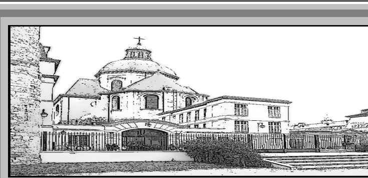
LYCEE CHARLEMAGNE
Merdredi 21 mai
M.P.S.I.2



2024 2025
IS28

♡ 0 ♡ Ça a l'air d'un théorème : $E = F \oplus G$, H sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$ alors $H = (H \cap F) \oplus (H \cap G)$. Montrez par un contre-exemple en petite dimension que c'est faux. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez que si on enlève un vecteur à une famille libre, elle reste libre. 2 pt.

♡ 2 ♡ Combien de familles libres pouvez vous fabriquer avec $(\vec{i}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + 2.\vec{j}, \vec{0}, 3.\vec{i})$? 2 pt.

♡ 3 ♡ Combien de familles liées pouvez vous fabriquer avec $(\vec{i}, \vec{i} - \vec{j}, \vec{i} + 2.\vec{j}, \vec{0}, 3.\vec{i})$? 2 pt.

◇ 0 ◇ On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez A^2 puis A^n pour tout n de $\mathbb{N}$ (n'oubliez rien). 2 pt.

◇ 1 ◇ Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ (noté T) est un sous-espace vectoriel de $((M_2(\mathbb{R}), +, .)$ et donnez en une base et sa dimension. 2 pt.

◇ 2 ◇ Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = -M.A\}$ (noté C) est un sous-espace vectoriel de $((M_2(\mathbb{R}), +, .)$ et donnez en une base et sa dimension. 2 pt.

◇ 3 ◇ Donnez la dimension de $C + T$. Donnez la dimension de $C + Vect(I_2)$. 2 pt.

◇ 4 ◇ Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de T. 2 pt. Calculez sa trace et son déterminant. 2 pt.

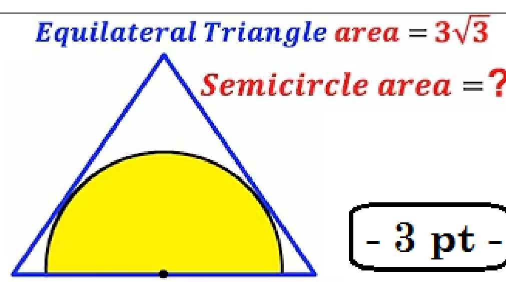
I∼0) $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel (de dimension finie ou non). f est un endomorphisme de E. Montrez : $Ker(f - 2.Id_E) \cap Ker(f - 3.Id_E) = \{\vec{0}\}$. 1 pt.
I∼1) Montrez : $Ker(f - 2.Id) \subset Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$. 1 pt.
I∼2) Montrez : $Ker(f - 2.Id_E) \oplus Ker(f - 3.Id_E) \subset Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$. 1 pt.
I∼3) Montrez pour tout $\vec{u}$ de E : $\vec{u} = (f(\vec{u}) - 2.\vec{u}) - (f(\vec{u}) - 3.\vec{u})$ et déduisez $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E) = Ker(f - 2.Id_E) \oplus Ker(f - 3.Id_E)$. 2 pt.

II∼0) Le temps de cette question, on prend $E = C^\infty(\mathbb{R}, R)$ et $f = u \longmapsto u'$. Montrez : $Ker(f - 2.Id) = Vect(t \longmapsto e^{2.t})$. 1 pt.
II∼1) Montrez que $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id)$ est l'ensemble des solutions de $y'' - 5.y' + 6.y = 0$. 1 pt. Qu'avez vous prouvé avec a dernière question de la partie précédente ? 1 pt.

III∼0) Montrez $Ker(f - 2.Id) + Ker(f - 3.Id) + Ker(f + Id) = Ker(f - 2.Id) \oplus Ker(f - 3.Id) \oplus Ker(f + Id) \subset Kerf(f^3 - 4.f^2 + f + 6.Id)$. 2 pt.
III∼1) Retrouvez les trois coefficients : $1 = \alpha.(X - 2).(X - 3) + \beta.(X - 2).(X + 1) + \gamma.(X - 3).(X + 1)$. 2 pt.
III∼2) Justifiez : $\forall \vec{u} \in E$, $\vec{u} = \alpha.(f^2(\vec{u}) - 5.f(u) + 6.\vec{u}) + \beta.(f^2(\vec{u}) - f(u) - 2.\vec{u}) + \gamma.(f^2(\vec{u}) - 2.f(u) - 3.\vec{u})$. 1 pt.
III∼3) Déduisez : $Ker(f - 2.Id_E) \oplus Ker(f - 3.Id_E) \oplus Ker(f + Id) = Kerf(f^3 - 4.f^2 + f + 6.Id_E)$. 2 pt.

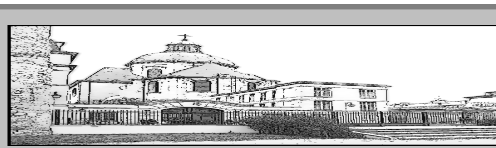
Complete (with words)
In this frame « e » is present __________ times. 1 pt.

Montrez $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^t - 1}.dt = 2 - \frac{\pi}{2}$ (quand une fonction dans l'intégrale vous embête, prenez la comme variable !). 3 pt.



- 3 pt -

LYCEE CHARLEMAGNE
Merdredi 21 mai
M.P.S.I.2



2024 2025
IS28
CORRECTION

IS28 Questions rapides.

Le plan $(\mathbb{R}^2, +, .)$ s'écrit $\mathbb{R}^2 = Vect(\overrightarrow{i}) \oplus Vect(\overrightarrow{j})$.
On prend le sous-espace $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$. Il est de dimension 1.
Mais $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \cap Vect(\overrightarrow{i}) = \{\overrightarrow{0}\}$ et $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \cap Vect(\overrightarrow{j}) = \{\overrightarrow{0}\}$.
Il vient $\big(Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \cap Vect(\overrightarrow{i})\big) \oplus \big(Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \cap Vect(\overrightarrow{j})\big) = \{\overrightarrow{0}\} \neq Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$.

On prend une famille libre (finie pour se simplifier la rédaction) : $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_p})$.
On enlève un vecteur (par symétrie des rôles on enlève $\overrightarrow{u_p}$). Il faut montrer que la nouvelle famille est libre.

Si elle ne l'était pas, elle serait liée (par une relation $\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k.\overrightarrow{u_k} = \overrightarrow{0}$, et en remettant le vecteur $\overrightarrow{u_p}$ la nouvelle famille serait encore liée, par $\sum_{k=1}^{p-1} \alpha_k.\overrightarrow{u_k} + 0.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$, ce qui est contradictoire.

On a raisonné par contraposée.

On peut aussi faire un raisonnement direct.
On part d'une combinaison linéaire nulle $\beta_1.\overrightarrow{u_1} + \ldots + \beta_{p-1}.\overrightarrow{u_{p-1}} = \overrightarrow{0}$ (objectif : les β_i sont nuls).
On la complète en $\beta_1.\overrightarrow{u_1} + \ldots + \beta_{p-1}.\overrightarrow{u_{p-1}} + 0.\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$.
Par liberté de la grande famille, tous les β_i sont nuls (ainsi que 0).

Avec nos cinq vecteurs, on peut former trente deux familles, qu'on va classer. Certaines seront libres, les autres seront liées.
On part de la famille vide (libre), jusqu'aux familles trop grandes (liées).
On note aussi que les familles contenant $\overrightarrow{i}$ et $3.\overrightarrow{i}$ sont assurément liées.
De même que toutes celles (la moitié) contenant $\overrightarrow{0}$.

libres					
$()$	$(\overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(3.\overrightarrow{i})$	
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, 3.\overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, 3.\overrightarrow{i})$	

Total : dix familles.

Les vingt deux autres familles sont liées.

Il reste ensuite une question.
Les familles $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ et $(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{a})$ ne sont pas les mêmes (même si leur statut « libre », « liée » et génératrice de $(E, +, .)$ reste le même).
En effet, les composantes d'un vecteur dépendant de l'ordre des vecteurs dans la base.
On doit donc recommencer le dénombrement.

libres					
$()$	$(\overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(3.\overrightarrow{i})$	
une famille	une famille	une famille	une famille	une famille	
$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, 3.\overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, 3.\overrightarrow{i})$	
deux familles	deux familles	deux familles	deux familles	deux familles	

Et pour les familles liées, c'est pire.
Au total, il y a d'ailleurs $\sum_{k=0}^{n} k!.\binom{n}{k}$ familles. C'est d'ailleurs $\sum_{k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ en termes de dénombrement.

Si on compte bien cinq e on écrit $\boxed{\text{In this frame « e » is present five times.}}$
Mais alors le voilà présent six fois. Il faut corriger. $\boxed{\text{In this frame « e » is present six times.}}$

Et on rechute à cinq !
La solution est pourtant simple | In this frame « e » is present seven times. |

Pour l'intégrale (dont l'existence ne pose pas de problème avec le mot clef continuité [1]), on pose donc $y = \sqrt{e^t - 1}$.
On isole $t = \ln(y^2+1)$ puis on dérive : $dt = \dfrac{2.y.dy}{y^2+1}$.
L'intégrale se simplifie

$$\int_{t=0}^{t=\ln(2)} \sqrt{e^t - 1}.dt = \int_{y=0}^{1} y.\frac{2.y}{y^2+1}.dy = 2.\int_0^1 \frac{y^2+1-1}{y^2+1}.dy$$

et la fin n'est que connaissance du cours élémentaire.

Le côté du triangle équilatéral vaut $2.\sqrt{3}$.

En effet, le triangle équilatéral de côté a est fait de deux triangles rectangles de base $\dfrac{a}{2}$ et de hauteur $\dfrac{a.\sqrt{3}}{2}$ (Pythagore).
L'aire d'un tel triangle est donc $\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4}$. On résout donc $\dfrac{a^2.\sqrt{3}}{4} = 3.\sqrt{3}$ avec a positif.

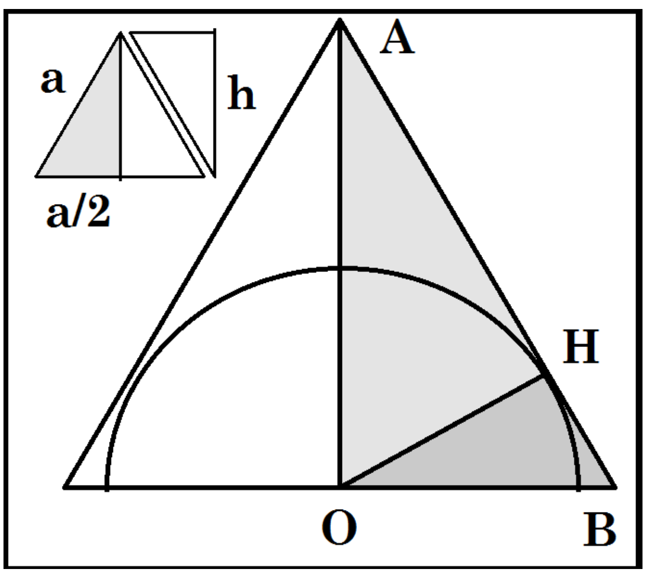
Le rayon du cercle vaut $3/2$.

On introduit quelques points pour se repérer, comme le centre O du cercle et le point de tangence H du cercle avec l'un des deux côtés.
On mesure quelques angles : l'angle en A est $\pi/3$ (triangle équiangulaire)
le demi angle en A vaut $\pi/6$
l'angle en H vaut $\pi/2$ (rayon vecteur et tangente)
l'angle BOH vaut $\pi/6$ (angles complémentaires)

Dans le triangle OHB rectangle en B, d'hypoténuse $OB = \sqrt{3}$, on mesure OH par le cosinus de l'angle.

L'aire du demi disque vaut $9.\pi/8$. Là c'est juste $\pi.R^2/2$.

Est on en droit de dire que le site Pre-Maths a commis une erreur en parlant d'aire du demi-cercle ?
Si on a la rigueur d'une prépa, on dit que l'aire du demi cercle est nulle.
Et celle du demi disque est bien celle calculée au dessus.



IS28 Matrice A.

On calcule par hasard $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = A$.

Par récurrence immédiate : pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $A^n = A$. La récurrence est initialisée à $n = 1$ et $n = 2$.
Supposons la propriété vraie pour un n donné : $A^n = A$ et calculons $A^{n+1} = A^n.A = A.A = A$. La récurrence est concluante.

Mais attention, on doit traiter à part $A^0 = I_2$ et $\forall n \geqslant 1,\ A^n = A$.

L'ensemble T est une partie de $M_2(\mathbb{R})$, contenant la matrice nulle et stable par combinaison (si on suppose $Tr(A.M) = Tr(A.N) = 0$ on a aussi $Tr(A(M+N)) = Tr(A.M + A.N) = Tr(A.M) + Tr(A.N) = 0 + 0 = 0$.

1. continuité de la fonction sous le signe somme, pas de l'intégrale, ça ne veut rien dire, les gosses

De même avec $Tr(A.M) = 0$ et λ dans $\mathbb{R}$ on a aussi $Tr(A.\lambda.M) = 0$.

On peut aussi décrire T comme le noyau de $M \longmapsto Tr(A.M)$ de $M_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

La formule d rang donne d'ailleurs $\dim(T) + \dim(\mathbb{R}) = \dim(M_2(\mathbb{R})) = 4$, d'où $\dim(T) = 3$.

Mais sinon, on calcule $Tr(A.M) = Tr(\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} 3.a+6.c & \\ & -b-2.d \end{pmatrix}) = 3.a + 6.c - b - 2.d$.
Les matrices de T sont de la forme $\begin{pmatrix} a & 3.a+6.c-2.d \\ c & d \end{pmatrix}$ et on tient une base

$$(\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$$

Avec les mêmes notations, la condition $A.M + M.A = 0_{2,2}$ donne un système $\begin{array}{ccccccc} 6.a & -b & +6.c & & = & 0 \\ 6.a & +b & & +6.d & = & 0 \\ -a & & +c & -d & = & 0 \\ & -b & +6.c & -4.d & = & 0 \end{array}$.
On résout par combinaisons et on voit qu'une des équations ne sert à rien : $a = -2.c$, $b = -6.c$ et $d = 3.c$.
Les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} -2.a & -6.c \\ c & 3.d \end{pmatrix}$ et l'espace vectoriel C est égal à

$$Vect(\begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})$$

Ah oui, on a bien un espace vectoriel, en tant que sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$, et noyau de $M \longmapsto A.M + M.A$.
Ou par preuve de stabilité par $A.(\lambda.M + N) + (\lambda.M + N).A = 0_{2,2}$ si je dois aller vite.

$C + T$ est peut être de dimension 4. Et c'est donc peut être $M_2(\mathbb{R})$ tout entier. En effet, la formule de Grassmann donne

$$\dim(C + T) = \dim(C) + \dim(T) - \dim(C \cap T) = 4 - \dim(C \cap T)$$

Mais quelle est la dimension de $C \cap T$? Prenons un élément de $C \cap T$. C'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} -2.c & -6.c \\ c & 3.c \end{pmatrix}$ vérifiant

$$Tr(\begin{pmatrix} -2.c & -6.c \\ c & 3.c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}) = 0$$

Et il n'y a aucune condition sur c. Tous les éléments de la forme $\begin{pmatrix} -2.c & -6.c \\ c & 3.c \end{pmatrix}$ sont dans C et on a donc $C \cap T = T$.
On a donc $C + T = T$, et il est de dimension 3.

Sinon, si la matrice M vérifie $A.M + M.A = 0_{2,2}$ on a alors $Tr(A.M) + Tr(M.A) = 0$ puis $2.TR(A.M) = 0$.
La matrice M est dans T. Ce petit raisonnement redonne vite $C \subset T$.

L'application $M \longmapsto A.M$ est définie sur T.
Mais est elle à valeurs dans T ? On prend M qui vérifie $Tr(A.M) = 0$ et on calcule

$$Tr(A.(A.M)) = Tr(A^2.M) = Tr(A.M) = 0$$

L'application va bien de T dans T.
Quant à la linéarité, on prend M et N et λ et on a bien $A.(M + N) = A.M + A.N$ et $A.(\lambda.M) = \lambda.(A.M)$.

Reste à calculer sa matrice sur une base de T, comme celle citée plus haut :

3	6	0	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
-1	-2	0	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
-3	-6	0	$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 18 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	

Le déterminant est nul. Et la trace vaut 1.

Pouvait on deviner que son déterminant était nul ?
On a déjà $f(f(M)) = A.A.M = A.M = f(M)$.
Avec $f \circ f = f$ on a $M^2 = M$ et par passage au déterminant : $\det(M) = (\det(M))^2$. *Déjà il ne pouvait valoir que* 0 *ou* 1.

IS28 Somme de deux sous-espaces.

Ce qui va nous servir tout au long : $$\begin{aligned} Ker(f(-\alpha.Id_E) &= \{\overrightarrow{u} \in E \mid (f-\alpha.Id_E)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}\} \\ &= \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) - \alpha.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}\} \\ &= \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u} = \alpha.\overrightarrow{u}\} \end{aligned}.$$
Il s'agit donc des vecteurs propres de f de valeur propre α (il n'y a peut être que le vecteur nul d'ailleurs). Et c'est par construction même un sous-espace vectoriel de $(E, +, .)$.

Le vecteur nul est à coup sûr dans l'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$, donc dans toute intersection de noyau (oui, il faut quand même évoquer au moins une fois $\{\overrightarrow{0}\} \subset Ker(f-2.Id_E) \cap Ker(f-3.Id_E)$.
Prenons à présent $\overrightarrow{u}$ dans cette intersection. Ce vecteur vérifie à la fois $f(\overrightarrow{u}) = 2.\overrightarrow{u}$ et $f(\overrightarrow{u}) = 3.\overrightarrow{u}$. Par transitivité (et en perdant de l'information), on trouve $3.\overrightarrow{u} = 2.\overrightarrow{u}$ puis $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Le seul vecteur qui soit propre pour deux valeurs propres distinctes à la fois est le vecteur nul.

On prend $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f-2.Id_E)$. Il vérifie $f(\overrightarrow{u}) = 2.\overrightarrow{u}$. On ré-applique f puisque ça va servir :
$$f(f(\overrightarrow{u})) = f(2.\overrightarrow{u}) = 2.f(\overrightarrow{u}) = 2.2.\overrightarrow{u} = 4.\overrightarrow{u}$$
On reporte : $f^2(\overrightarrow{u}) - 5.f(\overrightarrow{u}) + 6.\overrightarrow{u} = 4.\overrightarrow{u} - 5.2.\overrightarrow{u} + 6.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
On reconnaît que $\overrightarrow{u}$ est dans $Ker(f^2 - 5.f + 6.d_E)$.

On pouvait aussi utiliser $Ker(h) \subset (Ker(g \circ h)$ avec $h = (f-2.Id_E)$ et $g = (f-3.Id_E)$. Je vous laisse alors développer $f(f-3.Id_E) \circ (f-2.Id_E)$ pour retrouver ce qui était demandé.

De la même façon, on montre $Ker(f-3.Id_E) \subset Ker(f^2 - 5.f + 6.d_E)$.
L'espace vectoriel $Ker(f^2 - 5.f + 6.d_E)$ contient à la fois $Ker(f-2.Id_E)$ et $Ker(f-3.Id_E)$.
Or, $Ker(f-2.Id_E) + Ker(f-3.Id_E)$ est « le plus petit espace vectoriel contenant à la fois $Ker(f-2.Id_E)$ et $Ker(f-3.Id_E)$ ». Donc par définition même de « plus petit », on a $Ker(f-2.Id_E) + Ker(f-3.Id_E) \subset Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$.

Je viens de vous le jouer purement matheux, et c'est trop fort.
Il reste quand même la méthode plus terre à terre, celle de « j'ai appris les formules du cours, et j'applique les formules, car c'est plus rassurant que d'appliquer des concepts ». Bref, sans étoile.

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f-2.Id_E) + Ker(f-3.Id_E)$ (objectif : il est dans $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$).
Il s'écrit $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f-2.Id)$ et $\overrightarrow{b}$ dans $Ker(f-3.Id)$ (c'est à dire $f(\overrightarrow{a}) = 2.\overrightarrow{a}$ et $f(\overrightarrow{b}) = 3.\overrightarrow{b}$. Il ne me reste plus qu'à calculer (oh le côté rassurant en position fœtale en amphi ou en 210)
$$\begin{array}{rcccccc} (f^2-5.f+6.Id_E)(\overrightarrow{u}) & = & (f^2-5.f+6.Id_E)(\overrightarrow{a}) & + & (f^2-5.f+6.Id_E)(\overrightarrow{b}) & & \\ & = & f^2(\overrightarrow{a}) - 5.f(\overrightarrow{a}) + 6.\overrightarrow{a} & + & f^2(\overrightarrow{b}) - 5.f(\overrightarrow{b}) + 6.\overrightarrow{b} & & \\ & & 4.\overrightarrow{a} - 5.2.\overrightarrow{a} + 6.\overrightarrow{a} & + & 9.\overrightarrow{b} - 5.3.\overrightarrow{b} + 6.\overrightarrow{b} & = & \overrightarrow{0} \end{array}$$

La relation $\overrightarrow{u} = (f(\overrightarrow{u}) - 2.\overrightarrow{u}) - (f(\overrightarrow{u}) - 3.\overrightarrow{u})$ ne doit pas rapporter de point.
Et on a déjà une inclusion de $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E) = Ker(f-2.Id_E) \oplus Ker(f-3.Id_E)$. Il manque le « sens direct ».
On prend donc $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$. On se laisse guider par l'énoncé et on écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a} = (f(\overrightarrow{u}) - 2.\overrightarrow{u})$ et $\overrightarrow{b} = -(f(\overrightarrow{u}) - 3.\overrightarrow{u})$.

Et on tente notre chance : $$\begin{array}{rcccccc} (f-3.Id_E)(\overrightarrow{a}) & = & f(\overrightarrow{a}) & -3.\overrightarrow{a} & & & \\ & & f^2(\overrightarrow{u}) - 2.f(\overrightarrow{u}) & -3.(f(\overrightarrow{u}) - 2.\overrightarrow{u}) & & & \\ & & f^2(\overrightarrow{u}) & -5.f(\overrightarrow{u}) & +6.f(\overrightarrow{u}) & = & \overrightarrow{0} \end{array}.$$

On fait de même : $$\begin{array}{rcccccc} (f-2.Id_E)(\overrightarrow{b}) & = & f(\overrightarrow{b}) & -2.\overrightarrow{b} & & & \\ & & f^2(\overrightarrow{u}) - 3.f(\overrightarrow{u}) & -2.(f(\overrightarrow{u}) - 3.\overrightarrow{u}) & & & \\ & & f^2(\overrightarrow{u}) & -5.f(\overrightarrow{u}) & +6.f(\overrightarrow{u}) & = & \overrightarrow{0} \end{array}.$$

Tout vecteur de $Ker(f^2 - 5.f + 6.Id_E)$ se décompose (d'une façon unique) comme somme d'un vecteurs de

$Ker(f(-3.Id_E)$ et d'un vecteur de $Ker(f-2.Id_E)$.

IS28 Un exemple avec les applications de classe C^∞.

Les éléments de E sont des fonctions. Les éléments de $Ker(f-2.Id_E)$ sont les fonctions u vérifiant $f(u)-2.u=0$. Ceci se traduit en $u'-2.u=0$.
C'est une équation différentielle linéaire (l'inconnue est bien u et pas t), dont les solutions sont garanties par le cours : les multiples d $t \longmapsto e^{2.t}$.

L'énoncé met bien les parenthèses au bon moment et se place à chaque fois au bon étage, $e^{2.t}$ est un réel, alors que $t \longmapsto e^{2.t}$ est une fonction.

Qui sont les éléments de $Ker(f^2-5.f+Id_E)$? Ce sont des fonctions.
Des fonctions vérifiant $f(f(u))-5.f(u)+6.u=0$, c'est à dire $u''-5.u'+6.u=0$.
Et au pauvre étage des réels, ceci donne $\forall t,\ u''(t)-5.u'(t)+6.u(t)=0$.
Ce noyau est donc bien l'espace vectoriel (tiens tiens) des solutions de cette équation.

Qu'a-t-on prouvé avec $Ker(f^2-5.f+6.Id_E)=Ker(f-2.d)\oplus Ker(f-3.d)$?
Les solutions de l'équation différentielle sont exactement les fonctions qui se décomposent comme somme d'un multiple de $t \longmapsto e^{2.t}$ et d'un multiple de $t \longmapsto e^{3.t}$.

Le cours de physique montre juste $\big(Ker(f-2.d)+Ker(f-3.d)\big) \subset Ker(f^2-5.f+6.Id_E)$.
On a prouvé $Ker(f^2-5.f+6.Id_E)=Ker(f-2.d)\oplus Ker(f-3.d)$.

IS28 Somme à trois sous-espaces.

La question qui s'étire sur deux lignes est double : somme directe, puis inclusion.

Attention, pour la somme directe, on n'a pas de critère simple à coups d'intersections deux à deux.
Il y a certes énoncé mais non démontré dans le cours un résultat en $\begin{array}{ccccc} A & \cap & B & = & \{\overrightarrow{0}\} \\ (A+B) & \cap & C & = & \{\overrightarrow{0}\} \end{array}$ mais il n'est même pas démontré.
Autant revenir à la définition : quand un vecteur s décompose, sa décomposition est unique.
On se donne un vecteur u qu'on décompose en $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f-2.Id)$, $\overrightarrow{b}$ dans $Ker(f-3.Id)$ et $\overrightarrow{c}$ dans $Ker(f+Id)$.
On traduit : $f(\overrightarrow{a})=2.\overrightarrow{a}$, $f(\overrightarrow{b})=3.\overrightarrow{b}$ et $f(\overrightarrow{c})=-\overrightarrow{c}$. Il faut donc initialiser f. On va donc partir de $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ et appliquer f linéaire

$$\begin{array}{ccccccccc} \overrightarrow{a} & + & \overrightarrow{b} & + & \overrightarrow{c} & = & \overrightarrow{u} & \\ f(\overrightarrow{a}) & + & f(\overrightarrow{b}) & + & f(\overrightarrow{c}) & = & f(\overrightarrow{u}) & \textit{une fois} \\ 2.\overrightarrow{a} & + & 3.\overrightarrow{b} & - & \overrightarrow{c} & = & f(\overrightarrow{u}) & \\ 2.f(\overrightarrow{a}) & + & 3.f(\overrightarrow{b}) & - & f(\overrightarrow{c}) & = & f^2(\overrightarrow{u}) & \textit{deux fois} \\ 4.\overrightarrow{a} & + & 9.\overrightarrow{b} & + & \overrightarrow{c} & = & f^2(\overrightarrow{u}) & \end{array}$$

On a un système de trois équations à trois inconnues vectorielles qu'on écrit même matriciellement

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \\ f(\overrightarrow{u}) \\ f^2(\overrightarrow{u}) \end{pmatrix}$$

Si on veut, on résout $\begin{pmatrix} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \overrightarrow{u} \\ f(\overrightarrow{u}) \\ f^2(\overrightarrow{u}) \end{pmatrix}$ avec une matrice inversible (c'est VanDer-Monde qui le dit, ou même le calcul direct).

On a bien unicité de la décomposition si elle existe.

Pour l'inclusion, on repart de notre système et on applique encore f (une ligne de plus)

$$\begin{array}{ccccccccc} \overrightarrow{a} & + & \overrightarrow{b} & + & \overrightarrow{c} & = & \overrightarrow{u} & & 6 \\ 2.\overrightarrow{a} & + & 3.\overrightarrow{b} & - & \overrightarrow{c} & = & f(\overrightarrow{u}) & & 1 \\ 4.\overrightarrow{a} & + & 9.\overrightarrow{b} & + & \overrightarrow{c} & = & f^2(\overrightarrow{u}) & & -4 \\ 8.\overrightarrow{a} & + & 27.\overrightarrow{b} & - & \overrightarrow{c} & = & f^3(\overrightarrow{u}) & & 1 \end{array}$$

et on combine avec les coefficients donnés 1, -4, 1 et 6 qui ne sont pas là par hasard. Chaque colonne s'en va et il ne reste que $f^3(\overrightarrow{u}) - 4.f^2(\overrightarrow{u}) + f(\overrightarrow{u}) + 6.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.
Notre vecteur $\overrightarrow{u}$ de la somme des trois sous-espaces est dans le noyau indiqué.

Évidemment, ce polynôme $X^3 - 4.X^2 + X + 6$ *ne vient pas de nulle part, c'est* $(X-2).(X-3).(X+1)$*, celui de racines* 2, 3 *et* -1.
Et l'inclusion $Ker(f - 2.Id) \subset Ker(f^3 - 4.f^2 + f + 6.Id)$ *se montre avec le classique* $Ker(h) \subset Ker(g \circ h)$.

Comment avez vous trouvé

$$1 = \frac{(X-2).(X-3)}{12} + \frac{(X-2).(X+1)}{4} - \frac{(X-3).(X+1)}{3}$$

Si c'est en développant et résolvant un système, c'est bon, vous avez fait le job, vous avez passé quatre minutes de votre précieuse vie à faire des calculs sans intérêt. Ce ne sera ni la première ni la dernière fois.

Si c'est en citant « interpolateurs de Lagrange », vous avez sorti votre intelligence, et il vous reste trois minutes cinquante pour faire ce que vous voulez.

On sait en effet que la famille de trois polynômes $\big((X-2).(X-3),\ (X-2).(X+1),\ (X-3).(X+1)\big)$ est libre (évaluer en -1, en 2 et "). Elle a le bon cardinal. Tout polynôme se décompose d'une façon unique, en particulier 1.
Et maintenant qu'on sait que la décomposition existe, on trouve ses coefficients en calculant en -1, 2 et 3

$$1 = \alpha.(3-2).(3-3) + \beta.(3-2).(3+1) + \gamma.(3-3).(3+1)$$

Ah c'est trop beau de raisonner avant de calculer !

Appliqué formellement à f ceci donne (sachant que $1 = X^0$ devient Id)

$$Id = \frac{(f - 2.Id) \circ (f - 3.Id)}{12} + \frac{(f - 2.Id) \circ (f + Id)}{4} - \frac{(f - 3.Id).(f + Id)}{3}$$

$$Id = \frac{(f^2 - 5.f + 6.Id)}{12} + \frac{(f^2 - f - 2.Id)}{4} - \frac{(f^2 - 2.Id - 3.Id)}{3}$$

On applique ensuite en $\overrightarrow{u}$.