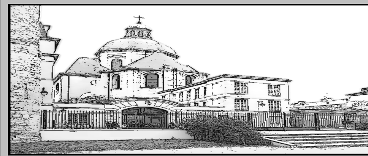
LYCEE CHARLEMAGNE

Merdredi 21 mai

M.P.S.I.2



2024 2025

IS28

♡ 0 ♡ Vrai ou pas vrai : la partie réelle d'un imaginaire pur est un imaginaire pur. 1 pt.

♡ 1 ♡ Faux ou pas faux : si (u_n) est une suite à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ strictement croissante, alors la moyenne de Cesàro de $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge. 2 pt.

♡ 2 ♡ Vérifiez par le calcul direct que $k \longmapsto (5+k^3)\%10$ est une permutation de $range(10)$et donnez sa signature. 2 pt.

♡ 3 ♡ Justifiez que le développement limité en 0 de $\dfrac{1}{1+e^h}$ est bien $\dfrac{1}{2}-\dfrac{h}{4}+\dfrac{h^3}{48}+o(h^3)_{h\to 0}$, non pas en dérivant, mais par produit en croix. 2 pt.

♡ 4 ♡ A et B sous-espaces vectoriel de $(E,+,.)$. Montrez : $(A+B=B) \Leftrightarrow (A\subset B)$. 3 pt.

♡ 5 ♡ Définition de A est équivalente à B (A et B matrices rectangulaires de même format). 1 pt.
Montrez que s A et B sont deux matrices carrées inversibles de même format, alors elles sont équivalentes. 2 pt.

♢ 0 ♢ On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&0\\1&1&2\end{pmatrix}^{-1}$. Montrez que $C(A)$ et $C(B)$ sont deux sous-espaces vectoriels de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$. 2 pt. Déterminez $\dim(C(A))$ et $\dim(C(B))$. 3 pt. A-t-on $C(A)+C(B)=C(A)\oplus C(B)$? 1 pt. A-t-on $C(A)+C(B)=M_3(\mathbb{R})$? 1 pt. $C(A)$ est le commutant de A c'est à dire l'ensemble des matrices M vérifiant $AM=M.A$.

♢ 1 ♢ On pose $A=\begin{pmatrix}1&5\\2&9\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-2&3&-2\\-3&3&-1\end{pmatrix}$. Montrez que A et B sont inversibles. 2 pt. Résolvez $B.U=U$ d'inconnue vectorielle U. Montrez que 1 est dans le spectre de B, de B^2, de B^{-1} et de B^T. 4 pt.
On définit $\varphi = M\longmapsto A.M.B$. Montrez que φ est un endomorphisme de $(M_{p,q}(\mathbb{R}),+,.)$ (après avoir précisé quels sont les deux seuls formats p et q possibles). 2 pt. Explicitez φ^{-1}. Donnez le noyau de φ. 2 pt.
Donnez la matrice C de φ sur la base canonique de $(M_{p,q}(\mathbb{R}),+,.)$ (attention, cette matrice sera de format $p\times q$ sur $p\times q$). 3 pt. Montrez que C est inversible. 2 pt. A est elle bistochastique ? 1 pt.

♣ 0 ♣ Le nouveau président de la république de la Roumanie Nicusor Dan est un mathématicien, qui a fait une partie de ses études supérieures à l'ENS Ulm. En 1988, il avait représenté la Roumanie aux Olympiades Internationales de mathématiques, et avait fait partie des quatre pour cent des candidats ayant réussi à traiter le problème 6, dont l'énoncé est ci-dessous (même Terence Tao qui concourait d'ailleurs pour la troisième fois aux OIM n'avait pas réussi [1]).

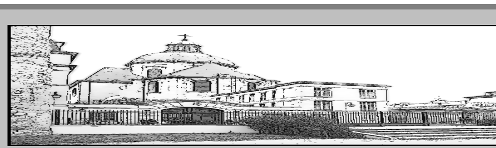
Énoncé du problème 6 des OIM 1988 : a et b sont deux entiers naturels, on suppose que $1+a.b$ divise a^2+b^2, il faut alors montrer que le quotient $\dfrac{a^2+b^2}{1+a.b}$ est un carré parfait.

Votre mission ne sera pas de trouver la solution (descente infinie, en variante « Viète » et hyperboles, à lire sur internet) [2], mais de vérifier • que les couples $(8,\ 30)$ et $(30,\ 112)$ sont solutions, 1 pt.
• que les couples $(a,\ a^3)$ sont solutions (dites « solutions triviales »), 1 pt.

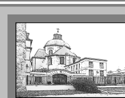
Écrivez un programme qui pour N donné cherche tous les couples solutions non triviales $(a,\ b)$ avec $1\leqslant a\leqslant b\leqslant N$. 3 pt.

1. excusez Tao, il n'avait que 13 ans, et il était quand même le meilleur
2. même Raphaël

LYCEE CHARLEMAGNE
Merdredi 21 mai
M.P.S.I.2



2024 2025
IS28
CORRECTION



IS28 Questions de cours.

La partie réelle d'un imaginaire pur $0 + i.y$ est 0. Et c'est un imaginaire pur puisqu'on peut l'écrire $i.0$.

Si la suite (u_n) est à valeurs entières, strictement croissante, alors pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n \in \mathbb{Z}$ et $u_{n+1} - u_n > 0$.
On a donc pour tout n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 1$. Par récurrence évidente, on a $u_n \geqslant u_0 + n$.

Oh non, pas par récurrence ! On n'est plus en terminale. On écrit juste

$$u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) \geqslant u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 1 = u_0 + n$$

Avouez que c'est quand même plus classe.
Si vous n'avouez pas, ce n'est pas grave, on a besoin aussi d'ingénieurs bourrins.

Par « encadrement », la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
Par théorèmes (au pluriel), la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ (dont l'existence ne pose pas de problème) converge vers 0 et sa moyenne aussi.

On calcule les images (modulo 10) et on constate que les images sont les entiers de 1 à 9, chacun atteint une fois et une seule.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
k^3	0	1	8	27	64	125	...6	...3	...2	...9
k^3+1	1	2	9	28	65	126	...7	...4	...3	...0
$(k^3+1)\%10$	1	2	9	8	5	6	7	4	3	0

On décompose en produit de cycles

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 9 & 8 & 5 & 6 & 7 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{(0\,1\,2\,9)} \circ \overrightarrow{(3\,8)} \circ \overrightarrow{(4\,5\,6\,7)}$$

La signature vaut $(-1)^3.(-1)^1.(-1)^3$ ce qui fait 1. (de toutes façons, une chance sur deux environ[3]).

On fait confiance au cours pour dire que $\dfrac{1}{1+e^h}$ admet un développement limité en 0 qui serait donné par $f(0+h) = f(0) + h.f'(0) + \dfrac{h^2}{2}.f''(0) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(0) + o(h^3)$. Mais on ne va pas dériver trois fois, on sait que bon nombre d'entre vous vont planter le calcul.
Alors on part de « le développement limité existe », et « on connaît celui de l'exponentielle ».
Reste à prouver par produit en croix $f(h).(1+e^h) = \frac{1}{1+e^h}.(1+e^h) = 1$ et comme on nous le propose, on va développer

$$\Big(\frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^3}{48} + o(h^3)\Big).\Big(1 + 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)\Big) = ca\ va\ se\ simplifier$$

Mais comme on est vraiment en maths, on rend ceci lisible

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{1}{2} & -\frac{h}{4} & & +\frac{h^3}{48} & +o(h^3) \\
2 & +1 & -\frac{h}{2} & & +\frac{h^3}{24} & +o(h^3) \\
+h & +\frac{h}{2} & -\frac{h^2}{4} & & +o(h^3) & +o(h^3) \\
+\frac{h^2}{2} & +\frac{h^2}{4} & -\frac{h^3}{8} & & +o(h^3) & +o(h^3) \\
+\frac{h^3}{6} & +\frac{h^3}{6} & +o(h^3) & & +o(h^3) & +o(h^3) \\
+o(h^3) & +o(h^3) & +o(h^3) & \dots & +o(h^3) & +o(h^3)
\end{array}$$

il ne reste bien que $1 + o(h^3)_{h\to 0}$.

---

3. je dis environ, car si la permutation est Id, on sait que sa signature est 1 sans jouer à pile ou face

On doit montrer deux implications, et la conclusion est parfois une double inclusion.

Hypothèse $A+B=B$	Objectif $A\subset B$	
	Tout élément $\overrightarrow{a}$ de A s'écrit $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{0}$ et appartient donc à $A+B$. Il est donc dans B.	
Hypothèse : $A\subset B$	Objectif $A+B=B$	
	On prend $\overrightarrow{u}$ dans $A+B$. Il s'écrit $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ pour un $\overrightarrow{a}$ de A (donc de B) et un $\overrightarrow{b}$ de B. $\overrightarrow{u}$ est la somme de deux vecteurs de B, il est dans B.	On prend $\overrightarrow{b}$ dans B. Il est dans $A+B$ puisque il s'écrit $\overrightarrow{0}+\overrightarrow{b}$.

La relation « est équivalente à » est celle qui a besoin de deux matrices inversibles.[4]

A est équivalente à B si et seulement si il existe deux matrices carrées inversibles de formats compatibles P et Q vérifiant $A=P.B.Q$: A $=$ P $\times$ B $\times$ Q

Prenons A et B inversibles et carrées de même format. On a alors $\boxed{A=A.B.B^{-1}}$ On a pris $P=A$ et $Q=B^{-1}$.

IS28 Sous-espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R}),+,.)$.

On calcule sans effort A^2 et A^3. Reste à trouver trois réels vérifiant

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8&0\\0&0&64\end{pmatrix}=\alpha.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\beta.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{pmatrix}+\gamma.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&16\end{pmatrix}$$

En SII on fera résoudre le système $\left\{\begin{array}{cccc|}\alpha&+\beta&+\gamma&=&1\\\alpha&+2.\beta&+4.\gamma&=&8\\\alpha&+4.\beta&+16.\gamma&=&64\end{array}\right.$ par l'ordinateur.

En physique, on résoudra le système $\left\{\begin{array}{cccc|}\alpha&+\beta&+\gamma&=&1\\\alpha&+2.\beta&+4.\gamma&=&8\\\alpha&+4.\beta&+16.\gamma&=&64\end{array}\right.$ par combinaisons ou en inversant $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&4&16\end{pmatrix}^{-1}.\begin{pmatrix}1\\8\\64\end{pmatrix}$.

En maths, on écrira le système $\left\{\begin{array}{cccc|}\alpha&+\beta&+\gamma&=&1\\\alpha&+2.\beta&+4.\gamma&=&8\\\alpha&+4.\beta&+16.\gamma&=&64\end{array}\right.$ et on dira qu'il a une solution (matrice de VanDer-Monde, de déterminant non nul).

Et vous, quelle a été votre méthode ?
Bon, si vous avez calculé, histoire que vous n'ayez pas bossé pour rien : $\alpha=8$, $\beta=-14$ et $\gamma=7$.

Pour une matrice A donnée (celle de l'énoncé ou une autre), on note que $C(A)$ est une partie de $M_3(\mathbb{R})$ par définition même.
La matrice nulle $0_{3,3}$ vérifie bien $A.0_{3,3}=0_{3,3}.A$.
On se donne deux matrices M et N vérifiant respectivement $A.M=M.A$ et A.N=N.A . Par simple calcul, on a bien $A.(\lambda.M+\mu.N)=(\lambda.M+\mu.N).A$ en développant.

La seul difficulté, mais elle est fatale pour ceux qui n'ont toujours pas compris ce qu'est une variable et ce que sont les maths : je prends deux fois la même matrice M : $A.M=M.A$ et $A.M=M.A$ et j'écris des formules pour faire plaisir au prof et pour faire croire à moi même que je fais des maths parce que j'aligne des = et des $\times$ ».

• Pour la dimension de $C(A)$, on sait qu'elle ne peut pas dépasser 9 (celle de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$) et même 8 (car certaines matrices de $M_3(\mathbb{R})$ n'y sont pas), et qu'elle vaut au moins 3 car on y trouve I_3, A et A^2 (et les suivantes, mais ça n'apporte rien puisque A^3 est combinaison de I_3,A et A^2).

4. celle avec des formats carrés et une seule matrice, c'est « semblable »

On résout bravement le système $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Les équations de a forme $1.b = b.2$ donnent la nullité de six coefficients sur neuf. Bref, on a uniquement les matrices diagonales, de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$.
L'espace vectoriel $C(A)$ est de dimension 3.

• Pour $C(B)$, on réfléchit avant de calculer. Trop tard ? Vous avez calculé $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -12 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$. Grand bien vous fasse.

> *Et vous avez écrit les neuf équations pour neuf inconnues ? Grand bien vous fasse encore, mais on est en maths, d'accord ?*
> *On réfléchit.*
> *Et vous avez tenté par réflexe de diagonaliser B pour me faire plaisir ? Pourquoi pas. Mais notez que je vous l'ai donnée sous forme diagonalisée !*

On écrit avec des notations directement issues de l'énoncé $B = P.D.P^{-1}$.
On résout $M.B = B.M$ en l'écrivant $M.P.D.P^{-1} = P.D.P^{-1}.M$ puis même $P^{-1}.M.P.D = D.P^{-1}.M.P$.
Vous comprenez l'idée ? On met des parenthèses : $D.(P^{-1}.M.P) = (P^{-1}.M.P).D$.
On demande à ce que la matrice $P^{-1}.M.P$ soit dans le commutant de la matrice D qui est quand même bien plus simple !
On a fait le calcul pour A mais c'est pareil pour D. Le commutant d'une matrice diagonale à termes distincts est fait de matrices diagonales uniquement (espace de dimension 3).
En partant de $P^{-1}.M.P = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, on trouve $M = P. \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} .P^{-1}$.
On a un espace vectoriel de dimension 3 engendré par $M = P. \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1}$ et les deux autres en déplaçant de 1 sur la diagonale.

Peut on écrire $C(A) + C(B) = C(A) \oplus C(B)$? Pour que la somme soit directe, il faut et il suffit d'avoir $C(A) \cap C(B) = \{0_{3,3}\}$.
Mais justement, la matrice unité I_3 est dans ces deux commutants à la fois (et dans tous les commutants).
On ne peut donc même pas écrire $C(A) \oplus C(B)$.

Pour savoir si on a $C(A) + C(B) = M_3(\mathbb{R})$, regardons déjà les dimensions.
$\dim(C(A) + C(B)) = \dim(C(A)) + \dim(C(B)) - \dim(C(A) \cap C(B)) = 6 - \dim(C(A) \cap C(B))$
Et $\dim(M_3(\mathbb{R}))$ vaut 9. On en est loin.

Qui a tartiné les définitions au lieu de réfléchir un peu en termes simples et mathématiques ?
Cela dit, connaître ses définitions est aussi la clef de la réussite. Mais une clef nécessaire pas suffisante.

IS28 — Problème d'Olympiades.

On doit vérifier que $1 + 8.30$ divise $8^2 + 30^2$. On calcule $1 + 8.30 = 241$ (une bonne tête de premier de classe et même de premier tout court).

On refuse de calculer $8^2 + 30^2$, on se contente de l'écrire $2^2.(4^2 + 15^2)$. Le facteur 2^2 reste de côté, et on doit juste chercher si $16 + 9.25$ est divisible par 241.
De tête : $9.25 + 16 = 10.25 - 25 + 16 = 250 - 9 = 241$. Bingo.
Et le quotient vaut 4, carré parfait.

Bon d'accord, calculer $8^2 + 30^2$ se faisait aussi de tête. Le physicien a m^me été plus rapide que moi.

On recommence avec le quotient $\dfrac{30^2 + 112^2}{1 + 30.112}$ dont on doit voir s'il est non seulement entier mais même carré parfait.

$$\frac{30^2+112^2}{1+30.112} = 4.\frac{15^2+56^2}{1+3360} = 4.\frac{3361}{3361} = 4$$

On se donne a, on doit vérifier que $1+a.a^3$ divise $a^2+(a^3)^3$ et que le quotient est un carré parfait. On factorise$a^6+a^2=(a^4+1).a^2$ et a^2 est un carré parfait (on a raison de les qualifier de solutions triviales).

On va avoir un test : `1+a*b` divise `a*a + b*b` : c'est avec des modulo et plus jamais des bidouillages de calculette :

$$(a*a+b*b)\ \%\ (1+a*b)\ ==\ 0$$

Et un test `b != a*a*a` (oui, `a` est le plus petit des deux, et le cube c'est donc `b`).
On va mettre ceci dans une boucle où b pourra aller de `1` à `N` (`range(1, N+1)`) et ou a pourra aller de `1` à `b`.

```
def olympiade(N) : #int -> list of list of int
....L = [ ] #liste des réponses
....for b in range(1, N+1) :
.......for a in range(1, b+1) :
...........if (a*a+b*b) % (1+a*b) == 0 and b != a*a*a :
...............L.append([a,b])
```

Pour N = 10000, j'ai [(8, 30), (30, 112), (27, 240), (112, 418), (64, 1020), (418, 1560), (240, 2133), (125, 3120), (1560, 5822), (216, 7770)].

Nicușor Dan est né à Făgăraș dans le județ de Brașov le 20 décembre 1969[1] d'un père ouvrier et d'une mère comptable.
Il obtient son baccalauréat au lycée Radu-Negru de sa ville natale en 1988. Il reçoit la médaille d'or lors des Olympiades internationales de mathématiques en 1987 et 1988, et il est l'un des rares candidats à résoudre le difficile problème du saut de Viète.
À l'âge de 18 ans, il part étudier les mathématiques à l'université de Bucarest. En 1992, il émigre en France pour poursuivre ses études à l'École normale supérieure et à l'université Paris-XI, avant de soutenir sa thèse de doctorat en mathématique à l'université Paris-XIII. Il retourne à Bucarest en 1998, en raison de différences culturelles et du désir de contribuer au changement de la Roumanie.
Il est l'un des fondateurs et le premier directeur administratif de l'École normale supérieure de Bucarest, une université créée sur le modèle de l'École normale supérieure dans le cadre de l'Institut de mathématiques de l'Académie roumaine.

Le saut de Viète est une technique relativement récente dans la résolution de problèmes d'olympiades mathématiques, car le premier problème d'olympiade à l'utiliser dans une solution a été proposé en 1988 lors des Olympiades internationales de mathématiques et longtemps considéré comme le problème le plus difficile de l'histoire du concours.
Arthur Engel a écrit ce qui suit à propos de la difficulté du problème :

> « Aucun des six membres du comité australien du problème n'a pu le résoudre. Deux des membres étaient George Szekeres et sa femme, tous deux célèbres pour résoudre des problèmes et en créer. Comme c'était un problème de théorie des nombres, il fut envoyé aux quatre théoriciens des nombres australiens les plus renommés. On leur avait demandé d'y travailler pendant six heures. Aucun d'eux ne put le résoudre dans le temps imparti. Le comité du problème le soumit au jury de l'OMI XXIX marqué d'un double astérisque, ce qui signifiait que le problème était peut-être trop difficile pour être posé. Après une longue discussion, le jury a finalement eu le courage de le choisir comme le dernier problème de la compétition. Onze étudiants donnèrent des solutions parfaites.»

Parmi les onze étudiants (sur près de 300) qui obtinrent le score maximum pour la résolution de ce problème, il y avait
Ngô Bao Châu, futur médaillé Fields,
Ravi Vakil, professeur de mathématiques à Stanford,
Zvezdelina Stankova, professeure au Mills College, et
Nicușor Dan, mathématicien devenu politicien roumain, élu en mai 2025 président de la république en Roumanie.
En revanche, bien que Terence Tao eût obtenu une médaille d'or à cette olympiade, il avait échoué à ce seul problème.

IS28 Produit tensoriel.

La matrice A est inversible. La matrice B aussi (déterminant -2).

L'équation $B.U=U$ donne un système dégénéré $\begin{array}{rrrcl} & y & -2.z & = & x \\ -2.x & +3.y & -2.z & = & y \\ -3.x & -3.y & -z & = & z \end{array}$. On trouve $z=0$ puis $x=y$ et on vérifie qu'on a raisonné par équivalences.

Les solutions de $.U = U$ forment la droite $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.

On a des vecteurs propres de valeur propre 1, c'est donc que 1 est dans le spectre.

D'ailleurs $B.U = U \Leftrightarrow (B - I_3).U = 0_3$ et comme il y a des solutions non nulles, c'est bien que $B - I_3$ n'est pas inversible. Et donc $\det(B - I_3) = 0$ pour ceux qui ne jurent que par le polynôme caractéristique.

Le même vecteur U non nul $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vérifie $U = B^{-1}.U$ (en ayant multiplié $B.U = U$ par B^{-1} à gauche).
On déduit que 1 est valeur propre de B^{-1}.

Si λ est valeur propre de M alors $\dfrac{1}{\lambda}$ est valeur propre de M^{-1} (en tout cas pour M inversible).

On a aussi $B^2.U = B.(B.U) = B.U = U$. Et 1 est encore valeur propre de B^2.

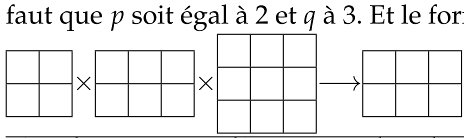
Si λ est valeur propre de M alors λ^2 est valeur propre de B^2. Ça se lit sur la diagonale de D. Ou par le même raisonnement.
Et sinon $\det(M^2 - \lambda^2.I_n) = \det\big((M - \lambda.I_n).(M + \lambda.I_n)\big) = \det(M - \lambda.I_n).\det(M + \lambda.I_n) = 0$ à cause d'un des facteurs.

Enfin, même sans chercher de vecteur propre explicite, on a $\det(M^T - I_3) = \det(M - I_3) = 0$ en transposant.

Le spectre de M^T est le même que celui de M. On peut passer à la transposée dans $\det(M - \lambda.I_n)$.
On peut aussi transposer $M = P.D.P^{-1}$ dans le cas diagonalisable.

Et si vous aimez calculer, un vecteur propre de B^T de valeur propre 1 est $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Quel format de matrice M va rendre le produit $A.M.B$ cohérent ? Et quel sera le format final $[2,\ 2]$ $[p,\ q]$ $[3,\ 3]$ il faut que p soit égal à 2 et q à 3. Et le format final est bien $[2,\ 3]$.



L'application φ va d'un espace dans lui même. Et elle est linéaire. On se donne M et N ainsi que α et β et on calcule $A.(\alpha.M + \beta.N).B$. On trouvé évidemment $\alpha.(A.M.B) + \beta.(A.N.B)$.

Notre endomorphisme est même un automorphisme car on connaît explicitement sa réciproque : $N \longmapsto A^{-1}.M.B^{-1}$ (en résolvant $A.M.B = N$ d'inconnue M fonction de N).

Son noya est réduit à $O_{2,3}$ (matrice nulle de taille 2 sur 3. En effet, la résolution de $A.M.B = 0_{2,3}$ donne $M = 0_{2,3}$ en multipliant par A^{-1} à gauche et par B^{-1} à gauche aussi (une fois qu'on s'est mis de l'autre côté de sa feuille quand même).

La question sur la matrice de φ est ambigüe, car il y a deux bases assez canoniques de $(M_{2,3}(\mathbb{R}), +, .)$, suivant comment le 1 se promène.
On va juste devoir calculer les images des six vecteurs de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et les décomposer sur la base.

0	-2	-3	0	-10	-15
1	3	3	5	15	15
-2	-2	-1	-10	-10	-5
0	-4	-6	0	-18	-27
2	6	6	9	27	27
-4	-4	-2	-18	-18	-9

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -10 & 15 & -10 \\ -18 & 27 & -18 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -15 & 15 & -5 \\ -27 & 27 & -9 \end{pmatrix}$

La question pour certains élèves ? Comment utiliser cette matrice 9 sur 9 sur une matrice 2 sur 3 $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$?

Les formats n'ont pas l'air compatibles.

Mais il faut exprimer $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$ sur la base canonique de $(M_{2,3}(\mathbb{R}), +, .)$.

C'est alors une matrice de taille 6 en écrivant les six coefficient en colonne dans l'ordre des vecteurs de la base canonique.

vecteur	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}$	a pour image	$\begin{pmatrix} -2.b-3.c-10.b'-15.c' & a+3.b+\dots & -2.a-2.b\dots \\ \dots & 2.a+6.b+6.c+9.a'+\dots & \dots \end{pmatrix}$
a pour composantes			a pour composantes
	$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 & -10 & -15 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 15 & 15 \\ -2 & -2 & -1 & -10 & -10 & -5 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & -18 & -27 \\ 2 & 6 & -6 & 9 & 27 & 27 \\ -4 & -4 & -2 & -18 & -18 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

Cette matrice de taille 6 sur 6 a quand même des informations cachées et une règle de construction.

Je la coupe en quatre parts $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 & -10 & -15 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 15 & 15 \\ -2 & -2 & -1 & -10 & -10 & -5 \\ & & & & & \\ 0 & -4 & -6 & 0 & -18 & -27 \\ 2 & 6 & -6 & 9 & 27 & 27 \\ -4 & -4 & -2 & -18 & -18 & -9 \end{pmatrix}$.

Dans chacune, vous reconnaissez presque la matrice B. Ou en tout cas un multiple de B^T

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 & 0 & -10 & -15 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & 15 & 15 \\ -2 & -2 & -1 & -10 & -10 & -5 \\ & & & & & \\ 0 & -4 & -6 & 0 & -18 & -27 \\ 2 & 6 & -6 & 9 & 27 & 27 \\ -4 & -4 & -2 & -18 & -18 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^T & 5.B^T \\ 2.B^T & 9.B^T \end{pmatrix}$$

Et étrangement, ces coefficients $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ sont ceux de A.

L'étape était calculatoire.
Pouvait on la sauter et gagner des points ensuite ? Oui, en étant matheux.

Et sinon, pouvait on aborder la suite comme un fanatique du calcul ?
La matrice de taille 6×6 est inversible.
Et je ne calcule pas son déterminant.
C'est la matrice de φ sur la base canonique. Et φ est bijective. Cette matrice est donc inversible.

Vous voulez son inverse ? Facile c'est la matrice de $N \longmapsto A^{-1}.N.B^{-1}$ sur la base canonique de $(M_{2,3}(\mathbb{R}), +, .)$.