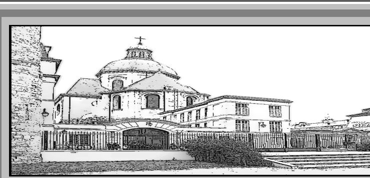
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 2 juin

$\mathcal{M.P.S.I.2}$



2024 2025

TD30

◁0▷ Calculez $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} Min(2^n,\ 2025.2^{-n})$.

◁1▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Déterminez son noyau. Est il surjectif ? Déterminer son rang.

◁2▷ On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez les dimensions des ensembles suivants en donnant à chaque fois une base :
$C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ $C_B = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid B.M = M.B\}$ $C_A \cap C_B$ $T_A = \{A.M - M.A \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$ et $T_A \cap C_B$.

◁3▷ Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ (notées φ, ϕet ψ).
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (1,\ 0,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 1,\ 0)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 1)$.
Trouvez P vérifiant $(\varphi(P),\ \phi(P),\ \psi(P)) = (0,\ 0,\ 0)$.

Montrez que $(\varphi,\ \phi,\ \psi)$ est libre.

◁4▷ Soient $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ cinq vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, .)$. Montrez
$\dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3})) - 3 \geqslant \dim(Vect(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5}) - 5$.

◁5▷ ♡ Faites en une famille liée dans l'espace vectoriel des matrices de format 2 sur 2 dont la trace est nulle :
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}\right)$

◁6▷

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

BANACH-TARSKI

Ce problème a pour objectif de mettre en place des outils qui servent à établir le théorème de Banach-Tarski *(qualifié aussi de paradoxe car il va à l'encontre du "bon-sens" dès qu'on accepte quelques points de la théorie des ensembles)* :

on peut découper Sucri en cinq morceaux *(mathématiquement définissables, mais physiquement irréalisables)* qui, une fois ré-assemblés donnent deux Sucri de même taille.

On définit $S = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

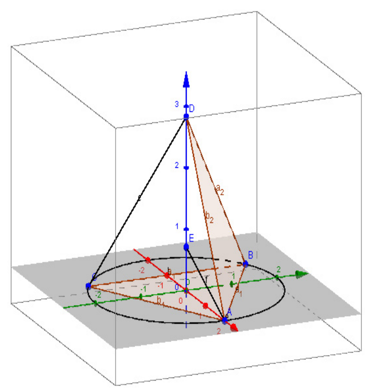
Bien sût, il ne s'agit ici que d'une partie de la démonstration, mais si vous lui appliquez une bonne transformation, vous la dédoublez, et si vous recommencez, vous finirez bien par avoir la démonstration entière. Mais je vous préviens, à un moment il faut utiliser l'axiome du choix pour prendre un représentant par classe d'équivalence des isométries modulo les sous-groupes qu'on définit ici. Il y a des éléments dans l'épreuve de Capes 2004, dans le livre de Michel Wirth et dans un vieux livre de Jean-Marie Arnaudies.

I∼0) Calculez le déterminant de chacune. Calculez S^2, R^2, $R.{}^tR$, $S.R$ et $R.S$.
I∼1) Montrez que 1 est valeur propre de S en donnant au moins un vecteur propre.
I∼2) Montrez que S admet une valeur propre double mais se diagonalise quand même.
I∼3) Montrez que le groupe engendré par S pour la multiplication *(plus petit sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$ contenant S)* est de cardinal fini.

II∼0) Montrez que 1 est valeur propre de R et de ${}^tR$. Montrez que le plan d'équation $x+y=0$ est stable par R *(c'est à dire l'image de tout vecteur de ce plan est dans ce plan)*.
II∼1) Calculez R^2, R^3 et exprimez R^3 comme combinaison linéaire de R^2, R et I_3.
II∼2) Déduisez que les puissances de R *(d'exposant positif comme d'exposant -1)* sont toutes dans $Vect(I_3,\ R,\ R^2)$.
II∼3) Montrez que la suite $(Tr(R^n))$ vérifie $t_{n+3}=\dfrac{t_{n+2}}{3}-\dfrac{t_{n+1}}{3}+t_n$ pour tout n.
II∼4) Déduisez : $Tr(R^n)=1+2.\cos(n.Arcos(-1/3))$.
II∼5) Montrez que $Tr(M^n)$ est, pour n dans $\mathbb{N}^*$, un rationnel de la forme $\dfrac{v_n}{3^n}$ avec v_n entier, congru à 1 modulo 3.
II∼6) Montrez que le groupe engendré par R pour la multiplication est de cardinal infini.

III∼0) On admet que les éléments du sous-groupe G engendré par S et R sont de la forme $S^p.R^{a_1}.S.R^{a_2}.S.R^{a_3}\dots R^{a_d}.S^q$ où les a_i sont des entiers relatifs, et où p et q valent 0 ou 1 *(par exemple $S.R^2.S.R^{-3}.S$ ou $R^5.S.R^7.S$ ou R^8...)*. Montrez que les éléments de G ont tous au moins une valeur propre réelle *(imaginez le graphe du polynôme caractéristique d'une matrice de taille 3)*.
III∼1) On prend M dans G de la forme $S^p.R^{a_1}.S.R^{a_2}.S.R^{a_3}\dots R^{a_d}.S^q$, simplifiez ${}^tM.M$.
III∼2) Déduisez pour tout vecteur propre de M, noté U de valeur propre λ : ${}^tU.U={}^t(M.U).(M.U)=\lambda^2.{}^tU.U$.
III∼3) Déduisez que 1 est toujours valeur propre de M.

IV∼0) Retrouvons ici pourquoi l'angle $Arccos(-1/3)$ intervient en mathématiques, en physique et en chimie, avec le tétraèdre *(le chimiste l'écrit 109°47 et des poussières car il adore apprendre par coeur des trucs approximatifs et de surcroît caballistiques quand il est si simple de les retrouver en une ligne)*. Un tétraèdre a pour sommets A_0 à A_3 avec tous les A_iA_j égaux, et pour centre de gravité G.



Simplifiez $(\overrightarrow{GA_0}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3})$, développez $(\overrightarrow{GA_0}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3}).(\overrightarrow{GA_0}+\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+\overrightarrow{GA_3})$.
Concluez : $(\widehat{\overrightarrow{GA_i},\ \overrightarrow{GA_k}})=Arccos(-1/3)$.
Vérifiez que c'est aussi $2.Arctan(\sqrt{2})$.
Pour l'obtenir d'une autre façon : $A_0(2,\ 0,\ 0)$, $A_0(-1,\ \sqrt{3},\ 0)$, $A_0(-1,\ -\sqrt{3},\ 0)$ et $A_3(0,\ 0,\ 2.\sqrt{2})$. Vérifiez que les A_iA_k sont tous égaux. Donnez les coordonnées du centre de gravité G. Retrouvez le cosinus de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{GA_i},\ \overrightarrow{GA_k}})$.

◁7▷

Lycee Charlemagne | MPSI2 | Annee 2023/24

FORMES

n est un entier naturel donné, on note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On se donne $n+1$ réels distincts a_0 à a_n.
Montrez que chaque application $P\longmapsto P(a_k)$ est une forme linéaire, notée φ_{a_k}.
Montrez que ces formes sont indépendantes (on pourra utiliser par exemple $\prod_{k=1}^{n}(X-a_k)$).
Déduisez $\exists(\alpha,\beta,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\ \forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ P(4)=\alpha.P(0)+\beta.P(1)+\gamma.P(2)$.
Que pensez vous du résultats $\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\ \exists(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta)\in\mathbb{R}^3,\ P(3)=\alpha.P(-1)+\beta.P(0)+\gamma.P(1)+\delta.P(2)$.
Complétez : $\forall P\in\mathbb{R}_1[X],\ \int_0^1 P(t).dt=P(\dots)$.
Montrez : $\forall P\in\mathbb{R}_3[X],\ \int_0^1 P(t).dt=\dfrac{P\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+P\left(\frac{1}{2}\right)+P\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{3}$.
Complétez : $\forall P\in\mathbb{R}_2[X],\ \int_0^1 P(t).dt=\dfrac{P(\dots)+P(\dots)}{2}$.

◁8▷ f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n,+,.)$ vérifiant $f\circ f\circ f=0$ (application nulle). Montrez : $rg(f)+rg(f\circ f)\leqslant n$ *(pensez à la formule du rang)*.
Ah oui, le rang c'est la dimension de l'ensemble image.

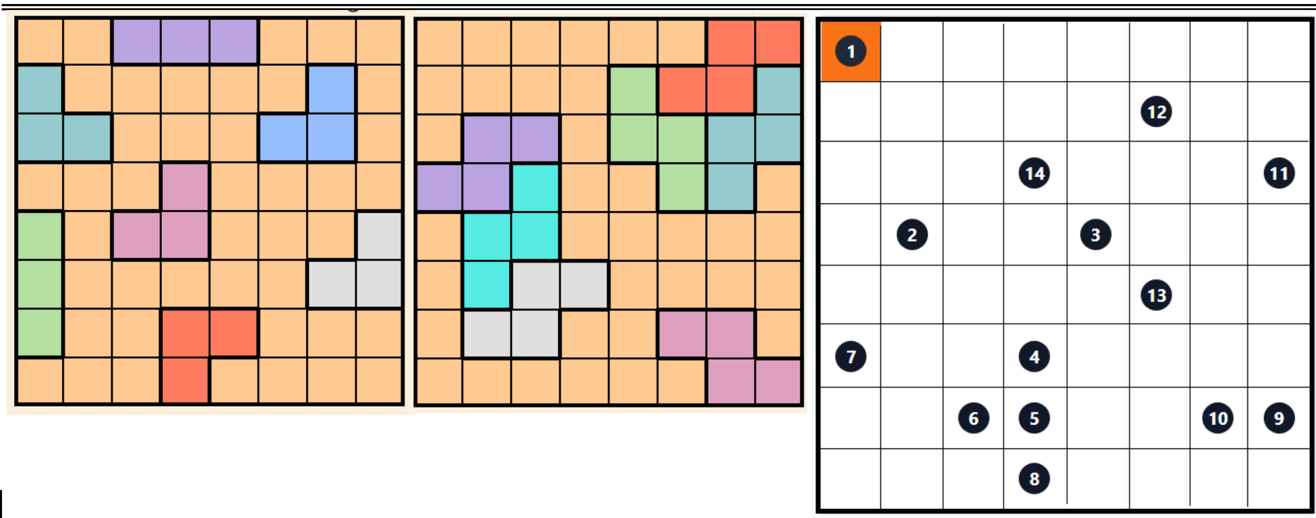
◁9▷ Une matrice carrée de taille n est dite symétrique si $a_i^k=a_k^i$ pour tout couple $(i,\ k)$. Montrez que les matrices symétriques de taille n forment un espace vectoriel *(dimension ?)*.

Une matrice carrée de taille n est dite gentil-symétrique si elle est symétrique par rapport à la “seconde” diagonale, comme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & c \\ h & i & f & b \\ j & h & e & a \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ (dimension ?) noté G_n. Quantifiez l'appartenance à G_n : $a_i^k = a_{\cdots}^{\cdots}$.
Déterminez la dimension de $G_n \cap S_n$. Déterminez la dimension de $G_n + S_n$.

◁10▷ A, B et C sont trois sous-espaces vectoriel de $(E, +, .)$. Montrez que si on suppose $A + B = C + B$, on n'a pas forcément $A = C$.
Montrez que si on suppose $A + B = C + B$ et $A \cap B = C \cap B$, on n'a pas forcément $A = C$.
Montrez que si on suppose $A + B = C + B$ et $A \cap B = C \cap B$ et $A \subset C$, alors on a forcément $A = C$ (attention, même si la preuve par les dimensions passe bien, elle n'est pas légitime, il faut une vraie preuve commençant par « on prend $\overrightarrow{c}$ dans C...).

◁11▷ ♡ (grand classique) Soient f et g deux endomorphismes de $(E, +, .)$, espace vectoriel de dimension finie. On suppose $g \circ f = 0$ (application nulle) et $f + g$ injective. Montrez alors $Im(f) \subset Ker(g)$ et $Ker(f) \cap Ker(g) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Déduisez $dim(Im(f)) + dim(Im(g)) = dim(E)$.

◁12▷ ♡ f et g sont deux applications linéaires de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ dans $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Montrez qu'il existe au moins une matrice non nulle M de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ vérifiant $f(M) = g(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.



◁13▷

◁14▷ ♡ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2015}$ *(sans diagonaliser)*. On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculez J^2 et J^4 *(on rappelle : $j = e^{2.i.\pi/3}$)*.

Écrivez la matrice de taille 4 dont le terme de ligne n et colonne k *(en indexation Pythonienne de 0 à 3)* est $i^{n.k}$ *(i est le célèbre complexe de carré -1)*. Écrivez A, calculez sa trace. Calculez A^2 et A^4. Calculez A^{2015}.
♠ Généralisez en dimension n.

◁15▷ ♡ On pose $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ et $B = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$. Montrez qu'il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3$ applications injectives de A dans B (et combien de B dans A ?).
Montrez qu'il y a $\dfrac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ applications strictement croissantes de A dans B (et combien de B dans A ?).
Combien y a-t-il d'applications surjectives de A dans B ?
Montrez : pour toute application f : (f *surjective de* A *dans* B) $\Rightarrow$ (f *injective de* A *dans* B).
On définit : $f : A \longrightarrow B$ par $f(1) = 6$, $f(2) = 5$, $f(3) = 8$ et $f(4) = 7$. Combien y a-t-il d'applications g de B dans A vérifiant $f \circ g = Id_B$? Combien y a-t-il d'applications h de B dans A vérifiant $h \circ f = Id_A$?

◁16▷ On définit $E = \{a,\ b,\ c,\ d\}$ et $F = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ et $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 5$ et $f(d) = 6$. Montrez que cette application est injective de E dans F. Existe-t-il g vérifiant $g \circ f = Id_E$. Si oui, combien de solutions. Si non, calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^5(t).\sin^4(t).dt$.

◁ 17 ▷ ♡ Soient quatre matrices de taille 2 sur 2 de trace nulle. Montrez qu'elles forment une famille liée [1].

◁ 18 ▷ Calculez $\int_0^1 Arctan(\sqrt{1-x^2}).dx$ (parties et $s = \sin(\theta)$ par exemple).

◁ 19 ▷ Soit f de classe C^6 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Complétez

$$\begin{pmatrix} f(x+1)-f(x) \\ f(x+2)-f(x) \\ f(x+3)-f(x) \\ f(x+4)-f(x) \\ f(x+5)-f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Montrez que la matrice carree de cette formule est inversible.
Deduisez que si f et $f^{(6)}$ sont bornes sur $\mathbb{R}$, alors f', f'', $f^{(3)}$, $f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ le sont aussi.

◁ 20 ▷ On définit : $f = x \longmapsto [x].\sin(\pi.x)$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Montrez que l'équation $\int_0^x f(t).dt = 0$ a une solution entre 3 et 4.

◁ 21 ▷ Le professeur a demandé de calculer la moyennes des entiers de 1 à . L'élève Hall-Honter (Pourlaveh-Lelinj) a trouvé $8,8$. Le professeur lui dit : "tu t'es trompé, tu as oublié de compter un entier *(mais tu as bien divisé par le nombre de termes de ta somme)*". Retrouvez l'entier oublié et la question initiale du professeur.

◁ 22 ▷ ♣

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces *(appelés dés de Bradley Effron)*.
Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.
Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.
Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.
Quelle est la probabilité que D batte A ?

◁ 23 ▷ ♣ Pouvez vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ?
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

◁ 24 ▷ Soit f une application linéaire. Montrez : $Ker(f) + Ker(f - Id) + Ker(f - 2.Id) = Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus + Ker(f - 2.Id)$.

On donne : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 5.x & -3.y & -2.z \\ 4.x & -2.y & -2.z \\ x & -y & +2.z \end{pmatrix}$.

Un élève entend prouver $Ker(f) \oplus Ker(f - Id) \oplus + Ker(f - 2.Id) = \mathbb{R}^3$ par analyse et synthèse.
Il écrit ce qui suit : $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ avec $\vec{a}$ dans $Ker(f)$, $\vec{b}$ dans $Ker(f - Id)$ et $\vec{c}$ dans $Ker(f - 2.Id)$.
Il déduit $f(\vec{u}) = \vec{0} + \vec{b} + 2.\vec{c}$, puis $f^2(\vec{u}) = \vec{b} + 4.\vec{c}$. Il déduit $\vec{c} = \dfrac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \dfrac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$. Quel sens a-t-il traité ?
Ensuite, il propose $\vec{c} = \dfrac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \dfrac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$ et vérifie $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Quel sens a-t-il prouvé ?
Trouvez l'erreur.
Montrez qu'en remplaçant $x - y + 2.z$ par $x - y$, le résultat devient correct.

◁ 25 ▷ Décomposez $x \longmapsto 2.|x+1|$ en $p + i$ avec p paire et i impaire, puis représentez p et i.

◁ 26 ▷ On définit, pour f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$:

1. liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

$N_1(f)=\int_0^1 \lvert f(t)\rvert .dt$	$N_2(f)=\sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$N_\infty(f)=Sup\{\lvert f(t)\rvert \mid t\in[0,\,1]\}$

Calculez ces trois normes pour les applications suivantes : $t\longmapsto t^n$, exp, $t\longmapsto \sin(\pi.t)$.

Montrez : $N_1\leqslant N_\infty$ (c'est à dire $\forall f,\ N_1(f)\leqslant N_{\infty(f)}$), $N_2\leqslant N_\infty$ et $N_1\leqslant N_2$ (là, il faut penser à quelquechose, ou à quelqu'un ou à quelques uns).

L'application $f\longmapsto |f(0)|+N_1(f')$ est elle une norme sur $C_1([0,\,1],\mathbb{R})$ (les applications dérivables à dérivée continue).

◃27▹ Pour tout k, on note E_k l'application $x\longmapsto [x/k]$. Montrez que la famille (E_1,E_2,E_3,E_4,E_5) est libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles.

◃28▹ Un point $(a,\ b)$ est un point critique de F (fonction numérique de deux variables dérivable) si les deux dérivées partielles p et q (notées aussi F'_1 et F'_2 ou même F'_x et F'_y, ou encore $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$) s'annulent en $(a,\ b)$.
Trouvez les points critiques des applications suivantes :

a	$(x,\ y)\longmapsto (x-y)^2+x^3+y^3$	e	$(x,\ y)\longmapsto x^2.y^3$
b	$(x,\ y)\longmapsto \begin{pmatrix} x & y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$	f	$(x,\ y)\longmapsto (x-1)^2+2.y^2$
c	$(x,\ y)\longmapsto \sin(x).\sin(y).\sin(x+y)$	g	$(x,\ y)\longmapsto x^3.y+x^3-x^2.y$
d	$(x,\ y)\longmapsto (x-y)^2+x^4+y^4$	h	$(x,\ y)\longmapsto e^{x-y}.(x^2-2.y^2)$

◃29▹ On donne $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. On définit $f=M\longmapsto (Tr(M),\ Tr(A.M),\ Tr(A^2.M),\ Tr(A^3.M))$. Montrez que f est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ dans $\mathbb{R}^4$. Calculez $f(I_2)$ et $f(A)$ et $f(A^{-1})$. Un élève dit que cette application est de rang 6. Prouvez qu'il a tort. Un élève prétend que f est de rang 1. Prouvez qu'il a tort. Pour mettre tout le monde d'accord, calculez le rang de f. Donnez une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$. Donnez une base de $Im(f)$.
Un professeur vous demande de calculer $Tr(f)$. Que lui répondez vous ?

◃30▹ Donnez un supplémentaire de l'ensemble des matrices de taille n sur n de trace nulle.
Donnez un supplémentaire de l'ensemble des matrices de taille n sur n de diagonale nulle

◃31▹ ♡ On note $(E,+,.)$ l'espace des combinaisons linéaires de $x\longmapsto \frac{1}{x^3-2.x^2-5.x+6}$, $x\longmapsto \frac{x}{x^3-2.x^2-5.x+6}$ et $x\longmapsto \frac{x^2}{x^3-2.x^2-5.x+6}$. Montrez que ce espace est de dimension 3. Montrez que $x\longmapsto \frac{1}{x-1}$, $x\longmapsto \frac{1}{x+2}$ et $x\longmapsto \frac{1}{x-3}$ sont dans $(E,+,.)$ et en forment une base.

◃32▹ On se place dans l'espace vectoriel $(E,+,.)$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $\{f \mid f(1)=0\}$ et $\{x\longmapsto a.x \mid a\in\mathbb{R}\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$ et donnez la dimension d'un d'entre eux. Montrez qu'ils sont supplémentaires dans E.

◃33▹ ♡ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ d'équation $x+y-2.z=0$, D la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3=P\oplus D=P\oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D=D'$).

◃34▹ On pose $\overrightarrow{a}=\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} 4\\ 3\\ 7\end{pmatrix}$. vérifiez que c'est une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.

Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ et de $Vect(\overrightarrow{c})$?

Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ et de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$?
Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ et de $Vect(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{c})$ et même de $Vect(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$?

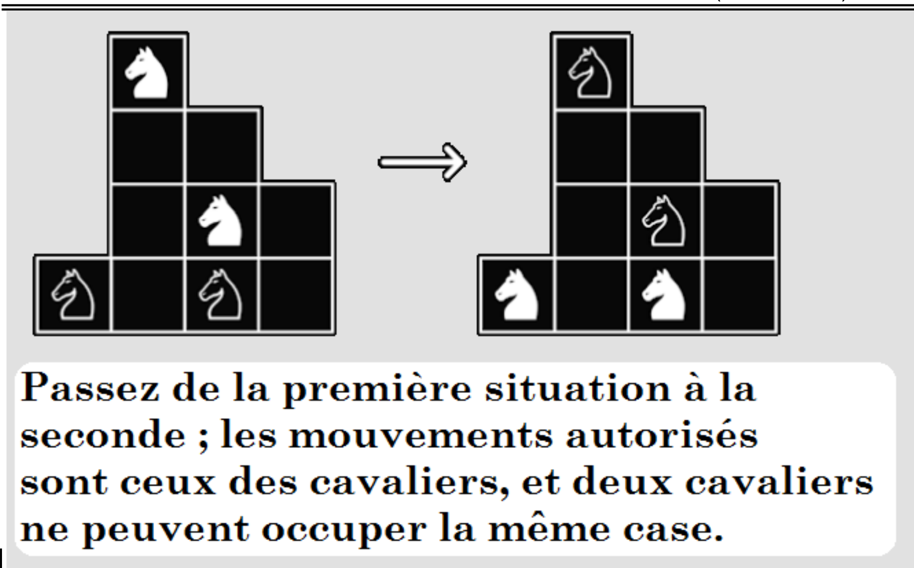
◁35▷ Résolvez $x^4 - 4^x = 17$.

◁36▷ L'application $P(X) \longmapsto P(X+1)$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}[X], +, .)$.
Donnez sa matrice de la base canonique vers la abse canonique.
Donnez sa matrice de la base canonique vers la base $(X^2,\ (X+1)^2,\ (X+2)^2)$ après avoir vérifié que c'est bien une base de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

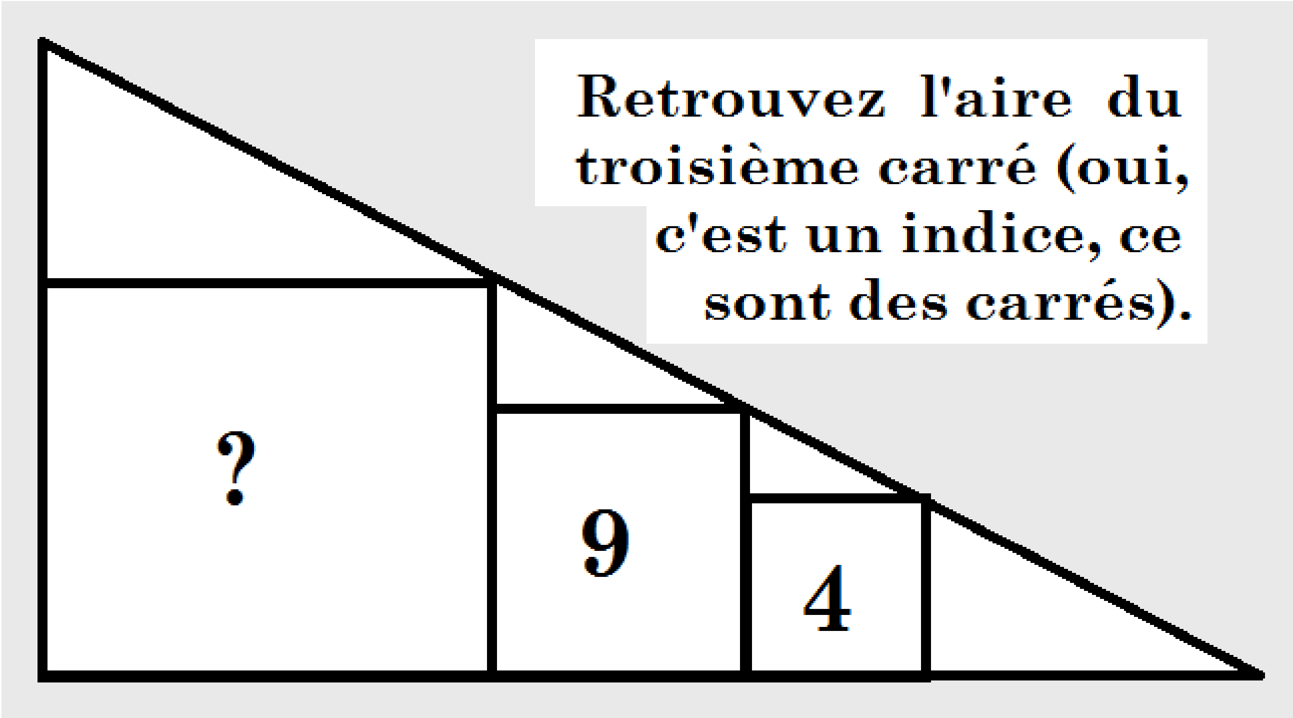
Existe-t-il une base B telle que sa matrice de B dans B soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une base B telle que sa matrice de B' dans B' soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

◁37▷



Commencez par transformer cette portion d'échiquier en graphe (les sommets sont les cases, deux sommets sont reliéès si on peut passer d'une case à l'autre par un saut de cavalier).


Retrouvez l'aire du troisième carré (oui, c'est un indice, ce sont des carrés).
?
9
4

◁38▷