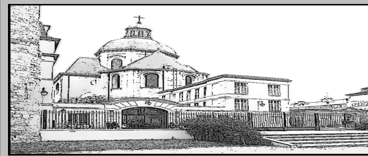
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 26 mai

$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD29

◁ 0 ▷ Dans l'espace vectoriel $(E, +, .)$, on a trois sous-espaces vectoriels A, B et C vérifiant $A \subset B \cup C$ (oui, réunion, pas somme).
Montrez $A \subset B$ ou $A \subset C$.

Ceci rappelle « la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est un espace vectoriel que quand l'un est inclus dans l'autre ».

On suppose que A est inclus dans la réunion $B \cup C$.

Imaginez une droite incluse dans la réunion d'une droite et d'un plan. C'est donc qu'elle est incluse dans le plan ou dans la droite.

Si en revanche elle est incluse dans la somme de la droite et du plan, elle est incluse dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et on ne peut rien dire de plus.

En algèbre linéaire, il faut voir les choses et non pas voir des formules (toujours la même chose, les maths ne sont pas des formules, mais des objets... mais le secondaire et les matières secondaires vous ont vraiment abruti dans ce mauvais sens.
On va raisonner par l'absurde.
La négation de $A \subset B$ ou $A \subset C$ est $A \not\subset B$ et $A \not\subset C$. On va essayer d'en tirer une contradiction.
On traduit cette hypothèse :
- il existe un élément $\overrightarrow{u}$ de A qui n'est pas dans B (argument $A \not\subset B$).
  Comme il est dans A mais pas dans B, il est dans C (argument $A = B \cup C$).
- il existe un élément $\overrightarrow{v}$ de A (égal à $B \cup C$) qui n'est pas dans C.
  Il est donc dans B.

Comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs de A, leur somme est encore dans a.
Comme on a supposé que A est inclus dans $B \cup C$, c'est donc que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est soit dans B, soit dans C.
Mais si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est dans B alors $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{v}$ est dans B, ce qui est contradictoire.
Et si $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ est dans C alors par stabilité $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) - \overrightarrow{u}$ est dans C, ce qui est aussi contradictoire.

Tous les cas conduisent à une contradiction, le raisonnement par l'absurde se termine bien.

◁ 1 ▷ Soit $(E, +, .)$ un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de n sous-espaces vectoriels stricts ($\forall i,\ F_i \neq E$). On va montrer que qu'aucune réunion finie $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$, par l'absudre.
On suppose donc qu'il existe un entier n tel que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ est soit espace vectoriel. Justifiez qu'il existe alors le plus petit entier n tel que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ soit un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.
Montrez qu'il existe $\overrightarrow{a}$ dans F_n qui n'est pas dans $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$.
Montrez qu'il existe $\overrightarrow{b}$ dans $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$ qui n'est pas dans F_n.
Montrez pour tout i de 1 à n que $\overrightarrow{a} + i.\overrightarrow{b}$ n'est pas dans F_n.
Déduisez que pour tout i de 1 à n, $\overrightarrow{a} + i.\overrightarrow{b}$ est dans $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$.
Déduisez par principe des tiroirs qu'il existe deux entiers i et j distincts et un entier k_0 entre 1 et $n-1$ vérifiant $\overrightarrow{a} + i.\overrightarrow{b} \in F_{k_0}$ et $\overrightarrow{a} + j.\overrightarrow{b} \in F_{k_0}$.
Déduisez que $\overrightarrow{a}$ est dans F_{k_0}. Concluez.

◃2▹ ♡ On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y fonction de t suivante : $y_t^{(3)} = y''_t + 14.y'_t - 24.y_t$ avec condition initiale $y_0 = y'_0 = y''_0 = 1$, sans utiliser le cours. Résolvez l'équation caractéristique (racines a, b et c).
Calculez $(X-a).(X-b)$, $(X-a).(X-c)$ et $(X-b).(X-c)$.
On pose alors $u = y'' - 5.y' + 6.y$, $v = y'' + 2.y' - 8.y$ et $w = y'' + y' - 12.y$.
Montrez que u, v et w sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 1.
Trouvez u, v, w et y.

L'équation différentielle $y_t^{(3)} = y''_t + 14.y'_t - 24.y_t$ est linéaire à coefficients constants d'ordre ″, ses solutions forment un espace vectoriel de dimension 3.
avec condition initiale $y_0 = y'_0 = y''_0 = 1$.
L'équation caractéristique est $\lambda^3 - \lambda^2 - 14.\lambda + 24 = 0$. On trouve une racine dans les valeurs classiques entre -2 et 2 : $8 - 4 - 14.2 + 24 = 0$.
On factorise $\lambda^3 - \lambda^2 - 14.\lambda + 24 = (\lambda-2).(\lambda^2+\lambda-12) = (\lambda-2).(\lambda-3).(\lambda+4)$.

On pose alors $u = y'' - 5.y' + 6.y$, $v = y'' + 2.y' - 8.y$ et $w = y'' + y' - 12.y$ et on dérive puis on remplace :

$u = y'' - 5.y' + 6.y$	$u' = y^{(3)} - 5.y'' + 6.y'$	$u' = y'' + 14.y' - 24.y - 5.y'' + 6.y'$	$u' = -4.u$
$v = y'' + 2.y' - 8.y$	$v' = y^{(3)} + 2.y'' - 8.y'$	$v' = y'' + 14.y' - 24.y + 2.y'' - 8.y'$	$v' = 3.v$
$w = y'' + y' - 12.y$	$w' = y^{(3)} + y'' - 12.y'$	$w' = y'' + 14.y' - 24.y + y'' - 12.y'$	$w' = 2.w$

On résout ces équations linéaires d'ordre 1 :

$u_t = u_0.e^{-4.t} = 2.e^{-4.t}$	$v_t = v_0.e^{3.t} = -5.e^{3.t}$	$w_t = w_0.e^{2.t} = -10.e^{2.t}$

Ceci nous livre un système :

u_t	$y''_t - 5.y'_t + 6.y_t = 2.e^{-4.t}$
v_t	$y''_t + 2.y'_t - 8.y_t = -5.e^{3.t}$
w_t	$y''_t + y'_t - 12.y_t = -10.e^{2.t}$

que l'on résout par combinaison.

On veut une combinaison $a.u_t + b.v_t + c.w_t$ qui élimine y''_t et y'_t. On veut donc $a+b+c=0$, $-5.a+2.b+c=0$ et si possible tout de suite $6.a - 8.b - 12.c = 1$.

On trouve finalement $\boxed{y_t = \dfrac{2.e^{-4.t} - 30.e^{3.t} + 70.e^{2.t}}{42}}$

et on vérifie

$\dfrac{2.e^{-4.0} - 30.e^{3.0} + 70.e^{2.0}}{42} = 1$
$\dfrac{2.(-4).e^{-4.0} - 30.3.e^{3.0} + 70.2.e^{2.0}}{42} = 1$
$\dfrac{2.16e^{-4.0} - 30.9.e^{3.0} + 70.4.e^{2.0}}{42} = 1$

◃3▹ Montrez que la droite passant par $O(0,\ 0)$ et $E(42,\ 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.
Montrez que l'aire du triangle de sommets $O(0,\ 0)$, $A(a,\ c)$ et $B(b,\ d)$est $\dfrac{1}{2}.\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.
Le point M a pour coordonnées $(x,\ y)$ dans $\mathbb{Z}^2$; en calculant de deux façons l'aire du triangle $(O,\ E,\ M)$, montrez que la distance de M à la droite $(O\ E)$ est le quotient $\dfrac{1}{\sqrt{42^2+151^2}}.\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix}$.
Montrez que si le point M n'est pas sur la droite $(O\ E)$ alors sa distance est un multiple de $\dfrac{1}{\sqrt{42^2+151^2}}$.
Montrez pour tout λ : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-\lambda.c & b-\lambda.d \\ c & d \end{vmatrix}$.
Complétez $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 42 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ????? & 0 \end{vmatrix}$.
Trouvez les points de $\mathbb{Z}^2$ les plus proches de la droite d'équation $151.x - 42.y = 0$ sans être dessus.

M est sur la droite (OE) si et seulement si $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OE}$ sont colinéaires
(OME) est un triangle plat.
On calcule l'aire de ce triangle par $\dfrac{1}{2}.\det(\overrightarrow{OM},\ \overrightarrow{OE})$. On obtient l'équation indiquée.

Plus mathématique m(ais si, justement, faire des maths ce n'est pas calculer, c'est être intelligent) :
- l'équation $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$ est une équation de droite (forme développée $a.x + b.y + c = 0$
- elle est vérifiée par $O(0,\ 0)$
- elle est vérifiée par $E(42,\ 151)$

• cette droite passe par E et O, et il n'y a qu'une droite passant par E et O
• c'est donc LA droite passant par E et O

◁4▷

♡ L'ensemble des suites réelles a vérifiant $\forall n,\ a_{2.n} = 0\ ou\ a_{2.n+1} = 0$ est il un espace vectoriel ?
Montrez $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{2.n} = 0\} \oplus \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{2.n} = u_{2.n+1}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ après avoir montré que chaque ensemble est un espace vectoriel. Pourquoi ne pouvez vous pas utiliser les théorèmes sur les dimensions ?

Le ou mathématique étant inclusif, la suite nulle vérifie le critère « au moins un terme sur deux est nul ».

Mais la stabilité additive est en défaut :

$(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ldots)$	$(1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0\ldots)$
$\forall n,\ a_{2.n} = 0\ ou\ \mathbf{a_{2.n+1} = 0}$	$\forall n,\ a_{2.n+1} = 0\ ou\ \mathbf{a_{2.n} = 0}$

. Chacune est dans l'ensemble, mais la somme ne l'est pas.

Remarque : *En général une définition avec un « ou » ne conduit pas à un espace vectoriel, car la stabilité additive est vite mise en défaut. C'est d'ailleurs souvent une histoire de réunion de deux sous-espaces vectoriels.*
Rappelons pour les espaces vectoriels que l'union ne fait pas la force. C'est la somme qui fait tout.

$\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n,\ u_{2.n} = 0\}$ est l'ensemble des suites dont au moins un terme sur deux est nul : les termes d'indices pairs.

La suite nulle en fait partie.
Si (a_n) et (b_n) vérifient $\forall n,\ a_{2.n} = b_{2.n} = 0$ alors on a bien $\forall n,\ a_{2.n} + b_{2.n} = 0$ et aussi $\forall n,\ \lambda.a_{2.n} + \mu.b_{2.n} = 0$.
On a bien un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ (espace vectoriel des suites réelles sans aucune condition).

Remarque : *On ne cherchera pas à jouer sur les dimensions, on est en dimension infinie.*

Toute suite $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ldots)$ se décompose d'une façon unique comme somme :
$(0,\ a_1,\ 0,\ a_3,\ 0,\ a_5,\ldots) + (a_0,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_4,\ 0,\ldots)$.

Remarque : *Pour prouver $E = A \oplus B$, on montre unicité et existence de décomposition par analyse et synthèse.*
Si vous avez fait l'analyse qui prouve l'unicité, ne vous fatiguez pas à prouver $A \cap B = \{\overrightarrow{0}\}$, c'est exactement équivalent à l »unicité de décomposition...

◁5▷

♡ Donnez une base de l'ensemble E_6 des suites réelles périodiques de période 6 après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel. Donnez une base de l'ensemble E_8 des suites de période 8. Qui est $E_6 \cap E_8$? Donnez en une base $(a,\ b)$.
Reprenez vos bases de E_6 et E_8 pour qu'elles contiennent a et b.
Montrez que la somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 est de période 24.
Montrez qu'il existe des suites de période 24 qui ne sont pas somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 *(soit par un argument de dimension, soit en donnant un exemple)*.

Toute suite périodique de période 6 est de la forme $(a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e\ldots)$.
Elle se décompose d'une façon unique à l'aide des six suites suivantes :

$$\begin{array}{c}
(1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\
(0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots) \\
(0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ldots) \\
(0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\
(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots) \\
(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots)
\end{array}$$

C'est la définition de « base ».

Pour les suites périodiques de période 8, on fait de même.

$E_6 \cap E_8$ est fait des suites périodiques de période 2.
Toute suite périodique de période 2 est a fortiori périodique de période 6 : $u_{n+6} = u_{n+4} = u_{n+2} = u_n$
périodique de période 8 : $u_{n+8} = u_{n+4.2} = u_n$
Toute suite périodique de périodes 6 et 8 vérifie $a_{n+2} = a_{(n+2)+6} = a_{n+8} = a_n$ pour tout n.
Elle est périodique de période 2.

L'espace des suites 2−périodiques ont pour base (1) et $((-1)^n)$ par exemple.

Si une suite (a_n) est périodique de période 6 alors $a_{n+24} = a_{n+6.4} = a_n$
(b_n) est périodique de période 8 alors $b_{n+24} = b_{n+8.3} = b_n$ pour tout n
alors la suite $(a_n + b_n)$ est bien périodique de période 24.

Mais les suites de période 24 ne sont pas somme de suites périodiques de périodes 6 et 8.
En effet, la suite $(1,0,0,0\dots 0,1,0,0\dots)$ avec juste un terme sur 24 égal à 1 ne peut pas être somme de (a_n) et (b_n) de périodes respectives 6 et 8.

Illogicien : *L'élève qui n'a pas le sens de la logique (ou l'a perdu au contact d'individus peu scrupuleux sur le raisonnement) va dire*
« Mais si ! Cette suite est bien une somme (a_n+b_n) avec (a_n) de période 6 et (b_n) de période 8 puisque on a bien
$(u_{n+24}=a_{n+24}+b_{n+24}=a_{n+6.4}+b_{n+8.3}=a_n+b_n=u_n$ ».
Et alors ? Ça ne prouve rien.
Ça montre juste qu'il n'y a pas d'incohérence de ce côté là. Mais il peut y en avoir ailleurs, non ?
Ce qui est nécessaire n'est pas forcément suffisant.
Disons juste que cet argument aurait plutôt servi à invalider « elle est somme d'une suite 7 périodique et d'une suite 5−périodique ».

Supposons qu'elle soit la somme de (a_n) et (b_n) de périodes respectives 6 et 8.
On a alors $\begin{array}{rrcl} a_0 & +b_0 & = & 1 \\ a_2 & +b_2 & = & 0 \\ a_8 & +b_8 & = & 0 \\ a_{18} & +b_{18} & = & 0 \end{array}$ et donc $\begin{array}{rrcl} a_0 & +b_0 & = & 1 \\ a_2 & +b_2 & = & 0 \\ a_2 & +b_0 & = & 0 \\ a_0 & +b_2 & = & 0 \end{array}$.
Quand on en somme deux, on a $a_0+b_0+a_2+b_2=1+0$.
Quand on somme les deux autres, on a $a_2+b_0+a_0+b_2=0$.
On aboutit à une contradiction.

◁ 6 ▷ On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de A et son spectre[a].
Montrez que K, K' et N sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,.)$

$K_A=\{U\in\mathbb{R}^3 \mid A.U=0_3\}$
$K'_A=\{U\in\mathbb{R}^3 \mid A^2.U=0_3\}$
$N_A=\{U\in\mathbb{R}^3 \mid A.U=9.U\}$

. Donnez leurs dimensions.

Lesquelles de ces propositions sont vraies

$\mathbb{R}^3=K'\oplus N$	$\mathbb{R}^3=K'+N$
$\mathbb{R}^3=K\oplus N$	$\mathbb{R}^3=K'+N$

?
Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A)=0_{3,3}$.
Traitez les mêmes questions avec B à la place de A.
Placez les dans le tableau : A, B, I_3, $O_{3,3}$

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible		
non inversible		

a. $\chi_A(X)=\det(A-X.I_3)$ est le polynôme caractéristique ; ses racines sont le spectre

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ La trace vaut 9, le déterminant est nul (colonnes égales !), et la somme des mineurs de taille 2 vaut $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$, ce qui fait peu.
Le polynôme caractéristique est $X^3-9.X$.
Le spectre est $[0,\ 0,\ 9]$ (0 est racine double).

Tout ensemble de la forme $\{U\in\mathbb{R}^3 \mid M.U=0_3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On y trouve le vecteur nul : $M.U=0_3$.
Si U et v sont dans cet ensemble, et si λ et μ sont réels, alors on a $M.(\lambda.U+\mu.V)=\lambda.M.U+\mu.M.V=0_3$.
On peut appliquer ce résultat à $M=A$ (c'est K) ou $M=A^2$ (c'est K') ou $M=A-I_3$ (pour N).
On fera de même pour B.

Sinon, sans effort, on détermine explicitement K, et on le met sous la forme $Vect(\dots)$ et c'est bien un espace vectoriel !

$$\begin{array}{rcl} K & = & \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+2.y+2.z=0\} \\ & = & \{\begin{pmatrix} -2.y-2.z \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+2.y+2.z=0\} \\ & = & Vect(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \end{array}$$

Sachant $A^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix}$, on a $K' = K$, aussi de dimension 2.

Enfin, $N = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix})$ en résolvant le système dégénéré

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -8.x & +2.y & +2.z & =0 \\ 2.x & -5.y & +4.z & =0 \\ 2.x & +4.y & -5.y & =0 \end{array}\right|$$

$$L_1 = -2.L_2 - 2.L_3$$

On résume

espace	équations	base	dimension
K	$x+2.y+2.z=0$	$(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$	2
$K' = K$	$x+2.y+2.z=0$	$(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$	2
N	$\left\{\begin{array}{rrrr} 4.x & -y & -z & =0 \\ 2.x & -5.y & +4.z & =0 \end{array}\right\|$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On constate $K \cap N = \{\overrightarrow{0}\}$. On a donc $dim(K\cap N) = 0$ puis $dim(K+N) = dim(K) + dim(N) - 0 = 3$.
Ayant déjà l'inclusion, on déduit $K + N = \mathbb{R}^3$. Comme l'intersection est réduite à $\overrightarrow{0}$, la somme est directe : $K \oplus N = \mathbb{R}^3$.

$K_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$
oui	oui	oui	oui

Pour B on recommence de même ou presque : polynôme caractéristique $X^3 - 9.X$ et spectre $[0,\ 0,\ 9]$.

On constate $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix} = A^2$.

espace	équations	base	dimension
K_B	$\left\{\begin{array}{rrrr} 5.x & +4.y & -2.z & =0 \\ -x & +y & +4.z & =0 \end{array}\right\|$	$(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})$	1
$K'_B = K_A$	$\{\ x \quad +2.y \quad +2.z \quad =0 \ \|$	$(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$	2
N	$\left\{\begin{array}{rrrr} -4.x & +4.y & -2.z & =0 \\ -2.x & -7.y & +8.z & =0 \end{array}\right\|$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On a des espaces déjà croisés, certaines sommes, directes ou non sont déjà obtenues. Pour d'autres, la dimension suffit à obtenir $K_B + N_B \neq \mathbb{R}^3 + N_B \neq \mathbb{R}^3$.

$K_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$
non, dim 2	non, je l'ai déjà dit	oui	oui

Vous voulez des polynômes annulateurs : A et I_3 sont indépendantes, mais $A^2 = 9.A$.
B est non colinéaire à I_3 et B^2 n'est pas combinaison de I_3 et B. En revanche, $B^3 = 9.B^2$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 81 & 162 & 162 \\ 162 & 324 & 324 \\ 162 & 324 & 324 \end{pmatrix}$

Polynômes annulateurs :

$X^2 - 9.X$	$X^3 - 9.X^2$
$A^2 = 9.A$	$A^3 = 9.B^2$

La matrice I_3 est diagonalisable. Déjà diagonale. Et elle est inversible.

La matrice $0_{3,3}$ est diagonalisable, déjà diagonale. Si on y tient : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix} .(I_3)^{-1}$. Mais pas très inversible.

Ni A ni B n'est inversible.

Mais A est diagonalisable. On a une matrice diagonale : $\begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$, imposée par le polynôme caractéristique.

On cherche P avec des vecteurs vérifiant $M.U = 0.U$, $M.V = 0.V$ et $.W = 9.W$. Et on veut qu'ils forment une famille libre.

$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$$

Si B était diagonalisable, ce serait en la même matrice D. Mais on n'arrive pas à trouver U et V vérifiant $B.U = 0.U$ et $B.V = 0.V$ et formant une famille libre. La dimension de K_B n'est pas suffisante.

D'ailleurs, si B se diagonalisait, on aurait $B = Q. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .Q^{-1}$ puis $B^2 = Q. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 81 \end{pmatrix} .Q^{-1} = 9..B$, ce qui n'est pas le cas...

Pour prolonger l'exercice : trouvez Q vérifiant $B.Q = Q.D'$ avec $D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$ (un petit 1, appelé terme de trigonalisation de Jordan, en plus).

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$	
non inversible	$O_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix}$, $A = P. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .P^{-1}$	$B = Q. \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .Q^{-1}$

Et si vous voulez compléter la case qui manque : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

◁7▷ Le corps de base est l'ensemble des entiers de 0 à $p-1$ (p est un nombre premier au moins égal à 5, je sais). On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. L'application linéaire est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A. \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminez la dimension du noyau de f et de l'image de f (elle peut dépendre de p).
Déterminez aussi la dimension du noyau et de l'image de $M \longmapsto A.M$ de $M_{2,2}(\{0, \dots p-1\})$ dans lui même.

Si la matrice est inversible, l'application est bijective (c'est même une équivalence).

Et si elle est bijective (d'inverse $X \longmapsto A^{-1}.X$), alors son noyau est réduit à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et son image est le plan entier [1].

On calcule le déterminant (utile d'ailleurs pour résoudre $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Il vaut 13. Qu'il faut réduire évetuellement modulo p.

Mais si p dépasse 13, $\det(A)$ vaut 13, et 13 est non nul.

Et p vaut au moins 5 pour que 4 ait un sens. On traite donc les premiers cas à part :

1. qui est tombé dans le piège et a dit « son image est $\R^2$ » ? non, son image est $range(p)^2$, c'est tout !

	$p=5$	$p=7$	$p=11$	$p=13$	$p>13$
déterminant	$\det(A)\neq 0$	$\det(A)\neq 0$	$\det(A)\neq 0$	$\det(A)=0$	$\det(A)\neq 0$
noyau	$Ker(f)=\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$	$Ker(f)=\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$	$Ker(f)=\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$	à voir	$Ker(f)=\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\}$
image	$Im(f)=range(p)^2$	$Im(f)=range(p)^2$	$Im(f)=range(p)^2$	à voir	$Im(f)=range(p)^2$

Au fait On ne confondra pas $range(p)^2$ et $range(p^2)$.

Quand p vaut 13, on résout $\begin{pmatrix}4&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
Les deux équations sont proportionnelles. On passe de la première à la seconde en multipliant par 10 puisque $4.10=40=1$ et $3.10=30=4$.
On résout donc juste $x+4.y=0$ soit $x=9.y$.
On trouve les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}9.y\\y\end{pmatrix}$ c'est $Vect(\begin{pmatrix}9\\1\end{pmatrix})$ ou $Vect(\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix})$. On peut vérifier $\begin{pmatrix}4&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

Pour l'ensemble image, on calcule $\begin{pmatrix}4&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}4&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Toutes les autres images sont combinaisons des deux : $\begin{pmatrix}4&3\\1&4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x.\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}+y.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

Mais les deux vecteurs sont proportionnels : $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.

L'ensemble image est $Vect(\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix})$.

Application $M\longmapsto A.M-M.A$. A faire.

◁8▷ On se donne n réels a_1 à a_n. Pour tout k, on note $S_k=\sum_{i=0}^{n}(a_i)^k$ et σ_k la k^{ieme} fonction symétrique des racines $\sigma_k=\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_k}a_{i_1}.a_{i_2}\ldots a_{i_k}$.
Exprimez à l'aide des S_k

$\begin{vmatrix}\sigma_1&1\\2.\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\sigma_1&1&0\\2.\sigma_2&\sigma_1&1\\3.\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\sigma_1&1&0&0\\2.\sigma_2&\sigma_1&1&0\\3.\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1&1\\4.\sigma_4&\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}\sigma_1&1&0&0&0\\2.\sigma_2&\sigma_1&1&0&0\\3.\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1&1&0\\4.\sigma_4&\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1&1\\5.\sigma_5&\sigma_4&\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}$

Exprimez à l'aide des σ_k :

$\begin{vmatrix}S_1&1\\S_2&S_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}S_1&1&0\\S_2&S_1&2\\S_3&S_2&S_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}S_1&1&0&0\\S_2&S_1&2&0\\S_3&S_2&S_1&3\\S_4&S_3&S_2&S_1\end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix}S_1&1&0&0&0\\S_2&S_1&2&0&0\\S_3&S_2&S_1&3&0\\S_4&S_3&S_2&S_1&4\\S_5&S_4&S_3&S_2&S_1\end{vmatrix}$

Donnez *(même sans preuve)* la formule générale, mais pas avec des points de suspension, mais une formule pour le terme général de la matrice dont on calcule le déterminant.

$$\begin{vmatrix}\sigma_1&1\\2.\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}=(\sigma_1)^2-2.\sigma_2=\Big(\sum a_k\Big)^2-2.\sum_{i,j}a_i.a_j=\sum_k(a_k)^2=S_2$$

puisque $(\sigma_1)^2$ est le carré de la somme (somme des carrés plus somme des doublets).

$$\begin{vmatrix}\sigma_1&1&0\\2.\sigma_2&\sigma_1&1\\3.\sigma_3&\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}=(\sigma_1)^3+3.\sigma_3-3.\sigma_1.\sigma_2=\Big(\sum_k a_k\Big)^3-3.\Big(\sum_{i,j}a_i.a_j\Big).\Big(\sum_k a_k\Big)+3.\sum_{i,j,k}a_i.a_j.a_k$$

Or, la somme $\Big(\sum a_k\Big)^3$ contient
- la somme des cubes
- la somme des termes an $(a_i)^2.a_j$ (avec facteur 3 venant de $\frac{3!}{2!.1!}$)
- la somme des termes an $a_i.a_j.a_k$ (avec facteur 6 venant de $\frac{6!}{1!.1!.1!}$)

Le terme $\Big(\sum_{i,j}a_i.a_j\Big).\Big(\sum_k a_k\Big)$ contient
- la somme des $a_i.aj.a_k$
- mais aussi la somme des $(a_i)^2.a_k$ pour $i=k$ et celle des $a_i.(a_j)^2$

Bref, après simplifications, il ne reste que

$$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sum_k (a_k)^3 = S_3$$

Pour ceux qui le souhaitent : $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)+6.(a.b.c)$
$3.(a+b+c).(a.b+a.c+b.c) = 3.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)+9.(a.b.c)$

Un calcul courageux donne $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sum_k (a_k)^4 = S_4$.

Et si on ose, le dernier déterminant donne S_5(somme des puissnces cnquièmes).

De même

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \left(\sum_k a_k\right)^2 - \sum_k (a_k)^2 = 2.\sigma_2$$

(toujours la somme des carrés et le carré de la somme)

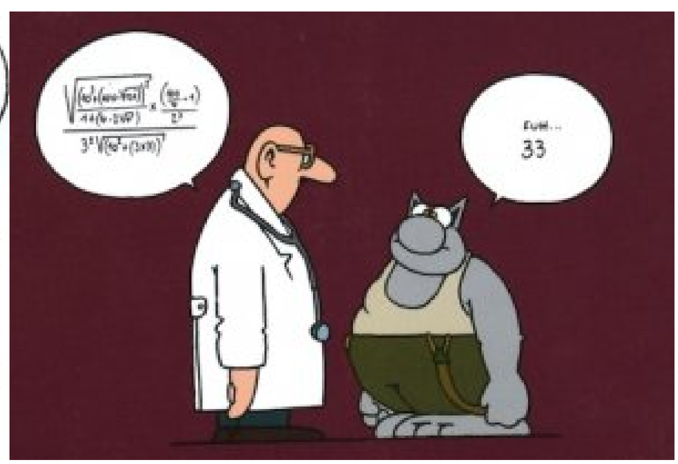
puis

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix} = \left(\sum_k a_k\right)^3 - 3.\left(\sum_k a_k\right).\left(\sum_i (a_i)^2\right) + 2.\left(\sum_i (a_i)^3\right) = 6.\sigma_3$$

Là encore, en version rapide dans $(a+b+c)^3 - 3.(a+b+c).(a^2+b^2+c^2) + 2.(a^3+b^3+c^3)$
les a^3 sont au nombre de $1-3+2$, ils s'en vont
les $a^2.b$ sont au nombre de $3-3$, ils s'en vont
les $a.b.c$ sont au nombre de 6 et c'est tout

Je vous laisse imaginer la suite.

Et vous me laissez trouver un joli devoir pour expliquer ces formules.



◁9▷ Pour un contre-exemple à la comparaison de $(A+B)\cap(B+C)\cap(C+A)$ et $(A\cap B)+(B\cap C)+(C\cap A)$, Louis propose de prendre $A = S_3(\mathbb{R})$, $B = A_3(\mathbb{R})$ et $C = T_3(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques et matrices de trace nulle toutes en taille 3). Déterminez les dimensions des sous-espaces vectoriels ci dessus.

◁10▷ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \longmapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.
Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +,)$. On en trouve une équation par condition de coplanarité :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.
Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche,
sachant

$$2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$$

Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P. On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.
On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.
Et ainsi de suite.

On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet $(x,\ y,\ z,\ t)$.
Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.
L'image de chaque vecteur $x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$ est $x_1.f(\overrightarrow{e_1})+x_2.\overrightarrow{f(e_2)}+x_3.f(\overrightarrow{e_3})+x_4.f(\overrightarrow{e_4})$, et la voilà dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ & 1 & \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice .

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P.

Pour le noyau, on doit juste résoudre : $\begin{array}{ccccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$.

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4-3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$. De dimension 1.

Sauf que...

Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 : $\begin{array}{cccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$

On se donne x et y, et on trouve t et z.

Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + 9.y \\ -x - 2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & \\ & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix})}$

◃11▹

Déterminez le noyau de $f \longmapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

Si on résout $f' - f = 0$, on trouve que f est un multiple de l'exponentielle (et pas de e^x, on est d'accord !).
Le noyau de $f \longmapsto f' - f$ est $Vect(\exp)$.
Il est de dimension 1.

Mais avec des polynômes, on ne opeut avoir $P' = P$ (degré), sauf avec $P = 0$.
Le noyau est réduit au vecteur nul. Et il est de dimension 0.

◃12▹

Quelle est la dimension de l'ensemble des fonctions polynômes lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

Les fonctions polynômes ne sont pas souvent lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Sachant qu'elles sont dérivables, le critère se ramène à « dérivée bornée ».
Mais un polynôme n'est pas borné sur $\mathbb{R}$ sauf s'il est constant.
Si la dérivée est constante, l'application elle même est affine, de la forme $x \longmapsto a.x + b$.
On a un espace vectoriel de dimension 2, engendre par $x \longmapsto x$ et $\longmapsto 1$.

◃13▹

Combien l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$ a-t-elle de solutions ? Calculez leur somme.

Chaque application $x \longmapsto \log_a(x)$ est croissante, de même que leur somme. On aura au plus une solution à l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$. De plus les limites en 0 et en $+\infty$ donnent par théorème des valeurs intermédiaires une solution.
La question « somme des solutions » se ramène à « la solution ».

On applique le cours : $\dfrac{\ln(x)}{\ln(7)} + \dfrac{\ln(x)}{\ln(8)} = 1$.

On trouve $\ln(x) = \dfrac{\ln(7).\ln(8)}{\ln(7)+\ln(8)}$. Pas tellement plus simple que $\boxed{x = e^{\frac{\ln(7).\ln(8)}{\ln(56)}}}$

◃14▹

Résolvez : $2 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{x}}} = 5$ d'inconnue complexe x.

On transforme $2-\dfrac{1}{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}}}=5$ en $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}}=-\dfrac{1}{3}$ puis $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$ et enfin $\boxed{x=-\dfrac{4}{5}}$ *(dans $\mathbb{R}$ donc a fortiori dans $\mathbb{C}$).*

◁ 15 ▷ On donne comme hypothèse : $\dfrac{u_{n+2}}{u_n}\mapsto_{n\mapsto+\infty}\dfrac{1}{4}$. Un élève prétend en déduire : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\mapsto_{n\mapsto+\infty}\dfrac{1}{2}$. Prouvez lui qu'il a tort.

L'autre sens aurait été correct : si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$

alors $\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}.\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers $\dfrac{1}{4}$

Mais sinon, que pensez vous de la suite

$n=0$	1	2	3	4	5	6	7	...	$2.p$	$2.p+1$	...
1	$-\sqrt{3}$	$\dfrac{1}{4}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	$\dfrac{1}{16}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$	$\dfrac{1}{64}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{64}$		$\dfrac{1}{4^p}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4^p}$	

Chaque rapport $\dfrac{u_{n+2}}{u_n}$ vaut $\dfrac{1}{4}$ (que n soit pair ou impair).

Mais le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ vaut $-\sqrt{3}$ ou $\dfrac{-4}{\sqrt{3}}$ suivant la parité de n.

Il y a d'autres exemples possibles évidemment, avec l'entrelacement de deux suites « presque géométriques ».

◁ 16 ▷ Un élève prétend qu'on a
$\dim(F+G+H)=\dim(F)+\dim(G)+\dim(H)-\big(\dim(F\cap G)+\dim(F\cap G)+\dim(F\cap G)\big)+\dim(F\cap G\cap H)$
Montrez par un simple contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ qu'il a tort *(et pas seulement parce qu'il est élève)*.

Prenons dans le plan les trois droites $Vect(\overrightarrow{i})$, $Vec(\overrightarrow{j})$ et $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$.

$F+G+H$	F	G	H	$F\cap G$	$F\cap H$	$G\cap H$	$F\cap G\cap H$
$\mathbb{R}^2$	droite	droite	droite	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$
2	1	1	1	0	0	0	0

◁ 17 ▷ Rappel des règles.
Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7	=	24
			=	11
4			=	10
=	=	=		
15	20	10		

et

			=	20
			=	10
	1		=	15
=	=	=		
22	.7	16		

◁ 18 ▷ ♡ Montrez $\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{e}$ en utilisant le théorème de Cesàro sur $\dfrac{n^n}{n!}$.

Ce n'est pas directement le théorème de Cesàro dans sa forme (a_n) converge vers α implique $\dfrac{a_0+\ldots+a_n}{n+1}$ converge vers α.

On a des formules qui passent par logarithme et exponentielle.

Si $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ tend vers α alors $\ln(b_{n+1})-\ln(b_n)$ converge vers $\ln(\alpha)$

$\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}(\ln(b_{k+1})-\ln(b_k))$ converge vers $\ln(\alpha)$

$\frac{\ln(b_n)-\ln(b_0)}{n}$ converge vers $\ln(\alpha)$

$\frac{\ln(b_n)-\ln(b_0)}{n}+\frac{\ln(b_0)}{n}$ converge vers $\ln(\alpha)$

$\exp\left(\frac{\ln(b_n)}{n}\right)$ converge vers $e^{\ln(\alpha)}$

$\sqrt[n]{b_n}$ converge vers α

Qui va être ici b_n et qui va être α ?

On se laisse guider et on pose $b_n=\frac{n^n}{n!}$ dont la limite ne saute pas aux yeux.
Mais ce qu'on doit regarder c'est le quotient :

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}.\frac{n!}{n^n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.\frac{n!}{(n+1)!}$$

Il reste

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}.\frac{1}{(n+1)}=\frac{(n+1)^n}{n^n}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Grand classique : ceci tend vers e (passez au logarithme et reconnaissez $\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln(1)}{\frac{1}{n}}$ et surtout, connaissez votre cours !).

Le théorème peut s'appliquer : $\sqrt[n]{b_n}$ converge à son tour vers e.

Mais qui est $\sqrt[n]{b_n}$? C'est $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

La formule $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers e est équivalente à $\dfrac{\frac{n}{e}}{\sqrt[n]{n!}}$ tend vers 1.
Et c'est la définition de « deux suites équivalentes ».

◃19▹ ♡ Montrez qu'il existe un isomorphisme entre $(S_2(\mathbb{C}),+,.)$ et $(S_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Isomorphisme = application linéaire, bijective.

Écrivons la forme des éléments de $S(\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} a+i.b & c+i.d \\ c+i.d & e+i.f \end{pmatrix}$ (on retient $\begin{pmatrix} a+i.b & c+i.d \\ & e+i.f \end{pmatrix}$ pour voir juste la dimension)

et ceux de $S_3(\mathbb{R})$: $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ et là aussi, on retient $\begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix}$.

Les deux sont de dimension 6, on va pouvoir créer une application linéaire bijective :

$$\begin{pmatrix} a+i.b & c+i.d \\ & e+i.f \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & f \end{pmatrix}$$

Il existe un isomorphisme entre deux espaces si et seulement si ils ont la même dimension.

◁ 20 ▷ p et q sont deux réels plus grands que 1 vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. y est un réel strictement positif fixé. Étudiez les variations de $x\longmapsto \frac{x}{p}+\frac{y}{q}-x^{\frac{1}{p}}.y^{\frac{1}{q}}$ sur $]0,\ +\infty[$. Déduisez : $x^{1/p}.y^{1/q}\leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$.
On se donne f et g continues de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $A=\sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p.dt}$ et $B=\sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q.dt}$ *(supposés non nuls)*. Montrez pour tout x de $[a,\ b]$: $\frac{f(x).g(x)}{A.B}\leqslant \frac{f(x)^p}{p.A^p}+\frac{g(x)^q}{q.B^q}$. Déduisez : $\int_a^b |f(t.g(t)|.dt\leqslant \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p.dt}.\sqrt[q]{\int_a^b |f(t)|^q.dt}$. Que reconnaissez vous pour $p=2$?

p et q sont dits conjugués, comme 2 et 2.
La majoration $x^{1/p}.y^{1/q}\leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$ est un classique, qu'on va obtenir ici par variations.
$x\longmapsto \frac{x}{p}+\frac{y}{q}-x^{\frac{1}{p}}.y^{\frac{1}{q}}$ est une application dérivable.
En 0 elle tend vers $\frac{y}{q}$.
En $+\infty$ elle tend vers l'infini (car $\frac{x}{p}$ l'emporte sur $x^{\frac{1}{p}}$ puisque p est plus grand que 1).
On la dérive : $x\longmapsto \frac{1}{p}+0-\frac{1}{p}.x^{\frac{1}{p}-1}.y^{\frac{1}{q}}$.
On la simplifie en $x\longmapsto \frac{1}{p}.\Big(1-x^{-\frac{1}{q}}.y^{\frac{1}{q}}\Big)$ (p et q sont conjugués).
La dérivée s'annule et change de signe en y. Et on trouve qu'en y cette application vaut $\frac{y}{p}+\frac{y}{q}-y^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}$, ce qui fait...
Oui, 0 !
Le minimum de $x\longmapsto \frac{x}{p}+\frac{y}{q}-x^{\frac{1}{p}}.y^{\frac{1}{q}}$ vaut 0, atteint en $x=y$.
Cette application est donc positive.

Les deux réels A et B existent. Ils sont a priori strictement positifs.
Prenons $x^{1/p}.y^{1/q}\leqslant \frac{x}{p}+\frac{y}{q}$ avec $x=\frac{|f(x)|^p}{A^p}$ et $y=\frac{|g(x)|^q}{B^q}$ (le rôle de x comme agent double est étrange dans cette formule).
L'inégalité devient donc $\frac{|f(x)|}{A}.\frac{|g(x)|}{B}\leqslant \frac{1}{p}.\frac{|f(x)|^p}{A^p}+\frac{1}{q}.\frac{|g(x)|^q}{B^q}$.
On intègre de a à b : $\int_a^b \frac{|f(x)|}{A}.\frac{|g(x)|}{B}.dx\leqslant \frac{1}{p.A^p}.\int_a^b |f(x)|^p.dx+\frac{1}{q.B^q}.\int_a^b |g(x)|^q.dx$ par linéarité.
Et même $\frac{1}{A.B}.\int_a^b |f(x).g(x)|.dx\leqslant \frac{1}{p.A^p}.\int_a^b |f(x)|^p.dx+\frac{1}{q.B^q}.\int_a^b |g(x)|^q.dx$.
Mais qui est $\int_a^b |f(x)|^p.dx$? C'est A^p. Et de même pour $\int_a^b |g(x)|^q.dx$.
Le membre $\frac{1}{p.A^p}.\int_a^b |f(x)|^p.dx+\frac{1}{q.B^q}.\int_a^b |g(x)|^q.dx$ devient simplement $\frac{1}{p.A^p}.A^p+\frac{1}{q.B^q}.B^q$.
On le simplifie en 1 (car p et q sont conjugués).

A ce stade : $\frac{1}{A.B}.\int_a^b |f(x).g(x)|.dx\leqslant 1$.

Un produit en croix : $\int_a^b |f(x).g(x)|.dx\leqslant A.B$.

On revient aux vrais noms de variables : $\int_a^b |f(x).g(x)|.dx\leqslant \Big(\int_a^b |f(x)|^p.dx\Big)^{1/p}.\Big(\int_a^b |g(x)|^q.dx\Big)^{1/q}$.

On notera qu'on avait intérêt à donner un nom aux deux quantités appelées justement A et B, et à ne pas traîner leur forme intégrale.
La démonstration est très similaire à celle faite pour les sommes.
Pour p et q égaux à 2, c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz (au programme, car « facile »).
Ici, c'est l'inégalité de Minkowski.

◃21▹

Quelle est la dimension de $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$?
Quelle est la dimension de $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?

Pour $Vect(\cos,\ \sin,\ \exp,\ \exp^2,\ \cos^2,\ \sin^2)$, les objets sont bien des vecteurs, en tant que fonctions.
La dimension ne peut pas dépasser 6, car on a une famille génératrice de six vecteurs.
Reste à savoir si elle est libre.
Si elle l'est, elle forme une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre. Et la dimension vaut donc 6.
On suppose donc, pour un sextuplet [2] donné (a, b, c, d, e, f) : $a.\cos + b.\sin + c.\exp + d.\exp^2 + e.\cos^2 + f.\sin^2 = 0$ (fonction nulle).
On traduit : $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + c.e^x + d.e^{2.x} + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$. Et on joue sur le $\forall x$ pour annuler les coefficients.
Les idées sont classiques : regarder en quelques points bien choisis, dériver, regarder encore en quelques points, regarder vers $+\infty$.
Je vais commencer par l'idée de $+\infty$.
On commence par diviser par $e^{2.x}$ (non nul) :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^{2.x}} + c.e^{-x} + d + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^{2.x}} = 0$$

On fait tendre x vers $+\infty$ (c'est vrai pour tout x !) : $0 + d + 0 = 0$.

On recommence en effaçant $d.e^{2.x}$ et en divisant juste cette fois par e^x :

$$\forall x,\ \frac{a.\cos(x) + b.\sin(x)}{e^{x}} + c + \frac{e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x)}{e^{x}} = 0$$

Cette fois, c'est c qui est nul.
On s'est débarrassé des exponentielles (qui n'auraient pas pû être égales à des lignes trigonométriques !).

On repart de $\forall x,\ a.\cos(x) + b.\sin(x) + e.\cos^2(x) + f.\sin^2(x) = 0$ et on regarde en particulier en 0 et en π :
$a + e = 0$ et $-a + e = 0$.
Cette fois, c'est a et e qui sont nuls.
On regarde en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{-\pi}{2}$.
Et c'est fini !

La dimension vaut 6.

Et pour $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$?
Eh bien, pour tout x, ce sont des réels.
On est donc dans $(\mathbb{R}, +, .)$, de dimension 1, et on a pris six vecteurs (dont plusieurs non nuls).
La dimension vaut toujours 1.

Il ne faut effectivement pas confondre $Vect(\cos(x),\ \sin(x),\ \exp(x),\ \cos(2.x),\ \sin(2.x))$ de cette question avec

$$Vect(x \longmapsto \cos(x),\ x \longmapsto \sin(x),\ x \longmapsto \exp(x),\ x \longmapsto \cos(2.x),\ x \longmapsto \sin(2.x))$$

de la question précédente...

◃22▹

Soit ϕ un opérateur linaire sur $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui même qui vérifie $\phi(p) = (x \longmapsto p(x+1))$ si p est paire et $\phi(i) = (x \longmapsto i(x-1))$ si i impaire.
Déterminez $\phi(\exp)$.
On doit déterminer $Ker(\phi)$.
Un élève dit : je cherche x vérifiant $\phi(f)(x) = 0$. Pourquoi est il totalement crétin ?
Un élève indique : si f est paire, ceci revient à $\forall x,\ f(x+1) = 0$, et donc $\forall t,\ f(t) = 0$; il n'y a que la fonction nulle. Si f est impaire, de la même façon : $f(x-1) = 0$ pour tout x, et f est nulle. Dans tous les cas, f est nulle.
Où est l'erreur dans son « raisonnement » ? Rectifiez.

Comme l'opérateur est linéaire, et comme toute application se décompose d'une façon unique en partie paire et

2. j'ai peur : par quoi mon correcteur orthographique va-t-il me proposer de remplacer « sextuplet » si il ne le trouve pas dans sa base de données ?

impaire, il suffit de se laisser porter, en surveillant toutefois les étages

$$\phi(\exp) = \phi(ch + sh) = (x \longmapsto ch(x+1) + x \longmapsto sh(x-1)) = \left(x \longmapsto \frac{e^{x+1} + e^{-x-1}}{2} + \frac{e^{x-1} - e^{-(x-1)}}{2}\right)$$

On pourra regrouper en $x \longmapsto e^x.ch(1) - e^{-x}.sh(1)$ pour que ce soit plus classe.

$\phi(f)(x) = 0$ est la bonne écriture (en toute rigueur $(\phi(f))(x) = 0$). Mais surtout la vraie inconnue n'est pas x mais f. On cherche f vérifiant

$$\forall x,\ \phi(f)(x) = 0$$

Résolvons cpomme propose $\phi(f) = 0$ (fonction nulle) pour f paire.
La question devient $\forall x,\ f(x+1) = 0$.
Mais comme $x = 1$ décrit tout $\mathbb{R}$, on obtient $\forall t,\ f(t) = 0$.
La solution paire de $\phi(f) = 0$ est la fonction nulle.

On résout de même $\phi(f) = 0$ pour f impaire.
On trouve de la même façon la fonction nulle.

Mais il reste le cas des fonctions qui ne sont ni paires ni impaires. Il y en a (en terme de cardinal, on pourrait dire qu'elles sont majoritaires ; en termes d'algèbre linéaire, elles se décomposent à l'aide des paires et impaires).

Ce qu'on a prouvé c'est

$$Ker(\phi) \cap P = \{\overrightarrow{0}\} = Ker(\phi) \cap I$$

mais ceci ne nous renseigne pas sur

$$Ker(\phi) \bigcap (P + I)$$

avec les notations usuelles (P pour ensemble des fonctions paires et I pour ensemble des fonctions impaires).

Que faut il faire ? Décompose f en partie paire et impaire comme dans le cas de l'exponentielle

$$p = x \longmapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2}\ et\ i = x \longmapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$$\phi(p) = x \longmapsto \frac{f(x+1) + f(-(x+1))}{2}\ et\ \phi(i) = x \longmapsto \frac{f(x-1) - f(-(x-1))}{2}$$

Par linéarité on détermine $\phi(f)$ et on demande finalement

$$\forall x,\ \frac{f(x+1) + f(-(x+1))}{2} + \frac{f(x-1) - f(-(x-1))}{2} = 0$$

On se dit qu'il doit bien y avoir des fonctions vérifiant ceci

$$\forall x,\ f(x+1) + f(-x-1) + f(x-1) - f(-x+1) = 0$$

J'ai une solution avec $x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}.x\right)$
On vérifie en décomposant $f = p + i$ avec

$$p = x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x\right)\ et\ i = x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{4}.x\right)$$

On calcule l'image de chacune

$$p = x \longmapsto \cos\left(\frac{\pi}{4}.x + \frac{\pi}{4}\right)\ et\ i = x \longmapsto \sin\left(\frac{\pi}{4}.x - \frac{\pi}{4}\right) et$$

justement (trigonométrie)

$$\forall x,\ \cos\left(\frac{\pi}{4}.x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}.x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

Le noyau est au moins de dimension 1.

De là à le connaître totalement !

◃23▹ ♡ Une application linéaire f de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ dans $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ vérifie $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = X^2+X+1$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$ et $f(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$.
Calculez $f(\overrightarrow{i})$, $f(\overrightarrow{j})$ et $f(\overrightarrow{k})$. Déterminez le noyau de f.

Tout repose sur la linéarité.
Et sur le fait que $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k})$ est une base.
Tout vecteur se décompose à l'aide de ces trois là.

$$\begin{array}{rclllr}
\overrightarrow{i} & = & 0.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & -1.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & facile \\
\overrightarrow{k} & = & -1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & +1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & +0.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & facile\ aussi \\
\overrightarrow{j} & = & 1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) & -1.(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & +1.(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) & avec\ les\ deux\ autres
\end{array}$$

On a donc les trois images : $\begin{array}{rcllll} f(\overrightarrow{i}) & = & 0 & & \\ f(\overrightarrow{j}) & = & X^2 & +X & +1 \\ f(\overrightarrow{k}) & = & & -2.X & -1 \end{array}$

On peut vérifier en recalculant $f'(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et autres.

Il saute que yeux que $\overrightarrow{i}$ est dans le noyau.
Ainsi que ses multiples.

Est il tout seul ? En tout cas, le noyau est il uniquement cette droite ?

On peut résoudre et montrer que $f(x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}) = 0$ conduit à $y = z = 0$ et x quelconque.

Sinon, on peut se dire que si le noyau avait été plus gros, il aurait été de dimension 2.
L'image aurait alors été de dimension 1.
Et visiblement, on trouve des vecteurs non colinéaires.

Oui, les polynômes à l'arrivée sont appelés vecteurs.

Pour l'ensemble image, la formule du rang nous prévient qu'il sera de dimension 2 seulement (inclus dans $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$ qui est de dimension 3).
On sait que les vecteurs $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}) = X^2+X+1$, $f(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$ et $f(\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}) = X^2-X$. sont dans l'ensemble image.
Ils en forment une famille génératrice, puisque l'image de n'importe que $x.\overrightarrow{i}+y.\overrightarrow{j}+z.\overrightarrow{k}$ est une combinaison des trois.
Mais comme on a un vecteur en double, on ne le met qu'une fois.

$$Im(f) = Vect(X^2+X+1,\ X^2-X)$$

Et en revanche on ne sait que l'ensemble image ne fait pas partie des questions posées...

Au fait, qui a été perturbé par le fait qu'on envoyait des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sur des polynômes ?
Qui a dit « c'est pas cohérent » ?
Après tout, on définit ce qu'on veut, du moment que c'est linéaire !

◃24▹ *E est* l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 nuls en 1.
Complétez le tableau.
Pour celles qui sont des bases, regroupez les en deux groupes en fonction de leur orientation relative.

	génératrice	base
$(1, X, X^2, X^3)$		
$((X-1),\ (X-1)^2,\ (X-1)^3)$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2).(X-3))$		
$(X-1),\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-2)^2)$		
$(X-1,\ (X-1)^2,\ (X-1).(X-2),\ (X-1).(X-3))$		
$((X-1)^2.(X-2),\ (X-1).(X-2)^2,\ X-1)$		
$((X-1),\ (X-1).X,\ (X-1).X^2)$		

◃25▹ L'opérateur ${}^{\omega}$ est défini sur l'espace vectoriel des applications C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : « il est linéaire », $p^{\omega} = p'$ si p est paire et $i^{\omega} = -i'$ si i est impaire. Calculez $\exp^{\omega}$. Calculez $(x \longmapsto Arctan(x+1))^{\omega}$. Qu'est ce qui est vrai : $\boxed{\forall f,\ (f^{\omega})^{\omega} = -f''}$ $\boxed{\forall f,\ (f^{\omega})^{\omega} = f''}$ $\boxed{\text{ni l'un ni l'autre}}$ On pose $s_a = x \longmapsto \sin(x+a)$ et $c_a = x \longmapsto \cos(x+a)$. Exprimez $(c_a)^{\omega}$ et $(s_a)^{\omega}$. Pourquoi la formule $(\cos(x+a))^{\omega}$ est elle idiote ?
On demande de résoudre $f^{\omega} = f$ d'inconnue f. L'élève cherche : « il n'y a pas de solution f paire à part la fonction nulle, il n'y a pas de solution impaire, à part la fonction nulle, donc la seule solution est la fonction nulle ». Montrez qu'il a tort.

Rappel : transformation linéaire : $\phi(\lambda.u + \mu.v) = \lambda.\phi(u) + \mu.\phi(v)$, par exemple $(\lambda.u + \mu.v)' = \lambda.u' + \mu.v'$.

Comme on sait dériver les applications paires et les applications impaires, on sait, par addition, calculer l'image de toute application. il suffit de la décomposer en somme d'une application paire et d'une application impaire : $f^{\omega} = (p+i)^{\omega} = p^{\omega} + i^{\omega} = p' - i'$.

$$\boxed{\exp^{\omega} = (ch + sh)^{\omega} = ch' - sh' = sh - ch = (t \longmapsto -e^{-t})}$$

On pose $f = (x \longmapsto Arctan(x+1))$. On extrait sa partie paire et sa partie impaire :
$p = x \longmapsto \dfrac{Arctan(x+1)}{2} + \dfrac{Arctan(1-x)}{2}$ et $i = x \longmapsto \dfrac{Arctan(x+1)}{2} - \dfrac{Arctan(1-x)}{2}$
On les dérive : $p' = x \longmapsto \dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)} - \dfrac{1}{2.(1+(1-x)^2)}$ et $i' = x \longmapsto \dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)} + \dfrac{1}{2.(1+(1-x)^2)}$.
On applique la définition : $f^{\omega} = p' - i'$. Les termes en $\dfrac{1}{2.(1+(x+1)^2)}$ se simplifient. Les autres s'additionnent, mais avec signe moins :
$f^{\omega} = x \longmapsto \dfrac{-1}{1+(x-1)^2}$.

On décompose aussi : $t \longmapsto \cos(t+a) = (t \longmapsto \cos(a).\cos(t) - \sin(a).\sin(t))$. La décomposition est en place, on dérive
$(c_a)^{\omega} = (\cos(a).\cos - \sin(a).\sin)^{\omega} = \cos(a).\cos' - \sin(a).(-\sin') = -\cos(a).\sin + \sin(a).\cos$. On reconnaît $(c_a)^{\omega} = (t \longmapsto \sin(a).\cos(t) - \cos(a).\sin(t)) = (\longmapsto \sin(a-t))$.
On résume : $\boxed{(c_a)^{\omega} = -s_{(-a)}}$
De même, on applique ω à $x \longmapsto \sin(a).\cos(x) + \cos(a).\sin(x)$, on trouve $x \longmapsto -\sin(a).\sin(x) - \cos(a).\cos(x)$.
On reconnaît $\boxed{(s_a)^{\omega} = -c_{(-a)}}$

Sur cette question, je surveillerai les étages. $\cos(x)^{\omega}$ *par exemple n'a pas de sens. On parle de fonctions, on a donc soit des* $(x \longmapsto \ldots)$*, soit des* $\cos'$ *directement.*

L'équation $p^{\omega} = p$ donne $p' = p$, donc p est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^{t}$. mais cette application n'est pas paire. Sauf pour λ nul.
L'équation $i^{\omega} = i$ donne $i' = -i$, donc i est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^{-t}$. mais cette application n'est pas impaire. Sauf pour λ nul.
L'élève a raison sur la phase « *il n'y a pas de solution paire à part la fonction nulle* », et « *il n'y a pas de solution impaire à part la fonction nulle* ».

Mais il peut y avoir des solutions faites d'une partie paire et d'une partie impaire.

Écrivons $f = p + i$ avec des notations naturelles.
Omegatisons : $f^{\omega} = p^{\omega} + i^{\omega} = p' - i'$. L'équation devient $p + i = p' - i'$. Or, la dérivée d'une application paire est impaire et la dérivée d'une application impaire est paire. On reformule l'équation $f^{\omega} = f$ en $i + p = p' - i'$. On identifie les parties paires et les parties impaires (argument d'identification par somme directe) : $p' = i$ et $-i' = p$.
On reporte l'une dans l'autre : $p'' = i' = -p$ et $i'' = -p' = -i$. On a des solutions d'équation du type $y'' = -y$. p et i sont des combinaisons de sin et cos.
On a donc quatre constantes vérifiant $p = a.\cos + b.\sin$et $i = c.\cos + d.\sin$. Mais p doit être paire et i impaire. Il reste $p = a.\cos$ et $i = c.\sin$ .Et comme on doit reporter dans l'équation : $-a.\sin = p' = i = d.\sin$. On a donc $d = -a$.
On récapitule : $f = a.(\cos - \sin)$. On vérifie : $f^{\omega} = a.(\cos^{\omega} - \sin^{\omega}) = a.(\cos' + \sin') = a.(-\sin + \cos) = f$.
L'application $t \longmapsto \cos(t) - \sin(t)$ et ses multiples sont solutions.

On a raisonné par équivalences, on a toutes les solutions. mais pour contredire l'élève, il suffit de dire que $\cos - \sin$ *est solution de* $f^{\omega} = f$.

Un lemme dont a a eu besoin : la dérivée d'une fonction paire est impaire (exemple : $ch' = sh$), et la dérivée d'une application impaire est paire(exemple $(t \longmapsto t^{2.k+1}) = (t \longmapsto (2.k+1).t^{2.k})$).

On prend p paire : $p(t) = p(-t)$ pour tout t. On dérive de chaque côté (et d côté droit, c'est une composée) : $p'(t) = -p'(-t)$. On reconnaît que p' est impaire.
On prend i impaire : $i(-t) = -i(t)$ pour tout t. Par dérivation, un signe moins sort : $-i'(-t) = -i'(t)$: i' est paire.

Fort de ces lemmes, on écrit $f = p + i$ et on passe à ω : $f^\omega = p^\omega + i^\omega = p' - i'$. On ré-applique ω sachant que la partie paire est -i et la partie impaire p' : $(f^\omega)^\omega = (-i')^\omega + (p')^\omega = (-i')' - (p')' = -i'' - p''$. Par linéarité de la dérivation : $\boxed{(f^\omega)^\omega = -f''}$

Si on a des doutes : $(\exp^\omega)^\omega = ((ch+sh)^\omega)^\omega = (ch' - sh')^\omega = (sh - ch)^\omega = sh^\omega - ch^\omega = -ch - sh = -\exp$.
On peut le voir aussi pour une application en $f = (t \longmapsto a.t^4 + b.t^3 + c.t^2)$: $f^\omega = (t \longmapsto 4.a.t^3 - 3.b.t^2 + 2.c.t)$ *et* $(f^\omega)^\omega = (t \longmapsto -12.a.t^2 - 6.b.t - 2.c)$.

◃26▹

a - Vrai ou faux : si f est dérivable, alors p et i sont dérivables.
b - Vrai ou faux : si f est périodique, alors p et i sont périodiques.
c - Vrai ou faux : si f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors p et i le sont aussi.
d - Vrai ou faux : si f est monotone, alors p ou i est monotone.
Ici, pour f donnée, p et i sont les fonctions paire et impaire de somme f.

a

- Si f est dérivable, alors par composition $x \longmapsto f(-x)$ l'est aussi, et par combinaison, p et i le sont aussi.

Rappel : $p = x \longmapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ *et* $i = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

On notera que si p et i sont dérivables, la somme l'est aussi.
On a finalement une équivalence.

---

b - On suppose f périodique de période T. On a donc $f(x+T) = f(x)$ mais aussi $f(x-T) = f(x)$ pour tout x (en écrivant $f(x) = f(x - T + T)$ par exemple).
On a alors $p(x+T) = \dfrac{f(x+T)+f(-x-T)}{2} = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ pour tout x.
p est aussi périodique, et par soustraction, i l'est aussi.

Mais rien ne garantit que T soit la plus petite période de p par exemple.
Prenons $f = \sin$ *(période* $2.\pi$*). Sa partie paire est constante et admet pour pérode* 1, $4/3$, $\sqrt{2}$ *et tout ce qu'on veut.*

---

c - L'injectivité ne se transmet pas forcément. La somme de deux applications injectives ne l'est plus forcément.
Un contre-exemple ? On prend $f = Id$ (injective évidemment).
Sa partie paire est $x \longmapsto 0$, pas injective du tout.

D'ailleurs, en tant que fonction paire, p ne sra jjamais injective !

---

d - Si f est monotone, p ne peut pas l'être, car p est paire.
On note que si p est croissante sur un intervalle $[a, b]$, elle sera décroissante sur $[-b, -a]$.
Mais l'énoncé propose que la croissance de f se transmette à p ou i.
Peut être donc qu'elle se transmet à i.

On suppose p croissante (on traitera l'autre cas en regardant $-f$).
On se donne a et b avec $a \leqslant b$.
On a tout de suite $f(a) \leqslant f(b)$.
Mais on a aussi $-b \leqslant -a$ et donc $f(-b) \leqslant f(-a)$.
On change le signe : $-f(-a) \leqslant -f(-b)$.
On somme et on divise par 2 : $i(a) = \frac{f(a)-f(-a)}{2} \leqslant \frac{f(b)-f(-b)}{2} = i(b)$
La croissance de f s'est transmise à i. On a gagné.

◃27▹

♡ Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u}$ du plan de vecteur normal $2.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$. Calculez l'image de $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$.

f est définie pour les vecteurs suivants : $\overrightarrow{i}$ mais aussi $\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ (tous deux dans le plan).

f est alors définie partout par linéarité *(histoire de somme directe)*.
Il suffit alors de décomposer

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout un système (ou on inverse $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2.x+y-z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-y+z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et par linéarité de f :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2.x+y-z}{2}.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{-y+z}{2}.\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Le reste n'est plus que calcul *(le début aussi, mais au moins, le début c'est des calculs intelligents)*.

◃28▹ Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E,+,.)$ de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.
Attention, on travaille avec $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}$ égal à l'ensemble des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication (et la division) modulo 11.
Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E,+,.)$ d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5.

On veut un endomorphismes de $(E,+,.)$ de noyau $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, d'image $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix})$ et de trace 5. Les dimensions sont cohérentes.
On écrit la matrice d'un tel endomorphisme sur la base canonique de $\{0, \dots 10\}^2$: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et on traduit les exigences :
les colonnes sont multiples de $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$: $\begin{pmatrix} 2.a & 2.b \\ 5.a & 5.b \end{pmatrix}$
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau : $\begin{matrix} 2.a & +2.b & = 0 \\ 5.a & +5.b & = 0 \end{matrix}$

L'élève gentillet écrit : il faut que tous les vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}$ sont dans le noyau, donc $\begin{matrix} 2.a.x & +2.b.x & = 0 \\ 5.a.x & +5.b.x & = 0 \end{matrix}$. Et si il est un peu plus intelligent que gentillet, il ajoute : c'est vrai pour tout x, c'est équivalent à $\begin{matrix} 2.a & +2.b & = 0 \\ 5.a & +5.b & = 0 \end{matrix}$ (et si il est idiot, il ajoute « sauf pour $x = 0$ », alors même qu'il avait un $\forall x$.
Pourquoi je le traite de gentillet ? parce que il regarde pour tous les vecteurs au lieu de se contenter de regarder pour une base. Or, se limiter à des bases, à des sous-espaces qui forment une somme directe, c'est justement avoir l'intelligence de l'algèbre linéaire.

On exige donc $a+b=0$. la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & -2.a \\ 5.a & -5.a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 2.a & 9.a \\ 5.a & 6.a \end{pmatrix}$.
Il reste une exigence sur la trace : $-3.a = 5$ ou $8.a = 5$. On n'a plus qu'une valeur pour a : 2.

La matrice cherchée est donc $\boxed{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}}$ et il n'y en a qu'une.

On oublie l'exigence de noyau : la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} 2.a & 2.b \\ 5.a & 5.b \end{pmatrix}$ avec $2.a + 5.b = 5$.
Pour chaque valeur de b, il y a une unique valeur de a : $a = 5.(1-b)/2 = 5.(1-b).6 = 8.(1-b)$.
On trouve 11 solutions dont on peut donner la liste
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 8 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

◃29▹ On pose $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$, $D = Vect(\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$. Résolvez $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'inconnue réelle α.

$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ est un plan. On en donne une base $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.

$Vect(\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k})$ est une droite de base $\left(\begin{pmatrix}1\\\alpha\\2\end{pmatrix}\right)$.

Les deux espaces sont supplémentaires si et seulement si ces trois vecteurs forment une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
On calcule le déterminant et on demande qu'il soit non nul. La seule valeur interdite est $\alpha = 1$ *(auquel cas le dernier est la somme des deux premiers* [3]*)*.

Autre approche : il faut et il suffit que le droite ne soit pas incluse dans le plan. Le vecteur $\overrightarrow{i} + \alpha.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$ ne doit pas vérifier l'équation du plan : $A + \alpha - 2 \neq 0$.

◃30▹ A et B sont deux sous espaces vectoriels de $(E, +, .)$ (espace de dimension finie) vérifiant $A + B = E$.
Montrez qu'il existe $\begin{array}{lll} C & \text{sous espace vectoriel de } A & \text{vérifiant } C \oplus B = E \\ D & \text{sous espace vectoriel de } D & \text{vérifiant } A \oplus D = E \end{array}$.
Que pouvez vous dire si $C + D = E$?

Les deux résultats sont symétriques dans les rôles de A et B. On va démontrer le premier. : l'existence de D.

Commençons par prendre une base de A : $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p})$ et une base de B : $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_q})$.
On est en dimension finie, on en profite, il y a des bases.
On sait déjà que $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_q})$ est génératrice de $(E, +, .)$, mais pas forcément une base (sinon on aurait écrit $E = A \oplus B$).
On pourrait enlever des vecteurs pour la libérer en base. mais on peut tout aussi bien enlever des $\overrightarrow{a_i}$ que des $\overrightarrow{b_j}$.

Mais on a un théorème qui permet de compléter une famille libre en base.
On part de la famille libre $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p})$ (en tant que base de A, elle est libre dans A donc dans E).
On lui ajoute un par un des vecteurs de B tant que la famille reste libre jusqu'à ce qu'on ne puisse plus.
Algorithme précis :

- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_1}$ de B tel que $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1})$ soit libre
- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_2}$ de B tel que $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2})$ soit libre
- prendre un vecteur $\overrightarrow{\beta_3}$ de b tel que $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \overrightarrow{\beta_3})$ soit libre
- continuer ainsi tant que c'est possible.

La chose s'arrête impérativement car la taille des familles libres de $(E, +, .)$ est limitée par la dimension.
Quand l'algorithme s'arrête, la famille $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1}, \ldots, \overrightarrow{\beta_r})$ est libre.
Est ce alors une base de E ? Elle est libre.
Par l'absurde : si elle n'est pas génératrice, il ; existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E qui lui échappe et n'est pas combinaison linéaire de cette famille.
Un tel vecteur $\overrightarrow{u}$ s'écrit $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans B puisque $E = A + B$.
Comme $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1}, \ldots, \overrightarrow{\beta_r}\ \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})$ est libre, $(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}, \overrightarrow{\beta_1}, \ldots, \overrightarrow{\beta_r}\ \overrightarrow{b})$ l'est aussi (on efface $\overrightarrow{a}$ à l'aide de $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \ldots, \overrightarrow{a_p}$) et ceci contredit le fait que l'algorithme aurait du s'arrêter.

Il suffit ensuite de prendre $D = Vect(\overrightarrow{\beta_1}, \overrightarrow{\beta_2}, \ldots, \overrightarrow{\beta_r})$. C'est un sous-espace vectoriel de B (construit avec des combinaisons de vecteurs de B).
Et on a bien $A \oplus D = E$ puisqu'on a une base de E cette fois en mettant bout à bout une base de chacun.

On fait de même en partant de $(\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_q})$ qu'on agrandit avec des $\overrightarrow{\alpha_i}$ bien choisis dans A.

Si on a $E = A + B$ et $E = C + D$, avec $C \subset A$, $C \oplus B = E$, $D \subset B$ et $A \oplus D = E$, on a, déjà en termes de dimensions :

3. *comme le dit le chat de Philippe Geluck : « le jour où les premiers seront les derniers... et les derniers les premiers... alors ça ne changera strictement rien pour ceux qui sont au milieu*

1	$\dim(A)+\dim(B)\geqslant\dim(E)$		3	$\dim(C)+\dim(D)\geqslant\dim(E)$		5	$\dim(A)\geqslant\dim(C)$
2	$\dim(A)+\dim(D)=\dim(E)$		4	$\dim(C)+\dim(B)=\dim(E)$		6	$\dim(B)\geqslant\dim(D)$

$$\dim(E)=\dim(A)+\dim(D)\geqslant\dim(C)+\dim(D)\geqslant\dim(E)$$

(on a utilisé 2, 5 et 3).
Par antisymétrie, on a donc des égalités, et ainsi 5 devient forcément $\dim(A)=\dim(C)$.
Comme on a une inclusion : $A=C$.
On reporte dans $B\oplus C=E$: B est un supplémentaire de A.
Et vice versa.

On fait de même avec 4, 6 et 3 : $\dim(B)=\dim(D)$. On a donc $B=D$.
A la fin : $A+C$ et $B=D$ puis $A\oplus B=E$.

◃31▹

Vrai/Faux :

a	l'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide
b	dans un espace vectoriel de dimension 3 la somme de deux plans ne peut jamais être directe
c	dans un espace de dimension 3 la somme d'une droite et d'un plan est toujours directe
d	un ensemble stable par addition est nécessairement un sous-espace vectoriel
e	$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2
f	l'ensemble des suites réelles constantes ou périodiques de période 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 3
g	l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0,\ 1\}$ est un espace vectoriel
h	l'ensemble des fonctions de $\{0,\ 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2
i	les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 8

a	l'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide
	JAMAIS DE LA VIE !
b	dans un espace vectoriel de dimension 3 la somme de deux plans ne peut jamais être directe
	EN EFFET, « LEUR INTERSECTION EST AU MOINS DE DIMENSION 1 » DIT GASSMANN
c	dans un espace de dimension 3 la somme d'une droite et d'un plan est toujours directe
	PAS FORCÉMENT : SI LA DROITE EST INCLUSE DANS LE PLAN
d	un ensemble stable par addition est nécessairement un sous-espace vectoriel
	NON : $\mathbb{Z}$ N'EST PAS UN SOUS-ESPACE VECTORIEL DE $(\mathbb{R},+,.)$
e	$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2
	OUI.
f	l'ensemble des suites réelles constantes ou périodiques de période 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 3
	OUI : BASE $((1,0,0,1,0,0,1,0,0\ldots),(0,1,0,0,1,0,0,1,0\ldots),(0,0,1,0,0,1,0,0,1\ldots))$
g	l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0,\ 1\}$ est un espace vectoriel
	NON : PAS DE STABILITÉ DU TYPE $\lambda.f$
h	l'ensemble des fonctions de $\{0,\ 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2
$\to$ 1 0	1 $\to$

$\begin{matrix} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \end{matrix}\Big)$.*Oui.Base*$\left(\begin{matrix} 0 & \to & 1 \\ 1 & \to & 0 \end{matrix}, \begin{matrix} 0 & \to & 0 \\ 1 & \to & 1 \end{matrix}\right)$.

i les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 8

OUI : BASE $(1,\ i,\ X,\ i.X,\ X^2,\ i.X^2,\ X^3,\ i.X^3)$.

◃32▹

Les F_k et les G_k sont des sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$. On suppose $F_1\oplus F_2\oplus F_3=E$ et $G_1\oplus G_2\oplus G_3=E$ et $F_i\subset G_i$ pour tout i. Montrez alors $F_i=G_i$ pour tout i.

Les rôles étant symétriques, on a juste à prouver $F_1=G_1$. Et on a déjà $F_1\subset G_1$.

On ne peut pas trop raisonner sur les dimensions car rien ne dit qu'on est dimension finie.
Si toutefois on est en dimension finie, on peut écrire

$$\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2) + \dim(F_3)$$

$$\dim(E) = \dim(G_1) + \dim(G_2) + \dim(G_3)$$

puis $\dim(F_1) \leqslant \dim(G_1)$, $\dim(F_1) \leqslant \dim(G_1)$ et $\dim(F_1) \leqslant \dim(G_1)$.
On aboutit à ce que ces majorations sont forcément des égalités.
Et ensuite, avec $\dim(F_1) = \dim(G_1)$ et $F_1 \subset G_1$ on a forcément $F_1 = G_1$.

Ce qu'on ne peut pas utiliser, c'est des arguments d'intersection de sous-espaces vectoriels.
En effet, le critère « la somme est directe équivaut à l'intersection est réduite à 0 » n'est valable que pour deux sous-espaces.

Non, il faut en revenir à « tout vecteur se décompose d'une façon unique.. ; ».

Prenons $\overrightarrow{g}$ dans G_1. Il faut montrer qu'il est dans F_1.
En tant qu'élément de G_1 il est dans E.
Il se décompose donc, d'une façon unique en $\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3}$ avec des notations faciles à comprendre.
Mais comme F_i est inclus dans G_i pour chaque i, on a $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2} + \overrightarrow{f_3}$ avec $\overrightarrow{f_1}$ dans G_1
$\overrightarrow{f_2}$ dans G_2
$\overrightarrow{f_3}$ dans G_3
Voilà donc $\overrightarrow{g}$ décomposé suivant $G_1 + G_2 + G_3$.
Mais cette décomposition est unique.
Or, on en connait déjà une : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{g} + \overrightarrow{0} + \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{g}$ dans G_1
$\overrightarrow{0}$ dans G_2
$\overrightarrow{0}$ dans G_3
Par unicité des décompositions (somme directe) : $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{f_2}$ et $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{f_3}$.
$\overrightarrow{g}$ est égal à $\overrightarrow{f_1}$, et $\overrightarrow{f_1}$ est dans F_1. C'est fini.

◃33▹ Pour quels couples $(n,\ p)$ existe-t-il un isomorphisme entre $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$ et $(A_p(\mathbb{R}), +, .)$? (matrices symetriques / antisymetriques)

Il existe un isomorphisme (application linéaire bijective) entrd deux espaces vectoriels de dimension finie si et seulement sils ont même dimension.
Pour un sens, un isomorphisme transforme une base en base, donc les dimensions sont égales.
Pour l'autre sens, si les deux espaces ont même dimension, on prend une base pour chacun : $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \dots \overrightarrow{\varepsilon_n})$ pour le premier, et $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n})$ pour le second. on définit alors tout bêtement

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{\varepsilon_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i.\overrightarrow{e_i}$$

Elle est linéaire par construction. Et sa réciproque

$$\sum_{i=1}^{n} b_i.\overrightarrow{e_i} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} b_i.\overrightarrow{\varepsilon_i}$$

est utilisable à droite comme à gauche.

La question est donc : quelle est la dimension de chacun. C'est du cours :

$S_n(\mathbb{R})$	$A_p(\mathbb{R})$
$\dfrac{n.(n+1)}{2}$	$\dfrac{p.(p-1)}{2}$

La condition nécessaire et suffisante est $p = n + 1$.

Exemple : $S_3(\mathbb{R}) \longrightarrow A_4(\mathbb{R})$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix}$.

On pourra parler de « six degrés de liberté pour chaque modèle », même si ça ne veut rien dire.

◁34▷

Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ (notées φ, ϕet ψ).
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (1,\ 0,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 1,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 1)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 0)$.
Montrez que $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ est libre.

◁35▷

♡ Le commutant d'une matrice A carrée de taille n est $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ (noté $C(A)$). Montrez que c'est toujours un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$. Montrez que sa dimension peut valoir n^2, mais jamais 1 (sauf pour n égal à 1, oui, je suis con !).
Montrez que si A est semblable à B, alors $C(A)$ a la même dimension que $C(B)$ (passez d'une base de l'un à une base de l'autre et vice versa).
Déterminez la dimension de $C(D)$ quand D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont tous distincts.
Comparez $C(A)$ et $C(A + I_n)$.
Comparez $C(A)$ et $C(\lambda.A)$.
Montrez $C(A) \subset C(A^2)$. Montrez que pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ il n'y a pas égalité.
Montrez : $C(A) \cap C(B) \subset C(A + B)$. Montrez qu'il n'y a pas forcément égalité.
Déterminez la dimension de $C(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$, $C(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix})$ et $C(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix})$.
Quelles sont les valeurs que peut prendre $\dim(C(A))$ quand A est une matrice de taille 2.
Même question en taille 3.

◁36▷

♡ Existe-t-il f linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans lui même vérifiant $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u}$de $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$ et $f(\overrightarrow{u}) = -2.\overrightarrow{u}$ pour tout $\overrightarrow{u}$du plan d'équation cartésienne $x + y - 3.z = 0$?
Raisonnez sur les dimensions de ces espaces sur lesquels on a imposé des choses.

$(\mathbb{R}^3, +, .)$ est de dimension 3.
Les deux sous-espaces $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$ et $x + y - 3.z = 0$ sont chacun de dimension 2 (deux vecteurs non colinéaires pour le premier, et une écriture de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x + 3.z \\ z \end{pmatrix}$ qui laisse vite deviner une base).
Par la formule de Grassmann, leur intersection est de dimension 2 (ça pourrait même être 2 si ils ces deux plans étaient égaux). Il y a donc au moins un vecteur non nul commun aux deux.
Pour un tel vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul on aurait à la fois $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{u}) = -2.\overrightarrow{u}$, ce qui est contradictoire.
Une telle application ne peut exister.

Remarque : | Notons que si les deux sous-espaces avaient été un plan et une droite mutuellement supplémentaires, on aurait alors pu définir f.

◁37▷

♡ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6.x & -3.y \\ 4.x & -y \end{pmatrix}$. Déterminez le rang de $f - 2.Id$ et de $f - 3.Id$.
Montrez $Ker(f - 2.Id) \cap Ker(f - 3.Id) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Déduisez $Ker(f - 2.Id) \oplus Ker(f - 3.Id) = \mathbb{R}^2$.
Montrez : $Im(f - 2.Id) = Ker(f - 3.Id)$ et $Im(f - 3.Id) = Ker(f - 2.Id)$.
Montrez pour tout $\overrightarrow{a}$ de $\mathbb{R}^2$: $\overrightarrow{a} = (f(\overrightarrow{a}) - 2.\overrightarrow{a}) - (f(\overrightarrow{a}) - 3.\overrightarrow{a})$.
Déduisez $f^n(\overrightarrow{a}) = 3^n.(f(\overrightarrow{a}) - 2.\overrightarrow{a}) - 2^n.(f(\overrightarrow{a}) - 3.\overrightarrow{a})$.
Déduisez $M^n = 3^n.(M - 2.I_2) - 2^n.(M - 3.I_2)$ avec $M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.
Vocabulaire : le rang d'une application linéaire, c'est la dimension de son ensemble image. Le noyau d'une application linéaire, c'est l'ensemble des vecteurs dont l'image est nulle.

Sur la base canonique, f a pour matrice $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

On trouve sans effort $Ker(f-2.Id)=Vect(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix})$ et $Ker(f-3.Id)=Vect(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$.
On les a en résolvant des petits systèmes dégénérés.
On peut aussi écrire $\begin{pmatrix}6&-3\\4&-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}=2.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, soit $(M-2.I_2).U=U$
On a un vecteur non nul dans $Ker(f-2.Id)$, cet espace est au moins de dimension 1
il ne peut pas être de dimension 2 sinon on aurait $f=2.Id$.

L'intersection est réduite à 0. Ces deux droites de $\mathbb{R}^2$ n'ont qu'un vecteur commun.
D'ailleurs, seul le vecteur nul peut vérifier à la fois $f(\overrightarrow{a})=2.\overrightarrow{a}$ et $f(\overrightarrow{a})=3.\overrightarrow{a}$, car on aboutit vite à $3.\overrightarrow{a}=2.\overrightarrow{a}$ puis $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{0}$.

La formule de Grassmann donne $\dim(Ker(f-2.Id)+Ker(f-3.Id))=2$ et par inclusion $Ker(f-2.Id)+Ker(f-3.Id)=\mathbb{R}^2$.
Par intersection triviale, la somme est directe.
On peut aussi vérifier que $\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}$ est inversible.

On notera que son inverse donne explicitement les décompositions des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sur la base $(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$.

On constate $f^2-5.f+6.Id=0$ (application linéaire nulle).
On a donc $(f-2.Id)\circ(f-3.Id)=0$. On déduit $Im(f-3.Id)\subset Ker(f-2.Id)$.
Or, $Im(f-2.Id)$ n'est pas de dimension 0 (sinon $f=2.Id$). On a donc pas le choix sur les dimensions : $Im(f-3.Id)=Ker(f-2.Id)$.

Sinon, $f-2.Id=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}4.x-3.y\\4.x-3.y\end{pmatrix}$. On a bien $Im(f-2.Id)=Vect(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$.
De même $f-3.Id=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}3.x-3.y\\4.x-4.y\end{pmatrix}$. Les images sont toutes multiples de $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ (et ce sont tous les multiples de $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$, chacun étant atteint plusieurs fois).

On vérifie $\overrightarrow{a}=(f(\overrightarrow{a})-2.\overrightarrow{a})-(f(\overrightarrow{a})-3.\overrightarrow{a})$ pour tout vecteur.
C'est d'ailleurs sa décomposition en $Im(f-2.Id)\oplus Im(f-3.Id)$.
Et c'est aussi une identité $(X-2)-1.(X-3)=1$ qui donne $(f-2.Id)-1.(f-3.Id)=Id$.

$\overrightarrow{a}=(f(\overrightarrow{a})-2.\overrightarrow{a})-(f(\overrightarrow{a})-3.\overrightarrow{a})$ s'écrit $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f-2.Id)$ et $\overrightarrow{c}$ dans $Im(f-3.Id)$
$\overrightarrow{b}$ dans $Ker(f-3.Id)$ et $\overrightarrow{c}$ dans $Ker(f-2.Id)$
$f(\overrightarrow{b})=3.\overrightarrow{b}$ et $f(\overrightarrow{c})=2.\overrightarrow{c}$
Par récurrence évidente $f^n(\overrightarrow{b})=3^n.\overrightarrow{b}$ et $f^n(\overrightarrow{c})=2^n.\overrightarrow{c}$.

Mine de rien, on a diagonalisé f avec valeurs propres 3 et 2.
Et une matrice de passage est bien $\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}$.

◃38▹

Montrez que deux matrices semblables *(c'est* $\exists P,\ A=P.B.P^{-1}$*)* ont le même polynôme caractéristique.
Montrez que si A et B sont deux matrices carrées dont l'une est inversible, alors $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.
(le polynôme caractéristique de A c'est $\det(A-X.I_n)$).

On détermine le polynôme caractéristique de A :
$$\begin{aligned}
\chi_A(\lambda)&=\det(A-\lambda.I_n)\\
\chi_A(\lambda)&=\det(P.B.P^{-1}-\lambda.I_n)\\
\chi_A(\lambda)&=\det(P.B.P^{-1}-\lambda.P.I_n.P^{-1})\\
\chi_A(\lambda)&=\det(P.(B-\lambda.I_n)..P^{-1})\\
\chi_A(\lambda)&=\det(P).\det(B-\lambda.I_n).\det(P^{-1})\\
\chi_A(\lambda)&=\det(P).\det(P^{-1}).\det(B-\lambda.I_n)\\
\chi_A(\lambda)&=\det(B-\lambda.I_n)=\chi_B(\lambda)
\end{aligned}$$
Sincèrement, je ne peux pas détailler plus...

Sans perte de généralité, on suppose A inversible.
Il suffit alors de démontrer que $A.B$ et $B.A$ sont semblables : $A.B=A.(B.A).A^{-1}$.
On est ramené à la question précédente.

Remarque : | *En fait, le résultat $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique est vrai dans tous les cas. Déjà, on sait que $A.B$ et $B.A$ ont même trace et même déterminant. C'est bien parti et c'est même fini en format 2.*

◁ 39 ▷

F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$.
Montrez par des contre-exemples que les formules suivantes n'ont aucun raison d'être vraies :
$F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$
$(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$
$\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$

$F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$ est faux. On a juste $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
Prenons $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ dans le plan $(\mathbb{R}^2, +, .)$.
On a alors $F + G = \mathbb{R}^2$ et $F + H = \mathbb{R}^2$.
Par intersection : $(F + G) \cap (F + H) = \mathbb{R}^2$.

Ensuite : $G \cap H = \{\overrightarrow{0}\}$.
On somme $F + (G \cap H) = F$.
On a donc $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$, avec ici inclusion stricte.

$(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$ est faux.
Prenons $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ dans le plan $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

$F+G$	$(F+G) \cap H$	$F \cap H$	$G \cap H$	$(F \cap H) + (G \cap H)$
$\mathbb{R}^2$	H	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$

$\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$ est faux.
Prenons $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ dans le plan $(\mathbb{R}^2, +, .)$.

$F+G+H$	F	G	H	$F \cap G$	$F \cap H$	$G \cap H$	$F \cap G \cap H$
$\mathbb{R}^2$	F	G	H	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$
2	1	1	1	0	0	0	0

◁ 40 ▷

♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ et on définit
$E = \{(x, y, z, t) \mid x + 2.y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \mid 2.x - y + z + 3.t = 0\}$.
Montrez que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^4, +, .)$, donnez une base et leur dimension.
Donnez au moins un sous-espace vectoriel G vérifiant $E \oplus G = F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

Le vecteur nul est das E et dans F (équations linéaires en $a.x + b.y + c.z + d.t = 0$ et pas affines en $a.x + b.y + c.z + d.t = \alpha$).

E et F sont stables par combinaisons linéaires (pas de termes en x^2, forme en $\begin{pmatrix} a & b & c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$).

E est de dimension 3. En effet, on y trouve trois vecteurs indépendants, donc sa dimension vaut au moins 3 : $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$
Et si elle ne valait pas 3, elle vaudrait 4 et ce serait $\mathbb{R}^4$, ce qui n'est pas le cas.

On fait de même pour F avec base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ venant de la forme $\begin{pmatrix} x \\ 2.x + z + 3.t \\ z \\ t \end{pmatrix}$.
$2.x - y + z + 3.t = 0$

On veut un sous-espace G vérifiant $E \oplus G = \mathbb{R}^4$, il doit être de dimension 1 et en mettant bout à bout une base de E et une base de G on doit avoir une base de $\mathbb{R}^4$.

Je pense à $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Et ça marche aussi avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
En fait, il suffit de prendre un vecteur « ni dans E ni dans F » et la droite qu'il engendre.

◁ 41 ▷

♡ On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et on définit $E = \{(x, y, z) \mid x + 2.y + z = 0\}$ et $F = Vect((1, 2, 1))$.
Montrez qu'il n'existe aucun un sous-espace vectoriel G vérifiant $E \oplus G = F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Pour avoir $E \oplus G = \mathbb{R}^3$ il faudrait que G soit de dimension 1.
Pour avoir $F \oplus G = \mathbb{R}^3$ il faudrait que G soit de dimension 2.
C'est tout.

En revanche, pour $E + G = F \oplus G = \mathbb{R}^3$, c'est jouable.

◁ 42 ▷

Pour trois sous-espaces A, B et C de l'espace vectoriel $(E, +, .)$, montrez :
$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A)$.

On prend $\overrightarrow{u}$ dans la somme $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)$.
On l'écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans $A \cap B$
$\overrightarrow{b}$ dans $B \cap C$
$\overrightarrow{c}$ dans $C \cap A$
Mais alors $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ sont dans B, donc $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ est dans B. Et $\overrightarrow{c}$ est dans C.
La somme $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c}$ est dans $B + C$.

En l'écrivant $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b}$, il est somme d'un vecteur de A et d'un vecteur de B, il est dans $A + B$.
Mais aussi dans $A + C$ puisque $\overrightarrow{c}$ est dans C.

Il est à la fois dans $A + B$, $A + C$ et $B + C$, il est donc dans l'intersection des trois.
Décevant : | *Le pire est qu'on peu faire cet exercice sans même « voir » des sous-espaces vectoriels...*

◁ 43 ▷

Calculez la trace et le déterminant en fonction de a de $P(X) \longmapsto P(X + a)$ comme endomorphisme de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$.

$P(X) \longmapsto P(X + a)$ prend un polynôme et en fait un polynôme.
Le degré ne change pas. Et on a bien $(\lambda.P + \mu.Q)(X)$ qui devient $(\lambda.P + \mu.Q)(X + a)$ et donc $\lambda.P(X + a) + \mu.Q(X + a)$.

La matrice de cet endomorphisme, sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & 2.a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2.a & 3.a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3.a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et ainsi de suite.
Le déterminant vaut toujours 1 et la trace $n + 1$.

◁ 44 ▷

♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$ est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

Si P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3, il est dans $\mathbb{R}_3[X]$, de même que les cinq polynômes de la famille

$$\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3),\ P(X+4)\big)$$

mais $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$ est de dimension 4. Sans calcul, la famille est liée.
Qui sont les physiciens qui ont fait des calculs, rien que pour me « faire plaisir » ?

Si P est simplement X^3, la famille $(X^3,\ (X+1)^3,\ (X+2)^3,\ (X+3)^3)$ est libre ; il suffit de calculer son déterminant sur la bas canonique.
Un autre excellent candidat est $X.(X-1).(X-2).(X-3)$. Si vous partez de

$$a.X.(X-1).(X-2).(X-3) + b.(X+1).(X).(X-1).(X-2) + c.(X+2).(X+1).(X).(X-1) + d.(X+3).(X+2).(X+1).(X) = 0$$

et que vous calculez en 1, en 2, en 3 et en 4 vous avez

$$a = b = c = d = 0$$

Avec X^3, le déterminant relatif à la base canonique $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ vaut 108, il est positif.

est liée. Donnez un exemple où $\big(P(X),\ P(X+1),\ P(X+2),\ P(X+3)\big)$ est libre.
Peut elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?
On tente un polynôme de la forme $a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$. On calcule les polynômes, et on les décompose sur la base canonique :

$$\begin{vmatrix} d & a+b+c+d & 8.a+4.b+2.c+d & 27.a+9.b+3.c+d \\ c & 3.a+2.b+c & 12.a+4.b+c & 27.a+6.b+c \\ b & 3.a+b & 6.a+b & 9.a+b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

Et ce déterminant vaut ... $108.a^4$ *(commencer par $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_1$).*
Le sens sera toujours le même que celui de la base canonique.

◁ 45 ▷ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$, on n'est pas dépécés, mais en discutant la résolution de $A.U = \lambda.U$. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

Traitons la plus grand, ça donnera les idées pour les autres.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{llllll} a & +b & +c & +d & +a & = \lambda.a \\ a & +b & & & & = \lambda.b \\ a & & +c & & & = \lambda.c \\ a & & & +d & & = \lambda.d \\ a & & & & +e & = \lambda.e \end{array}$$

Les dernières lignes donnent toutes $b = c = d = e = \dfrac{a}{\lambda - 1}$.

On reporte dans la première : $a.\Big(1 + \dfrac{4}{\lambda - 1}\Big) = a.\lambda$.

On discute : $\Big(1 + \dfrac{4}{\lambda - 1}\Big) \neq \lambda$. la seule solution est $a = 0$, mais elle conduit au vecteur nul. On ne veut pas.

$\Big(1 + \dfrac{4}{\lambda - 1}\Big) = \lambda$ on a un vecteur propre. Équation de degré 2 $(\lambda - 1)^2 = 4$

Cette équation du second degré donne donc deux valeurs propres et les deux vecteurs propres associés

$1 - \sqrt{n-1}$	$1 + \sqrt{n-1}$	
$\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	

On vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}+3 \\ 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \\ 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} = (1+\sqrt{3}). \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pourquoi une colonne vide ? Parce que ça ne suffit pas... On voulait une base de vecteurs propres.
Mais il y a un valeur qu'on a mise de côté : $\lambda = 1$. Pour pouvoir diviser.

Traitons la à part : $\begin{array}{llllll} a & +b & +c & +d & +a & = a \\ a & +b & & & & = b \\ a & & +c & & & = c \\ a & & & +d & & = d \\ a & & & & +e & = e \end{array}$ on trouve $a = 0$ et $b + c + d + e = 0$. Intersection de deux plans.

$1-\sqrt{n-1}$	$1+\sqrt{n-1}$	1
$\begin{pmatrix} -\sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \sqrt{n-1} \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$	$(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix})$
dimension 1	dimension 1	dimension $n-2$

On peut diagonaliser par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premiers vecteurs colonne sont orthogonaux entre eux.
Ils sont orthogonaux aux suivants.
Resterait à rende les $n-2$ derniers orthogonaux entre eux.
On peut diagonaliser par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ [4]

Et si vous les voulez deux à deux orthogonaux et normés, normez les...

◃46▹ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que l'ensemble des matrices M vérifiant $M.U = 0$ *(vecteur nul)* est un espace vectoriel. Montrez que $(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix})$ en est une base. Pouvez vous donner une base dans laquelle une des matrices a une trace nulle ? Pouvez vous donner une base dans laquelle toutes les matrices ont une trace nulle ?

On peut montrer que ces matrices forment un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$:
en effet • la matrice nulle vérifie $0_{2,2}.U = 0_2$
• si M et N vérifient $M.U = 0_2$ et $N.U = 0_2$ alors on a aussi $(M+N).U = 0_2$
et même $(\alpha.M).U = 0_2$

Mais on écrit qu'il s'agit des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $b = -3.a$ et $d = -3.c$.

On les écrit $\begin{pmatrix} -3.b & b \\ -3.d & d \end{pmatrix}$ et même $b.\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Ceci donne directement $F = Vect(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix})$.

En tant que tel, c'est un espace vectoriel (sinon, on n'écrirait pas $Vect(\dots)$)
et on en connaît une base : $(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix})$.
Charger les signes ne change rien.

On peut changer de base en prenant une combinaison des deux à la place de l'un des deux :

$$(\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix})$$

S'il existait une base faite de matrices de trace nulle, par combinaison, toutes les matrices de l'espace auraient une trace nulle. Pas cohérent.

---

4. obtenue par méthode de Gram-Schmidt

◁ 47 ▷ On définit, dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ le sous-espace vectoriel E de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$. On note K l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $E \subset Ker(f)$. Montrez que K est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$. Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6 *(écrivez matriciellement et faites un choix évidemment)*.
On note M l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $Im(f) \subset E$. Montrez que M est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$.Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6.
Donnez la dimension de $M \cap K$. A-t-on $L(\mathbb{R}^3) = M + K$?

◁ 48 ▷ Construisez trois sous-espaces vectoriels A, B et C de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant

espace	A	B	C	$A \cap B$	$(A+B) \cap C$
dimension	4	3	5	1	3

Globalement, on est dans un espace de dimension 9.
Si $A \cap B$ est de dimension 1, alors $(A + B)$ est de dimension 6.
C'est acceptable que $(A + B) \cap C$ soit de dimension 3.

Le plus simple est de jouer avec les directions de la base canonique.

espace	A	B	$A \cap B$	$A+B$	C	$(A+B) \cap C$
forme des éléments	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
dimension	4	3	1	6	5	3

Il y a bien sûr d'autres solutions. La démarche serait de chercher du côté de symétriques et antisymétriques, par habitude du cours... Peut être inutile ici.

◁ 49 ▷ ♡ On travaille sur $M_3(\mathbb{R})$.
Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(M) = 2.M$ si M est antisymétrique et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle.
Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(2.I_3) = 0_{3,3}$ et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle ?

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est à la fois antisymétrique et de trace nulle. Que serait son image ?

$2.I_3$ est symétrique. Son image, c'est donc $2.I_3$ ou $0_{3,3}$? Il faut savoir...

◁ 50 ▷

Lycee Charlemagne — MPSI2 — Annee 2023/24

Villes

Le but de cette épreuve (filière PSI, mais grand concours) est de décider s'il existe, entre deux villes données, un chemin passant par exactement k villes intermédiaires distinctes, dans un plan contenant au total n villes, reliées par m routes. L'algorithme d'exploration naturel s'exécute en un temps $O(n^k.m)$. L'objectif est d'obtenir un algorithme qui s'exécute en un temps $O(f(k).n.(n+m))$, qui croît polynomialement en la taille $n+m$ du problème, quelle que soit la valeur de k demandée.

La complexité ou temps d'exécution d'un programme Π (fonction ou procédure[5]) est le nombre d'opérations élémentaires (additions, multiplications, affectations, tests...) nécessaires à l'exécution de Π. Lorsque cette complexité dépend de plusieurs paramètres n, m et k, on dira que Π a une complexité $O(\phi(n,m,k))$ lorsqu'il existe quatre constantes absolues A, n_0, m_0 et k_0 telles que la complexité de Π soit inférieure ou égale $A.\phi(n,m,k)$ pour tout $n \geqslant n_0$, $m \geqslant m_0$ et $k \geqslant k_0$. Lorsqu'il est demandé de préciser la complexité d'un programme, le candidat devra la justifier si elle ne se traduit pas directement de la lecture du code.

On suppose qu'on dispose d'une fonction `CreerTableau(n)` *qui crée un tableau de taille* `n`*, indexé de* `0` *à* `n-1` *(les valeurs contenues dans le tableau initialement sont arbitraires[6]. L'instruction* `b=CreerTableau(n)` *créera/affectera un tableau de taille* `n` *dans la variable* `b`*. On pourra créer des tableaux de tableaux : exemple*

```
a = CreerTableau(p)
for i in range(p) :
....a[i] = CreerTableau(q)
```

5. *les fonctions renvoient une valeur (entier, réel, tableau, booléen...) ; les procédures modifient des variables globales, mais ne renvoient rien*
6. *avec Python, des* `None`*, qui n'occupent pas de place en mémoire, dans les notations du devoir, de simples* `*`

On accède par `a[i][j]` *à la case d'indice j du tableau d'indice* `i` *dans le tableau ainsi créé.*

On souhaite stocker en mémoire une liste non ordonnées d'au plus n entiers sans redondance (aucun entier n'apparaît plusieurs fois). Nous nous proposons d'utiliser un tableau `liste` *de longueur* $n+1$ *tel que* `liste[0]` *contient le nombre d'éléments de la liste (comme en Pascal ?)*
`liste[i]` *contient le* i^{eme} *élément de la liste (non triée) pour* $1 \leqslant i \leqslant liste[0]$ [7]*. Il y a des exemples plus loin, profitez.*
Sinon, vous l'aurez compris, nulle part vous n'utiliserez **`append`**...

$\sim$0) Écrivez une fonction `CreerListeVide(n)` qui crée, initialise et renvoie un tableau de longueur `n+1` correspondant à la liste « vide » ayant une capacité totale de n éléments.

$\sim$1) Écrivez une fonction `EstDansListe(liste, x)` qui renvoie `True` si l'élément `x` apparaît dans la liste représentée par le tableau `liste`, et renvoie `False` sinon.
■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction du nombre maximal n d'éléments de la liste.

$\sim$2) Écrivez une procédure `AjouteDansListe(liste, x)` qui modifie de façon appropriée le tableau `liste` pour y ajouter `x` si x n'appartient pas déjà à la liste, et ne fait rien sinon.
■ Quel est le comportement de votre procédure si la liste est plein initialement (on ne demandera pas de traiter ce cas).
■ Quelle est la complexité en temps de votre procédure dans le pire cas en fonction du nombre maximal d'éléments de la liste ?

Un plan P est défini par un ensemble de n villes numérotées de 1 à n et un ensemble de m routes (toutes à double sens) reliant chacune deux villes ensemble. On dira que deux villes x et y sont voisines lorsqu'elles sont reliées par une route, ce que l'on notera $x \sim y$*. On appellera chemin de longueur k toute suite de villes* $v_1, v_2 \ldots v_k$ *telle que* $v_1 \sim v_2 \sim \ldots \sim v_k$*. On représentera les villes d'un plan par des ronds contenant leur numéro et les routes par des traits reliant les villes voisines* [8]*.*
Un plan P est donc un tableau `plan` *où*

- `plan[0]` *contient un tableau à deux éléments :* `plan[0][0] = n` *(contient le nombre de villes du plan)*
  `plan[0][1] = m` *(contient le nombre de routes du plan)*
- *pour chaque ville x de* $\{1, 2, \ldots n\}$, `plan[x]` *contient un tableau à n éléments représentant la liste à au plus* $n-1$ *éléments des villes voisines de la ville* `x` *(ordre de lecture sans importance).*

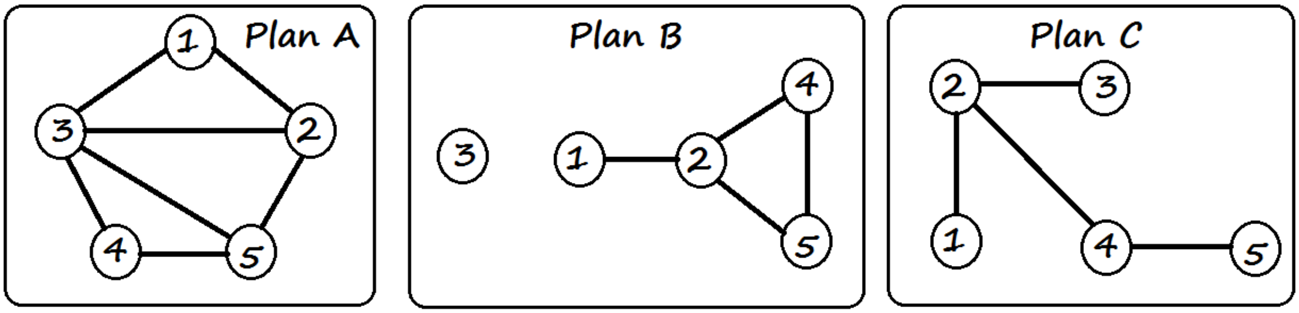
L'un des trois plans du dessin est représenté par le tableau ci contre

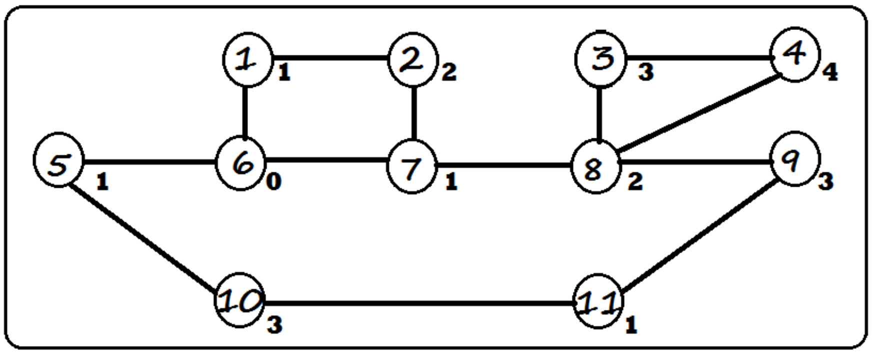
```
plan=[  [5,  4],
        [1,  2,  *,  *,  * ],
        [3,  4,  1,  5,  * ],
        [0,  *,  *,  *,  * ],
        [2,  2,  5,  *,  * ],
        [2,  4,  2,  *,  * ]]
```

$\sim$3) Donnez le tableau des deux autres.

---

7. *ici pas de décalage pythonien, la case d'indice* 0 *est prise*
8. *comme si vous aviez voulu faire le contraire !*





Graphe coloré.
A côté de chaque ville est indiquée sa couleur.
On cherche donc ici un chemin de la ville ☐ à la ville ☐.

~4) Écrivez une fonction **`CreePlanSansRoute(n)`** qui crée, remplit et renvoie le tableau de tableaux correspondant au plan à **`n`** villes n'ayant aucun route.

~5) Écrivez une fonction **`EstVoisine(plan, x, y)`** qui renvoie **`True`** si les villes **`x`** et **`y`** sont voisines dans le plan codé par **`plan`**, et **`False`** sinon.
Vous avez évidemment le droit d'utiliser les procédures déjà créées.

~6) Écrivez une procédure **`Ajoute(plan, x, y)`** qui modifie le tableau **`plan`** pour ajouter une route entre les deux villes **`x`** et **`y`** (supposées distinctes, oui) si elle n'était pas déjà présente, et ne fait rien sinon.
■ Y a-t-il un risque de dépassement de la capacité des listes ?

~7) Écrivez une procédure **`AfficheTouteslesRoutes(plan)`** qui affiche la liste des routes codées par le tableau plan, chaque route ne devant être mentionnée qu'une fois. Par exemple, (1-2), (2-4), (2-5), (4-5) pour le plan indiqué et retenu plus haut.
■ Quelle est la complexité en temps de votre procédure dans le pire des cas ?

Recherche d'un chemin arc en ciel.
Étant données deux villes distinctes s et t, nous rechercherons un chemin de s à t, passant par exactement k villes toutes distinctes. L'objectif de cette partie est de la suivante est de construire une fonction qui va détecter en un temps linéaire en n.(n+m) l'existence d'un tel chemin avec une probabilité indépendante de la taille $n+m$ du plan.
*Le principe de l'algorithme est d'attribuer à chaque ville de $\{1, 2, \ldots n\} - \{s,\ t\}$ une couleur aléatoire codée par un entier aléatoire uniforme $couleur[i] \in \{1, \ldots k\}$ stocké dans un tableau **`couleur`** de taille $n+1$ (la case 0 n'est pas utilisée). Les villes s et t reçoivent respectivement les couleurs spéciales 0 et $k+1$. L'objectif de cette partie est d'écrire une procédure qui détermine s'il existe un chemin de longueur $k+2$ allant de s à t dont la j^{ieme} ville intermédiaire a reçu la couleur j. dans l'exemple de la figure suivante, le chemin $6 \sim 7 \sim 8 \sim 3 \sim 4$ de longueur $5 = k+2$ qui relie $s = 6$ à $t = 4$ vérifie cette propriété pour les couleurs indiquées.*
*On suppose l'existence d'une fonction **`EntierAleatoire(k)`** qui renvoie un entier aléatoire uniforme entre 1 et k. Bref P(EntierAleatoire(k)=c)=1/k pour tout c de 1 à k.*

~8) Écrivez une procédure **`ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t)`** qui prend en argument un **`plan`** de n villes, un tableau **`couleur`** de taille n+1, un entier **`k`**, et deux villes **`s`** et **`t`** de $\{1,\ 2, \ldots n\}$ et remplit le tableau **`couleur`** avec une couleur aléatoire uniforme dans $\{1, \ldots k\}$ choisie indépendamment pour chaque ville de $\{1, \ldots n\} - \{s,\ t\}$ et les couleurs 0 et $k+1$ pour s et t respectivement.

Nous cherchons maintenant à écrire une fonction qui calcule l'ensemble des villes de couleur c voisines d'un ensemble de villes donné. dans l'exemple de la figure 2, l'ensemble des villes de couleur 2 voisines des villes $\{1,\ 5,\ 7\}$ est $\{2,\ 8\}$.

$\sim$9) Écrivez une fonction **VoisinesDeCouleur(plan, couleur, i, c)** qui crée et renvoie le tableau codant la liste sans redondance des villes de couleur **c** voisines de la ville **i** dans le tableau **plan** colorié par le tableau **couleur**.

$\sim$10) Écrivez une fonction **VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, liste, c)** qui crée et renvoie un tableau codant la liste sans redondance des villes de couleur **c** voisines d'une des villes présentes dans la liste sans redondances **liste** dans le plan **plan** colorié par la table **couleur**.
■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction de n et m ?

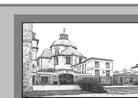
$\sim$11) Écrivez une fonction **ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t)** qui renvoie **True** si il existe dans le plan **plan** un chemin $s \sim v_1 \sim \ldots \sim v_k \sim t$ tel que **couleur[**v_j**]=j** pour tout j de $\{1, \ldots k\}$ et renvoie **False** sinon.
■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction de k, n et m ?

Si les couleurs des villes sont choisies aléatoirement et uniformément dans $\{1, \ldots k\}$, la probabilité que j soit la couleur de la j^{ieme} ville d'une suite fixée de k villes vaut $1/k$, indépendamment pour tout j. Ainsi, étant données deux villes distinctes **s** *et* **t***, s'il existe dans le plan* **plan** *un chemin de s à t passant par exactement k villes intermédiaires toutes distinctes et si le coloriage couleur est choisi aléatoirement conformément à la procédure* **ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t)***, la procédure* **ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t)** *répond True avec probabilité au moins k^{-k} ; et répond toujours* **False** *sinon. Ainsi, si un tel chemin existe, la probabilité qu'une parmi k^k exécutions indépendantes de* **ExisteCheminArcEnCiel** *réponde* **True** *est supérieure ou égale à $1 - (1 - k^{-k})^{k^k} = 1 - \exp\left(k^k . \ln(1 - k^{-k})\right) \geqslant 1 - \dfrac{1}{e} > 0$ (admis).*

$\sim$12) Écrivez une fonction **ExisteCheminSimple(plan, k, s, t)** qui renvoie **True** avec probabilité au moins $1 - \dfrac{1}{e}$ s'il existe un chemin de **s** à **t** passant par exactement **k** villes intermédiaires toutes distinctes dans le plan **plan** et renvoie toujours **False** sinon.
■ Quelle est sa complexité en fonction de k, n et m dans le pire des cas ? Exprimez la sous la forme $O(f(k).g(n, m))$ pour f et g bien choisies.

$\sim$13) Expliquez comment modifier votre programme pour renvoyer le chemin s'il est détecté avec succès.

TD29 Liste sans redondance.



```
def CreerListeVide(n) :
....L = CreerTableau(n+1)
....L[0] = 0
....return L
```

Le tableau est de taille $n + 1$ pour avoir en première case le nombre d'éléments.
On initialise le nombre de termes à 0. C'est après, quand on agrandira la liste qu'il faudra modifier l'élement de position 0.

```
def EstDansListe(liste, x) :
....for i in range(1, liste[0]+1) :
........if liste[i] == x :
............return True
....return False
```

range(1, liste[0]+1) car on n'explore pas **liste[0]** qui contient juste une information, et aussi parce que ce n'est pas la peine de chercher plus loin que la fin de liste.
Surtout pas

```
....if liste[i] == x :
........return True
....else :
........return False
```

sinon c'est dès le premier test que vous sortez.
Si vous faites ça, par exemple avec **liste = [4, 2, 3, 5, 1]** (de longueur 4 et d'éléments 2, 3, 5 et 1), si vous lancez la procédure pour **x=5**, le premier et seul test fait **2 == 5**, qui est faux, vous sortez avec **False** et vous n'allez pas au delà...
■Le complexité au pire est $O(n)$ où n est le nombre d'éléments. Atteinte si l'élément n'est pas dans la liste, ou éventuellement si il y est mais que c'est lui le dernier.

```
def AjouteDansListe(liste, x) :
....if not(EstDansListe(liste, x)) :
........liste[0] += 1
........liste[liste[0]] = x
```

On n'oublie pas de dire qu'il y a un élément de plus. Et on sait où l'insérer, c'est à ça que sert ce premier élément `liste[0]` !.
On peut aussi parcourir la liste, sortir sans rien faire si l'élément n'est pas dans la liste, et sinon l'ajouter à la fin.

■Le risque est « si la liste est pleine et x n'en fait pas déjà partie ». On colle alors x dans un emplacement qui n'existe pas...

TD29 Les plans.

On cherche un plan à cinq villes et quatre routes. Il n'y a que le plan B.
Et effectivement, la ville 1 a un voisin, c'est 2 : `[1, 2, *, *, *]`
la ville 2 a trois voisins : 1, 4 et 5 : `[3, 4, 1, 5, *]` (l'ordre importe peu)
la ville 3 n'a pas de voisin : `[0, *, *, *, *]`
la ville 4 a deux voisins : 2 et 5 : `[2, 2, 5, *, *]`
la ville 5 a deux voisins, je vous laisse compléter

```
planA = [  [5,   7   ],
           [2,  2,  3,  *,  *  ],
           [3,  1,  3,  5,  *  ],
           [4,  1,  2,  4,  5  ],
           [2,  3,  5,  *,  *  ],
           [3,  2,  3,  4,  *  ]]
            ↑    =    =    =    =
```

et

```
planC = [  [5,   4   ],
           [1,  2,  *,  *,  *  ],
           [3,  1,  4,  3,  *  ],
           [1,  2,  *,  *,  *  ],
           [2,  5,  2,  *,  *  ],
           [1,  4,  *,  *,  *  ]]
```

La liste marquée d'une flèche indique combien chaque ville a de voisins.
Elle ne peut pas en avoir plus que quatre. Sur chaque ligne, les éléments peuvent être cités dans un autre ordre que celui que j'ai indiqué ici.

```
def CreerPlanSansRoute(n) :
....L = CreerTableau(n+1)
....L[0] = CreerTableau(2)
....L[0][0], L[0][1] = n, 0
....for i in range(1, n+1) :
.......L[i] = CreerListeVide(n-1)
....return L
```

`L[0]` c'est `[n, 0]` car il y aura n listes et aucune route (ça va venir).
Et pour chaque ville, la liste est vide.
Dur d'écrire ça sans nos réflexes **append**. On doit tout fabriquer des tableaux avec des `*`, puis remplacer chaque `*` par une liste créée sur le même principe.
Les correcteurs X-ENS ont ils accepté `L[0] = [n, 0]` à la place de `L[0] = CreerTableau(2)`
`L[0][0], L[0][1] = n, 0` ?

```
def EstVoisine(plan, x, y) :
....return EstDansListe(plan[x], y)
```

■ On espère que le tableau est bien rempli et que `EstDansListe(plan[y], x)` retournera le même booléen.
On suppose que x et y sont des index convenables, pas trop grands.

```
def Ajoute(plan, x, y) :
....if not(EstVoisine(plan, x, y)) :
........plan[0][1] += 1
........AjouteDansListe(plan[x], y)
........AjouteDansListe(plan[y], x)
```

On n'oublie pas qu'il y a une route en plus (et une seule). Et la route est à double sens.
■ On admettra que l'utilisateur ne lance pas la procédure avec x égal à y.

C'est le seul cas où on risque un débordement de liste, car une ville ne peut avoir plus de $n-1$ voisins...

```
def AfficheToutesLesRoutes(plan) :
....n, m = plan[0][0], plan[0][1]
....ToutesLesRoutes = CreerListeVide(m)
....for x in range(1, n+1) :
........NbVoisins = plan[x][0]
........for i in range(1,NbVoisins+1) :
............y = plan[x][i]
............if x < y :
................AjouteDansListe(ToutesLesRoutes, [x,y])
.... for Route in ToutesLesRoutes :
........print(Route)
```

La liste des routes sera, on le sait de longueur m, à condition de ne pas compter les routes deux fois.
On prend les villes une par une (index de `1` à `n`, donc `range(1, n+1)`).
Pour chacune, on va lire la liste de ses voisins, autant en connaître la longueur.
Chaque voisin est `plan[x][i+1]` (ou alors `for i in range(1, NbVoisins+1)`).
Mais pour ne pas compter la route [5, 2] et la route [2, 5], on pense au test `if x < y`.
L'énonce n'est pas clair ici : • on affiche les routes
• on retourne une liste de routes ?
On croise aussi la proposition suivante :

```
def AfficheToutesLesRoutes(plan) :
....n = plan[0][0]
....m = plan[0][1]
....Mot = CreeListeVide(m)
....for x in range(1, n+1) :
........for y in range(x+1, n+1) :
............if EstVoisine(plan, x, y) :
................AjouteDansListe(Mot, "(" + str(x) + "," + str(y) + ")")
....return Mot
```

■ On parcourt n liste. Chacune est de longueur n. On peut craindre une complexité en $n \times n$.
Mais en fait, la liste des voisins de x n'est parcourue que pour son nombre de voisins.
En fait, la somme des longueurs de ces listes est égale à $2 \times m$.
On a donc une complexité en $n + 2 \times m$.
Le facteur 2 nous importe peu : $O(n + m)$.

TD29 Coloriage.

```
def ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....for i in range(1, n+1) :
........Couleur[i] = EntierAleatoire(k)
....Couleur[s], Couleur[t] = 0, k+1
```

Le tableau couleur est déjà initialisé. On a juste à remplir ses cases.
On colorie chaque ville au hasard.
Et après coup, on rectifie pour les villes x et y.
On pouvait aussi choisir

```
def ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....for i in range(1, n+1) :
........if (i == s) :
............Couleur[i]= 0
........elif(i == t) :
............Couleur[i] = k+1
........else :
............Couleur[i] = EntierAleatoire(k)
```

```
def VoisinesDeCouleur(plan, couleur, i, c) :
....n = plan[0][0]
....L = CreerListeVide(n)
....NbVoisins = plan[i][0]
....for j in range(1,NbVoisins+1) :
........if couleur(plan[i][j]) == c :
............AjouteDansListe(L, plan[i][j])
....return L
```

La liste sera de longueur maximal n, le nombre de villes (qu'il faut aller chercher).
On prend une à une les villes voisines (les `plan[i][j]` avec `j` dans le bon range).
On regarde si leur couleur est bonne. Et si oui, on ajoute dans la liste. En utilisant la procédure déjà créée...
Variante :

```
def VoisinesDeCouleur(plan, couleur, i, c) :
....n = plan[0][0]
....voisines_de_i_de_couleur_c = CreerListeVide(n)
....nb_voisines_de_i = plan[i][0]
....for k in range(1, nb_voisines_de_i+1) :
........j = plan[i][k]
........if i != j and couleur[j] == c :
............AjouteDansListe(voisines_de_i_de_couleur_c, j)
....return voisines_de_i_de_couleur_c
```

```
def VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, liste, c) :
....n = plan[0][0]
....L = CreerListeVide(n)
....NbVilles = liste[0]
....for i in range(1, NbVilles+1) :
........LaVille = liste[i]
........NbVoisins = plan[LaVille][0]
........for j in range(1, NbVoisins+1) :
............LeVoisin = plan[LaVille][j]
............if Couleur[LeVoisin] == c :
................AjouteDansListe(L, LeVoisin)
....return L
```

Avec **AjouteDansListe**, on ne met pas plusieurs fois une ville déjà prise.
Ça peut donner aussi

```
def VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, liste, c) :
....L = CreerListeVide(plan[0][0])
....for i in range(1, liste[0]+1) :
........for j in range(1, plan[liste[i]][0]+1) :
............if Couleur[plan[liste[i]][j]] == c :
................AjouteDansListe(L, plan[liste[i]][j])
....return L
```

Comptez bien les crochets à chaque fois, le compte est bon.
J'appelle ça une version « one-liner ». On ne crée pas de variable intermédiaire, on imbrique des fonctions des unes dans les autres.

```
def ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....Liste = CreerListeVide(n)
....AjouteDansListe(Liste, s)
....for c in range(1, k+2) :
........Liste = VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, Liste, c)
........if Liste[0] == 0 :
............return False
....return EstDansListe(Liste, t)
```

On crée une liste des villes. Au départ, elle ne contient que s.

A chaque étape, on regarde quelles nouvelles villes on peut atteindre.

Invariant de boucle : à l'étape c, on a les villes qu'on peut atteindre en k étapes.
Si à un moment on ne peut plus rien atteindre, autant s'arrêter.
Sinon, à la fin, on regarde si la ville objectif **t** est dans la liste des villes atteignables.
On retourne le booléen **EstDansListe(Liste, t)** car on fait de l'informatique.
Si on fait n'importe quoi, on termine par

```
if EstDansListe(Liste, t) :
....return True
else :
....return False
```

■ Il y a k boucles (au pire) qui sollicitent $n.(n+m)$ opérations.
La complexité est en $O(k.n.(n+m))$.

J'ai croisé la proposition suivante de la part de collègues. Elle me laisse perplexe :

```
def ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....# On se lance, en partant de s
....liste = CreerListeVide(n) # Sommets de couleur 0
....AjouteDansListe(liste, s) # Sommets de couleur 0
....# Couleur courant 0 (note : c aussi = diamètre de l'exploration courante)
....c = 0
....while not(EstDansListe(liste, t)) and c <= t : # On n'est pas arrivé
........c += 1 # On passe à la couleur d'après
........# On filtre les voisines des villes dans liste qui sont de couleurs c
........bonnes_voisines = VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, liste,
c)
........# Et ou bien on peut continuer à explorer, ou bien on doit arrêter
........if bonnes_voisines[0] == 0 :
............# On doit s'arrêter
............return False
........ else :
............# On peut continuer, et désormais on part des villes suivantes
............liste = bonnes_voisines
....# On a t dans la liste, donc on a un chemin partant de s jusqu'à t
....return True
```

Qu'est ce qui me gène ? Cette fonction ne fait pas intervenir **k**...
Mais c'est dû à une petite faute de frappe que vous devriez détecter...

J'ai aussi croisé une correction de cet exercice avec la fonction (à peu près) suivante :

```
def ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....Liste = CreerListeVide(n)
....AjouteDansListe(Liste, s)
....for c in range(1, k+2) :
........Liste = VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, Liste, c)
........if Liste[0] == 0 :
............return False
....return True
```

Cette fois, c'est t qui n'avait aucun rôle. On regardait bien si il existait un chemin arc en ciel, mais on ne regardait pas si il allait bien de s à t.

```
def existeCheminSimple(plan, k, s, t) :
....n = plan[0][0]
....nombre_executions = k ** k
....for i in range(nombre_executions) :
........# On génère un coloriage aléatoire
........couleur = CreerTableau(n+1) # Tableau vide
........ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t)
........# On espère qu'il convient pour trouver un chemin arc-en-ciel
........if existeCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t) :
............return True
.... return False
```

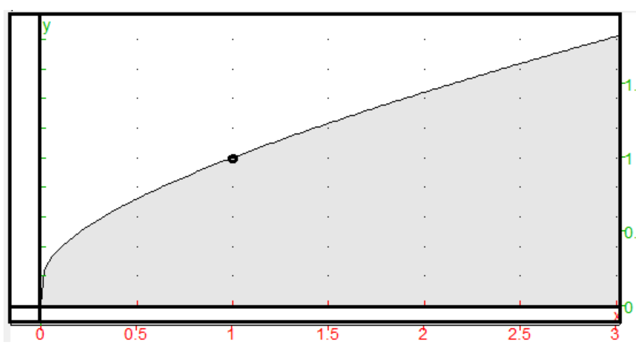
◁51▷ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$.

♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini $\left(\int_{x=a}^{x=b}\Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y).dy\Big).dx = \int_{y=c}^{y=d}\Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y).dx\Big).dy\right)$, montrez : $\int_0^1 \dfrac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x,\ y) \longmapsto x^y$ sur $[0,\ 1]$).

Calculez pour a et b positifs $\int_0^1 \dfrac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

$x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est défini sur $]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[$ *(existence du logarithme, mais aussi non-annulation de ce logarithme).*

Quand x tend vers 0, le numérateur a une limite finie, et le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient tend vers 0.



Quand$x$ tend vers 1, on refait le coup de l'inverse du taux d'accroissement du logarithme :

$\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$ tend vers $\dfrac{1}{1}$.

La fonction se prolonge par la valeur 1.

Et vers $+\infty$, par croissances comparées la fonction tend vers l'infini.

On pose comme propos : $f = (x,\ y) \longmapsto x^y$ *(fonction de deux variables, continue et même dérivable).*

On va calculer les deux intégrales $\int_{x=a}^{x=b}\Big(\int_{y=c}^{y=d} f(x,y).dy\Big).dx$ et $\int_{y=c}^{y=d}\Big(\int_{x=a}^{x=b} f(x,y).dx\Big).dy$ avec des bornes correspondant au carre $[0,\ 1]^2$.

$\int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} e^{y.\ln(x)}.dy\Big).dx$ $\int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1}\Big[\dfrac{e^{y.\ln(x)}}{\ln(x)}\Big]_{y=0}^{1}.dx$ $\int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1}\dfrac{e^{\ln(x)}-e^0}{\ln(x)}.dx$ $\int_{x=0}^{x=1}\Big(\int_{y=0}^{y=1} x^y.dy\Big).dx = \int_{x=0}^{x=1}\dfrac{x-1}{\ln(x)}.dx$ (intégrale d'une application continue sur un segment, après prolongation ou prolongement)	$\int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1}\Big[\dfrac{x^{y+1}}{y+1}\Big]_{x=0}^{1}.dy$ $\int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1}\dfrac{1^{y+1}-0}{y+1}.dy$ $\int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \int_{y=0}^{y=1}\dfrac{1}{y+1}.dy$ $\int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = [\ln(y+1)]_{y=0}^{1}$ $\int_{y=0}^{y=1}\Big(\int_{x=0}^{x=1} x^y.dx\Big).dy = \ln(2)$

On ne peut pas progresser sur celui de la première colonne.

Mais comme on a fini celui de la seconde, on utilise les théorème de Fubini pour les dire égaux :

$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$$

On reprend la même idée, mais avec cette fois $\int_{x=0}^{x=1} \Big(\int_{y=a}^{y=b} x^y.dy \Big).dx$.

La première colonne donne $\int_{x=0}^{x=1} \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ (on prolonge en $x = 0$ par la valeur 0 et en $x = 1$ par la valeur

La seconde donne $\ln(1+b) - \ln(1+a)$ soit encore $\ln\Big(\frac{b+1}{a+1}\Big)$.

Comment a-t-on trouvé la valeur en $x = 1$?
Comme x tend vers 1, on l'écrit $x = 1 + h$ et on effectue des développements limites :

$$\frac{(1+h)^b - (1+h)^a}{\ln(1+h)} = \frac{(1+b.h+o(h)) - (1+a.h+o(h))}{h+o(h)} = \frac{(b-a).h+o(h)}{h+o(h)} = \frac{b-a+o(1)}{1+o(1)}$$

Le tout tend bien vers $b - a$.
On peut aussi écrire :

$$\frac{x^b - x^a}{\ln(x)} = \frac{x^b - 1}{\ln(x)} - \frac{x^a - 1}{\ln(x)} = \frac{\dfrac{x^b-1}{x-1}}{\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} - \frac{\dfrac{x^a-1}{x-1}}{\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}}$$

On fait tendre x vers 1 et ces quatre taux d'accroissement tendent vers b, 1, 1 et a.

◃52▹

Ce sujet, inspiré d'éléments de Mines-Ponts MP 1995, Centrale TSI 2001, Polytechnique MP 1994 traite des déterminant de Hankel.

Si c est une suite complexe, on définit pour tout n la matrice $H_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2.n} \end{pmatrix}$ (matrice de Hankel) et le déterminant $\Delta_n = \det(H_n)$.

Premiers exemples

I∼0) Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n, une liste C (qu'on supposera au moins de longueur $2.n + 1$) et retourne la matrice H_n (liste de listes).

Le terme général de position `i`, `k` de la matrice cherchée est tout simplement `C[i+k]` en indexation pythonienne. On peut tout traiter en une ligne.

```
def hankel(C : list, n : int) : #list of list of float
....return [[C[i+k] for k in range(n+1)] for i in range(n+1)]]
```

On peut détailler en

```
def H(C : list, n : int) : #list of list of float
....H = [ ]
....for i in range(n+1) :
........L = [ ]
........for k in range(n+1) :
............L.append(C[i+k])
........H.append(L)
....return(H)
```

Le présupposé $2.n + 1 \leqslant len(C)$ évite les débordements.

I∼1) $\boxed{\text{Explicitez la suite } (\Delta_n) \text{ si } (c_n) \text{ est une suite géométrique (premier terme } c_0 \text{ et raison } r\text{). Calculez aussi } Tr(H_n) \text{ pour tout } n.}$

Pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r, les trois premiers déterminants sont u_0 puis $\begin{vmatrix} u_0 & r.u_0 \\ r.u_0 & r^2.u_0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} u_0 & r.u_0 & r^2.u_0 \\ r.u_0 & r^2.u_0 & r^3.u_0 \\ r^2.u_0 & r^3.u_0 & r^4.u_0 \end{vmatrix}$ et ainsi de suite.
Mais dès le déterminant de taille 2 , on trouve 0 car, par définition même d'une suite géométrique, la seconde colonne est un multiple de la première.

Pour ce qui est de la trace, elle contient $n+1$ termes qui ne sont que des carrés ($u_0.r^{i+k}$ avec $i=k$).
C'est donc $u_0.\sum_{k=0}^{n}(r^2)^k$ et pour r différent de 1 on trouve $u_0.\dfrac{r^{2.k+2}-1}{r^2-1}$.

I∼2) $\boxed{\text{Explicitez la suite } (\Delta_n) \text{ si } (c_n) \text{ est la suite de Fibonacci (premier terme } c_0=0, c_1=1 \text{ et } \forall n,\ c_{n+2}=c_{n+1}+c_n\text{). Montrez aussi } Tr(H_n)=\sum_{k=0}^{2.n-1}F_k \text{ pour tout } n. \text{ Écrivez } (F_n) \text{ comme combinaison de deux suites géométriques. Trouvez les cinq réels } a,\ b,\ c,\ r \text{ et } r' \text{ vérifiant } \forall n,\ Tr(H_n)=a.(r)^n+b.(r')^n+c.}$

Pour la suite de Fibonacci, on trouve $\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$. Seul le second déterminant est non nul.
Dès le troisième, on a $C_2 = C_0 + C_1$ par définition même de la suite de Fibonacci, et ce quelle que soit la taille de la matrice.
Cette fois, la trace ne contient qu'un terme sur deux de la suite de Fibonacci : $\sum_{k=0}^{n} F_{2.k}$.
Ça ne coïncide pas avec ce qui est demandé ? On n'a qu'un terme sur deux par rapport à ce qui est demandé ?
Mais si on rappelle que chaque F_{2k} s'écrit $F_{2.k-1}+F_{2.k-2}$ (sauf le premier, mais il est nul), on a alors $\sum_{k=1}^{n} F_{2.k-1} + \sum_{k=1}^{n} F_{2.k-2}$. l'un donne la somme des termes d'indices impairs de F_1 à $F_{2.n-1}$ et l'autre donne la somme de F_0 à $F_{2.n-2}$.
En fusionnant on a bien la somme de F_0 à $F_{2.n-1}$.

J'espère ne pas croiser trop de récurrences pour cette question, on n'est plus en train de passer la bac !

On veut calculer le terme général de la suite de Fibonacci ? On fait directement appel au cours avec l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 1$ de racines $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait que F_n est une combinaison de la forme

$$\exists (a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n,\ F_n = a.\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n + b.\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n$$

Les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donnent $\boxed{\forall n,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\Big(\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^n - \Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^n\Big)}$ *(inutile de retenir une formule par cœur, tout dépend du choix de condition initiale des premiers lapins)*. C'est bien une combinaison de deux suites géométriques.

On peut aussi repasser par $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+2} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix}$
où r et r' sont les deux racines données ci dessus.

On n'a plus qu'à sommer ces formules :

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^k$$

On a deux séries géométriques

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2.n} - 1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2.n} - 1}{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 1}$$

On simplifie et il reste, tous calculs faits $\boxed{\sum_{k=0}^{2.n-1} F_k = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}$

On a bien $a.(r)^n + b.(r')^n + c$ avec

$a = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$b = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$c = 1$	$r = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$r' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
			carré du nombre d'or	

I∼3) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est la suite (n^2) (trouvez la combinaison sur les quatre premières colonnes). Calculez aussi $Tr(H_n)$ pour tout n.

Pour la suite de Fibonacci, on trouve $\begin{vmatrix} 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 8 \end{vmatrix}$. Seul le second déterminant est non nul.

Dès le troisième, on a $C_2 = C_0 + C_1$ par définition même de la suite de Fibonacci, et ce quelle que soit la taille de la matrice.

Cette fois, la trace ne contient qu'un terme sur deux de la suite de Fibonacci : $\sum_{k=0}^{n} F_{2.k}$.

Ça ne coïncide pas avec ce qui est demandé ? On n'a qu'un terme sur deux par rapport à ce qui est demandé ?

Mais si on rappelle que chaque F_{2k} s'écrit $F_{2.k-1} + F_{2.k-2}$ (sauf le premier, mais il est nul), on a alors $\sum_{k=1}^{n} F_{2.k-1} + \sum_{k=1}^{n} F_{2.k-2}$. l'un donne la somme des termes d'indices impairs de F_1 à $F_{2.n-1}$ et l'autre donne la somme de F_0 à $F_{2.n-2}$.
En fusionnant on a bien la somme de F_0 à $F_{2.n-1}$.

J'espère ne pas croiser trop de récurrences pour cette question, on n'est plus en train de passer la bac !

On veut calculer le terme général de la suite de Fibonacci ? On fait directement appel au cours avec l'équation caractéristique $\lambda^2 = \lambda + 1$ de racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On sait que F_n est une combinaison de la forme

$$\exists(a,\ b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall n,\ F_n = a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b.\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ donnent $\boxed{\forall n,\ F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}$ *(inutile de retenir une formule par cœur, tout dépend du choix de condition initiale des premiers lapins)*. C'est bien une combinaison de deux suites géométriques.

On peut aussi repasser par $\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+2} \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ r & r' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r' \end{pmatrix}$
où r et r' sont les deux racines données ci dessus.

On n'a plus qu'à sommer ces formules :

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \frac{1}{\sqrt{5}}.\sum_{k=0}^{2.n-1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

On a deux séries géométriques

$$Tr(H_n) = \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2.n} - 1}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - 1} - \frac{1}{\sqrt{5}}.\frac{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2.n} - 1}{\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) - 1}$$

On simplifie et il reste, tous calculs faits $\boxed{\sum_{k=0}^{2.n-1} F_k = \frac{5+\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10}.\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1}$

On a bien $a.(r)^n + b.(r')^n + c$ avec

$a = \frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$b = \frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$c = 1$	$r = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$r' = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$
			carré du nombre d'or	

I∼4) Pour cette question, (c_n) est la suite $(n!)$. Montrez $\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2 \times \det(B_n) = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2$ où B_n est la matrice de taille $n+1$ de terme général $\binom{i+k}{k}$ (indexation pythonienne).

Pour la suite n^2, on ne devine pas tout de suite l'histoire, mais $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \end{vmatrix}$ est nul car il existe une combinaison entre les quatre premières colonne.

Ces colonnes sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ i^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ (i+1)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ \vdots \\ (i+2)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ \vdots \\ (i+3)^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$ et

la combinaison est $C_0 - 3.C_1 + 3.C_2 - C_3 = 0_{n+1}$. Il suffit de le vérifier sur la ligne d'indice i pour tout i.

$$i^2 - 2.(i+1)^2 + 3.(i+2)^2 - (i+3)^2 = 0$$

Comme les trois colonnes forment une famille liée, le déterminant est nul.

Enfin, la trace est encore une somme de carrés :

$$Tr(H_n = \sum_{k=0}^{n} (2.k)^2 = 4.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{6}$$

	géométrique	Fibonacci	carrés	factorielle
Déterminant	$(u_0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots)$	$(0,\ -1,\ ,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots)$	$(0,\ -1,\ 8,\ 0,\ 0,\ 0, \ldots)$	$\left(1,\ 1,\ 4, \ldots \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right)^2, \ldots\right)$
Trace	$u_0.\frac{a^{2.n+2} - 1}{a^2 - 1}$	$\sum_{k=0}^{2.n-1} F_k$	$2.\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{3}$	

Traitons effectivement le cas de la matrice H_n dans le cas de la suite factorielle.
On écrit la matrice et on factorise chaque chaque colonne k par $k!$:

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & \ldots & k! & \ldots & n! \\ 1! & 2! & \ldots & (k+1)! & \ldots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & (i+1)! & \ldots & (i+k)! & \ldots & (n+k)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \ldots & (n+k)! & \ldots & (2n)! \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=0}^{n} k!\right). \begin{vmatrix} 0! & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1! & 2 & \ldots & \frac{(k+1)!}{k!} & \ldots & \frac{(n+1)!}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & \frac{(i+1)!}{1!} & \ldots & \frac{(i+k)!}{k!} & \ldots & \frac{(n+k)!}{n!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & \frac{(n+1)!}{1!} & \ldots & \frac{(n+k)!}{k!} & \ldots & \frac{(2n)!}{n!} \end{vmatrix}$$

et maintenant on factorise chaque ligne i par $i!$

$$\begin{vmatrix} 0! & 1! & \dots & k! & \dots & n! \\ 1! & 2! & \dots & (k+1)! & \dots & (n+1)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i! & (i+1)! & \dots & (i+k)! & \dots & (n+k)! \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ n! & (n+1)! & \dots & (n+k)! & \dots & (2n)! \end{vmatrix} = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big).\Big(\prod_{i=0}^{n} i!\Big). \begin{vmatrix} 0! & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \frac{1!}{0!.1!} & \frac{2!}{1!.1!} & \dots & \frac{(k+1)!}{k!.1!} & \dots & \frac{(n+1)!}{n!.1!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{i!}{0!.i!} & \frac{(i+1)!}{1!.i!} & \dots & \frac{(i+k)!}{k!.i!} & \dots & \frac{(n+k)!}{n!.i!} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{n!}{0!.n!} & \frac{(n+1)!}{1!.n!} & \dots & \frac{(n+k)!}{k!.n!} & \dots & \frac{(2n)!}{n!.n!} \end{vmatrix}$$

Les variables étant muettes, on a bien $\Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2$ en facteur devant. Et le terme général de la matrice est bien $\dfrac{(i+k)!}{i!.k!}$.

Résumé : factoriser ligne par $i!$ et colonne par $k!$.

Il reste à prouver que la matrice de coefficient général binomial a pour déterminant 1. On le voit en petites tailles :

$$\begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix},, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix}$$

Mais comment le prouver ? On constate que la règle de construction donne qu'un terme est somme de deux termes adjacents : $a_i^k = a_{i-1}^k + a_{k-1}^i$ (c'est notre relation

$$\binom{i+k}{k} = \binom{i+k-1}{k} + \binom{i+k-1}{k-1}$$

On va soustraire chaque colonne sur la suivante pour mettre des 0, à partir de la fin.
Regardons sur un exemple avec n petit :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 35 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 70 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 10 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 20 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 35 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 10 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 15 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 6 & 10 & 15 \\ 1 & 5 & 10 & 20 & 35 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 10 & 15 \\ 1 & 1 & 4 & 20 & 35 \end{vmatrix}$$

Le terme général de la matrice obtenue avec $C_k = C_k - C_{k-1}$ est alors (à partir de la colonne 1 puisqu'il faut en garder une) :

$$\binom{i+k}{k} - \binom{i+(k-1)}{k-1} = \binom{(i-1)+k}{k}$$

On retrouve la matrice mais décalée d'une ligne vers le bas (on en a perdu une). Et la première ligne en emplie de 0 sauf en position $(0,\ 0)$.
On développe par rapport à la première ligne, le facteur vaut 1, la pondération vaut $(-1)^0$, le cofacteur est $\det(B_{n-1})$.
Bref : $\det(B_n) = \det(B_{n-1})$ et par récurrence immédiate : $\det(B_n)$ vaut 1 pour tout n.

Bilan après les deux étapes : $\boxed{\Delta_n = \Big(\prod_{k=0}^{n} k!\Big)^2}$

Si on doit décomposer en produit de facteurs premiers Δ_{10}, on doit déjà calculer

$$\prod_{k=0}^{10} k! = \begin{matrix} 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ = & = & = & = & = & = & = & = & = & = \\ 1 & 2^9 & 3^8 & 4^7 & 5^6 & 6^5 & 7^4 & 8^3 & 9^2 & 10 \end{matrix}$$

et pour le déterminant le prof de maths trouve

$$\Big(\big(2\big)^9.\big(3\big)^8.\big(2^2\big)^7.\big(5\big)^6.\big(2.3\big)^5.\big(7\big)^4.\big(2^3\big)^3.\big(3^2\big)^2.\big(2.5\big)\Big)^2 = 2^{76}.3^{34}.5^{14}.7^8$$

le prof de physique trouve trouve $4,43 \times 10^{55}$
le prof de SII trouve 40×10^{54}
le prof d'arts plastiques trouve 44 337 041 641 882 947 649 156 022 595 410 930 014 617 600 000 000 000 000.

Cas de nullité

II∼0) Montrez que la suite (c_n) est nulle si et seulement si la suite (Δ_n) est nulle.

Évidemment, si la suite (c_n) est la suite nulle, tous les déterminants sont nuls, car formés de 0 partout.

Réciproquement, on suppose que tous les déterminants tels que

$$\begin{vmatrix} u_0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 \\ u_1 & u_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 \\ u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 \\ u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \end{vmatrix}$$

sont nuls. le premier donne $u_0 = 0$. Le second donne $(-u_1)^2 = 0$ et donc $u_1 = 0$.

En reportant dans le suivant : $\begin{vmatrix} 0 & 0 & u_2 \\ 0 & u_2 & u_3 \\ u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = 0$, u_2 est nul à son tour. Et ainsi de suite.

On sent venir la récurrence sur n. A forte hérédité.

On suppose donc que tous les Δ_n sont nuls.
On a montré que u_0 était nul.
On se donne n et on suppose que tous les u_k pour k de 0 à $n-1$ sont nuls.
On regarde alors le déterminant Δ_n. Il est nul par la grande hypothèse. mais par l'hypothèse de récurrence, il est de la forme qui suit

$$0 = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_{n-1} & u_n \\ u_1 & u_2 & \dots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & u_n & \dots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2.n-1} & u_{2.n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & u_n \\ 0 & 0 & \dots & u_n & u_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & u_n & \dots & u_{2.n-2} & u_{2.n-1} \\ u_n & u_{n+1} & \dots & u_{2.n-1} & u_{2.n} \end{vmatrix}$$

La matrice n'est pas triangulaire au sens propre du terme. Mais quitte à ré-arranger les colonnes, elle l'est. Son déterminant est (au signe près) $(a_n)^{n+1}$.

Deux pièges ici : dire $(a_n)^{n+1}$ ou $-(a_n)^{n+1}$ sans surveiller le signe.
Parler de $(a_n)^n$ alors que la matrice est bien de format $n+1$.

Bref, on a $(a_n)^{n+1} = \pm 0$ et par intégrité, a_n est nul.

Comme on est au début du devoir, il est attendu une vraie récurrence et pas juste la mention « par récurrence sur n ». De plus, il faut préciser que c'est une récurrence à forte hérédité.

II∼1) Une suite (c_n) est dite pseudo-périodique d'ordre p (p entier strictement positif) si il existe une liste de coefficients $[\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ vérifiant $\forall n \geqslant p,\ c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$. Montrez que si la suite (c_n) est pseudo-périodique, alors la suite (Δ_n) est nulle à partir du rang p.

Dans notre cours (et dans bien d'autres), ce sont les suites récurrentes linéaires d'ordre p. Comme celle de Fibonacci justement. Ou même, comme la suite (n^2) qui vérifie bien $(n+3)^2 = 3.(n+2)^2 - 3.(n+1)^2 + n^2$.

Regardons la matrice M_N pour N supérieur ou égal à p avec en tête l'hypothèse $c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \dots + \lambda_p.c_{n-p}$ pour tout n :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_2 & \dots & c_p & \dots & c_N \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{p+1} & \dots & c_{N+1} \\ c_2 & c_3 & \dots & c_{p+2} & \dots & c_{N+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_N & c_{N+1} & \dots & c_{p+N} & \dots & c_{2.N} \end{pmatrix}$$

La colonne d'indice p (la $p+1^{iemme}$ donc, qui commence par c_p) est combinaison des précédentes. Proprement

$$\forall i,\ c_{p+i} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{p+i-j}$$

Le déterminant est bien nul.

Pourquoi « à partir du rang p » ?
Parce qu'avant, il n'y a pas assez de colonnes pour remonter jusqu'à c_{n-p} !

On va ensuite montrer la réciproque en commençant par un exemple.

Réciproque*exemple*)

III∼2) On commence par un exemple. On se donne une suite (c_n) et on suppose $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix}$. Calculez $H_3.\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculez Δ_n pour n de 0 à 3.

On ne nous a donné que la matrice H_3 ? Mais on a les précédentes en rognant

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix},\ H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 22 \end{pmatrix},\ H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix}$$

Les déterminants se calculent : 0, -1, 6 et le dernier est nul.

Certes, on peut se lancer dans un calcul par développement, mais on nous livre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui prouve bien que la matrice n'est pas inversible (et nous donne même une relation de dépendance linéaire qui peut servir).

III∼3) Trouvez λ_1 à λ_3 vérifiant $c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$ pour tout n de 3 à 6 (inclus).

On cherche une relation de dépendance linéaire sur les termes de la suite. Elle doit bien se lire sur les colonnes. Puisque la matrice est celle associée à la suite (c_n), regardons comme par hasard

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui nous donne justement

$$\begin{array}{cccccc} -6.c_0 & +5.c_1 & +2.c_2 & = & c_3 \\ -6.c_1 & +5.c_2 & +2.c_3 & = & c_4 \\ -6.c_2 & +5.c_3 & +2.c_4 & = & c_5 \\ -6.c_3 & +5.c_4 & +2.c_5 & = & c_6 \end{array}$$

On note qu'ici, c'est le déterminant nul de Δ_3 qui nous donne cette relation de dépendance linéaire.
L'hypothèse « les déterminants suivants sont nuls » va permettre de la propager.

III∼4) On suppose aussi $\Delta_4 = 0$. En calculant $H_4.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis son déterminant, montrez $c_7 = \sum_{j=1}^{3} \lambda_i.c_{7-i}$

On va calculer comme proposé

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 & 22 \\ 1 & 2 & 9 & 22 & 77 \\ 2 & 9 & 22 & 77 & 210 \\ 9 & 22 & 77 & 210 & a_7 \\ 22 & 77 & 210 & a_7 & a_8 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & 0 & d \\ 22 & 77 & 210 & d & e \end{pmatrix}$$

avec $d = c_7 - 2.c_6 - 5.c_5 + 6.c_4$ (tiens tiens) et $e = c_8 - 2.c_7 - 5.c_6 + 6.c_5$.
Calculons le déterminant de cette matrice. C'est $\Delta_4.1$ si on regarde le premier membre (matrice H_4 et matrice triangulaire).
Mais dans le membre de droite, en développant convenablement, on trouve

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & 0 & d \\ 22 & 77 & 210 & d & e \end{vmatrix} = -d.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 \\ 2 & 9 & 22 & 0 \\ 9 & 22 & 77 & d \end{vmatrix} = -d^2.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 22 \end{vmatrix} = -d^2.\Delta_2 = -6.d^2$$

On déduit par intégrité que d est nul. C'est la relation attendue qui passe au rang suivant.

$$\begin{array}{rrrcl} -6.c_0 & +5.c_1 & +2.c_2 & = & c_3 \\ -6.c_1 & +5.c_2 & +2.c_3 & = & c_4 \\ -6.c_2 & +5.c_3 & +2.c_4 & = & c_5 \\ -6.c_3 & +5.c_4 & +2.c_5 & = & c_6 \\ -6.c_4 & +5.c_5 & +2.c_6 & = & c_7 \end{array}$$

III∼5) On suppose pour tout n plus grand que 4 : $\Delta_n = 0$. Montrez alors par récurrence sur n

$$c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$$

pour tout n plus grand que 4.

On va avancer plus loin avec n au moins égal à 4. On suppose que la relation $c_k = 2.c_{k-1} + 5.c_{k-2} - 6.c_{k-3}$ est vraie pour tout k de 3 à n.
On considère la matrice H_{n-2} et une matrice triangulaire judicieuse, puis on effectue le produit suivant

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Les trois premières colonnes récupèrent les trois premières colonnes de H. Ensuite, tant que l'on est avec des indices plus petits que n, on récupère des 0 car on a la combinaison parfaite (dans la liste des $c_k = 2.c_{k-1} + 5.c_{k-2} - 6.c_{k-3}$).
Mais quand on arrive à un rang trop élevé, il reste par exemple $c_{n+1} - 2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2}$ qu'on va noter α.
Et il reste d'autres termes dont on ignore tout comme $c_{n+2} - 2.c_{n+1} + 5.c_n - 6.c_{n-1}$ et les suivants. On ne va pas es noter car leur rôle n'a aucune importance.

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n-2} \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \dots & c_{n-1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & \dots & c_n \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & \dots & c_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & \dots & c_{2n-3} \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n-4} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & c_4 & c_5 & 0 & 0 & \dots & \alpha \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n-3} & c_{n-2} & c_{n-1} & 0 & \alpha & \dots & ? \\ c_{n-2} & c_{n-1} & c_n & \alpha & ? & \dots & ? \end{pmatrix}$$

Si on utilise la notion de matrice par blocs : $H_{n-2}.T = \begin{pmatrix} H_2 & 0 \\ \vdots & T \end{pmatrix}$ où T est une matrice triangulaire de taille .

En développant un nombre de fois suffisant par rapport à la colonne où il n'y a à chaque fois qu'un α, on obtient que le déterminant vaut $(-1)^{truc}.\alpha^{n-4}.\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}$.
Mais ce déterminant est nul, puisque dans le premier membre on a $\det(H_{n-2}).\det(triangulaire)$.
On en déduit par intégrité $\alpha = 0$ c'est à dire $c_{n+1} - 2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2} = 0$.
C'est la relation attendue au rang $n+1$.

Si vous avez réussi à mettre ceci en forme avec le bon décompte du nombre de colonnes et des exposants, je dis bravo.
Si déjà vous avez compris qu'il fallait une récurrence à grande hérédité, je dis aussi « bien ».
Et si vous avez juste dit « de même », je vois que vous avez compris mais que vous abusez.

Réciproque(généralisation)

IV∼0) On se donne une suite (c_n) telle que la suite (Δ_n) soit nulle à partir d'un certain rang q strictement positif. On suppose donc $\Delta_{q-1} \neq 0$ et $\Delta_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à q.
Déduisez qu'il existe une infinité de vecteurs de taille $q+1$ non nuls vérifiant $M_q.V_q = 0_{q+1}$.

On a suppose $\Delta_q = 0$ *(pour n supérieur ou égal à q, le déterminant est nul)*. La matrice H_q est donc non inversible.
C'est qu'il existe une relation de dépendance linéaire sur ses colonnes.

Ou si vous préférez « un vecteur non nul dans son noyau ».

Et dès qu'on en a un, on a tous ses multiples.

Par exemple, si on a la relation de dépendance linéaire $C_0 + 2.C_1 - 3.C_2 + 5.C_3 = 0_4$ *on prend le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Et ensuite, on a aussi $\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ -15 \\ 55 \end{pmatrix}$ *et plein d'autres.*

On en a donc une infinité.

IV∼1) Montrez qu'il existe un vecteur U_q de taille $q+1$, de dernière composante 1 vérifiant $M_q.U_q = 0_{q+1}$.

On en veut un dont la dernière composante soit égale à 1 ? Il suffit de choisir le bon multiple.

Si on avait $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$, on a aussi $\begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -3/5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trop facile !
A un détail près.

Si le vecteur trouvé est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ alors j'aurai beau chercher ses multiples, aucun ne pourra avoir pour dernière composante 1.
La clef était de diviser le vecteur par sa dernière composante, mais si elle est nulle, c'est impossible.

Ai je un argument pour dire que la combinaison fait intervenir la dernière colonne ?

Si tel n'était pas le cas, on aurait une relation de dépendance linéaire sur $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{q-1} & * \\ c_1 & c_2 & \dots & c_q & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & * \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q-1} & * \end{pmatrix}$ (sans utiliser la dernière colonne).

Mais alors on aurait la même relation sur les colonnes raccourcies $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{q-1} & * \\ c_1 & c_2 & \dots & c_q & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & * \\ * & * & & * & * \end{pmatrix}$ et ceci donnerait $\det(H_{q-1}) =$. Ce qui contredit notre hypothèse.

IV∼2) Déduisez qu'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_q$ vérifiant $\forall n \in \{q, \dots 2.q\},\ u_n = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j.u_{n-j}$.

A présent, que fait on de cette information de la forme $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & c_{q-1} & c_q \\ c_1 & c_2 & & c_q & c_{q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & c_{2q-1} \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q-1} & c_{2q} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{q-1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$?

On la lit ligne par ligne en passant un terme de l'autre côté :

$$\begin{array}{ccccc} -x_0.c_0 & -x_1.c_1 & \dots & -x_{q-1}.c_{q-1} & = & c_q \\ -x_0.c_1 & -x_1.c_2 & \dots & -x_{q-1}.c_q & = & c_{q+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -x_0.c_q & -x_1.c_{q-1} & \dots & -x_{q-1}.c_{2.q-1} & = & c_{2.q} \end{array}$$

En renommant nos coefficients $-x_i$ comme étant des λ_{q-i}, on a exactement les $q+1$ relations demandées.

On va chercher ensuite à les propager avec « déterminant de Δ_n nul ».

IV∼3) Montrez que cette formule est alors valable pour tout n de $\mathbb{N}$ au delà de $2.q-1$.
On suit la méthode que l'on a utilisée dans le cas particulier de la petite dimension.

On prend la matrice de taille $q+3$ (H_{q+2}) et on la multiplie à droite par la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \lambda_q & 0 \\ 0 & 1 & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ & & & & -1 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
avec un bloc I_q et un bloc de combinaisons.

On obtient une matrice par blocs là aussi $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & & c_{q-1} & c_q & & \\ c_1 & c_2 & & c_q & c_{q+1} & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \\ c_{q-1} & c_q & \dots & c_{2q-2} & c_{2q+1} & 0 & d \\ c_q & c_{q+1} & \dots & c_{2q+1} & c_{2q+2} & d & e \end{pmatrix}$ avec $d = c_{2.q+1} - \sum_{k=1}^{q} c_{2.q+1-q}$ dont le déterminant est le produit $d^2.\Delta_{q-1}$
Comme son déterminant est le produit de Δ_{q+2} (nul) par celui de la matrice de combinions, on trouve que d est nul, et la propriété est passée de c_q, c_{q+1} jusqu'à $c_{2.q}$ à $c_{2.q+1}$. C'est un début.

On recommence en augmentant le nombre de colonnes et de lignes.
C'est un peu lourd.

Je vous donne le texte exact de Mines-Ponts :

> *Soient trois entiers fixés p, m et n vérifiant les inégalités :* $1 \leqslant p \leqslant m+1$ *et* $2.m+2 \leqslant n$.
> *Soit C une suite vérifiant la propriété :*
> *il existe p éléments de* $\mathbb{R}$ λ_1*, jusqu'à* λ_p *tels que pour tout entier k compris entre* $m+1$ *et* $n-1$ *(*$m+1 \leqslant k \leqslant n-1$*) la relation* $c_k = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{k-j} = \lambda_1.c_{k-1} + \ldots + \lambda_p.c_{k-p}$ *ait lie.*
> *Déterminez au signe près l'expression du déterminant* Δ_{n-m-1} *en fonction du déterminant* Δ_m *et de la quantité* $a = c_n - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$.
> *Déduisez que si le déterminant* Δ_m*n'est pas nul et si le déterminant* $\Delta_n - m - 1$ *est nul, il vient* $c_n = \sum_{\lambda_j.c_{n-j}}$.

Et la correction :

> *Comme* $1 \leqslant p \leqslant m+1$ *et* $2.m+2 \leqslant n$*, on a* $n-m-1 \geqslant m+1$*. Pour k décroissant de n - m - 1 à m + 1, on effectue l'opération élémentaire* $C_k \leftarrow C_k - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.C_{k-j}$ *. On obtient alors par blocs* $M_{n-m-1} = \begin{pmatrix} M_m & 0 \\ ? & D' \end{pmatrix}$

où D' est un déterminant antidiagonal $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a \\ 0 & 0 & & a & ? \\ \vdots & & & \dots & \vdots \\ 0 & a & & ? & ? \\ a & ? & & ? & ? \end{vmatrix}$.

On en déduit que $\Delta_{n-m-1} = \mp a^{n-2m-1}.\Delta_m$*, donc si* $\Delta_m \neq 0$ *et* Δ_{n-m-1}*, alors* $a = 0$*, c'est-à-dire* $c_n = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j.c_{n-j}$.

Retour sur l'exemple

V∼0) Pour ces questions, (c_n) est définie par $c_n = 2.c_{n-1} + 5.c_{n-2} - 6.c_{n-3}$ pour tout n supérieur ou égal à 3. Montrez : $c_n \leqslant \mu.4^n$ pour tout n (avec $\mu = Max(|c_0|,\ |c_1/4|,\ |c_2/16|)$).

On va montrer la majoration $|c_n| \leqslant 4^n.\mu$ par récurrence sur n. Peut être même par récurrence forte.

On commence avec $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$:
- $|c_0| \leqslant \mu$ puisque $\mu = Max(|c_0|,\ \dots)$
- $|c_1| \leqslant 4.\mu$ puisque $\mu = Sup\Big(\dots,\ \dfrac{|c_1|}{4}, \dots\Big)$
- $|c_1| \leqslant 16.\mu$ puisque $\mu = Sup\Big(\dots,\ \dfrac{|c_2|}{16}\Big)$

Quand on est plus petit que l'un des nombres d'une liste (et même ici égal à un des nombres d'une liste), on est plus petit que le maximum.
Proprement : $a \leqslant Max(a,\ b,\ c)$, $b \leqslant Max(a,\ b,\ c)$ *et* $c \leqslant Max(a,\ b,\ c)$.

L'initialisation a dû se faire sur trois termes, car ensuite on va avoir besoin de passer de $n-2$, $n-1$, n à $n+1$.

On se donne un entier n et on suppose que tous les c_k de $k = 0$ à $k = n$ vérifient $|c_k| \leqslant 4^k.\mu$ *(attention, c'est bien* $4^k.\mu$*et pas* $4^n.\mu$ *et c'est pour chaque* k *de* 0 *à* n*).*
On s'intéresse à c_{n+1} qu'on veut majorer. On écrit

$$|c_{n+1}| = |2.c_n + 5.c_{n-1} - 6.c_{n-2}| \leqslant 2.|c_n| + 5.|c_{n-1}| + 6.|c_{n-2}|$$

On a utilisé l'inégalité triangulaire, et on se dit que ça ne doit pas être mauvais, car de toutes façons, on ignore les signes de chaque terme.
On exploite ensuite l'hypothèse de récurrence aux rangs n, $n-1$ et $n-2$:

$$|c_{n+1}| \leqslant 2.4^n.\mu + 5.4^{n-1}.\mu + 6.4^{n-1}.\mu$$

On factorise par μ et par 4^{n-2}

$$|c_{n+1}| \leqslant (2.4^2 + 5.4 + 6).4^{n-1}.\mu = 58.4^{n-2}.\mu$$

On majore encore un peu car on a un objectif : $4^{n+1}.\mu$ c'est à dire $4^3.4^{n-2}.\mu$ avec $4^3 = 64$

$$|c_{n+1}| \leqslant 58.4^{n-2}.\mu \leqslant 64.4^{n-2}.\mu = 4^{n+1}.\mu$$

On a réussi à passer de $(H_{n-2}\ et\ H_{n-1}\ et\ H_n)$ à H_{n+1}. C'est ça l'hérédité.

V∼1) On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n.x^n$ pour tout N. Montrez :

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = (2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) +$$
$$+(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}$$

On peut certes établir

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = (2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) +$$

$$+(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}$$

par récurrence sur N.
Pour N égal à 2, le premier membre est nul. Et le second donne

$$(2.x + 5.x^2 - 6.x^3).(c_0 + c_1.x + c_2.x^2) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) + (-2.c_2 - 5.c_1 + 6.c_0).x^3 + (-5.c_2 + 6.c_1).x^4 + 6.c_2.x^5$$

Les neuf termes se simplifient deux à deux.
Et l'hérédité passe bien. mais ce serait du gaspillage de passer par une telle méthode. Pourquoi pas NumPy et SciPy tant qu'on y est ?

On part du premier membre proposé :

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = \sum_{n=3}^{N} c_n.x^n$$

On remplace car à partir du rang 3, la formule de récurrence est utilisable

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = \sum_{n=3}^{N} (2.c_{n-1} + 5.c_{n-2} - 6.c_{n-3}).x^n$$

On sépare en trois sommes et on ré-indexe

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = 2.\sum_{n=3}^{N} c_{n-1}.x^n + 5.\sum_{n=3}^{N} c_{n-2}.x^n - \sum_{n=3}^{N} c_{n-3}.x^n$$

$$S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 = 2.\sum_{p=2}^{N-1} c_p.x^{p+1} + 5.\sum_{p=1}^{N-2} c_p.x^{p+2} - \sum_{p=0}^{N-3} c_n.x^{p+3}$$

On sort les puissances de x attendues et on tente d'aligner nos sommes en $\sum_{n=0}^{N}$

$$\begin{array}{rcccc} & & & & +6.x^3.c_N.x^N \\ & & & -5.x^2.c_N.x^N & +6.x^3.c_{N-1}.x^{N-1} \\ & & -2.x.c_N.x^N & -5.x^2.c_{N-1}.x^{N-1} & +6.x^3.c_{N-2}.x^{N-2} \\ S_N(x) - c_0 - c_1.x - c_2.x^2 & = & 2.x.\sum_{p=0}^{N} c_p.x^p & +5.x^2.\sum_{p=0}^{N} c_p.x^p & -6.x^3.\sum_{p=0}^{N} c_n.x^{p+3} \\ & & -2.x.c_0 & -5.x^2.c_0 & \\ & & -2.x.c_1.x & & \end{array}$$

L'une des lignes donne justement $(2.x + 5.x^2 - 6.x^3).S_N(x)$ et le reste n'est que petits termes à compenser précisément écrits dans la formule.

V∼2) Déduisez que pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$, $S_N(x)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers une fraction rationnelle en x que vous préciserez.

Que fait on alors de cette formule ?
On isole d'un côté les termes en $S_N(x)$: $(1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3).S_N(x)$.
De l'autre côté, on réunit les termes aux exposants petits :

$$(1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3).S_N(x) = (c_0 + c_1.x + c_2.x^2) + (-2.c_0.x - 2.c_1.x^2 - 5.c_0.x^2) + \dots$$

puis ceux avec des grands exposants et on divise

$$S_N(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3} +$$

$$+\frac{(-2.c_N - 5.c_{N-1} + 6.c_{N-2}).x^{N+1} + (-5.c_N + 6.c_{N-1}).x^{N+2} + 6.c_N.x^{N+3}}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3}$$

On a le droit de diviser pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$ car sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annule pas.
Peut on faire tendre N vers l'infini sans avoir des formes indéterminées ?
Certes, pour x entre $-1/4$ et $1/4$, chaque x^N ou x^{N+1} ou x^{N+2} tend vers 0 quand N tend vers l'infini.
Mais il y a un $c_N$devant. Et lui, il peut devenir énorme. D'ailleurs, on a juste pu le dominer que par $\mu.4^N$.

Mais justement, $|x^N.c_N| \leqslant |x|^N.4^N.\mu = (4.|x|)^N.\mu$. Le réel $4.|x|$ est entre 0 et 1. La suite géométrique $((4.|x|)^n)$ tend vers 0 et par encadrement, chaque $x^N.c_N$ et autre tend vers 0. Toute la seconde ligne s'en va, et$S_n(x)$ converge. On a même sa limite :

$$S(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3}$$

Réflexe débilissime de Terminale.
Pour prouver qu'une suite converge, je vais montrer qu'elle est croissante majorée, puis je calculerai sa limite.
C'est le réflexe hérité des suites $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est bien, mais ça ne sert que dans ces cas là.
Ici, on nous demande de montrer qu'elle converge ? Il suffit de montrer qu'elle a une limite !
Converger, c'est juste « avoir une limite ».
Montrer : $u_n = reel + truc_n avec truc_n qui$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini, c'est montrer que u_n converge vers reel !

V∼3) Décomposez celle ci en éléments simples.

Pour décomposer cette limite en éléments simples (puisque c'est bien une fraction rationnelle), on factorise déjà son dénominateur

$$6.x^3 - 5.x^2 - 2.x + 1 = (x-1).(6.x^2 + x - 1) = (x-1).6.\Big(x + \frac{1}{2}\Big).\Big(x - \frac{1}{3}\Big) = (x-1).(2.x+1).(3.x-1)$$

Le numérateur est d'un petit degré, on n'a pas de partie polynômiale, et les trois pôles sont simples

$$S(x) = \frac{c_0 + (c_1 - 2.c_0).x + (c_2 - 2.c_1 - 5.c_0).x^2}{1 - 2.x - 5.x^2 + 6.x^3} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x + \frac{1}{2}} + \frac{\gamma}{x - \frac{1}{3}}$$

On trouve les trois coefficients par la méthode des pôles (des points pour ceux qui aiment les calculs comme en physique, le désespoir de ceux qui plantent dès qu'il y a plus de deux multiplications à faire) :

$$S(x) = \frac{1}{6}.\frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{x-1} + \frac{1}{30}.\frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{x + \frac{1}{2}} + \frac{1}{30}.\frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{x - \frac{1}{3}}$$

V∼4) Démontrez l'existence de $2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n$ et $-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n$ pour x dans $]-1/4,\ 1/4[$ et donnez la valeur de ces deux séries.

Que vient faire ensuite une série géométrique ?

$$2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n = 2.\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(-2.x)^n = 2.\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(-2.x)^{N+1}}{1-(-2.x)} = \frac{2}{1+2.x}$$

On note qu'on a utilisé $|x| < \frac{1}{4}$ ce qui permet à la suite $((2.x)^N)_N$ de tendre vers 0.
Et l'autre ? C'est pareil, puisque là encore $3.x$ est plus petit que 1 en valeur absolue

$$-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n = -3.\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}(3.x)^n = -3.\lim_{N\to+\infty}\frac{1-(3.x)^{N+1}}{1-(3.x)} = \frac{-3}{1-3.x}$$

On synthétise et on ajoute celle qui manque pour avoir nos trois éléments simples

$2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n = \frac{2}{1+2.x} = \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$	$-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n = \frac{-3}{1-3.x} = \frac{1}{x-\frac{1}{3}}$	$-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{-1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$

V∼5) Retrouvez (c_n) comme combinaison de suites géométriques.

Il est temps de tout mettre bout à bout (toujours pour x entre $-1/4$ et $1/4$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n.x^n = S(x) = \frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{6}.\Big(-\sum_{n=0}^{+\infty}x^n\Big) + \frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{30}.\Big(2.\sum_{n=0}^{+\infty}(-2.x)^n\Big) + \frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{30}.\Big(-3.\sum_{n=0}^{+\infty}(3.x)^n\Big)$$

Il ne reste plus qu'à regrouper dans le membre de droite et à (abusivement ?) identifier le coefficient de x^n pour trouver une formule explicite pour c_n

$$c_n = coeff(x^n, S(x)) = \frac{-6.c_0 - c_1 + c_2}{6}.\Big(-1\Big) + \frac{3.c_0 - 4.c_1 + c_2}{30}.\Big(2.(-2)^n\Big) + \frac{2.c_0 - c_1 - c_2}{30}.\Big(-3.(3)^n\Big)$$

Je ne pousse pas le calcul jusqu'au bout, j'ai trop peur qu'une erreur se soit glissée quelque part et que le résultat ne soit pas exactement le bon.
Enfin, je devrais dire « ne soit pas le bon ».

Factorisation de Cholesky

VI∼0) On reprend pour un petit exercice la matrice de Hankel de la suite factorielle : $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 6 & 24 & 120 \\ 6 & 24 & 120 & 720 \end{pmatrix}$. Trouvez T triangulaire supérieure à diagonale positive[a] vérifiant $M_3 =^t T.T$.

a. $t_i^k = 0$ pour $i > k$ et $t_i^i \geqslant 0$

On cherche T de la forme $\begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ 0 & b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c & c' \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$ (oui, que serait sinon son format ?) vérifiant

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a' & b & 0 & 0 \\ a'' & b' & c & 0 \\ a''' & b'' & c' & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ 0 & b & b' & b'' \\ 0 & 0 & c & c' \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 6 & 24 & 120 \\ 6 & 24 & 120 & 720 \end{pmatrix}$$

On résout case par case

$a^2 = 1$	déjà vu	déjà vu	déjà vu
$a.a' = 1$	$(a')^2 + b^2 = 2$	déjà vu	déjà vu
$a.a'' = 2$	$a'.a'' + b.b' = 6$	$(a'')^2 + (b')^2 + c^2 = 24$	déjà vu
$a.a''' = 6$	$a'.a''' + b.b'' = 24$		$(a''')^2 + (b'')^2 + (c')^2 + d^2 = 720$

(on retrouve chaque équation en double, par symétrie de la matrice H_3)
Comme les quatre termes diagonaux sont positifs, on n'a pas le choix : a vaut 1.
La première ligne tombe ensuite directement : $a' = 1$, $a'' = 2$ et $a''' = 6$ (à chaque fois, deux équations nous le disent).
On reporte dans $(a')^2 + b^2 = 2$ et avec la contrainte de positivité, b aussi vaut 1.
On extrait alors $b' = 4$ et $b'' = 18$.
La relation $6^2 + 4^2 + c^2 = 24$ sauve la face : c^2 vaut 4 et c vaut 2.

Bref, avec des calculs pas atroces, on trouve $\boxed{T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 2 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}$

On note qu'on retrouve alors $\det(H_3) = \det({}^tT).\det(T) = (\det(T))^2 = 144$.

VI∼1) Inversez T en résolvant le système $T.X = Y$ d'inconnue X dans $\mathbb{R}^4$ et de paramètre Y dans $\mathbb{R}^4$.

On résout le système $T.X = Y$ d'inconnue X en commençant par l'équation « du bas » : x_4 vaut $y_4/6$; on reporte dans la ligne du dessus ($2.x_3 + 18.x_4 = y_3$) et on trouve $x_3 = \frac{y_3}{2} - \frac{3.y_4}{4}$ et ainsi de suite

$$\begin{array}{rrrrcl} x_1 & +2.x_2 & +2.x_3 & +6.x_4 & = & y_1 \\ & x_2 & +4.x_3 & +18.x_4 & = & y_2 \\ & & 2.x_3 & +18.x_4 & = & y_3 \\ & & & 6.x_4 & = & y_4 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrrrcrrrr} x_1 & & & & = & y_1 & -y_2 & +y_3 & -y_4 \\ & x_2 & & & = & & y_2 & -2.y_3 & +3.y_4 \\ & & x_3 & & = & & & y_3/2 & -3.y_4/4 \\ & & & x_4 & = & & & & y_4/6 \end{array}$$

Ceci nous permet de déduire la matrice inverse de T : $\boxed{T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}}$

Pour cette question comme la précédente, on pouvait proposer et vérifier.

VI∼2) Inversez M_3.

On a écrit $H_3 =^t T.T$ avec$T$ (et ${}^tT$) inversible. On rappelle ensuite les règles connues dans le cours : $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ et $({}^tT)^{-1} =^t (T^{-1})$

$$(H_3)^{-1} = ({}^tT.T)^{-1} = T^{-1}.({}^tT)^{-1} = T^{-1}.{}^t(T^{-1})$$

$$(H_3)^1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 3 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 & -\frac{1}{6} \\ -6 & 14 & -\frac{11}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{11}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

On a ici inversé H_3sans passer par les cofacteurs, ni les formules de Cramer, ni la résolution de gros système.

Pour information, j'ai la réponse en taille 5 *:* $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 1 & 4 & 18 & 96 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & 144 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 96 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 24 \end{pmatrix}$,

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & -2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/24 \end{pmatrix}$ *et* $(H_4)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -10 & 5 & \frac{-5}{6} & \frac{1}{24} \\ -10 & 30 & -\frac{35}{2} & \frac{19}{6} & -\frac{1}{6} \\ 5 & -\frac{35}{2} & \frac{23}{2} & -\frac{9}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{5}{6} & \frac{19}{6} & -\frac{9}{4} & \frac{17}{36} & -\frac{1}{36} \\ \frac{1}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{576} \end{pmatrix}$

Si vous devinez quelquechose, je dis bravo.

◁53▷ Quel est le plus petit entier naturel non nulparlequel on peut multiplier $2^{2020}.3^{2021}.4^{2022}.5^{2023}.6^{2024}$ pour en faire un carré parfait ?

Notre nombre est tout simplement $2^{8089}.3^{4045}.5^{2023}$.
Ce sera un carré si et seulement si tous les exposants sont pairs.
Il suffit donc de multiplier par 2.3.5 (ce qui fait 30).

◁54▷ Résolvez $16^{\frac{x-1}{x}}.5^x = 100$ d'inconnue réelle x.

Il suffit de passer au logarithme : $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right).\ln(16) + x.\ln(5) = \ln(100)$.

On en fait une équation du second degré : $x^2.\ln(5) + x.\ln\left(\frac{16}{100}\right) - \ln(16) = 0$.

On l'allège en $x^2.\ln(5) + 2.(\ln(5) - \ln(2)).x - 4.\ln(2) = 0$.

◁55▷ ♡ Soit $(E, +, .)$ un espace vectoriel de dimension finie. On suppose $E = Ker(f) + Ker(g)$ et $E = Im(f) + Im(g)$.
Montrez que l'on a alors $E = Ker(f) \oplus Ker(g)$ et $E = Im(f) \oplus Im(g)$.
Si vraiment vous avez besoin d'une indication : utilisez la formule du rang et la formule de Grassmann.

On écrit les formules de Grassmann : $\begin{array}{lclll} \dim(E) & = & \dim(Ker(f)) & + \dim(Ker(g)) & - \dim(Ker(f) \cap Ker(g)) \\ \dim(E) & = & \dim(Im(f)) & + \dim(Im(g)) & - \dim(Im(f) \cap Im(g)) \end{array}$

On additionne les deux, et on utilise $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(E)$:
$2.\dim(E) = \dim(E) + \dim(E) - \dim(Ker(f) \cap Ker(g)) - \dim(Im(f) \cap Im(g))$.
Il vient $\dim(Ker(f) \cap Ker(g)) + \dim(Im(f) \cap Im(g)) = 0$.
Comme une dimension est positive ou nulle, chacun est nulle.
Quand la dimension est nulle, l'espace est réduit à $\overrightarrow{0}$.
On a donc $Ker(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $Im(f) \cap Im(g) = \{\overrightarrow{0}\}$.
C'est ce qui permet de dire que les sommes sont directes.

◁56▷ Montrez qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $Ker(f) = Im(f)$ si et seulement si $\dim(F)$ est paire.
Pour un sens, on construira un endomorphisme sur la base $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p}, \overrightarrow{e_{p+1}}, \dots \overrightarrow{e_{2.p}})$ en donnant sa matrice avec bon nombre de 0.

Une partie de la réponse doit tomber en un mot : « formule du rang » (oui, trois).
$\dim(F) = \dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = 2.rg(f)$

Ensuite, si $(E, +, .)$ est de dimension $2.p$, on se donne déjà une base faite de $2.p$ vecteurs, et on construit un endomorphisme qui répond à la requête.
On va imposer $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$, ce qui revient à avoir les p premières colonnes nulles (et les suivantes indépendantes).
Ensuite, comme l'image doit être $Vect(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_p})$, les p dernières lignes sont nulles.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ la bloc en faut doit juste être inversible. Facile : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

◁57▷ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ (notée A) pour que le noyau de $X \longmapsto A.X$ soit $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Déterminez alors son image. Diagonalisez alors A.

◁58▷ ♡ Donnez le noyau de $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2.a+b-c \\ a-b+2.c \end{pmatrix}$ après avoir prouvé que cette application est linéaire.
Pouvez vous trouver g linéaire vérifiant $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^3}$?
Trouvez h linéaire vérifiant $f \circ h = Id_{\mathbb{R}^2}$.

Cette application est de la forme $U \longmapsto A.U$.
L'espace de départ est de dimension 3.
L'espace d'arrivée est de dimension 2.
On sait assurément que le noyau sera non trivial.
On résout et le noyau est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix})$
Tiens, et pour rédiger, on ne résout même pas. On propose ce vecteur, on vérifie

$$\begin{pmatrix} 2-5-(-3) \\ 1-(-5)+2.(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

et on dit que le noyau ne peut pas être de dimension plus grand car l'image contient $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui sont indépendants.
L'ensemble image sera de dimension 2 et sera $\mathbb{R}^2$ tout entier.

Si l'on avait $g \circ f = Id_3$, f hériterait de l'injectivité. C'est donc impossible.
Variante : $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$et $Ker(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul.
$Ker(g \circ f)$ sera donc non trivial.
En revanche, rien ne nous empêche de trouver h vérifiant $f \circ h = Id_2$.
Ce qu'il faut éviter : que h nous expédie sur des vecteurs de $Ker(f)$.
On peut proposer : $\boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$ car déjà le petit bloc $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

◁59▷ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ d'équation $x + y - 2.z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).
On note p le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D. Déterminez $p(\overrightarrow{i})$, $p(\overrightarrow{j})$ et $p(\overrightarrow{k})$.
On note p' le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D'. Déterminez $p'(\overrightarrow{i})$, $p'(\overrightarrow{j})$ et $p'(\overrightarrow{k})$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p \circ p'(\overrightarrow{u}) = p' \circ p(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

P est de dimension 2, D et D' sont de dimension 1.
Si on n'a pas $D \subset P$, on a automatiquement $D \cap P = \{\overrightarrow{0}\}$, puis $D + P = D \oplus P$ et même par formule de Grassman : $D \oplus P = \mathbb{R}^3$.
De même pour D'.

Or, justement, $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ n'est pas dans P (équation non vérifiée). le seul multiple de $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ dans P est le vecteur nul.
On a tout ce qui a été dit.

Sinon, on peut aussi prendre une base de P : $(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ par exemple et vérifier qu'on complète bien en base de $\mathbb{R}^3$:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\neq 0$	et	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\neq 0$

La famille $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ définit une base de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ que je vais appeler $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$,

avec $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ base de P et $(\overrightarrow{c})$ base de D.

Disposant de ces deux matrices inversibles, je les inverse :
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ a pour inverse $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
On interprète : $\overrightarrow{i} = 1.\overrightarrow{a} + 1.\overrightarrow{b} - 1.\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{j} = 0.\overrightarrow{a} + 1.\overrightarrow{b} - 1.\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{k} = -1.\overrightarrow{a} - 1.\overrightarrow{b} + 2.\overrightarrow{c}$.
On pouvait aussi combiner à la main, ou résoudre un système.

On met un niveau de parenthèses :

$\overrightarrow{i} =$	$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$	$-\overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{j} =$	$\overrightarrow{b}$	$-\overrightarrow{c}$
$\overrightarrow{k} =$	$-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$	$+2.\overrightarrow{c}$

et on projette sur P en effaçant D :

$p(\overrightarrow{i}) =$	$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$	$+\overrightarrow{0}$
$p(\overrightarrow{j}) =$	$\overrightarrow{b}$	$+\overrightarrow{0}$
$p(\overrightarrow{k}) =$	$-\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$	$+\overrightarrow{0}$

On revient sur la base canonique :

$p(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p(\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p(\overrightarrow{k}) = -\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On peut vérifier que ces vecteurs sont bien dans P.

Et on vérifie aussi que $\overrightarrow{i} - p(\overrightarrow{i})$ est bien colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de même pour les autres.

Je vous le fais de la même façon pour p' ?
Par forcément.
Cette fois, pour $\overrightarrow{i}$ on dit que $\overrightarrow{i}$ va s'écrire $p'(\overrightarrow{i}) + \lambda.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ avec $p(\overrightarrow{i})$ dans P et $\lambda.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ dans D'.

On écrit sur la base canonique $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ avec $x + y - 2.z = 0$ et λ réel.

On a un petit système rapide à résoudre.

On peut aussi directement trouver λ : $\begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & -\lambda \\ z & = & -\lambda \end{array}$ et la condition $x + y - 2.z = 0$ donne $\lambda = -1$.

On remplace : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et on projette $p(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On fait de même : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a cette fois

$p'(\overrightarrow{i}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p'(\overrightarrow{j}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	$p'(\overrightarrow{k}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Devez vous être surpris d'avoir $p'(\overrightarrow{j}) = -p'(\overrightarrow{k})$?
Non. On a donc $p'(\overrightarrow{j}) + p'(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$, soit encore $p'(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$.
Mais quoi de plus naturel ? Ce vecteur est dans D' et par p' on efface ce qui est dans D.

Sinon, regardez, on va multiplier des matrices.

Notons P' la matrice inversible $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle nous dit comment décomposer sur la base canonique $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un vecteur donné sur la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

Prenons la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Elle transforme $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ (elle efface ce qui est selon $\overrightarrow{c}$ et garde $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$).

Enfin, notons P'^{-1} l'inverse de P' : $P'^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Elle prend un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur la base canonique et le transforme en $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ sur la base adaptée $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$.

La matrice de la projection est le produit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (tiens, $P.D.P^{-1}$).

On effectue $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et vous reconnaissez les trois colonnes.

L'équation $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ admet des solutions évidentes.
Il y a bien sûr $\overrightarrow{0}$. Ses deux images sont nulles.

Mais il y a aussi tous les vecteurs de P.
En effet, si on prend $\overrightarrow{u}$ dans P, il se projette en lui même : $p(\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$ et $p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$.

On a bien pour eux $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$.

Mais sinon ? Sinon, ça ne me semble guère possible.
On part de $\overrightarrow{u}$ qu'on décompose en $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + \lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ avec $p(\overrightarrow{u})$ dans P et $\lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k})$ dans D
$\overrightarrow{u} = p'(\overrightarrow{u}) + \mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ avec $p'(\overrightarrow{u})$ dans P et $\mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ dans D'
Si on suppose $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$, on a en comparant $\lambda.(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}) = \mu.(\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$.
Et ceci n'est possible qu'avec $\lambda = \mu = 0$ (vecteurs non colinéaires, famille libre).
Il ne reste que $\overrightarrow{u} = p(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0} = p'(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0}$ et c'est un vecteur de P.

Peut on avoir $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$?
Oui, pour le vecteur nul.
Mais sinon ?

L'équation $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(p'(\overrightarrow{u}))$ a beaucoup de solutions.
Prenons un vecteur $\overrightarrow{u}$ et déterminons mentalement $p(\overrightarrow{u})$. C'est un vecteur de P, c'est déjà ce qu'on peut dire.
Mais alors, comment le projeter sur P par p' ? C'est fait, il est déjà dans P.
On a donc $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(\overrightarrow{u})$.

Reprenons le même raisonnement avec $p'(\overrightarrow{u})$ qui est dans P.
On le décompose en $p'(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u}) + \overrightarrow{0}$ avec $p'(\overrightarrow{u})$ dans P et $\overrightarrow{0}$ dans D.
On projette par p en $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(\overrightarrow{u})$.
Ayant à la fois $p'(p(\overrightarrow{u})) = p(\overrightarrow{u})$ et $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(\overrightarrow{u})$, notre équation $p(p'(\overrightarrow{u})) = p'(p(\overrightarrow{u}))$ se ramène à $p'(\overrightarrow{u}) = p(\overrightarrow{u})$.
On l'a vu, les solutions sont les vecteurs de P. Encore eux.

◃60▹ Montrez que $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid Tr(m) = 0\}$ (noté τ) est un espace vectoriel et donnez sa dimension.
On se donne une matrice A dans $M_4(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi = M \longmapsto A.M - M.A$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ d'image incluse dans τ.
En étudiant son noyau, montrez qu'on ne peut pas avoir $Im(\varphi) = \tau$.

C'est un sous-espace vectoriel de $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$, comme noyau d'une forme linéaire.
Naïvement, pour construire une matrice de trace nulle, on choisit 15 coefficients comme on veut.
Mais simplement, on part d'un espace de dimension 16 et l'espace image est de dimension 1 (c'est juste $\mathbb{R}$).
La dimension du noyau vaut 15.

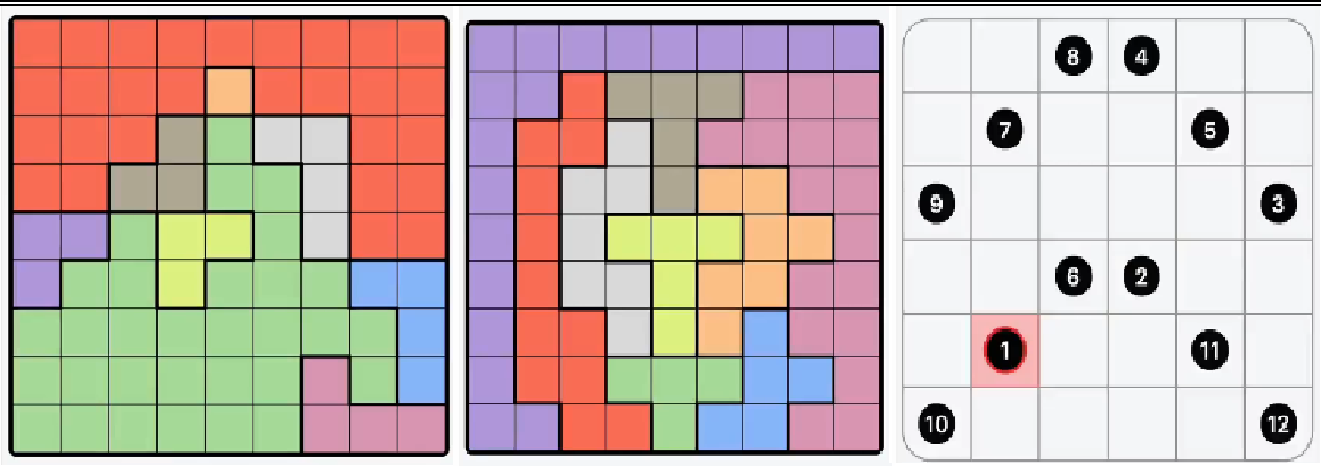
Pour toute matrice M, la matrice $\varphi(M)$ a une trace nulle à cause de la propriété usuelle de la trace ($Tr(A.B) = Tr(B.A)$).

L'espace vectoriel image est bien un sous-espace vectoriel de l'espace des matrices de trace nulle.

Mais on n'obtient pas toutes les matrices de trace nulle. En effet, $Im(\varphi)$ est au plus de dimension 14.r
Le noyau de φ est au moins de dimension 2. On y trouve I_4 et A (vérifiez : $\varphi(A) = A.A - A.A = 0_{4,4}$ et $\varphi(A) = A.I_4 - I_4.A = 0_{4,4}$).
L'ensemble image est au plus de dimension 14. Ce n'est pas τ.

Certes, il faudrait traiter à part le cas où A est un multiple de I_4.
Dans ce cas en effet, mon argument « A et I_4 sont dans le noyau , donc le noyau est au moins un plan » tombe en défaut.
Mais dans ce cas, le noyau est égal à tout $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ et φ est l'application nulle...

◁ 61 ▷



◁ 62 ▷ ♡ Déterminez le noayu de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix}$, puis son image.

◁ 63 ▷ ♡ Déterminez le noayu de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+2.y \\ y+2.z \\ x+2.t \\ x+y+z+t \end{pmatrix}$, puis son image. Au fait, cette application est bien linéaire ?

◁64▷ $\heartsuit^2$ ou $\clubsuit^2$ suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

1- Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ?

Pour les matrices de rang 1, je dis "*une colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(9 choix) puis un de ses trois multiples* $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, *donc* 27 *matrices*". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

2- Complétez alors

$rg(M) = 0$	$rg(M) = 1$	$\det(M) = 0$	$\det(M) = 1$	$\det(M) = 2$
			24	

3- Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

4- Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "*ce sont les matrices de la forme* $P.M.P^{-1}$, *or, il y a* 48 *matrices* P *possibles, d'où* 48 *matrices semblables à* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$". C'est faux, trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5- Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez l'idée : les quatre droites sont $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, ensuite...

7- Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de $14/81$.

8- Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

9- Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

10- Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.

Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

X^2	X^2+X	$X^2+2.X$	X^2+1	X^2+2	X^2+X+1	$X^2+2.X+1$	$X^2+2.X+2$	X^2+X+2

11- Calculez la probabilité de trouver une matrice permutables avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12- Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script `Python`. Complétez le :

```
def alea() :
....a = randrange(3)
....b =
....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B) :
....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
....b =
....return [[a,b],[c,d]]
compt = 0
for Na in range(810) :
....A = alea()
....for Nb in range(810) :
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.

Pour remplir une case : trois choix. Il y a donc neuf vecteurs : $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour remplir une matrice : quatre coefficients avec deux valeurs possibles : $3^4 = 81$.
Ou alors choisir deux vecteurs (éventuellement égaux) parmi les neuf vecteurs ci dessus (9×9 choix) et les coller côte à côte.
On peut donner la liste des matrices et mettre de côté la matrice nulle, de rang 0.

Il nous reste 80 matrices de rang 1 ou 2.
Lesquelles sont de rang 2 ? La première colonne est l'un des huit vecteurs non nuls : 8 choix.
Et pour la seconde, tout sauf les trois multiples du premier (y compris le multiple nul) : 6 choix.
Il y a donc 48 matrices de rang 2 (de déterminant donc nul). On obtient pour le rang 1 : 36 pour un total de 81.

rang 0	rang 1	rang 2
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
1	36	48

Pourquoi le raisonnement je dis "*une colonne* $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ *(9 choix) puis un de ses trois multiples* $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, *donc* 27 *matrices*". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre., il y a une faille. Si le premier vecteur choisi est nul, on aura beau compléter avec ses multiples, on trouvera toujours un vecteur nul, et une matrice de rang 0.

On passe au déterminant :

rang 0	rang 1	rang 2
1	36	48
déterminant nul	déterminant nul	déterminant 1 ou 2

Mais combien ont pour déterminant 1 et combien ont pour déterminant 2 ? Moitié moitié ? Pourquoi pas.
Chaque fois qu'on a une matrice de déterminant a, on a une matrice de déterminant $-a$ en permutant les deux colonnes.
Chaque fois qu'on a une matrice de déterminant 1, on a une matrice de déterminant 2 et vice versa.

C'est donc bien moitié moitié :

rang 0	rang 1	rang 2	
1	36	48	
déterminant nul	déterminant nul	déterminant 1	déterminant 2
37		24	24