_0.M.V_0$. Là aussi, c'est 0.

Pour le dernier, on ne va pas calculer $f(U_0 \wedge V_0); (U_0 \wedge V_0)$, c'est trop lourd.
Mais il suffit de se souvenir que la somme des trois termes diagonaux est la trace. Elle est nulle. Les deux premiers sont nuls. Le dernier l'est donc aussi.

TD28 Une application en $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$.

L'application $f = \overrightarrow{u} \longmapsto \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a}$ prend un vecteur de E et donne un vecteur de $Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$, donc de E.
On prouve la linéarité par $\phi(\overrightarrow{a}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \alpha.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \alpha.(\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a})$ et un résultat similaire pour les sommes.

On détermine son noyau en résolvant $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue $\overrightarrow{u}$.
Comme $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont indépendants, on trouve la condition nécessaire $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} = 0$ et $\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}) = 0$ *(sans flèche au dessus)*.
On trouve l'ensemble des vecteurs orthogonaux à la fois à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$. Pas grand chose de plus à dire.
On a donc $Im(f) = Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})$ et $Ker(f) = \Big(Vect(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})\Big)^{\perp}$.

On cherche des vecteurs propres $\overrightarrow{u}$ et les valeurs propres allant avec. Si on a des réflexes basiques, on se dit "je détermine la matrice, puis $\det(M - \lambda.I_n)$, puis je résous, puis je cherche des vecteurs propres".
C'est trop dur, on ne sait même pas en quelle dimension on travaille.
Si on revient à la définition : $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$.
On veut donc $\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{u}).\overrightarrow{a} = \lambda.\overrightarrow{u}$.
Quitte à diviser par λ, $\overrightarrow{u}$ est dans $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$. Mais on ne sait pas si tous les vecteurs de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ conviennent, et ceci ne donne pas la valeur de λ.
On écrit a priori : $\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ et on reporte (on joue par condition nécessaire et suffisante en faisant des aller-retours).

$$f(\overrightarrow{u}) = \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} + \phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{b}) \times \overrightarrow{a}$$

on développe

$$f(\overrightarrow{u}) = \alpha \times \overrightarrow{b} + \beta \times \overrightarrow{a}$$

(orthonormalité)
On veut que ceci soit égal à $\lambda.\overrightarrow{u}$, c'est à dire à $\lambda.\alpha.\overrightarrow{a} + \lambda.\beta.\overrightarrow{b}$.
Par liberté de la famille orthonormée : $\lambda.\alpha = \beta$ et $\lambda.\beta = \alpha$.
On reporte l'une dans l'autre : $\lambda^2.\alpha = \alpha$ et $\lambda.\alpha = \beta$.
On n'a pas le choix : λ^2 vaut -1 (sinon, α est nul, puis β aussi et le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul, ce qui n'est pas accepté).
Pour λ égal à 1, on trouve $\alpha = \beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$.
Pour λ égal à -1, on trouve $\alpha = -\beta$ et on a les vecteurs propres : $\alpha.(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$.

On résume

valeur propre	1	-1	1
vecteurs propres	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b})$	$Vect(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})^{\perp}$
multiplicité	1	1	$n-2$

Ah oui, il fallait garder aussi la valeur propre 0. Il y a un moment où on a divisé par λ, il fallait donc traiter à part le cas $\lambda = 0$. Rappelons que le vecteur $\overrightarrow{u}$ ne doit pas être nul dans $f(\overrightarrow{u}) = \lambda.\overrightarrow{u}$, alors que λ peut l'être. Le noyau est le sous-espace propre de valeur propre 0.

On se donne $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et on calcule

$$\phi(\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u})) = \phi\Big(\overrightarrow{v},\ \phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b} + \phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}).\overrightarrow{b}\Big) = \phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{b}) + \phi(\overrightarrow{a},\overrightarrow{u}).\phi(\overrightarrow{v},\overrightarrow{b}$$

On fait le même calcul pour $\phi(\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{v}))$ et on trouve la même chose.
L'application f est symétrique, au sens qui va être exploré dans la suite.

TD28 Symétrie de la matrice S.

On a supposé : $\forall(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b}),\ \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$.
On traduit : $\forall(A, B) \in \mathbb{R}^3,\ {}^tA.(S.B) = {}^tB.(S.A)$.

La fausse même pas bonne idée : on simplifie par A ou par B.
Pourquoi c'est n'importe quoi ? parce que ni A ni B n'est une matrice carrée. Comment voulez vous pouvoir multiplier par l'inverse. Là encore, avoir de telles idées, c'est manipuler les formules sans chercher à savoir ce qu'il y a derrière. C'est comme le chimiste qui dirait : tiens, et si je mélange $C_3H_5(OH)_3$ avec HNO_3, ça peut donner $C_3H_5(NO_3)_3$ et H_2O, je vais essayer, c'est le même genre de formules que dans le cours sur l'eau.

On a donc

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Ce n'est pas une manipulation cabalistique. C'est des maths. Et le plus important, c'est le $\forall(A, B)$.
On peut donc prendre des cas particuliers pour A et B, avec l'espoir qu'ils nous mènent à la bonne réponse. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} s_1^1 & s_1^2 & s_1^3 \\ s_2^1 & s_2^2 & s_2^3 \\ s_3^1 & s_3^2 & s_3^3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On aboutit à $s_1^2 = s_2^1$. On fait de même avec chaque couple fait de deux vecteurs de la base canonique : $s_i^k = s_k^i$.
La matrice est symétrique.

D'accord, je l'ai rédigé ici pour une matrice de taille 3. Il faudrait le faire en taille n. Avec des points de suspension. Ou dire que le "lemme d'identification" est dans le cours.

TD28 Existence d'un vecteur propre.

La quantité $\det(S - \lambda.I_n)$ est un polynôme en λ.
Qui a oublié cette partie de la question ?
C'est $\sum_{\sigma \in S_n} Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \ldots \alpha_n^{\sigma(n)}$ où chaque α_i^k est s_i^k *(si i est différent de k)* ou $s_i^i - \lambda$ (si i est égal à k). Chaque $\alpha_i^{\sigma(i)}$ est une fonction de λ de degré 0 ou 1. Chaque produit $Sgn(\sigma).\alpha_1^{\sigma(1)}.\alpha_2^{\sigma(2)} \ldots \alpha_n^{\sigma(n)}$ est un polynôme en λ dont le degré n'excèdera pas n. la somme est un polynôme dont le degré ne va pas excéder n.
Pour ceux qui ont besoin de tout voir, en taille 3 :

$$(s_1^1 - \lambda).(s_2^2 - \lambda).(s_3^3 - \lambda) - (s_1^1 - \lambda).s_2^3.s_3^2 - s_1^2.s_2^1.(s_3^3 - \lambda) + s_1^2.s_2^3.s_3^1 + \ldots$$

Le polynôme est vraiment de degré n, car seul $\sigma = Id$ apporte une terme de degré n, qui est alors celui de $(s_1^1 - \lambda).(s_2^2 - \lambda)\dots(s_n^n - \lambda)$.

Il ne reste plus qu'à dire que le théorème fondamental de l'algèbre *(de d'Alembert-Gauss)* garantit l'existence d'au moins une racine pour un tel polynôme non constant *(et en fait autant que son degré)*.

On a une valeur propre. $\det(S - \lambda_0.I_n)$ est nul pour cette valeur μ. L'application $X \longmapsto (S - \mu.I_n).X$ *(de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$)* n'est ni injective ni surjective. Il y a au moins un vecteur non nul dans son noyau. Ce vecteur vérifie $(S - \mu.I_n).X_0 = 0_n$ *(vecteur nul de taille n)*.
Mais comme μ était dans $\mathbb{C}$, il a fallu travailler dans $\mathbb{C}^n$. Le vecteur X_0 est donc de la forme $U + i.V$ en séparant composante par composante partie réelle et partie imaginaire.
On a donc
$$S.(U + i.V) = \lambda_0.(U + i.V)$$

On peut séparer en partie réelle et partie imaginaire, mais attention, μ s'écrit $\alpha + i.\beta$ et c'est plus compliqué que ça n'en a l'air.

Pour comprendre qu'il fallait jouer entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$: la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & 0 & -11 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *a pour polynôme caractéristique $-X^3 + 3.X^2 - 4.X + 2$, pour spectre $\{1,\ 1-i,\ 1+i\}$. Mais si on cherche un vecteur propre de valeur propre $1+i$, on est obligé d'aller le chercher dans $\mathbb{C}$, et on trouve par exemple* $\begin{pmatrix} 2+i \\ -2-3.i \\ -1 \end{pmatrix}$*, que l'on peut désosser en* $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + i.\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Étudions comme demandé ${}^t(U - i.V).S.(U + i.V)$. On développe par distributivité ou multilinéarité : ${}^tU.S.U + i.{}^tU.S.V - i.{}^tV.S.U +{}^t V.S.V$.
Que dire de ${}^tU.S.V - {}^tV.S.U$? On le lit comme $\phi(\overrightarrow{u},\ f(\overrightarrow{v})) - \phi(\overrightarrow{v},\ f(\overrightarrow{u}))$. Par symétrie de S, c'est nul. On a donc
$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{u}) + \phi(\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{v})$$
Mais si on prend d'une autre façon ce calcul, on trouve
$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^t(U - i.V).\mu.(U + i.V)$$
car on a un vecteur propre de valeur propre μ. On développe encore :
$$\mu.{}^t(U - i.V).(U + i.V) = \mu.({}^tU.U +{}^t V.V + i.{}^tU.V - i.{}^tV.U)$$
Les deux réels ${}^tU.V$ et ${}^tV.U$ sont égaux *(pour certains, c'est $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$, pour d'autres, c'est la transposée d'un réel)*.
On égalise tout :
$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V$$
et
$${}^t(U - i.V).S.(U + i.V) = \mu.({}^tU.U +{}^t V.V)$$
Quel intérêt ? Par transitivité : $\boxed{\mu.({}^tU.U +{}^t V.V) = {}^tU.S.U +{}^t V.S.V}$
Mais le membre de droite est réel, puisque U et V sont des vecteurs réels, de même que la matrice S.
C'est donc que le membre de gauche est réel. On simplifie, et μ est réel.
Quand je dis "on simplifie", c'est que on divise par le réel ${}^tU.U +{}^t V.V$. Encore faut il que ce réel soit non nul. C'est le cas, puisque on y reconnaît $|\overrightarrow{u}|^2 + |\overrightarrow{v}|^2$.
Il se peut que $\overrightarrow{u}$ soit nul, ou $\overrightarrow{v}$. Mais ce qui n'est pas possible c'est que les deux le soient, puisque leur somme est le vecteur propre.

Bilan : les valeurs propres d'une matrice réelle symétrique sont réelles.

Vous recroiserez ce théorème en Spé.

Attention, ne généralisez pas "les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles" ; ce serait faux. Il est important que la matrice soit réelle.

On revient à ce qu'on a prouvé : la matrice S a au moins une valeur propre μ et cette valeur propre est réelle.
On revient alors à $S.(U + i.V) = \mu.(U + i.V)$ *(vecteur propre)*.
On développe $S.U + i.S.V = \mu.U + i.\mu.V$.

Maintenant que la valeur propre est réelle, on peut identifier : $S.U = \mu.U$ et $S.V = \mu.V$.

On pourrait aller trop vite et affirmer : on a même deux vecteurs propres.
Mais attention, il se peut que l'un soit nul *(ou que les deux soient proportionnels)*.
Mais ce qui est impossible, c'est que les deux soient nuls *(leur somme est le vecteur propre pris dans $\mathbb{C}^n$ initialement)*.
On a donc non seulement une valeur propre réelle, mais aussi un vecteur propre réel.

On a montré que f admettait un vecteur propre de matrice U sur la base canonique et une valeur propre associée μ.
Mais on voulait des familles orthonormées de vecteurs propres.
cela dit, pour une famille de cardinal 1, c'est juste "normée".
Il suffit de prendre le vecteur $\dfrac{\overrightarrow{u}}{|\overrightarrow{u}|}$. Il est resté vecteur propre de valeur propre μ et il est normé.

TD28 Agrandissement de famille de D_f.

On suppose donc que l'on a une famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k})$ dans D_f. Ce sont donc k vecteurs normés, deux à deux orthogonaux, et chacun est vecteur propre de f , de valeur propre μ_i puisqu'il faut bien donner un nom.
L'espace vectoriel engendré P est de dimension k *(famille orthonormée donc libre)*.
On regarde ensuite l'ensemble $Q = \{\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \overrightarrow{u} \in P,\ \phi(\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{u}) = 0\}$.
C'est une partie de $\mathbb{R}^n$.
Le vecteur nul en fait partie, puisqu'il est orthogonal à tout le monde.
Si deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dans Q, alors $\forall \overrightarrow{u} \in P$, $\phi(\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{u}) = \alpha.\phi(\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{u}) + \beta.\phi(\overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{u}) = 0 + 0 = 0$.
Le vecteur $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b}$ est dans Q.
On a un espace vectoriel.

Pourquoi n'est il pas réduit au seul vecteur nul ?
Un vecteur $\overrightarrow{a}$ est dans Q si et seulement si il est orthogonal à chaque vecteur $\overrightarrow{e_1}$ de la base *(il faut être orthogonal à chacun car chacun est dans P, mais ensuite, l'orthogonalité à chacun entraine l'orthogonalité à leurs combinaisons)*.
Q est le noyau de $\overrightarrow{a} \longmapsto (\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_1}), \ldots \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_k}))$
On a une application de E dans $\mathbb{R}^k$. Son ensemble image est inclus dans $\mathbb{R}^k$, il est donc au plus de dimension k.
Par soustraction, le noyau est au moins de dimension $n - k$ *(formule du rang)*.
En fait, Q est exactement de dimension $n - \dim(P)$.

Pour la stabilité, on prend $\overrightarrow{u}$ dans P. Il s'écrit comme combinaison $\alpha_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k.\overrightarrow{e_k}$. On calcule son image par f : $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.f(\overrightarrow{e_1}) + \ldots + \alpha_k.f(\overrightarrow{e_k})$ par linéarité. Mais chaque $\overrightarrow{e_i}$ est un vecteur propre de f, son image est donc de la forme $\lambda_i.\overrightarrow{e_i}$ pour une valeur propre λ_i. On a donc $f(\overrightarrow{u}) = \alpha_1.\lambda_1.\overrightarrow{e_1} + \ldots + \alpha_k.\lambda_k.\overrightarrow{e_k}$. C'est une combinaison des $\overrightarrow{e_i}$, c'est un vecteur de P.

On prend un vecteur $\overrightarrow{a}$ de Q. Il est orthogonal à tous les vecteurs de P. Qu'en est il de son image $f(\overrightarrow{a})$? On regarde donc si elle est orthogonale à tous les $\overrightarrow{u}$ de P. On calcule donc $\phi(f(\overrightarrow{a}), \ \overrightarrow{u})$ pour n'importe quel $\overrightarrow{u}$ de P. Mais par symétrie, ceci vaut $\phi(\overrightarrow{a}, \ f(\overrightarrow{u}))$. D'après ce qu'on vient de montrer, $f(\overrightarrow{u})$ est encore dans P. Par appartenance de $\overrightarrow{a}$ à Q, ce produit scalaire est nul.
On résume : $\forall \overrightarrow{u} \in P$, $\phi(f(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{u}) = \phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{u})) = 0$. On reconnaît : $f(\overrightarrow{a}) \in Q$.

On peut regarder f sur le sous-espace vectoriel Q. On vient de montrer que les images des éléments de Q sont dans Q. L'application f va de Q dans Q. On peut donc considérer f comme un endomorphisme de Q dans Q.
Proprement, on dit que la restriction $f_{|Q}$ de f à Q est un endomorphisme de Q.
La propriété $\forall(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, $\phi(\overrightarrow{a}, f(\overrightarrow{b})) = \phi(\overrightarrow{b}, f(\overrightarrow{a}))$ était valable sur $(\mathbb{R}^n)^2$, elle le reste sur Q^2.
Bref, f est un endomorphisme symétrique de Q.
On a montré que tout endomorphisme symétrique admettait au moins un vecteur propre normé *(si l'espace n'était pas réduit à $\overrightarrow{0}$, ce qui est le cas ici)*.
Il y a donc au moins un vecteur propre de f dans Q qui est de norme 1, on en prend un qu'on note $\overrightarrow{\varepsilon}$.

Mais alors la famille $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k}, \ \overrightarrow{\varepsilon})$ est encore une famille de vecteurs propres de f. Ils sont tous normés, puisque $\overrightarrow{\varepsilon}$ l'est aussi.
Les premiers vecteurs étaient deux à deux orthogonaux. Le dernier est orthogonal aux précédents, car il est dans Q.
Bref, $(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_k}, \ \overrightarrow{\varepsilon})$ est une famille de vecteurs propres de f, orthonormée.

Ceci peut correspondre à l'hérédité d'une récurrence. On agrandit peu à peu la famille de vecteurs propres deux à deux orthogonaux.
Jusqu'à atteindre la dimension de l'espace vectoriel ambiant.

En fait, la preuve conduit ici est un peu différente. On prend les familles de vecteurs propres deux à deux orthogonaux. On sait qu'il y en a *(au moins, il y en a de cardinal* 1*)*. Leur cardinal ne peut pas dépasser n. On en prend une dont le cardinal est le plus grand possible *(toute partie finie non vide majorée de* $\mathbb{N}$ *a un plus grand élément)*. On le note k. Si k n'est pas égal à n, on peut agrandir en $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_k}, \ \overrightarrow{\varepsilon})$ qui est encore dans D_f. ceci contredit la maximalité. C'est donc que k vaut n. Il y a au moins une famille orthonormée de vecteurs propres de cardinal n. Comme elle est orthonormée, elle est libre. Et par cardinalité, c'est une base. On a une base orthonormée faite de vecteurs propres.

On a bien prouvé que toute application linéaire symétrique admettait une base orthonormée de vecteurs propres. Si on part d'une matrice symétrique, le même résultat dit qu'il existe une base orthonormée de vecteurs propres. La matrice de passage P passe de la base canonique orthonormée à la nouvelle base, orthonormée aussi. Elle vérifie donc ${}^tP.P = I_n$. On a donc une formule en $S = P.D.P^{-1} = P.D.{}^tP$.

◁ 16 ▷

$\overrightarrow{\varepsilon_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_1} = x \longmapsto \dfrac{x}{x^3 - 3.x + 2}$	$\overrightarrow{\varepsilon_2} = x \longmapsto \dfrac{x^2}{x^3 - 3.x + 2}$
$\overrightarrow{e_0} = x \longmapsto \dfrac{1}{x - 1}$	$\overrightarrow{e_1} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x-1)^2}$	$\overrightarrow{e_2} = x \longmapsto \dfrac{1}{(x+2)}$

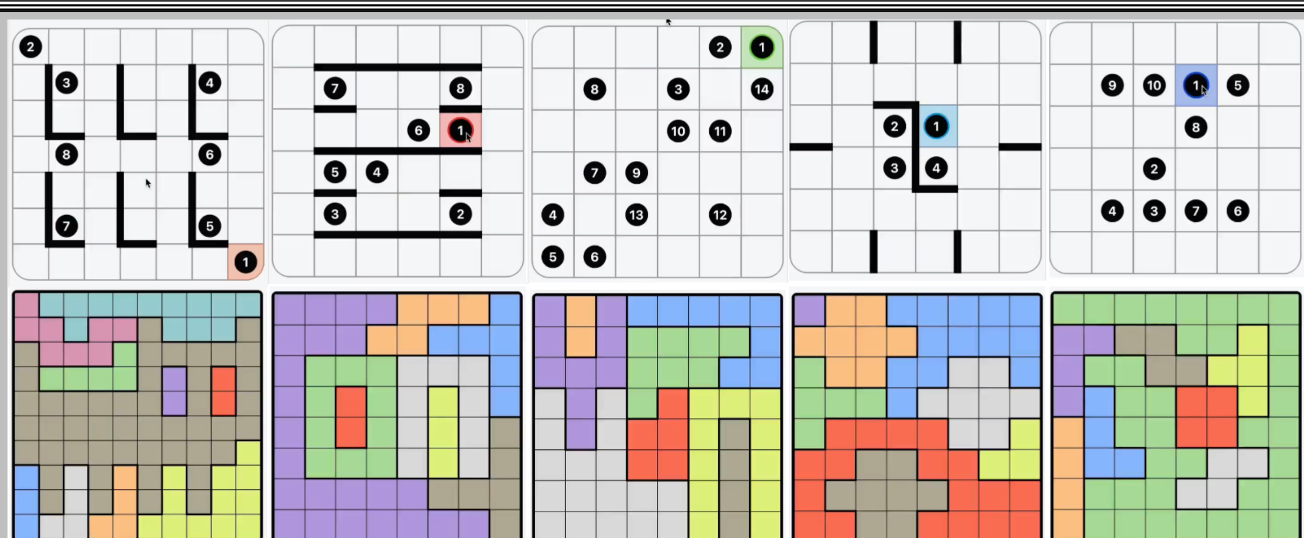
Donnez la matrice de changement de base entre $\beta = (\overrightarrow{\varepsilon_0}, \ \overrightarrow{\varepsilon_1}, \ \overrightarrow{\varepsilon_2})$ et $B = (\overrightarrow{e_0}, \ \overrightarrow{e_1}, \ \overrightarrow{e_2})$ *(exprimez les* $\overrightarrow{e_i}$ *à l'aide des* $\overrightarrow{\varepsilon_k}$*)*. Inversez la matrice.

Décomposez $\dfrac{9}{X^3 - 3.X + 2}$, $\dfrac{9.X}{X^3 - 3.X + 2}$ et $\dfrac{9.X^2}{X^3 - 3.X + 2}$ en éléments simples.

A faire.

◁ 17 ▷ ♡ On donne la formule du double produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$:
$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c}) \times \overrightarrow{a}$ pour tout triplet $(\overrightarrow{a}, \ \overrightarrow{b}, \ \overrightarrow{c})$ de $\mathbb{R}^3$
Vérifiez la pour des triplets de la base canonique comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$, $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j})$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à $\overrightarrow{c}$.
Vérifiez que le vecteur du membre de droite est bien orthogonal à tout vecteur orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$.
Démontrez la formule si vous en avez le courage avec neuf coefficients pour les composantes de $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ *(si cette partie de l'exercice vous plait, ne m'adressez plus la parole)*.
Comparez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c})$.

◁ 18 ▷



◁ 19 ▷ ♡ Montrez que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel (c'est à dire les λ_k sont dans $\mathbb{Q}$).
♡ Montrez que $(1, \ \sqrt{2})$ est une famille libre. Montrez que $(1, \ \sqrt{2}, \ \sqrt{3})$ est une famille libre. Montrez que $(1, \ \sqrt{2}, \ \sqrt{3}, \ \sqrt{4})$ est une famille liée.

♣ On admet (usage de l'axiome du choix) qu'on peut définir une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel. Montrez qu'elle est infinie, non dénombrable.
Montrez qu'on peut imposer qu'un de ses éléments soit 1 (ce qui entraine $Vect(1) = \mathbb{Q}$). Montrez que tous les autres e_k sont irrationnels.
On la note $(e_k)_{k\in K}$ (K est donc un ensemble infini de cardinal $\aleph_1$, les e_k sont des réels, et un cerrtain e_{k_0}est égal à 1), et tout réel x s'écrit $\sum_{k\in K} \lambda_k.e_k$ avec les λ_k rationnels.
♣♡ Montrez que la famille $(e_k,\ i.e_k)_{k\in K}$ est une base de $(\mathbb{C},+,.)$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
Montrez (par un argument sur le cardinal de $\mathbb{K}$) qu'on peut l'écrire « en vrac » $(\varepsilon_k)_{k\in K}$ (où « la moitié des ε_k sont des e_p et « l'autre moitié » des $i.e_q$), et montrez qu'on peut même imposer $e_{k_0} = \varepsilon_{k_0} = 1$.

On définit alors f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par
si x est un réel, on l'écrit $x = \sum_{k\in K} \lambda_k.e_k$ (décompoosition unique sur la base) alors $f(x) = \sum_{k\in K} \lambda_k.\varepsilon_k$ (décomposition aussi unique sur la base « deux fois plus grande »).
Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrez : $\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,\ f(x+x') = f(x)+f(x')$. Déduisez : $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z+z') = f^{-1}(z)+f^{-1}(z')$.
Montrez : $f(1) = 1$.

Montrez que l'addition est une loi de groupe commutatif sur $\mathbb{R}$.

♣ Pour z dans $\mathbb{C}$ et x dans $\mathbb{R}$, on définit $z\otimes x = f^{-1}(z\times f(x))$.
Montrez alors $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (z+z')\otimes x = z\otimes x + z'\otimes x$
$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,\ z\otimes (x+x') = z\otimes x + z\otimes x'$
$\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (z\times z')\otimes x = z\otimes (z'\otimes x)$
$\forall z \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1\otimes x = x$
en utilisant juste les propriétés $f(x+x) = f(x)+f(x')$ et $f(1) = 1$
Concluez : $(\mathbb{R},\ +,\ \otimes)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (attention, la multiplication complexe fois réel n'est vraiment pas la multiplication classique).

◃20▹ ♡ Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée de taille 2.
Déterminez $Com(Com(A))$ si A est une matrice carrée inversible de taille n.
Montrez que si A une matrice de taille 3 non inversible, alors $Com(Com(A))$ est la matrice nulle.

En taille 2 : $Com(Com(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})) = Com(\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On a $Com(Com(A)) = A$.

Pour A inversible, on a $A^{-1} = \dfrac{{}^tCom(A)}{\det(A)}$.
Mais alors $Com(A)$ est à son tour inversible : ${}^t(Com(A)) = \det(A).A^{-1}$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^n.\det(A^{-1})$
$\det({}^t(Com(A))) = (\det(A))^{n-1}$ non nul
On inverse $Com(A)$ par la formule : $Com(A))^{-1} = \dfrac{{}^tCom(Com(A))}{\det(Com(A))}$ et donc ${}^tCom(Com(A)) = (\det(Com(A))).Com(A))^{-1}$.
Mais la relation $A.{}^tCom(A) = \det(A).I_n$ donne aussi une forme rapide et directe de l'inverse de $Com(A)$:

$$(Com(A))^{-1} = \frac{{}^tA}{\det(A)}$$

En comparant les deux formules : $\dfrac{{}^tA}{d} = \dfrac{{}^t(Com(Com(A))}{d^{n-1}}$ et donc $\boxed{Com(Com(M)) = d^{n-2}.A}$
Et pour n égal à 2, c'est cohérent...

◃21▹ Résolvez $(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u}) \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{u} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Est ce si déplorable de poser trois composantes et de résoudre

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
puis
$$\begin{pmatrix} -y^2 - z^2 \\ x.y \\ z.x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
On obtient trois équations : $y^2 + z^2 - z = 0$, $x.y = 0$ et $x.(z-1) + 1 = 0$.
Celle du milieu donne deux chemins : $x = 0$ ou $y = 0$.
Mais $x = 0$ est incompatible dans la dernière.
On a donc cette fois $z^2 - z = 0$, $y = 0$ et $x.(z-1) + 1 = 0$.
z vaut 0 ou 1. Mais $z = 1$ est impossible dans la dernière.
On a l'unique solution : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (c'est $\overrightarrow{i}$).
On vérifie
$$(\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{i}) \wedge \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0} - \overrightarrow{k} + \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$$

◁22▷ ♡ Montrez que $z \longmapsto a.z + b.\overline{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même *(vu comme $\mathbb{R}$ espace vectoriel)*. Trouvez a et b sachant que 1 a pour image $2 - i$ et que son spectre est $\{3,\ 5\}$.

$(\mathbb{C}, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2 (base canonique $(1,\ i)$).
L'application va bien de $\mathbb{C}$ dans lui même.
On vérifie sa linéarité. On la nomme f_a et on calcule[4] :
$$f_a(z) + f_a(z') = a.z + b.\overline{z} + a.z' + b.\overline{z'} = a.(z + z') + b.\overline{(z + z')} == f_a(z + z')$$
$$\alpha.f_a(z) = \alpha.a.z + .\alpha b.\overline{z} = a.(\alpha z) + b.\overline{\alpha.z}$$
et il était capital qu'ici α soit réel.
Oh, pour une fois, j'ai rédigé dans le bon sens !

On notera que a et b peuvent être complexes, et pas forcément réels.

On impose cette fois $a.1 + b.1 = 2 - i$. C'est sûr, a et b sont complexes.

On peut travailler matriciellement..
On calcule l'image de 1 et de i. Mais celle de 1 est connue : $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et celle de i va porter un nom avec deux composantes α et β .
La matrice de $f_{a,b}$ sur la base canonique est alors $\begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ -1 & \beta \end{pmatrix}$.
Et on pense aux deux valeurs propres. cette matrice doit se diagonaliser en $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.
Comme deux matrices semblables ont même trace et même diagonale : $2 + \beta = 8$ et $2.\beta + \alpha = 15$.
La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}}$
Mais ça ne nous donne pas a et b.
Revenons quand même à ce que dit cette matrice : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ (voyez le en lisant le contenu des colonnes, ou en posant le vecteur sur la matrice c'est pareil).
On reformule en termes de vecteurs de $(\mathbb{C}, +, .)$: $1 \longmapsto 2 - i$ et $i \longmapsto -3 + 6.i$.
On revient à la définition : $a + b = 2 - i$ et $a.i - b.i = -3 + 6.i$.
On résout et on trouve $\boxed{a = 4 - 2.i \text{ et } b = -2 + i}$

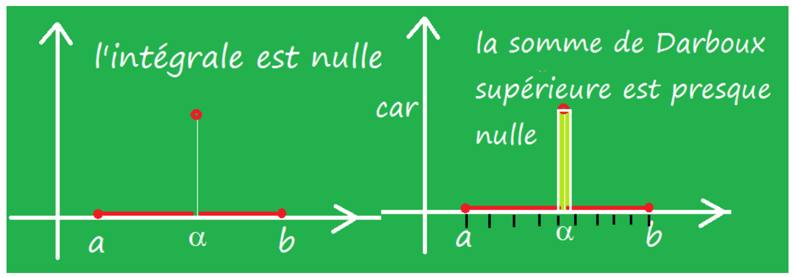
4. z et z' dans $\mathbb{C}$ et α dans $\mathbb{R}$ (oui, $\mathbb{R}$)

On vérifie : • $z \longmapsto (4-2.i).z + (-2+i).\overline{z}$ est linéaire de $(\mathbb{C},+,.)$ dans lui même
• $1 \longmapsto (4-2.i).1 + (-2+i).\overline{1} = 2-i$
• $i \longmapsto (4-2.i).i + (-2+i).\overline{i} = 4.i + 2 + 2.i + 1 = 3+6.i$
• mais aussi • $1+i \longmapsto (4-2.i).(1+i) + (-2+i).(1-i) = 5+5.i$
• $3+i \longmapsto (4-2.i).(3+i) + (-2+i).(3-i) = 9+3.i$
avez vous reconnu les deux vecteurs propres ?
• Et on vérifie aussi $x+i.y \longmapsto (4-2.i).(x+i.y) + (-2+i).(x-i.y) = (2.x+3.y) + (-x+6.y).i$
d'où la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$

◃23▹ Pouvez vous trouver f de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_0^1 f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pouvez vous trouver f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant $\int_a^b f(t).dt = 0$ et qui ne soit pas identiquement nulle ?

Pour la première question, la réponse est « oui ».
Et une solution est « f est nulle partout... sauf en un point α ». On profite du fait que nul n'a demandé à f d'être continue.
Pourquoi l'intégrale existe et est nulle ? Facile ! Faites le avec les sommes de Darboux. les sommes de Darboux inférieures valent 0, et les sommes de Darboux supérieures valent $f(\alpha).\eta$ où η est la largeur de l'intervalle maudit qui contient α. Quand le pas des subdivisions tend vers 0, les sommes se rapprochent l'une de l'autre (et se rapprochent de 0).



Pour la seconde question, avec f positive et continue, la réponse sera « non » (même si dans un instant je vais vous dire le contraire).
Si f est continue, positive sur $[a,\ b]$ et si son intégrale est nulle, alors est est nulle partout.
J'ai deux démonstrations.

Je vous recommande la première : on définit $F = x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$.
F est continue, dérivable, de dérivée positive f.
Elle est donc croissante. (ce qui peut se prouver juste par relation de Chasles d'ailleurs)
Mais $F(a)$ est nul ($\int_a^a \ldots$) et $F(b)$ aussi (hypothèse).
F est donc constante (écrire $F(a) \leqslant F(x) \leqslant F(b)$).
sa dérivé est donc nulle. Et sa dérivée c'est f.
Fini !

Plus dans l'esprit du programme d'analyse, la seconde preuve.

On suppose f positive continue, non identiquement nulle. On montre alors que $\int_a^b f(t).dt$ ne peut pas être nulle (contraposée, ou par l'absurde selon vos goûts).
Si f n'est pas identiquement nulle, il y a au moins un point c où elle est strictement positive.
Par continuité en c, il existe un intervalle $[c-\alpha,\ c+\alpha]$ sur lequel elle est plus grande que $\frac{f(c)}{2}$ (continuité avec $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$, petit dessin).
Par comparaison avec un rectangle $\int_{c-\alpha}^{c+\alpha} f(t).dt \geqslant 2.\alpha.\frac{f(c)}{2}$.
On ajoute $\int_a^{c-\alpha} f(t).dt$ et $\int_{c+\alpha}^b f(t).dt$, positif s par positivité de f.
On a donc $\int_a^b f(t).dt \geqslant \alpha.f(c) > 0$. L'intégrale ne peut pas être nulle.

On a prouvé de deux façons (f continue, positive, $\int_a^b f(t).dt = 0$) implique $(\forall t \in [a,\ b],\ f(t) = 0)$.
Et en particulier (f continue, $\int_a^b (f(t))^2.dt = 0$) implique $(\forall t \in [a,\ b],\ f(t) = 0)$ (caractère « séparant » de la norme $||.||$).

Et pourtant, non. On a oublié une hypothèse : $a \neq b$. Et c'est vrai qu'une intégrale de a à a est nulle sans pour autant que l'application soit nulle sur tout $[a,\ a]$.

◃24▹ ♡ Montrez que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel (c'est à dire les λ_k sont dans $\mathbb{Q}$).
♡ Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est une famille libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est une famille libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est une famille liée.

♣ On admet (usage de l'axiome du choix) qu'on peut définir une base de $\mathbb{R}$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel. Montrez qu'elle est infinie, non dénombrable.
Montrez qu'on peut imposer qu'un de ses éléments soit 1 (ce qui entraine $Vect(1) = \mathbb{Q}$). Montrez que tous les autres e_k sont irrationnels.
On la note $(e_k)_{k\in K}$ (K est donc un ensemble infini de cardinal $\aleph_1$, les e_k sont des réels, et un cerrtain e_{k_0}est égal à 1), et tout réel x s'écrit $\sum\limits_{k\in K} \lambda_k.e_k$ avec les λ_k rationnels.
♣♡ Montrez que la famille $(e_k,\ i.e_k)_{k\in K}$ est une base de $(\mathbb{C}, +, .)$ vu comme $\mathbb{Q}-$espace vectoriel.
Montrez (par un argument sur le cardinal de $\mathbb{K}$) qu'on peut l'écrire « en vrac » $(\varepsilon_k)_{k\in K}$ (où « la moitié des ε_k sont des e_p et « l'autre moitié » des $i.e_q$), et montrez qu'on peut même imposer $e_{k_0} = \varepsilon_{k_0} = 1$.

On définit alors f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par
si x est un réel, on l'écrit $x = \sum\limits_{k\in K} \lambda_k.e_k$ (décompoosition unique sur la base) alors $f(x) = \sum\limits_{k\in K} \lambda_k.\varepsilon_k$ (décomposition aussi unique sur la base « deux fois plus grande »).
Montrez que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Montrez : $\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ f(x + x') = f(x) + f(x')$. Déduisez : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ f(z + z') = f^{-1}(z) + f^{-1}(z')$.
Montrez : $f(1) = 1$.

Montrez que l'addition est une loi de groupe commutatif sur $\mathbb{R}$.

♣ Pour z dans $\mathbb{C}$ et x dans $\mathbb{R}$, on définit $z \otimes x = f^{-1}(z \times f(x))$.
Montrez alors $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (z + z') \otimes x = z \otimes x + z' \otimes x$
$\forall z \in \mathbb{C},\ \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2,\ z \otimes (x + x') = z \otimes x + z \otimes x'$
$\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ (z \times z') \otimes x = z \otimes (z' \otimes x)$
$\forall z \in \mathbb{C}^2,\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1 \otimes x = x$
en utilisant juste les propriétés $f(x + x) = f(x) + f(x')$ et $f(1) = 1$
Concluez : $(\mathbb{R},\ +,\ \otimes)$ est un $\mathbb{C}-$espace vectoriel (attention, la multiplication complexe fois réel n'est vraiment pas la multiplication classique).

◃25▹ ♡ Calculez $(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{c} + (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) \wedge \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) \wedge \overrightarrow{b}$.

Montrez que l'équation $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ n'a pas de solution.
Montrez que l'équation $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$ a une infinité de solutions.

On se donne $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ et on veut résoudre l'équation $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{b}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$. Montrez qu'il faut déjà que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ soient orthogonaux.

On suppose à présent $\overrightarrow{a}$ orthogonal à $\overrightarrow{b}$. Montrez que $\dfrac{\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}$ *(noté $\overrightarrow{u_0}$)* est une solution de l'équation *(utilisez ici la formule du double produit vectoriel)*.
Montrez que $\overrightarrow{u}$ est solution si et seulement si $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0}$ est colinéaire à $\overrightarrow{a}$.
Donnez toutes les solutions de l'équation.
(Quelle est celle dont la norme est la plus courte ?)

◃26▹ ♡ Résolvez $\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = (\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$ est liée.
La première équation va donner une droite de solutions.
La seconde est l'équation d'un plan.
Droite inter plan, on aura une solution unique.

Maintenant, allons y pour le calcul brut : $\begin{array}{rrrcr} & y & -z & = & 1 \\ -x & & +z & = & 1 \\ x & -y & & = & -2 \end{array}$ et $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$

On trouve $x = z - 1$, $y = z + 1$ puis z vaut 2. La solution unique est donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On vérifie : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

◁ 27 ▷ ♡ $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \\ \\ \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}\begin{pmatrix} \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Retrouvez les coefficients qui manquent sachant que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est liée par la relation $2.\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$.

$$2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quatre équations, quatre inconnues, on va s'en tirer :

$$2.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et la voilà liée.

On peut alors vérifier une chose : $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ ne veut rien dire

Mais $\begin{vmatrix} & & \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ & & \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ & & \end{vmatrix} = 0$.

◁ 28 ▷ L'élève affirme : si on réunit deux familles libres n'ayant aucun vecteur de l'une colinéaire à un vecteur de l'autre, on a une nouvelle famille libre. Prouvez lui qu'il a tort.

Un contre-exemple : $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.
Aucun vecteur de l'une n'est colinéaire à aucun vecteur de l'autre.
Et la famille $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ est liée.

◁ 29 ▷ Soient A et B deux matrices carrées de taille 2. Montrez que la famille $(A^2, B^2, A.B, A.B.A, B.A.B)$ est liée.

Mais c'est idiot ! Cinq matrices dans un espace vectoriel de dimension 4 ! L'exercice est fini.
Oui, l'espace des matrices 2 sur 2 est de dimension 4 et pas 2, il faut quand même être un peu logique et compter les nombres à choisir...

◁ 30 ▷ ♡ Un élève a l'intention de démontrer que la famille $(\cos, \cos^2, \cos^3, \sin)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, .)$. Il veut pour un quadruplet donné (a, b, c, d) : $a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0$ *(fonction nulle)*. Il calcule en 0 en $\pi/4$ et en $\pi/2$.

Il aboutit au système $\left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$. Il trouve une solution non nulle $(a, b, c, d) = (\sqrt{2}/2, -(2+\sqrt{2})/2, 1, 0)$ *(vérifiez)*. Pourquoi son raisonnement est il faux ?

L'élève a prouvé

$$\Big(a.\cos + b.\cos^2 + c.\cos^3 + d.\sin = 0\Big) \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} a & +b & +c & & = 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = 0 \\ & & & +d & = 0 \end{array}\right.$$

puis

$$\Big((a,b,c,d)=(\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big)\Rightarrow\left\{\begin{array}{ccccccc} a & +b & +c & & = & 0 \\ \sqrt{2}.a/2 & +b/2 & +\sqrt{2}.c/4 & +\sqrt{2}.d/2 & = & 0 \\ & & & +d & = & 0 \end{array}\right.$$

Et alors ?

Ce que l'on n'a pas c'est

$$\Big((a,b,c,d)=(\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big)\Rightarrow\Big(a.\cos+b.\cos^2+c.\cos^3+d.\sin=0\Big)$$

Au mieux :

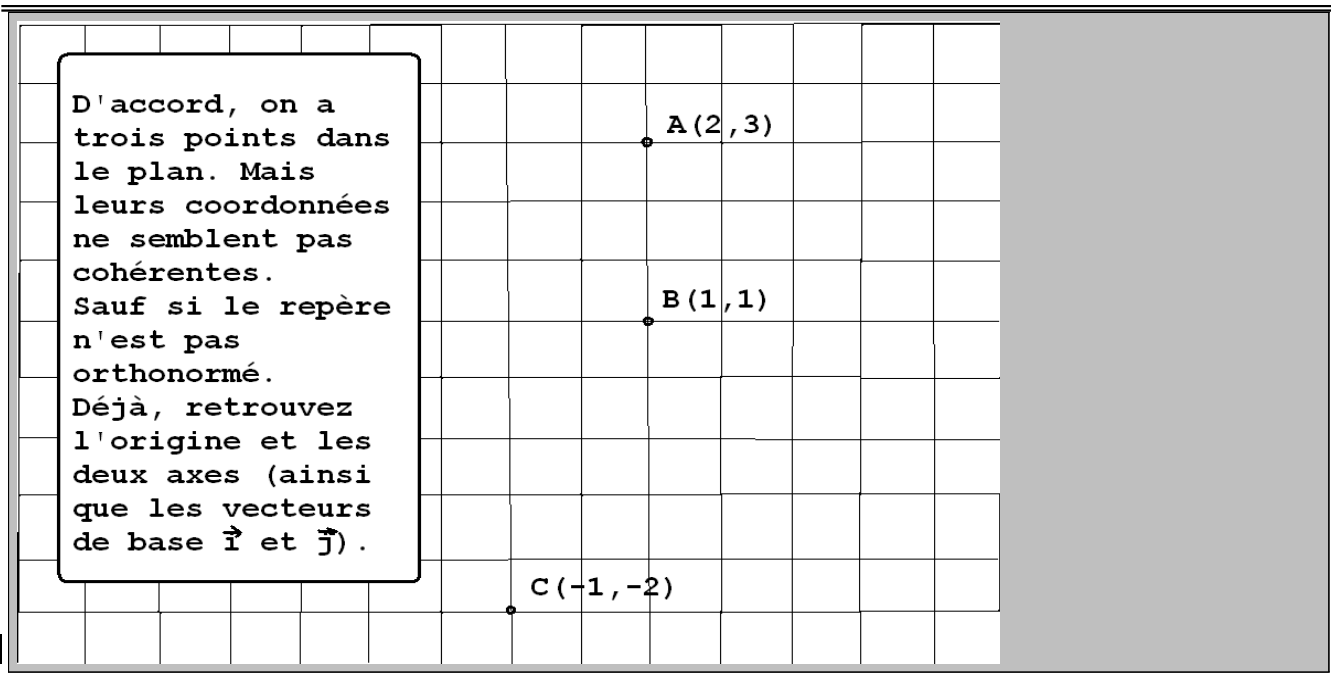
$$\Big((a,b,c,d)=(\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big)\Rightarrow\Big(\exists x,\ a.\cos(x)+b.\cos^2(x)+c.\cos^3(x)+d.\sin(x)=0\Big)$$

Pour famille liée, on aurait voulu

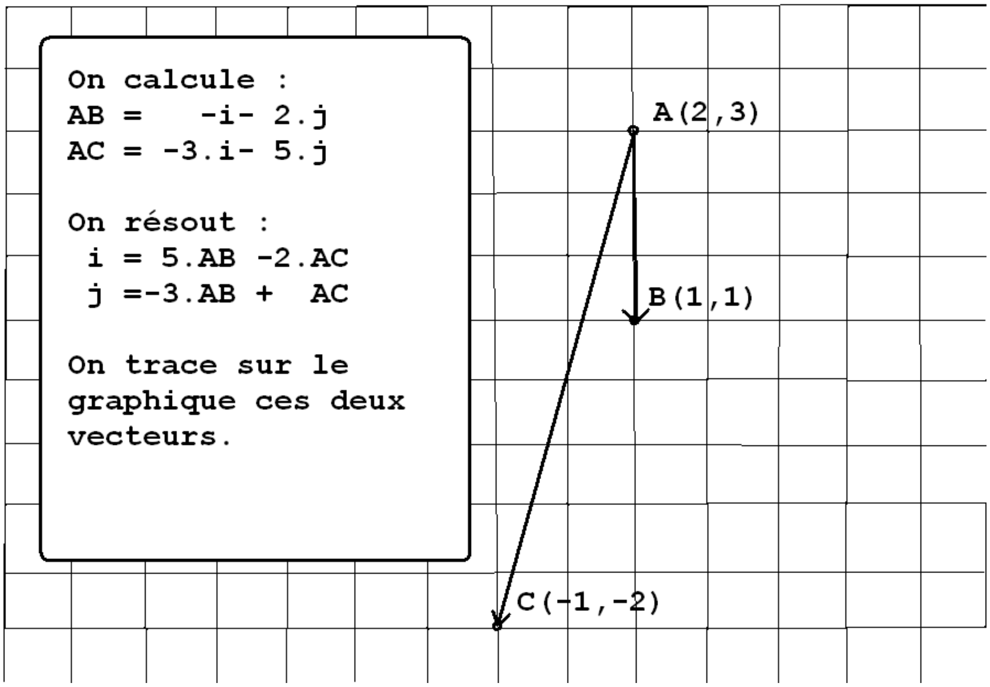
$$\Big((a,b,c,d)=(\sqrt{2}/2,\ -(2+\sqrt{2})/2,\ 1,\ 0)\Big)\Rightarrow\Big(\forall x,\ a.\cos(x)+b.\cos^2(x)+c.\cos^3(x)+d.\sin(x)=0\Big)$$

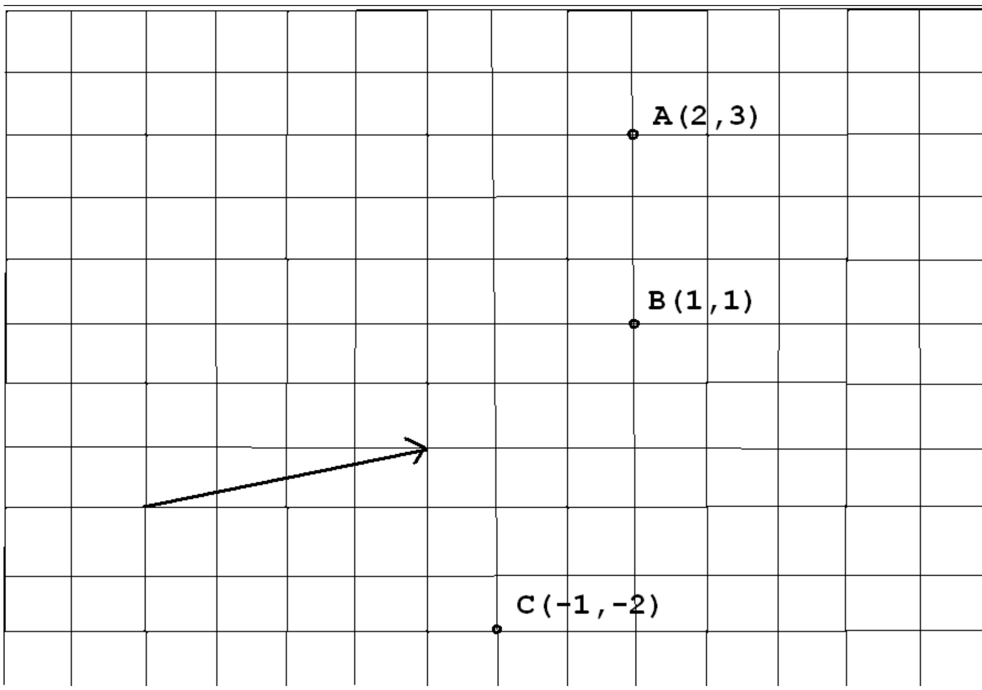
Et sinon, on peut montrer : $\Big(\forall x,\ a.\cos(x)+b.\cos^2(x)+c.\cos^3(x)+d.\sin(x)=0\Big)\Rightarrow\Big((a,b,c,d)=(0,\ 0,\ 0,\ 0)\Big)$.
Calculez par exemple en $\pi/2$, puis en 0.
Ensuite, dérivez et calculez en 0. Terminez en calculant en $\pi/3$.

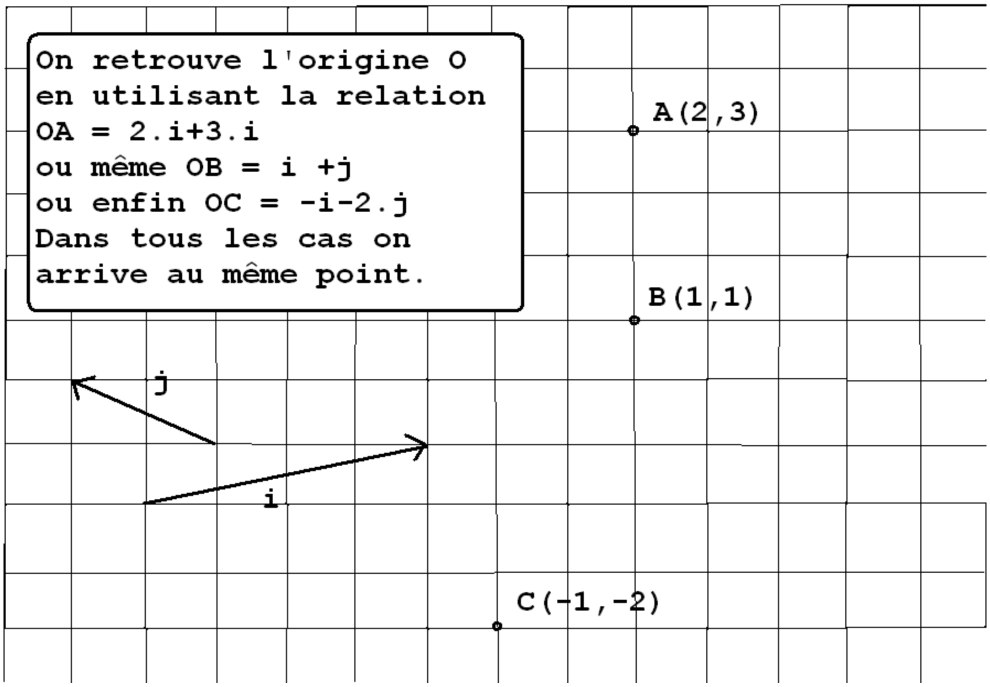
D'ailleurs, d'un point de vue logique, partir de $\Big(a.\cos+b.\cos^2+c.\cos^3+d.\sin=0\Big)$ *et n'utiliser que trois valeurs de x sent mauvais.*
On a quatre nombres à déterminer a, b, c et d. Il vaut mieux avoir quatre relations pour bien avancer !

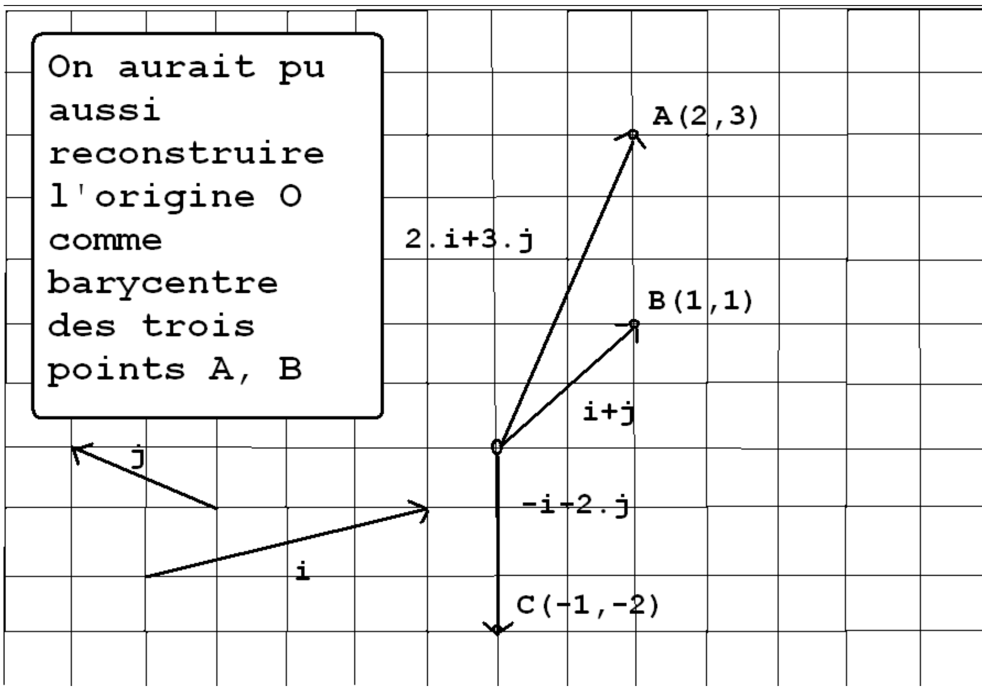


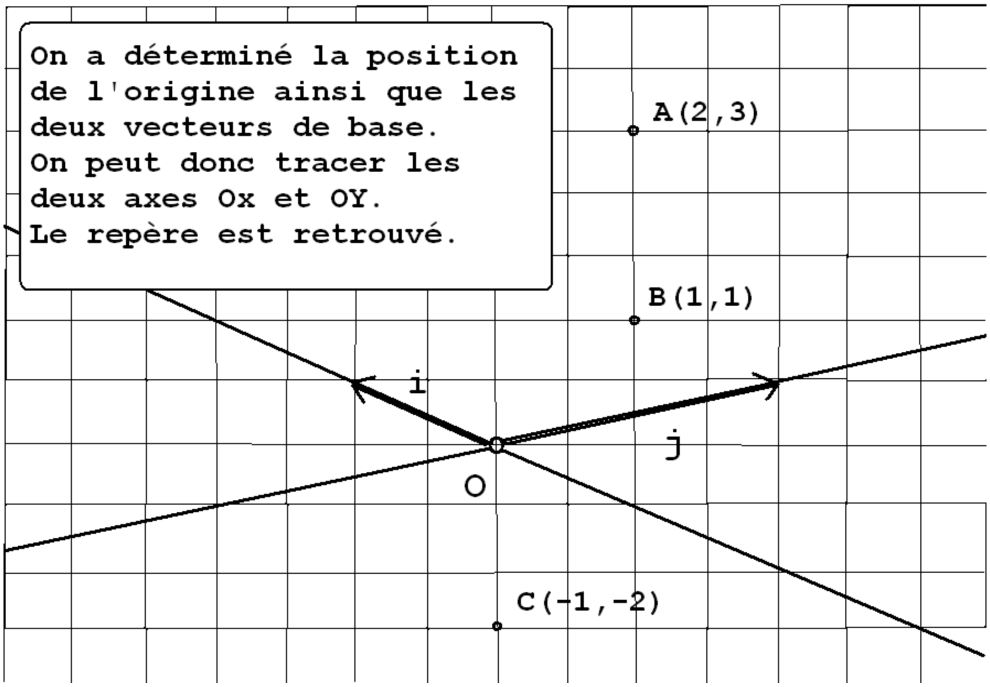
◁ 31 ▷

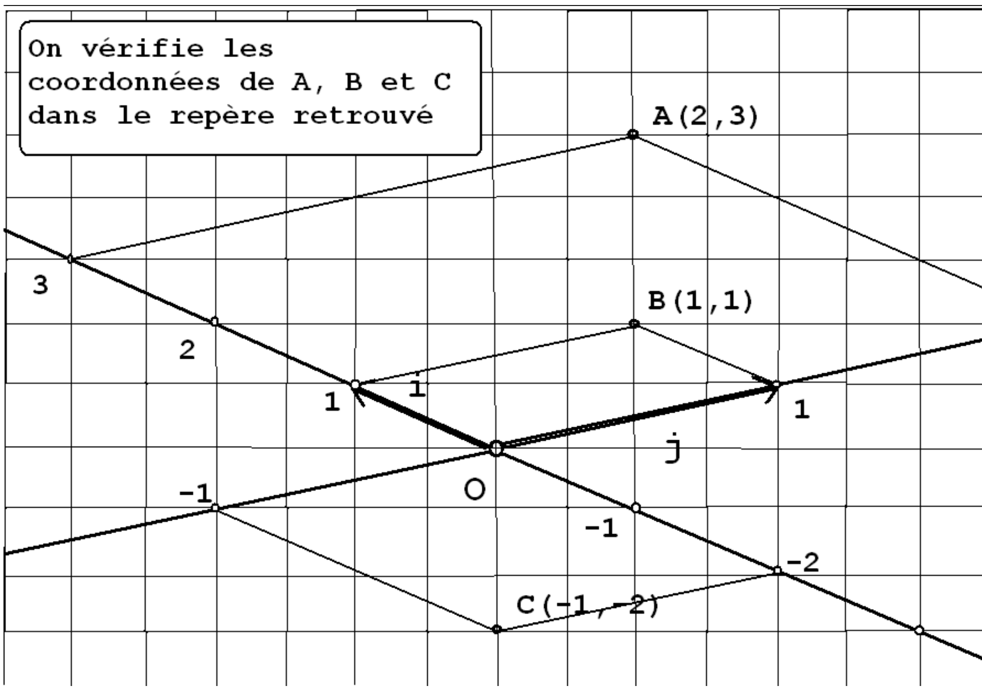

On calcule :
AB =   -i- 2.j
AC = -3.i- 5.j
On résout :
i = 5.AB -2.AC
j =-3.AB + AC
On trace sur le graphique ces deux vecteurs.
A(2,3)
B(1,1)
C(-1,-2)


A(2,3)
B(1,1)
C(-1,-2)


On retrouve l'origine O
en utilisant la relation
OA = 2.i+3.i
ou même OB = i +j
ou enfin OC = -i-2.j
Dans tous les cas on
arrive au même point.
A(2,3)
B(1,1)
j
i
C(-1,-2)


On aurait pu
aussi
reconstruire
l'origine O
comme
barycentre
des trois
points A, B
A(2,3)
2.i+3.j
B(1,1)
i+j
j
-i-2.j
i
C(-1,-2)





◁32▷ Montrez que si $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \dots S_p, A_1, \dots A_q)$ n'est pas forcément une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Montrez que si $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(A_n(\mathbb{R}), +, .)$, alors $(S_1, \dots S_p, A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Rappel : $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ est l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n sur n ; S_n en est le sous-espace des matrices symétriques (définition : ${}^tS = S$) et enfin A_n en est le sous-espace des matrices antisymétriques (définition : ${}^tA = -A$) .

Pour le cas « $(S_1, \dots S_p)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_1, \dots A_q)$ est une famille libre de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ », un contre-exemple suffit.
La famille (I_n) est libre (un vecteur, non nul).
La famille $(2.I_n)$ l'est aussi (même raison).
Mais la famille $(I_n,\ 2.I_n)$ ne l'est pas (vecteurs colinéaires).

Passons au cas où on met bout à bout • une famille libre de matrices symétriques
• une famille libre de matrices antisymétriques

Traduisons les hypothèses :
• $\forall(\alpha_1,\dots\alpha_p)\in\mathbb{R}^p,\ \Big((\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p=0_{n,n})\Rightarrow(\alpha_1=\dots=\alpha_p=0)\Big)$
• $\forall(\beta_1,\dots\beta_q)\in\mathbb{R}^q,\ \Big((\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n})\Rightarrow(\beta_1=\dots=\beta_q=0)\Big)$
mais aussi $\forall i,\ {}^t(S_i)=S_i$ et $\forall i,\ {}^t(A_j)=-A_j$.

Surtout, on n'invente pas un truc débile du style « on additionne les hypothèses et on met ensemble les conclusions », ce serait un truc idiot sans queue ni tête, et pire encore, sans logique.

Exemple : Que pensez vous de l'élève qui écrit : $\forall x,\ \cos^2(x)=1/2\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
$\forall x,\ \sin(x)^2=1/2\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
donc
$\forall x,\ \cos^2(x)+\sin(x)^2=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}\ [\pi]$
Oui, il faudrait le mettre dans tous les livres de maths cet exemple de raisonnement d'élève...

On va s'intéresser à la liberté de la grande famille des S_i et A_j.
On se donne donc $p+q$ réels qu'on note naturellement α_i et β_j.
On suppose $\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$.
On veut arriver à la nullité des α_i et des β_j.
Mais pour cela, il faudrait passer de $\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$ à $\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p=0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$
ce qui n'est pas évident, car on ne passe pas d'une égalité à deux (c'est la base même des raisonnements bien bâtis, on n'écrit rien sans réfléchir).
Mais si on part de

$$\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$$

et qu'on transpose ?

$$\alpha_1.{}^t(S_1)+\dots+\alpha_p.{}^t(S_p)+\beta_1.{}^t(A_1)+\dots+\beta_q.{}^t(A_q)={}^t\ (0_{n,n})=0_{n,n}$$

On tient compte des hypothèses « (anti)-symétriques :

$$\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p-\beta_1.A_1+\dots-\beta_q.A_q=0_{n,n}$$

Mais on a aussi toujours $\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p+\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$.
On somme, et on soustrait : $\alpha_1.S_1+\dots+\alpha_p.S_p=0_{n,n}$ et $\beta_1.A_1+\dots+\beta_q.A_q=0_{n,n}$.
cette fois, on a nos deux égalités.
Il est temps d'utiliser les deux hypothèses « famille libre » pour conclure d'une part les α_i sont nuls
d'autre part les β_j sont nuls.

◁33▷

Montrez que dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est liée pour tout θ.
Pour quelles valeurs de θ dans $(\mathbb{R},+,.)$, vu comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel, la famille $(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est-elle libre ?
$\theta=0,\theta=\dfrac{\pi}{3},\theta=\dfrac{\pi}{12},\theta=\dfrac{\pi}{4},\theta=\dfrac{\pi}{2},\theta=\dfrac{\pi}{5}$

$(\cos(\theta),\cos(2.\theta),\cos(3.\theta))$ est une famille de trois réels.
C'est à dire de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 1 (la droite). Bien sûr qu'elle est liée.
Tous ces réels sont proportionnels entre eux (le rapport de proportion dépend de θ, mais surveillez bien la position du « $\forall\theta$ »).

Mais en revanche, quand on regarde $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}-$espace vectoriel, c'est plus étrange.
Les coefficients dans les combinaisons linéaires sont uniquement des rationnels.
1 et 2 sont donc colinéaires, avec rapport de proportionnalité 2.
Mais 1 et π ne sont pas proportionnels, et forment donc une famille libre.
De même, 1, $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ forme une famille libre (trois directions d'espaces différentes puisque sur la droite engendrée par 1, il n'y a que les rationnels, et dans $Vect(1,\sqrt{2})$, on n'a que les $a+b.\sqrt{2}$ avec a et b rationnels ; raté pour attraper $\sqrt{3}$).

θ	$\cos(\theta)$	$\cos(2.\theta)$	$\cos(3.\theta)$	
0	1	1	1	liée : $1.1+(-1).1+0.1=0$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	liée : $2.\frac{1}{2}+0.\frac{-1}{2}+1.(-1)=0$
$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	libre (mais c'est long)
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	liée, à cause de 0, mais pas que..
$\frac{\pi}{2}$	0	-1	0	liée, encore à cause de 0
$\frac{\pi}{5}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{4}$	liée $0.\frac{1+\sqrt{5}}{4}+1.\frac{1+\sqrt{5}}{4}+(-1).\frac{1+\sqrt{5}}{4}$

◃34▹ On définit $\phi = (u,\ v) \longmapsto (x,\ y)$ de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^2$ avec $x = u^2 - v^2$ et $y = u.v$. Déterminez $\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}$ (c'est $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$).

Résolvez $\det\Big(\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}\Big) = 0$ d'inconnues u et v.

Montrez : $\phi(a+h,\ b+k) = \phi(a,b) + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix}.\frac{D(x,y)}{D(u,v)} + \overrightarrow{o(\sqrt{h^2+k^2})}$ (et expliquez la présence de cette flèche sur le petit o).

On admet que ϕ^{-1} est différentiable en $(0,\ 1)$. Donnez son développement limité d'ordre 1 en $(0,\ 1)$.

◃35▹ ♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

Si P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, il est dans $\mathbb{R}_3[X]$, de même que les cinq polynômes de la famille $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$. mais $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ est de dimension 4. Sans calcul, la famille est liée.

Qui sont les physiciens qui ont fait des calculs, rien que pour me « faire plaisir » ?

Si P est simplement X^3, la famille $(X^3,\ (X+1)^3,\ (X+2)^3,\ (X+3)^3)$ est libre ; il suffit de calculer son déterminant sur la base canonique.
Un autre excellent candidat est $X.(X-1).(X-2).(X-3)$. Si vous partez de $a.X.(X-1).(X-2).(X-3) + b.(X+1).(X).(X-1).(X-2) + c.(X+2).(X+1).(X).(X-1) + d.(X+3).(X+2).(X+1).(X) = 0$ et que vous calculez en 1, en 2, en 3 et en 4 vous avez $a = b = c = d = 0$.

◃36▹ ♡ A et B sont deux matrices carrées de taille n. On suppose A inversible. Simplifiez $A^{-1}.(A.B - x.I_n).A$. Déduisez que $A.B$ et $B.A$ ont le même spectre.
On suppose que ni A ni B n'est inversible. Montrez que $A - 2^{-p}.I_n$ *(notée A_p)* est inversible pour une infinité de valeurs de p. Montrez que pour ces valeurs de p, on a $\chi_{A_p.B}(X) = \chi_{B.A_p}(X)$. Déduisez $\chi_{A.B}(X) = \chi_{B.A}(X)$.

Comment calcule–ton le spectre d'une matrice carrée ? En cherchant les racines de son polynôme caractéristique.

On va donc montrer sous nos hypothèses que les deux matrices $A.B$ et $B.A$ (existence évidente) ont le même polynôme caractéristique.

Or, on a justement

$$\det(B.A - x.I_n) = \det(A^{-1}.(A.B - x.I_n).A) = \det(A^{-1}).\det(B.A - x.I_n).\det(A) = \det(B.A - x.I_n)$$

On tient donc le résultat si A est inversible.

Mots clefs : matrices semblables.

Par symétrie des rôles, c'est vrai aussi si B est inversible en écrivant

$$A.B - x.I_n = B^{-1}.(B.A - x.I_n).B$$

Mots clefs symétrie des rôles.

Mais si aucune des deux n'est inversible ?

On l'approxime par des matrices inversibles.

$A - 2^{-p}.I_n$ a pour déterminant $\chi_A(2^{-p})$. Or, χ_A est un polynôme de degré n. Il n'a donc qu'un nombre fini de racines. Dans $\mathbb{C}$ il en a même exactement n.
Une fois que 2^{-p} est plus petit que le module de la plus petit racine non nulle de χ_A, on a l'assurance que $\chi_A(2^{-p})$ est inversible.

Mots clés : polynômes, nombre fini de racines, module.

Comme A_p est inversible, on déduit que $A_p.B$ et $B.A_p$ ont le même polynôme caractéristique.

Comme les coefficients du polynôme caractéristique dépendent continument des coefficients des matrices, on peut passer à la limite : $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique (puisque A_p tend vers A et $A_p.B$ vers $A.B$).

Mots clef : continuité des coefficients du polynôme.

Je sais, en dimension 2 et 3, on peut le faire à la main, d'autant qu'on connaît des coefficients : $Tr(A.B) = Tr(B.A)$ et $\det(A.B) = \det(B.A)$.

◃37▹ Vrai ou faux (un vrai, un faux) :
Dans $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.
Dans $(M_n(\mathbb{C}), +, .)$ l'ensemble d'équation $Tr({}^tM.M) = 0$ est un espace vectoriel.

En fait, seule la matrice nulle vérifie $Tr({}^tM.M) = 0$ pour les matrices réelles.
C'est du au fait que $Tr({}^tM.M)$ est la somme des carrés de tous les éléments de M.
Regardez en taille 3 :

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + a'^2 + a''^2 & & \\ & b^2 + b'^2 + b''^2 & \\ & & c^2 + c'^2 + c''^2 \end{pmatrix}$$

Et la matrice nulle en solo, ça fait un espace vectoriel. De dimension 0.

En revanche dans $\mathbb{C}$, une somme de carrés peut être nulle.
Rien qu'en taille 2 : $\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}) = 0$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $Tr(\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$
On somme : $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \\ & -1 \end{pmatrix}$.
C'est raté pour la stabilité.

◃38▹ ♡ Soit $(U_1, \dots U_p)$ une famille de p vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ et M une matrice carrée de taille n, inversible. Montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est liée, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est liée.
On suppose M inversible ; montrez que si $(U_1, \dots U_p)$ est libre, alors $(M.U_1, \dots M.U_p)$ est libre.

Supposons la famille $(U_1, \dots U_p)$ liée par une relation du type $\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.U_k = 0_n$ avec au moins un α_k non nul.
Alors on a aussi

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_k.M.U_k = M.0_n = 0_n$$

et c'est une relation de dépendance linéaire entre les $M.U_k$.

Si $(M.U_1, \dots M.U_p)$ était liée, alors $(M^{-1}.M.U_1, \dots M^{-1}.M.U_p)$ serait liée (par la « même combinaison, comme au dessus). Ce qui contredit que $(U_1, \dots U_p)$ soit libre.

On a raisonné par contraposée, non ?

◁ 39 ▷

♡ F et G sont deux sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$. $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est une famille de vecteurs de F et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$. Montrez que $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre si et seulement si $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ le sont.

On suppose donc que F et G sont deux sous-espaces vectoriels vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.
On doit prouver une équivalence, on traite deux implications.
$\boxed{\mathbb{H}}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre. $\boxed{?}$ Les deux petites familles sont libres.
Par résultat du cours, la sous famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est libre.
En effet, si on part de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$, on déduit

$$\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + 0.\overrightarrow{g_1} + \dots + 0.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$$

et par liberté de la grande famille $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 = \dots = 0$.

$\boxed{\mathbb{H}}$ Les deux familles $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ sont libres. $\boxed{?}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre.
On se donne $p+q$ réels α_i et β_j. On suppose $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + \beta_1.\overrightarrow{g_1} + \dots + \beta_q.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$.
On a un nouvel objectif : les α_i et les β_j sont nuls.
On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p}$. Il est dans f. Mais en constatant $\overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, le voilà dans G.
Étant à la fois dans F et G (d'intersection triviale), le voilà nul.
On repart donc de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$. par liberté de la petite famille, tous les α_i sont nuls.
Dans le même temps $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, et c'est au tour des β_j d'être nuls par liberté de l'autre petite famille.

Un petit raisonnement d'une simplicité incroyable. Il ne demande aucune connaissance approfondie. Aucun apprentissage de lignes et de lignes. Aucun par cœur. Juste savoir mettre bout à bout des idées. Et surtout ne pas partir n'importe comment en tapant sur les hypothèses (quand déjà elles sont bien quantifiées).
Bref, des maths dans toute leur splendeur pour détecter votre capacité à raisonner.
D'autres branches des mathématiques testeront votre capacité à apprendre par cœur.

◁ 40 ▷

Soient $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{d}$ quatre vecteurs d'un espace vectoriel $(E,+,.)$. Montrez que $\{(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}\}$ est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension si la famille $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ est libre ?
Quelle est sa dimension si cette famille est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$?
Donnez un exemple où sa dimension vaut 1.

Le truc est à l'envers. Ce sont les coefficients des combinaisons.
Bon, ce sont des quadruplets de réels. On va montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4,+,.)$.
Le quadruplet nul vérifie $0.\overrightarrow{a} + 0.\overrightarrow{b} + 0.\overrightarrow{c} + 0.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$. On tient le neutre.
Si on a le quadruplet $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ qui vérifie $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$
alors le quadruplet $(k.\alpha, k.\beta, k.\gamma, k.\delta)$ qui vérifie

$$(k\times\alpha).\overrightarrow{a} + (k\times\beta).\overrightarrow{b} + (k\times\gamma).\overrightarrow{c} + (k\times\delta).\overrightarrow{d} = k.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

De même avec une somme si on a $\alpha.\overrightarrow{a} + \beta.\overrightarrow{b} + \gamma.\overrightarrow{c} + \delta.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$
et $\alpha'.\overrightarrow{a} + \beta'.\overrightarrow{b} + \gamma'.\overrightarrow{c} + \delta'.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$
alors on a $(\alpha+\alpha').\overrightarrow{a} + (\beta+\beta').\overrightarrow{b} + (\gamma+\gamma').\overrightarrow{c} + (\delta+\delta').\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$

Si la famille est libre, la seule combinaison est $0.\overrightarrow{a} + 0.\overrightarrow{b} + 0.\overrightarrow{c} + 0.\overrightarrow{d} = \overrightarrow{0}$.
Le sous-espace de $(\mathbb{R}^4,+,.)$ se réduit au seul vecteur nul.

$$\alpha.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \delta.\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

équivaut à

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha & +\beta & & +2.\delta & = & 0 & L1 \\ \alpha & & +\gamma & +\delta & = & 0 & L2 \\ & \beta & -\gamma & +\delta & = & 0 & L3 \\ \alpha & & +\gamma & +\delta & = & 0 & L4 \end{array}$$

Ce système est dégénéré. Et pas qu'un peu. $L3 = L1 - L2$ et $L4 = L1 - L3$
On peut choisir c et d comme on veut, et déduire a et b : $a = -c - d$ et $b = c - d$.
Les quadruplets sont de la forme $(-c-d,\ c-d,\ c,\ d)$ et sont combinaisons de $(-1,\ 1,\ 1,\ 0)$
et $(-1,\ -1,\ 0,\ 1)$

On est dans un espace de dimension 2.

Solution de facilité :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Les quadruplets sont de la forme $(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ t)$ avec t quelconque.
Ils forment un espace vectoriel de dimension 1.

En fait, on prend une famille liée, mais avec une seule relation de dépendance linéaire sur les vecteurs (à coefficient multiplicatif près effectivement).

◃41▹

Montrez que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un $(\mathbb{Q}, +, \times)$ espace vectoriel (pour x dans $\mathbb{R}$ et λ dans $\mathbb{Q}$, on pose évidemment $\lambda.x = \lambda.x$ au sens classique de la multiplication dans $\mathbb{R}$). Attention, ici, on doit tout démontrer (même si ce sont des évidences), car on n'est pas face à un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel.
Montrez que $(1,\ \sqrt{2})$ est libre. Montrez que $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3})$ est libre. $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est elle libre ?

$(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif, ça c'est sûr.

Ensuite : pour x dans $\mathbb{R}$et λ dans $\mathbb{C}$, le nombre $\lambda.x$ est bien dans $\mathbb{R}$.

On montre aussi :
$$\begin{array}{c} \forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{Q},\ \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{Q}^2,\ (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{Q}^2,\ \lambda.(\mu.x) = (\lambda.\mu).x \\ \forall x \in \mathbb{R},\ 1.x = x \end{array}$$

Ces propriété sont vraies avec λ et μ dans $\mathbb{R}$, donc également dans $\mathbb{Q}$.

Prenons deux rationnels λ et μ et supposons $\lambda.1 + \mu.\sqrt{2} = 0$ (réel nul).
On a alors $\sqrt{2} = -\dfrac{\lambda}{\mu}$. C'est un rationnel. Contradiction.
A moins que μne soit nul.
Mais alors la formule devient $\lambda.1 + 0 = 0$, d'où $\lambda = 0$.
Finalement, la seule solution est bien $\lambda = \mu = 0$.

On se donne ensuite trois rationnels a, b et c et on suppose $a.1 + b.\sqrt{2} + c.\sqrt{3} = 0$ *(objectif : $a = b = c = 0$)*.
Si c est nul, on est ramené au cas précédent, a et b le son aussi.
Sinon, on isole $c.\sqrt{3} = -a - b.\sqrt{2}$ et on élève au carré : $3.c^2 = a^2 + 2.b^2 + 2.a.b.\sqrt{2}$.
On isole : $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$.
Les deux nombres $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$ et $(a^2 + 2.b^2 - 3.c^2) + 2.a.b.\sqrt{2} = 0$ sont rationnels.
On est ramené au cas précédent : $a^2 + 2.b^2 - 3.c^2$ et $2.a.b$ sont nuls.
La nullité de $a.b$ conduit à celle de a ou b.
• Si a est nul, on reporte dans l'autre : $2.b^2 = 3.c^2$ et donc $b = \pm\sqrt{3/2}.c$.
Sachant que $\sqrt{3/2}$ est irrationnel, b et c sont nuls.

• Si b est nul $a^2 = 3.c^2$ et donc $a \pm \sqrt{3}.b = 0$.
Le raisonnement usuel sur l'irrationalité de $\sqrt{3}$ conduit à $a = b = 0$.

La famille $(1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4})$ est liée, puisque deux des vecteurs sont colinéaires : $\sqrt{4} = 2.1$. Avec $\sqrt{4}$ et 1 dans le rôle des vecteurs, et 1 dans le rôle du scalaire (il est rationnel, c'est autorisé).

◃42▹

Montrez que $(9.\overrightarrow{i}+12.\overrightarrow{j}+32.\overrightarrow{k},\ -10.\overrightarrow{i}-13.\overrightarrow{j}-35.\overrightarrow{k},\ 2.\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+4.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On calcule son déterminant relatif à la base canonique : $\begin{vmatrix} 9 & -10 & 2 \\ 12 & -13 & 2 \\ 32 & -35 & 4 \end{vmatrix} = -6$. C'est bon, on a une famille libre de bon cardinal.

Pour décomposer $\overrightarrow{j}$, il suffit d'inverser la matrice et de n'en calculer que la colonne du centre : $\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} ? & 30 & ? \\ ? & 28 & ? \\ ? & 5 & ? \end{pmatrix}$.

On cherche un vecteur qui a les mêmes composantes sur les deux bases ? On résout $P.U = U$ d'inconnue U (oh, un vecteur propre, mais il ne faut pas le dire).

Le système est dégénéré, fort heureusement. Le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ est aussi égal à

$$1.(9.\overrightarrow{i}+12.\overrightarrow{j}+32.\overrightarrow{k})+1.(-10.\overrightarrow{i}-13.\overrightarrow{j}-35.\overrightarrow{k})+1.(2.\overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j}+4.\overrightarrow{k})$$

◁ 43 ▷

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des suites réelles, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

suites bornées	suites décroissantes à partir d'un certain rang
suites périodiques	suites qui convergent vers 0
suites monotones	suites équivalentes à $1/n$ quand n tend vers l'infini
suites en $O\left(\frac{1}{n}\right)$	suites dont le terme général est plus petit que 1 à partir d'un certain rang
suites en $o\left(\frac{1}{n}\right)$	

◁ 44 ▷

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $C_A = \{M \mid M.A = A.M\}$, $R_A = \{M \mid A.M + M.A = 0\}$, $T_A = \{M \mid Tr(A.M) = 0\}$.
Montrez que C_A, R_A, T_A, $C_A \cap R_A$ et $C_A + R_A$ sont des espaces vectoriels, et donnez une base et la dimension de chacun.
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$?
Existe-t-il H vérifiant $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$?

On ne montrera pas ici les stabilités attendues pour « sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$.
A cela deux raisons : c'est répétitif
certains d'entre vous ne savent de toutes façons pas le rédiger, avec des variables non quantifiées/présentées
si on commence par montrer $C_A = Vect(A, I_2)$, c'est automatiquement un espace vectoriel !

On écrit les équations, puis la forme des solutions, puis la forme « combinaison linéaire » et enfin une base

$C_A : A.M = M.A$	$R_A : AM + MA = 0$	$T_A : Tr(A.M) = 0$
$b + 4.c = 0$ et $a = b + d$	$a + d = 0$, $b = 4.a + 4.c$	$2.a - b + 4.c - 2.d = 0$
$\begin{pmatrix} d-4.c & -4.c \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -d & -4.d+4.c \\ c & d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & 2.a+4.c-2.d \\ c & d \end{pmatrix}$
$\left(\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -4. \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$	$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
dimension 2	dimension 2	dimension 3

L'intersection $C_A \cap R_A$ est formée de matrices vérifiant à la fois $A.M = M.A$ et $A.M = -M.A$. Et donc $A.M = 0_{2,2}$.
C'est possible ça ? Oui, il y a A elle même ! (car A est nilpotente).
L'intersection est au moins de dimension 1.
Pourrait elle être de dimension 2 ? Dans ce cas, on aurait $C_A = R_A$. Or, l'élément I_2 est dans C_A mais pas dans R_A.
L'intersection est de dimension 1. Et c'est $Vect(\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix})$.

En notant $\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 4. \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour se convaincre qu'elle est dans l'intersection.

Pour ce qui est de $C_A + R_A$ c'est évidemment un espace vectoriel, par définition de la somme (ici non directe).
Il est de dimension 3 (Grassmann).

On a une base avec trois matrices indépendantes comme $\left(\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (on prend les quatre et on en enlève une).

Peut on avoir $R_A \oplus H = T_A \oplus H = M_2(\mathbb{R})$? Il faudrait avoir $\dim(H) = 2$ pour la première et $\dim(H) = 1$ pour la seconde.

Pour $R_A \oplus H = T_A + H = M_2(\mathbb{R})$, c'est un espace de dimension 2 qu'il nous faut. Avec deux matrices indépendantes qui ne sont pas dans $R_A$et dont au moins une n'est pas dans T_A.

◁45▷ ♣ Pouvez vous construire une matrice A de spectre réel $[1]$ et tel que le spectre de A^2 soit $[1, 4, 9]$? Même question avec cette fois $[1, 2]$ et $[1, 4, -9, -9]$?

Je traite d'abord la dernière :

matrice	polynôme	spectre réel	spectre complexe
$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$(X-1).(X-2).(X^2+9)$	$[1,\ 2]$	$[1,\ 2,\ 3.i,\ -3.i]$
$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$	$(X-1).(X-4).(X+9)^2$	$[1,\ 4,\ -9,\ -9]$	$[1,\ 4,\ -9,\ -9]$

Les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.

Pour la première question, si le spectre de A^2 a trois termes, c'est qu'on est en dimension 3 au moins.
Si A n'a qu'une valeur propre réelle, c'est qu'il lui reste deux valeurs propres complexes. Conjuguées puisque son polynôme caractéristique est à coefficients réels.
Mais alors avec le spectre complexe $[1,\ \alpha,\ \overline{\alpha}]$, le passage au carré donne $[1,\ \alpha^2,\ \overline{\alpha}^2]$ on ne peut pas avoir $[1, 4, 9]$.

A finir.

◁46▷ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur (caractérisation : $A^2 = A$). Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez en une base et la dimension.

On veut $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$. La seule réponse est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.On trouve $Ker(p) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Les deux vecteurs colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent l'image $Im(p) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + 2.y = 0\}$. On confirme : dimension 1.

Inutile de perdre du temps avec les stabilités de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$, c'est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$.
On pose quatre coefficients et résout $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
On s'attend à quatre équations et on les a :

$$\begin{array}{cccccccc} 2.x & & +2.z & & = & 2.x & -y & \\ & 2.y & & +2.t & = & 2.x & -y & \\ -x & & -z & & = & & & 2.z \quad -t \\ & -y & & -t & = & & & 2.z \quad -t \end{array}$$

Mais deux ne servent plus à rien : $y = -2.z$ et $t = x + 3.z$, c'est tout ce qu'il reste.
Les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} x & -2.z \\ z & x+3.z \end{pmatrix}$. On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})$. Dimension 2.

Remarque : Il est normal d'y trouver I_2 (puisque $A.I_2 = I_2.A$) et A elle même $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (puisque $A.A = A.A$).

◃47▹

♡ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant det$(A - X.I_n)$, y'a pas écrit PCici, mais cherchant déjà le sous-espace propre de valeur propre 0. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.
Et en taille n ?

On note A cette matrice et on résout $A.U = \lambda.U$ de vecteur inconnu U (et d'inconnue λ aussi).

On a plein de lignes égales $\begin{array}{llllllll} x_1 & +x_2 & +x_3 & \dots & +x_n & = & \lambda.x_1 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_2 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_3 \\ x_1 & & & & +x_n & = & \lambda.x_{n-1} \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & \dots & +x_n & = & \lambda.x_n \end{array}$.

On sent qu'il faut traiter à part la valeur propre 0. Pour elle, on cherche $Ker(A)$ en quelque sorte, et $rg(A)$.

$\lambda = 0$	$\lambda \neq 0$
$x_1 + x_n = 0$ $x_2 + \ldots + x_{n-1} = 0$	$x_2 = x_3 = \ldots = x_{n-1}$ $x_1 = x_n$ $2.x_1 + (n-2).x_2 = \lambda.x_1$ $2.x_1 = \lambda.x_2$
Sous espace propre : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})$ dimension $n-2$	

A terminer.

◃48▹

♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ *(base canonique* $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{l})$). Donnez une base du sous-espace H d'équation $x + y - z + 3.t = 0$. Donnez un jeu d'équations du plan P engendré par $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{l}$. Donnez une base de $H \cap P$.

H est de dimension 3. On peut se contenter de trois vecteurs pris au hasard dans H du moment qu'ils sont indépendants

(mais il n'est pas évident de voir de tête si $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ sont indépendants).

Le mieux est d'écrire les vecteurs de H : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y + 3.t \\ t \end{pmatrix}$ et d'avoir une base $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix})$.

Pour P de dimension 2 dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$, il faut deux équations. Mais lesquelles ? Peut être déjà $x = y$. Mais il en faut une autre.

Écrire les éléments de P sous la forme $a.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a alors $\begin{array}{lllll} x & = & a & + & b \\ y & = & a & + & b \\ z & = & -a & & \\ t & = & & & 2.b \end{array}$. Sous cette forme, il est clair qu'on aura toujours $a = b$.

Mais en fait, la méthode est systématique : éliminer a et b pour arriver à des relations où il n'y a plus que x et y. ici, c'est facile. On récupère a et b avec les deux dernières et on reporte dans les deux premières.

$x = y$ et $2.x = -2.z + t$.
deux équations. C'est bon. On les a.

On peut aussi proposer $\boxed{x = y \text{ et } 2.x = -2.z + t}$
Ce sont deux équations dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$, indépendantes.
Elles définissent un sous-espace de dimension 2.
Nos deux générateurs de P sont dans ce plan. Tous les vecteurs de P sont dans ce plan.
Par inclusion et égalité des dimension,s ce plan est P.

On peut aussi annuler des déterminants. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}\right)$ doit être liée.

On annule a priori quatre déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & 0 & z \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 2 & t \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

Mais en fait, deux équations suffisent et les deux autres sont combinaisons des deux premières.

$$\begin{array}{ccccc} & 2.y & +2.z & -t & = & 0 \\ 2.x & & +2.z & -t & = & 0 \\ 2.x & -2.y & & & = & 0 \\ x & -y & & & = & 0 \end{array}$$

Vous le voyez ?

Pour ce qui est de $H \cap P$, on peut donner déjà sa dimension, par la formule de Grassmann.
$\dim(H + P) = 3 + 2 - \dim(H \cap P)$.
Comme $\dim(H + P)$ ne peut dépasser 4, c'est que $\dim(H \cap P)$ vaut au moins 1.
Et si $\dim(H \cap P)$ valait 2, ceci entrainerait $\dim(H + P) = \dim(H)$, puis $H = H + P$ et donc $P \subset H$. Il suffit de trouver un vecteur de P qui n'est pas dans h pour refuser cette possibilité.

On a donc $H \cap P$ qui est de dimension 1.
Il suffit donc de trouver un vecteur vérifiant

$$\begin{array}{cccccc} 2.x & & +2.z & -t & = & 0 \\ x & -y & & & = & 0 \\ x & +y & -z & +3.t & = & 0 \end{array}$$

On trouve tout de suite d'ailleurs $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}$ et ses multiples. On confirme : dimension 1.

◃49▹ Un carré magique est une matrice dont les sommes en lignes et les sommes en colonnes sont toutes égales (la somme commune est appelée valeur caractéristique du carré).
Montrez que M est un carré magique de valeur caractéristique s si et seulement si on a $M.U = s.U$ et $V.M = s.V$ où U (repspectivement V) est le vecteur colonne (respectivement ligne) dont tous les coefficients valent 1.
Déduisez que le produit de deux carrés magiques de même format est encore un carré magique.

◃50▹ $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $D = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ Un élève dit que B est une base du sous-espace d'équation $x + y + z = t$ dans $\mathbb{R}^4$. Il dit ensuite que C est une base du sous-espace d'équation $2.x + y = t$. Il déduit que l'intersection a pour base D. Trouvez l'erreur.

C'est vrai, B est de dimension 3 dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$. C'est $Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ en écrivant ses vecteurs sous

la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ x+y+z \end{pmatrix}$.
Mais toute autre famille libre de trois vecteurs de B fait encore l'affaire. Et ici, c'est ce qu'on nous propose.
Sinon, on peut passer de ma base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ à la base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ par un changement inversible :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui dit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.

On fait de même pour C qui est de dimension 3 aussi.

Certes le vecteur commun aux deux bases $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est dans $C \cap D$. Mais il n'est pas le seul.
$C \cap D$ est de dimension 2.
Il faut donc deux vecteurs pour en avoir une base.
Sous la forme équation, on peut trouver ça. Sous la forme « base », on ne cherche pas forcément du bon côté.
$x + y + z = t$ et $2.x + y = t$
on a donc $t = 2.x + y$ et $z = x$ (équivalences).
On trouve que les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ 2.x+y \end{pmatrix}$.
On a une base : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Et n'engendre qu'une droite dans ce plan.

Les vecteurs communs à deux sous-espaces ne sont pas les vecteurs communs à deux bases. Ce sont les vecteurs qui se décomposent suivant les deux bases à la fois...

Vos Mi*ss* m'ont dé*ch*u. Ils cherchent des *t*aillis avec des *s*apins. Ma*r*ine fait bien *p*ire. Ils éva*c*uent l'*él*u. C'est une bonne pause pour la Chine. Attention aux pi*r*es des *can*ailles (circulaire). Ne vous *b*attez plus, *t*aisez vous ! Il faut éliminer l'é*c*art des *d*us. Montrez moi vos p*en*sions, je suis cons*ul*tante. Ah, les *l*uttes des c*r*assses. Le traiteur *c*olorie ses *and*ouilles.

◃51▹ Soit la famille $(\vec{i}, \vec{i} + 5.\vec{j}, 2.\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}, \vec{j} + 3.\vec{k})$. Combien de familles libres peut on en extraire ? Combien de familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ peut on en extraire ?

$\vec{i}$	$\vec{i} + 5.\vec{j}$	$2.\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$	$\vec{j} + 3.\vec{k}$	
				libre car vide
$\vec{i}$				libre (un vecteur non nul)
	$\vec{i} + 5.\vec{j}$			libre (un vecteur non nul)
		$2.\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$		
			$\vec{j} + 3.\vec{k}$	
$\vec{i}$	$\vec{i} + 5.\vec{j}$			libre (non colinéaires)
$\vec{i}$		$2.\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$		libre (non colinéaires)
				et ainsi de suite

On peut créer 2^4 (ce qui fait 16) familles.
Et une seule n'est pas libre, celle formée de tous les vecteurs (quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on sait que c'est fichu).
Mais sinon, les familles de trois sont libres $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ sont non nuls.

Total : 15 familles libres.

Pour les familles génératrices, il faut au moins trois vecteurs. Et chaque fois qu'on en prend trois, c'est bon, on a une base.
Et on peut y adjoindre la famille à quatre vecteurs.
D'où cinq familles génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.

Question : et si on s'autorise à prendre plusieurs fois le même ?

Et quatre bases. Avec six permutations pour chacune..

◃52▹ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \longmapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.
Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +,)$. On en trouve une équation par condition de coplanarité :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.
Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche,
sachant $2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$.
Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.

Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P. On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.

On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.

Et ainsi de suite.

> On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet $(x,\ y,\ z,\ t)$.
> Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.
> L'image de chaque vecteur $x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$ est $x_1.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_1})+x_2.\overrightarrow{f(e_2)}+x_3.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_3})+x_4.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_4})$, et la voilà dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

> On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ & 1 & \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice .

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P.

Pour le noyau, on doit juste résoudre : $\begin{array}{ccccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$.

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4-3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$. De dimension 1.

Sauf que...

Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 : $\begin{array}{ccccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$

On se donne x et y, et on trouve t et z.

Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+9.y \\ -x-2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & \\ & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix})}$