

LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 26 mai

M.P.S.I.2



2024

2025

TD29

◁0▷ Dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on a trois sous-espaces vectoriels A, B et C vérifiant $A \subset B \cup C$ (oui, réunion, pas somme).
Montrez $A \subset B$ ou $A \subset C$.

◁1▷ Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une famille de n sous-espaces vectoriels stricts ($\forall i, F_i \neq E$). On va montrer que qu'aucune réunion finie $\bigcup_{i=1}^n F_i$ ne peut pas être un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$, par l'absurde. On suppose donc qu'il existe un entier n tel que $\bigcup_{i=1}^n F_i$ est soit espace vectoriel. Justifiez qu'il existe alors le plus petit entier n tel que $\bigcup_{i=1}^n F_i$ soit un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

Montrez qu'il existe $\vec{a}$ dans F_n qui n'est pas dans $\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$.

Montrez qu'il existe $\vec{b}$ dans $\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$ qui n'est pas dans F_n .

Montrez pour tout i de 1 à n que $\vec{a} + i \cdot \vec{b}$ n'est pas dans F_n .

Déduisez que pour tout i de 1 à n , $\vec{a} + i \cdot \vec{b}$ est dans $\bigcup_{k=1}^{n-1} F_k$.

Déduisez par principe des tiroirs qu'il existe deux entiers i et j distincts et un entier k_0 entre 1 et $n-1$ vérifiant $\vec{a} + i \cdot \vec{b} \in F_{k_0}$ et $\vec{a} + j \cdot \vec{b} \in F_{k_0}$.

Déduisez que $\vec{a}$ est dans F_{k_0} . Concluez.

◁2▷ ♥ On veut résoudre l'équation différentielle d'inconnue y fonction de t suivante : $y_t^{(3)} = y''_t + 14y'_t - 24y_t$ avec condition initiale $y_0 = y'_0 = y''_0 = 1$, sans utiliser le cours. Résolvez l'équation caractéristique (racines a, b et c).
Calculez $(X-a) \cdot (X-b)$, $(X-a) \cdot (X-c)$ et $(X-b) \cdot (X-c)$.
On pose alors $u = y'' - 5y' + 6y$, $v = y'' + 2y' - 8y$ et $w = y'' + y' - 12y$.
Montrez que u, v et w sont solutions d'une équation différentielle d'ordre 1.
Trouvez u, v, w et y .

◁3▷ Montrez que la droite passant par $O(0, 0)$ et $E(42, 151)$ a pour équation cartésienne $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = 0$.

Montrez que l'aire du triangle de sommets $O(0, 0)$, $A(a, c)$ et $B(b, d)$ est $\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Le point M a pour coordonnées (x, y) dans $\mathbb{Z}^2$; en calculant de deux façons l'aire du triangle (O, E, M) , montrez que la distance de M à la droite (OE) est le quotient $\frac{1}{\sqrt{42^2 + 151^2}} \cdot \begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix}$.

Montrez que si le point M n'est pas sur la droite (OE) alors sa distance est un multiple de $\frac{1}{\sqrt{42^2 + 151^2}}$.

Montrez pour tout λ : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a - \lambda \cdot c & b - \lambda \cdot d \\ c & d \end{vmatrix}$.

Complétez $\begin{vmatrix} x & 42 \\ y & 151 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 42 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ? & 25 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ?? & 17 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ??? & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ???? & 1 \\ ????? & 0 \end{vmatrix}$.

Trouvez les points de $\mathbb{Z}^2$ les plus proches de la droite d'équation $151x - 42y = 0$ sans être dessus.

◁4▷ ♥ L'ensemble des suites réelles a vérifiant $\forall n, a_{2n} = 0$ ou $a_{2n+1} = 0$ est-il un espace vectoriel ?
Montrez $\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n, u_{2n} = 0\} \oplus \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n, u_{2n} = u_{2n+1}\} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ après avoir montré que chaque ensemble est un espace vectoriel. Pourquoi ne pouvez-vous pas utiliser les théorèmes sur les dimensions ?

◁5▷ ♡ Donnez une base de l'ensemble E_6 des suites réelles périodiques de période 6 après avoir vérifié qu'il s'agit bien d'un espace vectoriel. Donnez une base de l'ensemble E_8 des suites de période 8. Qui est $E_6 \cap E_8$? Donnez en une base (a, b) .

Reprenez vos bases de E_6 et E_8 pour qu'elles contiennent a et b .

Montrez que la somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 est de période 24.

Montrez qu'il existe des suites de période 24 qui ne sont pas somme d'une suite de période 6 et d'une suite de période 8 (soit par un argument de dimension, soit en donnant un exemple).

◁6▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de A et son spectre¹.

Montrez que K, K' et N sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

$K_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 0_3\}$
 $K'_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A^2.U = 0_3\}$
 $N_A = \{U \in \mathbb{R}^3 \mid A.U = 9.U\}$. Donnez leurs dimensions.

Lesquelles de ces propositions sont vraies $\begin{matrix} \mathbb{R}^3 = K' \oplus N & \mathbb{R}^3 = K' + N \\ \mathbb{R}^3 = K \oplus N & \mathbb{R}^3 = K' + N \end{matrix}$?

Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A) = 0_{3,3}$.

Traitez les mêmes questions avec B à la place de A .

Placez les dans le tableau : $A, B, I_3, O_{3,3}$

	diagonalisable	non diagonalisable
invertible		
non invertible		

◁7▷ Le corps de base est l'ensemble des entiers de 0 à $p-1$ (p est un nombre premier au moins égal à 5, je sais). On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. L'application linéaire est $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Déterminez la dimension du noyau de f et de l'image de f (elle peut dépendre de p).
 Déterminez aussi la dimension du noyau et de l'image de $M \mapsto A.M$ de $M_{2,2}(\{0, \dots, p-1\})$ dans lui-même.

◁8▷ On se donne n réels a_1 à a_n . Pour tout k , on note $S_k = \sum_{i=0}^n (a_i)^k$ et σ_k la k^{ieme} fonction symétrique des racines

$$\sigma_k = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \cdot \dots \cdot a_{i_k}.$$

Exprimez à l'aide des S_k

$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$		$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 5.\sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$
---	--	---	--	--	--	--

Exprimez à l'aide des σ_k :

$\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 & 0 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 & 4 \\ S_5 & S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$
--	---	--	---

Donnez (même sans preuve) la formule générale, mais pas avec des points de suspension, mais une formule pour le terme général de la matrice dont on calcule le déterminant.

◁9▷ Pour un contre-exemple à la comparaison de $(A+B) \cap (B+C) \cap (C+A)$ et $(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A)$, Louis propose de prendre $A = S_3(\mathbb{R})$, $B = A_3(\mathbb{R})$ et $C = T_3(\mathbb{R})$ (matrices symétriques, antisymétriques et matrices de trace nulle toutes en taille 3). Déterminez les dimensions des sous-espaces vectoriels ci dessus.

◁10▷ On définit $f = X \mapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & & 1 \\ & -3 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P .

1. $\chi_A(X) = \det(A - X.I_3)$ est le polynôme caractéristique ; ses racines sont le spectre

Ajustez les coefficients de M pour avoir $\text{Im}(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(f)$. A-t-on $\text{Im}(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$ (rappelle : $\text{Ker}(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).



◁11▷ Déterminez le noyau de $f \mapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui-même.
Déterminez le noyau de $P \mapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même.

◁12▷ Quelle est la dimension de l'ensemble des fonctions polynômes lipschitziennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

◁13▷ Combien l'équation $\log_7(x) + \log_8(x) = 1$ a-t-elle de solutions? Calculez leur somme.

◁14▷ Résolvez : $2 - \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{x}}} = 5$ d'inconnue complexe x .

◁15▷ On donne comme hypothèse : $\frac{u_{n+2}}{u_n} \mapsto_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4}$. Un élève prétend en déduire : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \mapsto_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Prouvez lui qu'il a tort.

◁16▷ Un élève prétend qu'on a
 $\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - (\dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(G \cap H)) + \dim(F \cap G \cap H)$
Montrez par un simple contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$ qu'il a tort (et pas seulement parce qu'il est élève).

◁17▷ Rappel des règles.

Mettre dans la grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

		7	=	24				=	20
			=	11				=	10
4			=	10	et		1	=	15
=	=	=				=	=	=	
15	20	10				22	.7		16

◁18▷ ♡ Montrez $\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{e}$ en utilisant le théorème de Cesàro sur $\frac{n^n}{n!}$.

◁19▷ ♡ Montrez qu'il existe un isomorphisme entre $(S_2(\mathbb{C}), +, \cdot)$ et $(S_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.
Isomorphisme = application linéaire, bijective.

◁20▷ p et q sont deux réels plus grands que 1 vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. y est un réel strictement positif fixé. Étudiez les variations de $x \mapsto \frac{x}{p} + \frac{y}{q} - x^{\frac{1}{p}} \cdot y^{\frac{1}{q}}$ sur $]0, +\infty[$. Déduisez : $x^{1/p} \cdot y^{1/q} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q}$.

On se donne f et g continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on pose $A = \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \cdot dt}$ et $B = \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q \cdot dt}$ (supposés non nuls). Montrez pour tout x de $[a, b]$: $\frac{f(x) \cdot g(x)}{A \cdot B} \leq \frac{f(x)^p}{p \cdot A^p} + \frac{g(x)^q}{q \cdot B^q}$. Déduisez : $\int_a^b |f(t) \cdot g(t)| \cdot dt \leq \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p \cdot dt} \cdot \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q \cdot dt}$. Que reconnaissez vous pour $p = 2$?

◁21▷ Quelle est la dimension de $\text{Vect}(\cos, \sin, \exp, \exp^2, \cos^2, \sin^2)$?
Quelle est la dimension de $\text{Vect}(\cos(x), \sin(x), \exp(x), \cos(2x), \sin(2x))$?

◁22▷ Soit ϕ un opérateur linéaire sur $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dans lui même qui vérifie $\phi(p) = (x \mapsto p(x+1))$ si p est paire et $\phi(i) = (x \mapsto i(x-1))$ si i impaire.
Déterminez $\phi(\exp)$.
On doit déterminer $\text{Ker}(\phi)$.
Un élève dit : je cherche x vérifiant $\phi(f)(x) = 0$. Pourquoi est il totalement crétin ?
Un élève indique : si f est paire, ceci revient à $\forall x, f(x+1) = 0$, et donc $\forall t, f(t) = 0$; il n'y a que la fonction nulle. Si f est impaire, de la même façon : $f(x-1) = 0$ pour tout x , et f est nulle. Dans tous les cas, f est nulle. Où est l'erreur dans son « raisonnement » ? Rectifiez.

◁23▷ ♥ Une application linéaire f de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ vérifie $f(\vec{i} + \vec{j}) = X^2 + X + 1, f(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = X^2 - X$ et $f(\vec{j} + \vec{k}) = X^2 - X$.
Calculez $f(\vec{i}), f(\vec{j})$ et $f(\vec{k})$. Déterminez le noyau de f .

		génératrice	base
E est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 nuls en 1. Complétez le tableau. Pour celles qui sont des bases, regroupez les en deux groupes en fonction de leur orientation relative.	$(1, X, X^2, X^3)$		
	$((X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$		
	$(X-1), (X-1) \cdot (X-2), (X-1) \cdot (X-2) \cdot (X-3)$		
	$(X-1), (X-1) \cdot (X-2), (X-1) \cdot (X-2)^2$		
	$(X-1, (X-1)^2, (X-1) \cdot (X-2), (X-1) \cdot (X-3))$		
	$((X-1)^2 \cdot (X-2), (X-1) \cdot (X-2)^2, X-1)$		
	$((X-1), (X-1) \cdot X, (X-1) \cdot X^2)$		

◁25▷ L'opérateur $^\omega$ est défini sur l'espace vectoriel des applications C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : « il est linéaire », $p^\omega = p'$ si p est paire et $i^\omega = -i'$ si i est impaire. Calculez $\exp^\omega$. Calculez $(x \mapsto \text{Arctan}(x+1))^\omega$. Qu'est ce qui est vrai : $\forall f, (f^\omega)^\omega = -f''$ | $\forall f, (f^\omega)^\omega = f''$ | ni l'un ni l'autre On pose $s_a = x \mapsto \sin(x+a)$ et $c_a = x \mapsto \cos(x+a)$. Exprimez $(c_a)^\omega$ et $(s_a)^\omega$. Pourquoi la formule $(\cos(x+a))^\omega$ est elle idiote ?
On demande de résoudre $f^\omega = f$ d'inconnue f . L'élève cherche : « il n'y a pas de solution f paire à part la fonction nulle, il n'y a pas de solution impaire, à part la fonction nulle, donc la seule solution est la fonction nulle ». Montrez qu'il a tort.

Rappel : transformation linéaire : $\phi(\lambda \cdot u + \mu \cdot v) = \lambda \cdot \phi(u) + \mu \cdot \phi(v)$, par exemple $(\lambda \cdot u + \mu \cdot v)' = \lambda \cdot u' + \mu \cdot v'$.

◁26▷ a - Vrai ou faux : si f est dérivable, alors p et i sont dérivables.
b - Vrai ou faux : si f est périodique, alors p et i sont périodiques.
c - Vrai ou faux : si f est injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors p et i le sont aussi.
d - Vrai ou faux : si f est monotone, alors p ou i est monotone.
Ici, pour f donnée, p et i sont les fonctions paire et impaire de somme f .

◁27▷ ♥ Soit f linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f(\vec{u}) = 3 \cdot \vec{u}$ pour tout $\vec{u}$ du plan de vecteur normal 2. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et $f(\vec{i}) = \vec{i} - \vec{j}$. Calculez l'image de $x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

◁28▷ Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, d'image $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ et de trace 5.

Attention, on travaille avec $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}$ égal à l'ensemble des entiers de 0 à 10 pour l'addition et la multiplication (et la division) modulo 11.

Combien existe-t-il d'endomorphismes de $(E, +, \cdot)$ d'image $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$ et de trace 5.

◀29▶ On pose $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$, $D = \text{Vect}(\vec{i} + \alpha \cdot \vec{j} + 2 \cdot \vec{k})$. Résolvez $D \oplus P = \mathbb{R}^3$ d'inconnue réelle α .

◀30▶ A et B sont deux sous espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$ (espace de dimension finie) vérifiant $A + B = E$.

Montrez qu'il existe $\begin{matrix} C & \text{sous espace vectoriel de } A & \text{vérifiant} & C \oplus B = E \\ D & \text{sous espace vectoriel de } D & \text{vérifiant} & A \oplus D = E \end{matrix}$.

Que pouvez vous dire si $C + D = E$?

◀31▶ Vrai/Faux :

a	l'intersection de deux sous-espaces vectoriels peut être vide
b	dans un espace vectoriel de dimension 3 la somme de deux plans ne peut jamais être directe
c	dans un espace de dimension 3 la somme d'une droite et d'un plan est toujours directe
d	un ensemble stable par addition est nécessairement un sous-espace vectoriel
e	$\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension 2
f	l'ensemble des suites réelles constantes ou périodiques de période 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 3
g	l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\{0, 1\}$ est un espace vectoriel
h	l'ensemble des fonctions de $\{0, 1\}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2
i	les polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 3 est un $\mathbb{R}$ espace de dimension 8

◀32▶ Les F_k et les G_k sont des sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$. On suppose $F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 = E$ et $G_1 \oplus G_2 \oplus G_3 = E$ et $F_i \subset G_i$ pour tout i . Montrez alors $F_i = G_i$ pour tout i .

◀33▶ Pour quels couples (n, p) existe-t-il un isomorphisme entre $(S_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et $(A_p(\mathbb{R}), +, \cdot)$? (matrices symétriques / antisymétriques)

◀34▶ Montrez que $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P'(1)$ et $P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ (notées φ , ϕ et ψ).

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (1, 0, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 1, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 1)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 0)$.

Montrez que (φ, ϕ, ψ) est libre.

◀35▶ ♡ Le commutant d'une matrice A carrée de taille n est $\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ (noté $C(A)$). Montrez que c'est toujours un sous-espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Montrez que sa dimension peut valoir n^2 , mais jamais 1 (sauf pour n égal à 1, oui, je suis con !).

Montrez que si A est semblable à B , alors $C(A)$ a la même dimension que $C(B)$ (passez d'une base de l'un à une base de l'autre et vice versa).

Déterminez la dimension de $C(D)$ quand D est une matrice diagonale dont les termes diagonaux sont tous distincts.

Comparez $C(A)$ et $C(A + I_n)$.

Comparez $C(A)$ et $C(\lambda.A)$.

Montrez $C(A) \subset C(A^2)$. Montrez que pour $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ il n'y a pas égalité.

Montrez : $C(A) \cap C(B) \subset C(A + B)$. Montrez qu'il n'y a pas forcément égalité.

Déterminez la dimension de $C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, $C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\right)$ et $C\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Quelles sont les valeurs que peut prendre $\dim(C(A))$ quand A est une matrice de taille 2.

Même question en taille 3.

◀36▶ ♡ Existe-t-il f linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ dans lui même vérifiant $f(\vec{u}) = 3 \cdot \vec{u}$ pour tout $\vec{u}$ de $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} + 2 \cdot \vec{j} - \vec{k})$ et $f(\vec{u}) = -2 \cdot \vec{u}$ pour tout $\vec{u}$ du plan d'équation cartésienne $x + y - 3z = 0$?

Raisonnez sur les dimensions de ces espaces sur lesquels on a imposé des choses.

◁37▷ ♡ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 6x & -3y \\ 4x & -y \end{pmatrix}$. Déterminez le rang de $f - 2.Id$ et de $f - 3.Id$.

Montrez $\text{Ker}(f - 2.Id) \cap \text{Ker}(f - 3.Id) = \{ \vec{0} \}$.

Déduisez $\text{Ker}(f - 2.Id) \oplus \text{Ker}(f - 3.Id) = \mathbb{R}^2$.

Montrez : $\text{Im}(f - 2.Id) = \text{Ker}(f - 3.Id)$ et $\text{Im}(f - 3.Id) = \text{Ker}(f - 2.Id)$.

Montrez pour tout $\vec{a}$ de $\mathbb{R}^2$: $\vec{a} = (f(\vec{a}) - 2.\vec{a}) - (f(\vec{a}) - 3.\vec{a})$.

Déduisez $f^n(\vec{a}) = 3^n.(f(\vec{a}) - 2.\vec{a}) - 2^n.(f(\vec{a}) - 3.\vec{a})$.

Déduisez $M^n = 3^n.(M - 2.I_2) - 2^n.(M - 3.I_2)$ avec $M = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Vocabulaire : le rang d'une application linéaire, c'est la dimension de son ensemble image. Le noyau d'une application linéaire, c'est l'ensemble des vecteurs dont l'image est nulle.

◁38▷ Montrez que deux matrices semblables (c'est $\exists P, A = P.B.P^{-1}$) ont le même polynôme caractéristique.

Montrez que si A et B sont deux matrices carrées dont l'une est inversible, alors $A.B$ et $B.A$ ont le même polynôme caractéristique.

(le polynôme caractéristique de A c'est $\det(A - X.I_n)$).

◁39▷ F, G et H sont trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $(E, +, .)$.

Montrez par des contre-exemples que les formules suivantes n'ont aucun raison d'être vraies :

$$F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$$

$$(F + G) \cap H = (F \cap H) + (G \cap H)$$

$$\dim(F + G + H) = \dim(F) + \dim(G) + \dim(H) - \dim(F \cap G) - \dim(F \cap H) - \dim(G \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$$

◁40▷ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ et on définit

$$E = \{(x, y, z, t) \mid x + 2y + z + t = 0\} \text{ et } F = \{(x, y, z, t) \mid 2x - y + z + 3t = 0\}.$$

Montrez que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^4, +, .)$, donnez une base et leur dimension.

Donnez au moins un sous-espace vectoriel G vérifiant $E \oplus G = F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

◁41▷ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ et on définit $E = \{(x, y, z) \mid x + 2y + z = 0\}$ et $F = \text{Vect}((1, 2, 1))$.

Montrez qu'il n'existe aucun un sous-espace vectoriel G vérifiant $E \oplus G = F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

◁42▷ Pour trois sous-espaces A, B et C de l'espace vectoriel $(E, +, .)$, montrez :

$$(A \cap B) + (B \cap C) + (C \cap A) \subset (A + B) \cap (B + C) \cap (C + A).$$

◁43▷ Calculez la trace et le déterminant en fonction de a de $P(X) \mapsto P(X + a)$ comme endomorphisme de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$.

◁44▷ ♡ Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 ; montrez que $(P(X), P(X + 1), P(X + 2), P(X + 3), P(X + 4))$ est liée. Donnez un exemple où $(P(X), P(X + 1), P(X + 2), P(X + 3))$ est libre.

Peut-elle être de sens opposé à celui de la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$?

◁45▷ Diagonalisez $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mais surtout pas en calculant $\det(A - X.I_n)$,

on n'est pas dépêchés, mais en discutant la résolution de $A.U = \lambda.U$. Vérifiez que vous pouvez prendre des vecteurs propres deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel.

◁46▷ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que l'ensemble des matrices M vérifiant $M.U = 0$ (vecteur nul) est un espace vectoriel. Montrez que $\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \right)$ en est une base. Pouvez-vous donner une base dans laquelle une

des matrices a une trace nulle ? Pouvez-vous donner une base dans laquelle toutes les matrices ont une trace nulle ?

◁47▷ On définit, dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ le sous-espace vectoriel E de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. On note K l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $E \subset \text{Ker}(f)$. Montrez que K est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$. Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6 (écrivez matriciellement et faites un choix évidemment).

On note M l'ensemble des applications linéaires f vérifiant $Im(f) \subset E$. Montrez que M est un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, \cdot)$. Montrez que sa dimension vaut 3 ou 6.

Donnez la dimension de $M \cap K$. A-t-on $L(\mathbb{R}^3) = M + K$?

48 ▶ Construisez trois sous-espaces vectoriels A, B et C de $M_3(\mathbb{R})$ vérifiant

espace	A	B	C	$A \cap B$	$(A + B) \cap C$
dimension	4	3	5	1	3

49 ▶ ♥ On travaille sur $M_3(\mathbb{R})$.

Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(M) = 2.M$ si M est antisymétrique et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle.

Existe-t-il un opérateur linéaire T qui vérifie $T(M) = M$ si M est symétrique, $T(2.I_3) = 0_{3,3}$ et $T(M) = 3.M$ si la trace de M est nulle ?

50 ▶

Lycée Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

Villes

Le but de cette épreuve (filière PSI, mais grand concours) est de décider s'il existe, entre deux villes données, un chemin passant par exactement k villes intermédiaires distinctes, dans un plan contenant au total n villes, reliées par m routes. L'algorithme d'exploration naturel s'exécute en un temps $O(n^k.m)$. L'objectif est d'obtenir un algorithme qui s'exécute en un temps $O(f(k).n.(n+m))$, qui croît polynomialement en la taille $n+m$ du problème, quelle que soit la valeur de k demandée.

La complexité ou temps d'exécution d'un programme Π (fonction ou procédure²) est le nombre d'opérations élémentaires (additions, multiplications, affectations, tests...) nécessaires à l'exécution de Π . Lorsque cette complexité dépend de plusieurs paramètres n, m et k , on dira que Π a une complexité $O(\phi(n, m, k))$ lorsqu'il existe quatre constantes absolues A, n_0, m_0 et k_0 telles que la complexité de Π soit inférieure ou égale $A.\phi(n, m, k)$ pour tout $n \geq n_0, m \geq m_0$ et $k \geq k_0$. Lorsqu'il est demandé de préciser la complexité d'un programme, le candidat devra la justifier si elle ne se traduit pas directement de la lecture du code.

On suppose qu'on dispose d'une fonction **CreerTableau**(n) qui crée un tableau de taille n , indexé de 0 à $n-1$ (les valeurs contenues dans le tableau initialement sont arbitraires³). L'instruction **b=CreerTableau**(n) créera/affectera un tableau de taille n dans la variable b . On pourra créer des tableaux de tableaux : exemple **a = CreerTableau**(p)

```
for i in range(p) :
    ...a[i] = CreerTableau(q)
```

On accède par **a[i][j]** à la case d'indice j du tableau d'indice i dans le tableau ainsi créé.

On souhaite stocker en mémoire une liste non ordonnées d'au plus n entiers sans redondance (aucun entier n'apparaît plusieurs fois). Nous nous proposons d'utiliser un tableau **liste** de longueur $n+1$ tel que **liste[0]** contient le nombre d'éléments de la liste (comme en Pascal ?)

liste[i] contient le $i^{\text{ème}}$ élément de la liste (non triée) pour $1 \leq i \leq \text{liste}[0]$ ⁴. Il y a des exemples plus loin, profitez.

Sinon, vous l'aurez compris, nulle part vous n'utiliserez **append**...

~0) Écrivez une fonction **CreerListeVide**(n) qui crée, initialise et renvoie un tableau de longueur $n+1$ correspondant à la liste « vide » ayant une capacité totale de n éléments.

~1) Écrivez une fonction **EstDansListe**(**liste**, x) qui renvoie **True** si l'élément x apparaît dans la liste représentée par le tableau **liste**, et renvoie **False** sinon.

■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction du nombre maximal n d'éléments de la liste.

~2) Écrivez une procédure **AjouteDansListe**(**liste**, x) qui modifie de façon appropriée le tableau **liste** pour y ajouter x si x n'appartient pas déjà à la liste, et ne fait rien sinon.

■ Quel est le comportement de votre procédure si la liste est pleine initialement (on ne demandera pas de traiter ce cas).

■ Quelle est la complexité en temps de votre procédure dans le pire cas en fonction du nombre maximal d'éléments de la liste ?

Un plan P est défini par un ensemble de n villes numérotées de 1 à n et un ensemble de m routes (toutes à double sens) reliant chacune deux villes ensemble. On dira que deux villes x et y sont voisines lorsqu'elles sont reliées par une route, ce que l'on notera $x \sim y$. On appellera

2. les fonctions renvoient une valeur (entier, réel, tableau, booléen...) ; les procédures modifient des variables globales, mais ne renvoient rien

3. avec Python, des **None**, qui n'occupent pas de place en mémoire, dans les notations du devoir, de simples $*$

4. ici pas de décalage pythonien, la case d'indice 0 est prise

chemin de longueur k toute suite de villes $v_1, v_2 \dots v_k$ telle que $v_1 \sim v_2 \sim \dots \sim v_k$. On représentera les villes d'un plan par des ronds contenant leur numéro et les routes par des traits reliant les villes voisines⁵.

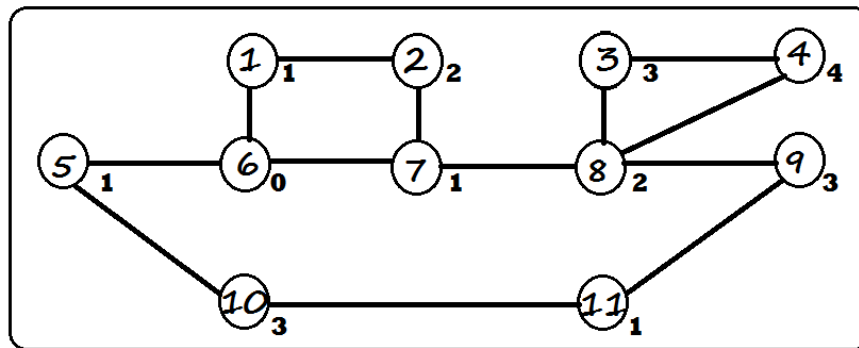
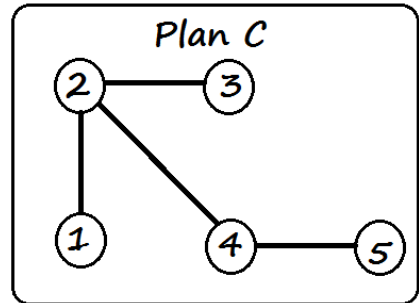
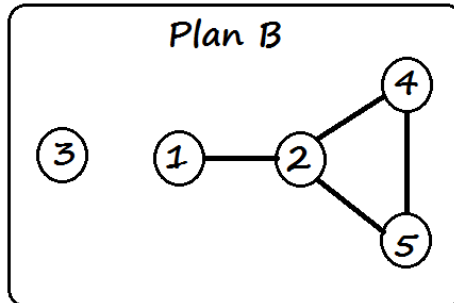
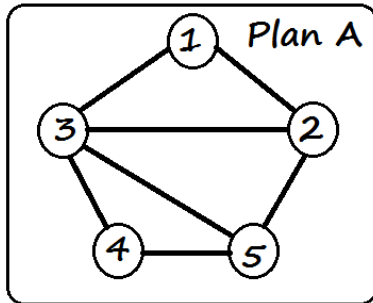
Un plan P est donc un tableau **plan** où

- **plan**[0] contient un tableau à deux éléments : **plan**[0][0] = n (contient le nombre de villes du plan)
plan[0][1] = m (contient le nombre de routes du plan)
- pour chaque ville x de $\{1, 2, \dots, n\}$, **plan**[x] contient un tableau à n éléments représentant la liste à au plus $n - 1$ éléments des villes voisines de la ville x (ordre de lecture sans importance).

L'un des trois plans du dessin est représenté par le tableau ci contre

plan=[	[5,	4],
	[1,	2, *, *, *
	[3,	4, 1, 5, *
	[0,	*, *, *, *
	[2,	2, 5, *, *
	[2,	4, 2, *, *

~3) Donnez le tableau des deux autres.



Graphe coloré.

A côté de chaque ville est indiquée sa couleur. On cherche donc ici un chemin de la ville à la ville .

~4) Écrivez une fonction **CreePlanSansRoute(n)** qui crée, remplit et renvoie le tableau de tableaux correspondant au plan à n villes n'ayant aucune route.

~5) Écrivez une fonction **EstVoisine(plan, x, y)** qui renvoie **True** si les villes x et y sont voisines dans le plan codé par **plan**, et **False** sinon.

Vous avez évidemment le droit d'utiliser les procédures déjà créées.

~6) Écrivez une procédure **Ajoute(plan, x, y)** qui modifie le tableau **plan** pour ajouter une route entre les deux villes x et y (supposées distinctes, oui) si elle n'était pas déjà présente, et ne fait rien sinon.

■ Y a-t-il un risque de dépassement de la capacité des listes ?

~7) Écrivez une procédure **AfficheToutesLesRoutes(plan)** qui affiche la liste des routes codées par le tableau **plan**, chaque route ne devant être mentionnée qu'une fois. Par exemple, (1-2), (2-4), (2-5), (4-5) pour le plan indiqué et retenu plus haut.

■ Quelle est la complexité en temps de votre procédure dans le pire des cas ?

Recherche d'un chemin arc en ciel.

Étant données deux villes distinctes s et t , nous rechercherons un chemin de s à t , passant par exactement k villes toutes distinctes. L'objectif de cette partie est de la suivante est de construire une fonction qui va détecter en un temps linéaire en $n.(n+m)$ l'existence d'un tel chemin avec une probabilité indépendante de la taille $n + m$ du plan.

5. comme si vous aviez voulu faire le contraire !

Le principe de l'algorithme est d'attribuer à chaque ville de $\{1, 2, \dots, n\} - \{s, t\}$ une couleur aléatoire codée par un entier aléatoire uniforme $\text{couleur}[i] \in \{1, \dots, k\}$ stocké dans un tableau **couleur** de taille $n + 1$ (la case 0 n'est pas utilisée). Les villes s et t reçoivent respectivement les couleurs spéciales 0 et $k + 1$. L'objectif de cette partie est d'écrire une procédure qui détermine s'il existe un chemin de longueur $k + 2$ allant de s à t dont la $j^{\text{ème}}$ ville intermédiaire a reçu la couleur j . dans l'exemple de la figure suivante, le chemin $6 \sim 7 \sim 8 \sim 3 \sim 4$ de longueur $5 = k + 2$ qui relie $s = 6$ à $t = 4$ vérifie cette propriété pour les couleurs indiquées. On suppose l'existence d'une fonction **EntierAleatoire(k)** qui renvoie un entier aléatoire uniforme entre 1 et k . Bref $P(\text{EntierAleatoire}(k)=c)=1/k$ pour tout c de 1 à k .

~8) Écrivez une procédure **ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t)** qui prend en argument un **plan** de n villes, un tableau **couleur** de taille $n+1$, un entier k , et deux villes **s** et **t** de $\{1, 2, \dots, n\}$ et remplit le tableau **couleur** avec une couleur aléatoire uniforme dans $\{1, \dots, k\}$ choisie indépendamment pour chaque ville de $\{1, \dots, n\} - \{s, t\}$ et les couleurs 0 et $k + 1$ pour s et t respectivement.

Nous cherchons maintenant à écrire une fonction qui calcule l'ensemble des villes de couleur c voisines d'un ensemble de villes donné. dans l'exemple de la figure 2, l'ensemble des villes de couleur 2 voisines des villes $\{1, 5, 7\}$ est $\{2, 8\}$.

~9) Écrivez une fonction **VoisinesDeCouleur(plan, couleur, i, c)** qui crée et renvoie le tableau codant la liste sans redondance des villes de couleur c voisines de la ville i dans le tableau **plan** colorié par le tableau **couleur**.

~10) Écrivez une fonction **VoisinesDeLaListeDeCouleur(plan, couleur, liste, c)** qui crée et renvoie un tableau codant la liste sans redondance des villes de couleur c voisines d'une des villes présentes dans la liste sans redondances **liste** dans le plan **plan** colorié par la table **couleur**.

■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction de n et m ?

~11) Écrivez une fonction **ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t)** qui renvoie **True** si il existe dans le plan **plan** un chemin $s \sim v_1 \sim \dots \sim v_k \sim t$ tel que $\text{couleur}[v_j]=j$ pour tout j de $\{1, \dots, k\}$ et renvoie **False** sinon.

■ Quelle est la complexité de votre fonction dans le pire cas en fonction de k, n et m ?

Si les couleurs des villes sont choisies aléatoirement et uniformément dans $\{1, \dots, k\}$, la probabilité que j soit la couleur de la $j^{\text{ème}}$ ville d'une suite fixée de k villes vaut $1/k$, indépendamment pour tout j . Ainsi, étant données deux villes distinctes s et t , s'il existe dans le plan **plan** un chemin de s à t passant par exactement k villes intermédiaires toutes distinctes et si le coloriage couleur est choisi aléatoirement conformément à la procédure **ColoriageAleatoire(plan, couleur, k, s, t)**, la procédure **ExisteCheminArcEnCiel(plan, couleur, k, s, t)** répond **True** avec probabilité au moins k^{-k} ; et répond toujours **False** sinon. Ainsi, si un tel chemin existe, la probabilité qu'une parmi k^k exécutions indépendantes de **ExisteCheminArcEnCiel** réponde **True** est supérieure ou égale à $1 - (1 - k^{-k})^{k^k} = 1 - \exp(k^k \cdot \ln(1 - k^{-k})) \geq 1 - \frac{1}{e} > 0$ (admis).

~12) Écrivez une fonction **ExisteCheminSimple(plan, k, s, t)** qui renvoie **True** avec probabilité au moins $1 - \frac{1}{e}$ s'il existe un chemin de s à t passant par exactement k villes intermédiaires toutes distinctes dans le plan **plan** et renvoie toujours **False** sinon.

■ Quelle est sa complexité en fonction de k, n et m dans le pire des cas ? Exprimez la sous la forme $O(f(k).g(n, m))$ pour f et g bien choisies.

~13) Expliquez comment modifier votre programme pour renvoyer le chemin s'il est détecté avec succès.

◀51▶ ♡ Prolongez par continuité en 0 et en 1 $x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.

♡ En considérant comme valide le théorème de Fubini $\left(\int_{x=a}^{x=b} \left(\int_{y=c}^{y=d} f(x, y).dy\right).dx = \int_{y=c}^{y=d} \left(\int_{x=a}^{x=b} f(x, y).dx\right).dy\right)$,

montrez : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$ (on pourra faire intervenir l'application $(x, y) \mapsto x^y$ sur $[0, 1]$).

Calculez pour a et b positifs $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln(x)}.dx$ après avoir prolongée en 0 et en 1 l'application sous le signe somme.

◀52▶

Ce sujet, inspiré d'éléments de Mines-Ponts MP 1995, Centrale TSI 2001, Polytechnique MP 1994 traite des déterminant de Hankel.

Si c est une suite complexe, on définit pour tout n la matrice $H_n = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n+1} \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & c_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{2n} \end{pmatrix}$ (matrice de Hankel) et le déterminant $\Delta_n = \det(H_n)$.

Premiers exemples

I~0) Écrivez un script Python qui prend en entrée un entier n , une liste C (qu'on supposera au moins de longueur $2.n + 1$) et retourne la matrice H_n (liste de listes).

I~1) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est une suite géométrique (premier terme c_0 et raison r). Calculez aussi $Tr(H_n)$ pour tout n .

I~2) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est la suite de Fibonacci (premier terme $c_0 = 0, c_1 = 1$ et $\forall n, c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$).

Montrez aussi $Tr(H_n) = \sum_{k=0}^{2.n-1} F_k$ pour tout n . Écrivez (F_n) comme combinaison de deux suites géométriques. Trouvez les cinq réels a, b, c, r et r' vérifiant $\forall n, Tr(H_n) = a.(r)^n + b.(r')^n + c$.

I~3) Explicitez la suite (Δ_n) si (c_n) est la suite (n^2) (trouvez la combinaison sur les quatre premières colonnes). Calculez aussi $Tr(H_n)$ pour tout n .

I~4) Pour cette question, (c_n) est la suite $(n!)$. Montrez $\Delta_n = \left(\prod_{k=0}^n k!\right)^2 \times \det(B_n) = \left(\prod_{k=0}^n k!\right)^2$ où B_n est la matrice de taille $n + 1$ de terme général $\binom{i+k}{k}$ (indexation pythonienne).

Cas de nullité

II~0) Montrez que la suite (c_n) est nulle si et seulement si la suite (Δ_n) est nulle.

II~1) Une suite (c_n) est dite pseudo-périodique d'ordre p (p entier strictement positif) si il existe une liste de coefficients $[\lambda_1, \dots, \lambda_p]$ vérifiant $\forall n \geq p, c_n = \sum_{j=1}^p \lambda_j.c_{n-j}$. Montrez que si la suite (c_n) est pseudo-périodique, alors la suite (Δ_n) est nulle à partir du rang p .

Réciproque(exemple)

III~0) On commence par un exemple. On se donne une suite (c_n) et on suppose $H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 22 \\ 2 & 9 & 22 & 77 \\ 9 & 22 & 77 & 210 \end{pmatrix}$. Calculez

$H_3 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Calculez Δ_n pour n de 0 à 3.

III~1) Trouvez λ_1 à λ_3 vérifiant $c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$ pour tout n de 3 à 6 (inclus).

III~2) On suppose aussi $\Delta_4 = 0$. En calculant $H_4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis son déterminant,

montrez $c_7 = \sum_{j=1}^3 \lambda_j.c_{7-j}$

III~3) On suppose pour tout n plus grand que 4 : $\Delta_n = 0$. Montrez alors par récurrence sur n

$$c_n = \lambda_1.c_{n-1} + \lambda_2.c_{n-2} + \lambda_3.c_{n-3}$$

pour tout n plus grand que 4.

Réciproque(généralisation)

IV~0) On se donne une suite (c_n) telle que la suite (Δ_n) soit nulle à partir d'un certain rang q strictement positif. On suppose donc $\Delta_{q-1} \neq 0$ et $\Delta_n = 0$ pour tout n supérieur ou égal à q .

Déduisez qu'il existe une infinité de vecteurs de taille $q + 1$ non nuls vérifiant $M_q.V_q = 0_{q+1}$.

IV~1) Montrez qu'il existe un vecteur U_q de taille $q + 1$, de dernière composante 1 vérifiant $M_q \cdot U_q = 0_{q+1}$.

IV~2) Déduez qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ vérifiant $\forall n \in \{q, \dots, 2q\}, u_n = \sum_{j=1}^q \lambda_j \cdot u_{n-j}$.

IV~3) Montrez que cette formule est alors valable pour tout n de $\mathbb{N}$ au delà de $2q - 1$.

Retour sur l'exemple

V~0) Pour ces questions, (c_n) est définie par $c_n = 2c_{n-1} + 5c_{n-2} - 6c_{n-3}$ pour tout n supérieur ou égal à 3. Montrez : $c_n \leq \mu \cdot 4^n$ pour tout n (avec $\mu = \max(|c_0|, |c_1/4|, |c_2/16|)$).

V~1) On pose $S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n \cdot x^n$ pour tout N . Montrez :

$$S_N(x) - c_0 - c_1 \cdot x - c_2 \cdot x^2 = (2x + 5x^2 - 6x^3) \cdot S_N(x) + (-2c_0 \cdot x - 2c_1 \cdot x^2 - 5c_2 \cdot x^3) + \\ + (-2c_N - 5c_{N-1} + 6c_{N-2}) \cdot x^{N+1} + (-5c_N + 6c_{N-1}) \cdot x^{N+2} + 6c_N \cdot x^{N+3}$$

V~2) Déduez que pour x dans $] -1/4, 1/4[$, $S_N(x)$ converge quand N tend vers $+\infty$ vers une fraction rationnelle en x que vous préciserez.

V~3) Décomposez celle ci en éléments simples.

V~4) Démontrez l'existence de $2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n$ et $-3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n$ pour x dans $] -1/4, 1/4[$ et donnez la valeur de ces deux séries.

V~5) Retrouvez (c_n) comme combinaison de suites géométriques.

Factorisation de Cholesky

VI~0) On reprend pour un petit exercice la matrice de Hankel de la suite factorielle : $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 24 \\ 2 & 6 & 24 & 120 \\ 6 & 24 & 120 & 720 \end{pmatrix}$.

Trouvez T triangulaire supérieure à diagonale positive⁶ vérifiant $M_3 = {}^t T \cdot T$.

VI~1) Inversez T en résolvant le système $T \cdot X = Y$ d'inconnue X dans $\mathbb{R}^4$ et de paramètre Y dans $\mathbb{R}^4$.

VI~2) Inversez M_3 .

◁53▷ Quel est le plus petit entier naturel non nul par lequel on peut multiplier $2^{2020} \cdot 3^{2021} \cdot 4^{2022} \cdot 5^{2023} \cdot 6^{2024}$ pour en faire un carré parfait ?

◁54▷ Résolvez $16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100$ d'inconnue réelle x .

◁55▷ ♡ Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel de dimension finie. On suppose $E = \text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ et $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$. Montrez que l'on a alors $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(g)$ et $E = \text{Im}(f) \oplus \text{Im}(g)$. Si vraiment vous avez besoin d'une indication : utilisez la formule du rang et la formule de Grassmann.

◁56▷ Montrez qu'il existe un endomorphisme f de E vérifiant $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f)$ si et seulement si $\dim(E)$ est paire. Pour un sens, on construira un endomorphisme sur la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p, \vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{2p})$ en donnant sa matrice avec bon nombre de 0.

◁57▷ Complétez $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 3 \end{pmatrix}$ (notée A) pour que le noyau de $X \mapsto A \cdot X$ soit $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Déterminez alors son image. Diagonalisez alors A .

◁58▷ ♡ Donnez le noyau de $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2a + b - c \\ a - b + 2c \end{pmatrix}$ après avoir prouvé que cette application est linéaire.

Pouvez vous trouver g linéaire vérifiant $g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$?

Trouvez h linéaire vérifiant $f \circ h = \text{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

◁59▷ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ d'équation $x + y - 2z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\vec{j} + \vec{k}$.

6. $t_i^k = 0$ pour $i > k$ et $t_i^i \geq 0$

Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).

On note p le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D . Déterminez $p(\vec{i})$, $p(\vec{j})$ et $p(\vec{k})$.

On note p' le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D' . Déterminez $p'(\vec{i})$, $p'(\vec{j})$ et $p'(\vec{k})$.

Résolvez $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

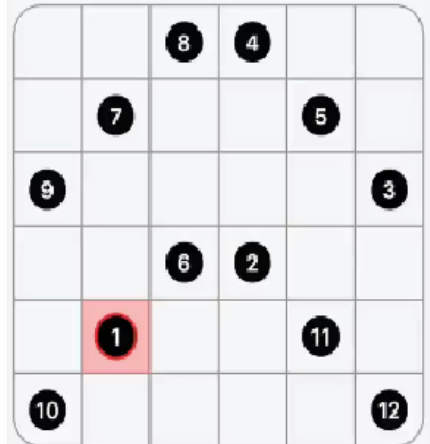
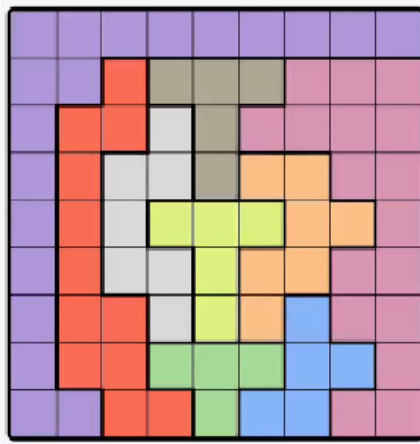
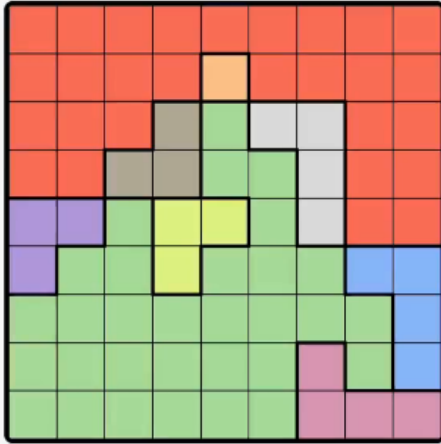
Résolvez $p(\vec{u}) + p'(\vec{u}) = \vec{0}$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

Résolvez $p \circ p'(\vec{u}) = p' \circ p(\vec{u})$ d'inconnue vectorielle $\vec{u}$.

◁60▷ Montrez que $\{M \in M_4(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$ (noté τ) est un espace vectoriel et donnez sa dimension.

On se donne une matrice A dans $M_4(\mathbb{R})$ et on définit $\varphi = M \mapsto A.M - M.A$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(M_4(\mathbb{R}), +, \cdot)$ d'image incluse dans τ .

En étudiant son noyau, montrez qu'on ne peut pas avoir $\text{Im}(\varphi) = \tau$.



◁61▷

◁62▷ ♥ Déterminez le noyau de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \end{pmatrix}$, puis son image. Au fait, cette application est bien linéaire ?

◁63▷ ♥ Déterminez le noyau de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2y \\ y+2z \\ x+2t \\ x+y+z+t \end{pmatrix}$, puis son image. Au fait, cette application est bien linéaire ?

◁64▷ ♥² ou ♣² suivant que vous êtes M ou PSI On travaille avec les entiers de 0 à 2 pour l'addition et la multiplication modulo 3.

1- Combien y a-t-il de vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et combien de matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Combien de matrices de rang 0 ? Pour les matrices de rang 1, je dis "une colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (9 choix) puis un de ses trois multiples $\begin{pmatrix} 0.a \\ 0.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1.a \\ 1.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2.a \\ 2.c \end{pmatrix}$, donc 27 matrices". Rectifiez l'erreur et donnez le bon nombre.

2- Complétez alors

$\text{rg}(M) = 0$	$\text{rg}(M) = 1$	$\det(M) = 0$	$\det(M) = 1$	$\det(M) = 2$
			24	

3- Calculez l'espérance la variance de la variable aléatoire déterminant puis de la variable trace pour un tirage aléatoire uniforme de matrices.

4- Pour trouver combien il y a de matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, je fais le raisonnement suivant : "ce sont les matrices de la forme $P.M.P^{-1}$, or, il y a 48 matrices P possibles, d'où 48 matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ". C'est faux,

trouvez l'erreur, et dénombrez les douze matrices semblables à $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5- Profitez en pour diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6- Je dis qu'il y a douze matrices de projecteur de rang 1. Confirmez le en en donnant la liste. Ou alors complétez

l'idée : les quatre droites sont $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ et $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, ensuite...

7- Montrez que la probabilité de tirer une matrice de projecteur est de $14/81$.

8- Combien de matrices sont semblables à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$? Calculez la probabilité de tirer une matrice nilpotente.

9- Calculez la probabilité de tirer une matrice de permutation.

10- Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable. Élevez la quand même à la puissance 2016.

Combien de matrices ont pour polynôme caractéristique

X^2	$X^2 + X$	$X^2 + 2.X$	$X^2 + 1$	$X^2 + 2$	$X^2 + X + 1$	$X^2 + 2.X + 1$	$X^2 + 2.X + 2$	$X^2 + X + 2$

11- Calculez la probabilité de trouver une matrice permutable avec $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

12- Voulant estimer la probabilité que deux matrices tirées au hasard soient permutables, sans me prendre la tête, j'écris un script Python. Complétez le :

```
def alea():
    ....a = randrange(3)
    ....b =
    ....return([[a,b],[c,d]])
def produit(A, B):
    ....a = A[0][0]*B[0][0]+A[0][1]*B[1][0]
    ....b =
    ....return [[a,b],[c,d]]
compt = 0
for Na in range(810):
    ....A = alea()
    ....for Nb in range(810):
```

ou alors écrivez votre propre script. On trouve environ 14 pour cent.