

LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi juin

M.P.S.I. 2



2024

2025

TD30

<0>

Calculez $\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Min}(2^n, 2025 \cdot 2^{-n})$.

On a une infinité de termes. C'est une série. On va commencer par travailler à horizon fini N et on verra si les sommes partielles $\sum_{n=0}^N \text{Min}(2^n, 2025 \cdot 2^{-n})$ tendent vers quelque chose quand N tend vers l'infini.

On voit que $\text{Min}(2^n, 2025 \cdot 2^{-n})$ peut valoir 2^n ou $\frac{2025}{2^n}$.

On voit même qu'à partir d'une valeur de n convenable, ce sera $\frac{2025}{2^n}$ qui sera le plus petit.

On résout donc $\frac{2025}{2^n} \leq 2^n$ d'inconnue entière n . On trouve après passage au logarithme (ou estimation directe par les puissances connues, ou usage d'un tableur si on est au collège) :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	$n \geq 6$	jusqu'à l'infini
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	2^n	
$2025 \cdot 2^{-n}$	2025	1012.5	506.25	253.125	126.5...	63.2...	31.6	15.8...	$\frac{2025}{2^n}$	
Minimum	1	2	4	8	16	32	$\frac{2025}{2^6}$	$\frac{2025}{2^6}$	$\frac{2025}{2^n}$	

Puisque N est destiné à tendre vers l'infini, on peut supposer $N > 6$ et couper par relation des Chasles

$$\sum_{n=0}^N \text{Min}(2^n, 2025 \cdot 2^{-n}) = \sum_{n=0}^5 2^n + \sum_{n=6}^N \frac{2025}{2^n} = 63 + 2025 \cdot \frac{\frac{1}{2^6} - \frac{1}{2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}}$$

On tient une valeur explicite et elle a une limite quand N tend vers $+\infty$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Min}(2^n, 2025 \cdot 2^{-n}) = \sum_{n=0}^5 2^n + \sum_{n=6}^{+\infty} \frac{2025}{2^n} = 63 + 2025 \cdot \frac{\frac{1}{2^6}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4041}{32}$$

La valeur en soi n'a aucun intérêt. Les maths sont donc finalement tout sauf de l'art. En effet, ce n'est pas le résultat qui importe mais le chemin pour y parvenir.

<1>

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Montrez que $M \mapsto A \cdot M$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Déterminez son noyau. Est-il surjectif ? Déterminer son rang.

Attention, on a dit $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. On étudie donc $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

La matrice obtenue est aussi 2 sur 2. Endo !

Et la linéarité repose sur $A \cdot (\alpha \cdot M + \beta \cdot N) = \alpha \cdot A \cdot M + \beta \cdot A \cdot N$.

Si l'on ne résolvait que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ on trouverait $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

ici, le noyau est fait des matrices dont les deux colonnes sont dans cet espace.

$$\text{Ker}(M \mapsto A \cdot M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

Ce noyau est de dimension 2.

L'ensemble de départ est de dimension 4.

L'ensemble image est par soustraction de dimension 2. L'application n'est pas surjective de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dans lui

même.

Son rang vaut 2. Les matrices images ont toutes une dixième ligne qui est le double de la première...

Mais le rang de A vaut 1.

◁2▷

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminez les dimensions des ensembles suivants en donnant à chaque fois une base :

$C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ $C_B = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid B.M = M.B\}$ $C_A \cap C_B$ $T_A = \{A.M - M.A \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$ et $T_A \cap C_B$.

Pour le commutant de A^1 , le plus simple est d'en revenir aux coefficients.

On égalise $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a quatre équations pour quatre inconnues. C'est bon signe, mais si le système ne dégénérât pas, il n'y aurait que la solution nulle. Or, on sait qu'il n'y a pas qu'elle.

C'est donc que le système dégénère (et c'est normal, car on a par exemple $\text{Tr}(A.M) = \text{Tr}(M.A)$ qui nous enlève une équation).

Et on sait même que I_2 et A seront solutions.

L'espace des solutions est au moins de dimension 2.

C'est donc que le système dégénère d'avantage que d'une équation perdue.

On en perd au minimum deux.

Peut-on en perdre trois ? les quatre équations seraient alors proportionnelles. Ce n'est pas le cas.

Le système de quatre équations va donc donner un espace de dimension supérieure ou égale à 2 (présence de I_2 et A)

et strictement inférieure à 3 (sinon quatre fois la même équation)

L'espace des solutions est de dimension 2, et les deux éléments I_2 et A en forment une base.

Oh la vache. Je viens de tout faire sans calcul. C'est le physicien qui sommeille en vous qui doit être surpris. Il n'a rien vu venir. Et le matheux qui vit en vous doit jubiler.

Bref : $C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\} = \text{Vect}(I_2, A)$

Mais bon, je vais le faire façon élève de Sup (et donc bon élève), en me tapant le système.

On a donc obtenu

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} a & +3.c & = a + b \\ a & -c & = c + d \\ b & +3.d & = 3.a - b \\ b & -d & = 3.c - d \end{array}$$

Remarque :

Comparez mon écriture du système avec	$\begin{array}{rcl} a & +3.c & = a + b \\ a & -c & = c + d \\ b & +3.d & = 3.a - b \\ b & -d & = 3.c - d \end{array}$
---------------------------------------	---

Comprenez vous pourquoi je dois non seulement vous apprendre à calculer juste (ça vous le faites sinon vous auriez moins de trois de moyennes toutes matières scientifiques confondues), mais aussi vous apprendre calculer proprement.

Ne vous contentez pas de « j'ai toujours su résoudre mes systèmes même sans les présenter bien ». Faites l'effort de casser vos MAUVAISES habitudes (pléonasme ?). Acceptez l'idée que vous pouvez rendre vos méthodes et calculs rigoureux et lisibles avec de petites idées à la con.

On poursuit :

$$\begin{array}{rcl} a & +3.c & = a + b \\ a & -c & = c + d \\ b & +3.d & = 3.a - b \\ b & -d & = 3.c - d \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} a & +3.c & = a + b \\ a & -c & = c + d \\ 2.b & +3.d & = 3.a \\ b & -d & = 3.c \end{array}$$

1. puisque tel est le nom de l'ensemble des matrices M vérifiant $A.M = M.A$

On va pouvoir effacer une équation.

Re-remarque : Vous aviez quatre équations, il n'en reste plus que trois.
 Votre cerveau doit tout de suite réagir : il s'est passé quelque chose.
 Il est MILLE fois plus important que vos réflexes soient là dessus :
 « combien d'équations » (une question de dimensions)
 plutôt que « quand il passe de l'autre côté, c'est 3.c ou -3.c ? ».

Les deux équations du milieu sont à leur tour équivalentes. Il n'en reste que deux :

$$\begin{array}{rclclcl} a & +3.c & = & a & +b & \\ a & -c & = & & c+d & \Leftrightarrow b = 3.c \\ b & +3.d & = & 3.a & -b & \\ b & -d & = & 3.c & -d & \\ & & & a & = 2.c +d & \end{array}$$

Le travail est fini. Quatre inconnues, deux équations, dimension 2 (ah zut, je refais des maths au lieu de faire du calcul).

On a la forme des matrices : $\begin{pmatrix} 2.c+d & 3.c \\ c & d \end{pmatrix}$ qu'on écrit même $c \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Une base est alors $\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et notre espace est de dimension 2.

Si vous savez mener proprement ces étapes, avec des équivalences et non des implications qui se barrent en couille, si vous séparez en base à la fin, vous avez le niveau naturel d'un élève de Sup... Si ce type de question dépasse votre entendement, que faites vous ici ? Et comment avez vous eu votre bac ?

Remarque encore : On a obtenu $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ par cette méthode parfaite.
 Avec ma méthode de matheux pur, j'avais obtenu $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$.
 Sont ces les mêmes ?
 Réponse : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 pour un sens.
 Et vous avez les formules de changement de base dans l'autre sens.

Pour le commutant de B , on trouve $\text{Vect}(I_2, B)$.

Et pour $C_A \cap C_B$?

On sait que c'est un espace de dimension 0, 1 ou 2.

On sait que B est dedans. Sa dimension vaut au moins 1.

Peut elle valoir 2 ? On aurait alors $C_A = C_B$. Et A qui est dans C_A serait dans C_B .

Or, « A ne commute pas avec B ».

On s'arrête à la dimension 1 : $C_A \cap C_B = \text{Vect}(I_2)$.

Attention : Une réponse ratée pour une intersection de sous-espaces peut être :
 $A = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ et $B = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w})$ donc $A \cap B = \text{Vect}(\vec{u})$.
 En quoi la ligne ci dessus est elle une énorme connerie ?
 On a certes $\vec{u} \in A \cap B$ et donc $\text{Vect}(\vec{u}) \subset A \cap B$.
 Mais on a peut être d'autres vecteurs encore en commun. Si une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coïncide avec une combinaison de $\vec{u}$ et $\vec{w}$.
 Tenez : $\text{Vect}(\vec{i}, \vec{i} + \vec{j}) \cap \text{Vect}(\vec{i}, 2.\vec{i} - 3.\vec{j})$ ne se réduit pas à $\text{Vect}(\vec{i})$.
 Si vous n'abordez les exercices qu'avec le point de vue formel et non géométrique, vous écrivez des bêtises avec une candeur de premier communiant.

Pour ce qui est de $T_A = \{A.M - M.A \mid M \in M_2(\mathbb{R})\}$, on a la forme générale de ses éléments :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.c - b & -3.a + 2.b + 3.d \\ a - 2.c - d & b - 3.c \end{pmatrix}$$

Les naïfs diront alors « dimension 4 ».

Pauvres de naïfs. Ils auraient alors $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ tout entier. Alors que les matrices en $A.M - M.A$ ont forcément une trace nulle, et ne recouvrent au mieux qu'un sous-espace de dimension 3.

Ce qu'on peut dire avec rigueur et calme, c'est

$$T_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

La dimension est inférieure ou égale à 4.

Mais on élimine de la famille les vecteurs inutiles : le dernier est colinéaire au premier.

$$T_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\right)$$

la dimension ne dépassera pas 3.

$$\text{Mais on a aussi } 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut encore en effacer une : $T_A = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Cette fois, les matrices sont indépendantes. La dimension vaut 2.

$T_A \cap C_B$ est de dimension 0, 1 ou 2.

Enfin, non, pas 2 car on n'a pas $T_A = C_B$ (I_2 est dans C_B mais pas dans T_A car T_A est inclus dans l'espace des matrices de trace nulle).

Existe-t-il une matrice non nulle à la fois dans T_A et C_B (si c'est le cas on aura une droite, sinon, on aura $\{0_{2,2}\}$).

Peut on trouver a, b, c et d vérifiant

$$a \cdot \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On note que ceci revient à se demander si la famille des quatre matrices est libre...

Et à se demander si elle engendre $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Ce qui donnerait $T_A + C_B = M_2(\mathbb{R})$, de dimension 4.

Allez, tous calculs faits : $T_A \cap C_B = \{0_{2,2}\}$.

◀3▶

Montrez que $P \mapsto P(0)$, $P \mapsto P'(1)$ et $P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$ sont des formes linéaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ (notées φ , ϕ et ψ).

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (1, 0, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 1, 0)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 1)$.

Trouvez P vérifiant $(\varphi(P), \phi(P), \psi(P)) = (0, 0, 0)$.

Montrez que (φ, ϕ, ψ) est libre.

Ces applications sont bien définies.

Elles prennent un polynôme et associent un réel. Elles vont de $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$ dans $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

Pour la linéarité, j'écris en une fois : P et q donnés ainsi que α et β , on a bien

$(\alpha.P + \beta.Q)(0) = \alpha.P(0) + \beta.Q(0)$, $(\alpha.P + \beta.Q)'(1) = \alpha.P'(1) + \beta.Q'(1)$ et la dernière.

Conseil : utilisez P et q , et non pas P et P' .

Première requête : P doit vérifier $P(0) = 1$, $P'(0) = 0$ et $\int_0^1 P(t).dt = 0$.

On résout un petit système et on trouve $P_0(X) = \frac{3.X^2}{2} - 3.X + 1$ (vérifiez).

Le second système donne $P_1(X) = \frac{3.X^2}{4} - \frac{X}{2}$ et le dernier $P_2(X) = -\frac{3.X^2}{2} + 3.X$

Et le dernier ? Il donne le polynôme nul.

Montrez que (φ, ϕ, ψ) est libre.

Pour la liberté de (φ, ϕ, ψ) on se donne α, β et γ et on suppose $\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma.\psi = 0$ (forme linéaire nulle). Objectif : $\alpha = \beta = \gamma = 0$.²

Comme c'est vrai pour tout polynôme, on peut être tenté d'écrire

$$\forall (a, b, c), (\alpha.\varphi + \beta.\phi + \gamma.\psi)(a.X^2 + b.X + c) = 0$$

2. pensez dans ces petits raisonnements à indiquer votre objectif

et d'en déduire des choses.

Mais comme c'est vrai pour tout polynôme, c'est vrai en particulier pour P_0 , P_1 et P_2 .

Pour P_0 , cela donne $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0$. D'où $\alpha = 0$.

Et pour P_1 ? On trouve $\beta = 0$.

Et pour P_2 : oui, c'est γ .

Les trois polynômes P_0 , P_1 et P_2 forment d'ailleurs une base de $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$

(pour la liberté, partez de $a.P_0 + b.P_1 + c.P_2 = 0$ et appliquez φ , puis ϕ puis ψ).

On les appelle « base duale de (φ, ϕ, ψ) ».

◀4▶

Soient $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ cinq vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$. Montrez $\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) - 3 \geq \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)) - 5$.

On ne sait pas si la famille initiale est libre (et donc ses sous familles aussi).

Notons que si elle l'est, alors $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ est de dimension 5 et $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est de dimension 3 (à chaque fois, la famille citée est une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre), et la formule demandée est une égalité.

Sinon, si elle est liée, la dimension de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)$ descend d'au moins une unité, tandis que celle de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ ne descend pas forcément (exemple : $\vec{u}_5$ est combinaison de $\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ mais $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ est libre...).

On écrit

$$\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) + \text{Vect}(\vec{u}_4, \vec{u}_5)$$

(somme pas forcément directe).

On passe aux dimensions :

$$\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)) = \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) + \dim(\text{Vect}(\vec{u}_4, \vec{u}_5)) - \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \cap \text{Vect}(\vec{u}_4, \vec{u}_5))$$

On majore :

$$\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)) \leq \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) + \dim(\text{Vect}(\vec{u}_4, \vec{u}_5))$$

On majore encore :

$$\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)) \leq \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) + 2$$

On remplace : $\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{u}_5)) \leq \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)) + 5 - 3$.

On fait passer de l'autre côté et c'est fini.

Le résultat se généralise $\dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)) - k \geq \dim(\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k, \dots, \vec{u}_n)) - n$.

◀5▶

♥ Faites en une famille liée dans l'espace vectoriel des matrices de format 2 sur 2 dont la trace est nulle :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 & \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

Bon, il faut déjà que ce soient des matrices de trace nulle :

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} \right)$$

Et ensuite ?

Facile, ce sont quatre matrices dans $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ (dimension 3).

Quels que soient les coefficients choisis, la famille est liée...

◀6▶

Ce problème a pour objectif de mettre en place des outils qui servent à établir le théorème de Banach-Tarski (qualifié aussi de paradoxe car il va à l'encontre du "bon-sens" dès qu'on accepte quelques points de la théorie des ensembles) :

on peut découper Sucrî en cinq morceaux (mathématiquement définissables, mais physiquement irréalisables) qui, une fois ré-assemblés donnent deux Sucrî de même taille.

On définit $S = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

Bien sûr, il ne s'agit ici que d'une partie de la démonstration, mais si vous lui appliquez une bonne transformation, vous la dédoublez, et si vous recommencez, vous finirez bien par avoir la démonstration entière. Mais je vous préviens, à un moment il faut utiliser l'axiome du choix pour prendre un représentant par classe d'équivalence des isométries modulo les sous-groupes qu'on définit ici. Il y a des éléments dans l'épreuve de Capes 2004, dans le livre de Michel Wirth et dans un vieux livre de Jean-Marie Arnaudies.

~0) Calculez le déterminant de chacune. Calculez S^2 , R^2 , $R^t R$, $S.R$ et $R.S$.

On calcule les premiers produits demandés :

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & R^2 = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix} & R^3 = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 & 10 \\ 2 & 25 & -10 \\ -10 & 10 & 23 \end{pmatrix} \\ \hline S.R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & R.S = \frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix} & R^t R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \hline \end{array}$$

On peut déjà dire : $R.S \neq S.R$ et $S^2 = I_3$.

On n'oublie pas de multiplier les $\frac{1}{3}$ devant les matrices.

Pour le déterminant, il y a un piège grossier qui vous est tendu : $\det(\alpha.M) = \alpha^3 \cdot \det(M)$.

C'est ainsi que si on trouve $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 27$, on a quand même $\det\left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\right) = 1$.

De même $\det(R) = \det(S) = 1$

D'ailleurs, quand on a $S^2 = I_3$, on a sans tarder $\det(S)^2 = 1$, ce qui ne nous laisse que peu de choix...

~1) Montrez que 1 est valeur propre de S en donnant au moins un vecteur propre.

Si on cherche un vecteur propre de S de valeur propre 1, on résout $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Le

système dégénère et on trouve les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix}$. On garde un générateur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (facile à vérifier).

~2) Montrez que S admet une valeur propre double mais se diagonalise quand même.

Ensuite, nul besoin de chercher loin l'autre valeur propre.

Seul l'élève bourrin (ou sage et peu imaginaire) va se lancer dans le calcul du polynôme caractéristique "parce que c'est comme ça qu'on a fait une fois dans le cours, alors je fais toujours comme on a fait la première fois". Si je faisais tout comme je l'ai fait la première fois, ma femme m'aurait quitté depuis longtemps...

On nous dit qu'il y a une valeur propre en double. Or, la somme des valeurs propres est la trace (M et D ont la même trace) : $1 + \lambda + \lambda = \text{Tr}(S) = -1$. C'est donc que l'autre valeur propre cherchée vaut -1 .

Si malgré tout vous avez développé $\det(S - \lambda.I_3)$, vous avez dû trouver $-\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1$, et vous avez dû trouver aussi le chemin de la salle de PC.

On cherche les vecteurs propres associés : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Grosse dégénérescence : $2x + y + z = 0$. On a un plan de vecteurs propres. Alors on se laisse aller à y prendre deux

vecteurs indépendants, plus le vecteur propre de valeur propre 1 : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

On vérifie $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La matrice S se diagonalise en dépit de son spectre $[-1, -1, 1]$.

~3) Montrez que le groupe engendré par S pour la multiplication (plus petit sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \circ)$ contenant S) est de cardinal fini.

Le sous groupe engendré par S est simple : $\{I_3, S\}$

S est son propre inverse, et quand on effectue des produits, on retombe toujours sur S ou I_3 .

I~0) Montrez que 1 est valeur propre de R et de tR . Montrez que le plan d'équation $x + y = 0$ est stable par R (c'est à dire l'image de tout vecteur de ce plan est dans ce plan).

On résout $R.U = U$ d'inconnue U et on trouve les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$ (on retient le générateur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ à

moins qu'on ne préfère $\begin{pmatrix} 17 + \sqrt{5\pi} \\ 17 + \sqrt{5\pi} \\ 0 \end{pmatrix}$).

Pour tR , c'est amusant, mais le même vecteur convient. Et c'est normal.

On a trouvé : $R.{}^tR = I_3$ d'où ${}^tR = R^{-1}$. Ayant $R.U = U$ pour le vecteur propre de valeur propre 1, on compose par R^{-1} : $U = R^{-1}.U$. On reconnaît que U est vecteur propre de R^{-1} de même valeur propre 1.

En toute généralité, si U est vecteur propre de R de valeur propre λ , alors il est vecteur propre de R^k de valeur propre λ^k , même pour k négatif.

Prenons ensuite un vecteur de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ et calculons son image : $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -x - 2z \\ x + 2z \\ 4x - z \end{pmatrix}$. Il vérifie encore "somme des deux premières composantes nulle", il est resté dans le plan.

I~1) Calculez R^2 , R^3 et exprimez R^3 comme combinaison linéaire de R^2 , R et I_3 .

On a calculé les puissances, on cherche la combinaison :

R^3	$a.R^2$	$b.R$	$c.I_3$
$\frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 2 & 10 \\ 2 & 25 & -10 \\ -10 & 10 & 23 \end{pmatrix}$	$\frac{a}{9} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \end{pmatrix}$	$\frac{b}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$	$c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les termes hors de la diagonale nous informent vite : $24.a + 18.b = 2$ et $12.a - 18.b = 10$.

On trouve $a = \frac{1}{3}$ et $b = -\frac{1}{3}$ (on vérifie dans les autres cases), et on complète $c = 1$.

On résume : $R^3 = \frac{R^2}{3} - \frac{R}{3} + I_3$

I~2) Dédisez que les puissances de R (d'exposant positif comme d'exposant -1) sont toutes dans $\text{Vect}(I_3, R, R^2)$.

On en déduit que R^3 est dans $\text{Vect}(I_3, R, R^2)$ (et évidemment, I_3, R et R^2 y étaient déjà).

Par une récurrence forte, on va montrer que les R^n y sont tous.

Supposons pour un n donné que tous les R^k de R^0 à R^n sont dans $\text{Vect}(I_3, R, R^2)$.

Objectif : R^{n+1} y est aussi.

Or, en partant de $R^3 = \frac{R^2}{3} - \frac{R}{3} + I_3$ et en multipliant par R^{n-2} , on a $R^{n+1} = \frac{R^n}{3} - \frac{R^{n-1}}{3} + R^{n-2}$

Chacun des termes du membre de droite est un élément de $\text{Vect}(I_3, R, R^2)$ par hypothèse de récurrence forte.

Par stabilité de l'espace vectoriel engendré, R^{n+1} y est aussi.

La clef était donc une récurrence. Mais pas une petite récurrence n à $n+1$ mais une récurrence forte (ou pour le moins à triple hérédité) de $n-2$, $n-1$ et n à $n+1$. On n'a pas de formule explicite pour R^n en fonction de I_3 , R et R^2 mais c'est jouable, par étude de suites récurrentes linéaires.

Il manque le cas des exposants négatifs. On sait que R est inversible, et son inverse est tR .

Mais ceci ne nous renseigne pas sur l'écriture comme combinaison de I_3 , R et R^2 .

Mais on a vu la méthode dans le cours (ou en T.D., mais il faut être bas de plafond pour se dire "ah si c'est en TD et pas dans le cours, c'est pas à connaître").

On isole $R^3 - \frac{R^2}{3} + \frac{R}{3} = I_3$. On multiplie par R^{-1} (qui existe) :

$$R^2 - \frac{R}{3} + \frac{I_3}{3} = R^{-1}$$

On a gagné, R^{-1} est combinaison de I_3 , R et R^2 .

Et mes grands presque ennemis qui ne pensent qu'à calculer avant de raisonner auront calculé R^{-1} et auront posé un système qu'ils auront résolu. Preuve qu'on peut même réussir quand on n'a pas de cerveau. D'ailleurs, il suffit de regarder ceux qui veulent nous gouverner.

On notera qu'on pourrait reprendre le même raisonnement et montrer que chaque R^{-n} est aussi dans $\text{Vect}(I_3, R, R^2)$.

I~3) Montrez que la suite $(\text{Tr}(R^n))$ vérifie $t_{n+3} = \frac{t_{n+2}}{3} - \frac{t_{n+1}}{3} + t_n$ pour tout n .

On repart de notre formule obtenue par multiplication :

$$R^{n+3} = \frac{R^{n+2}}{3} - \frac{R^{n+1}}{3} + R^n$$

On passe à la trace, linéaire : $\text{Tr}(R^{n+3}) = \frac{1}{3} \cdot \text{Tr}(R^{n+2}) - \frac{1}{3} \cdot \text{Tr}(R^{n+1}) + \text{Tr}(R^n)$.

On a donc, en posant $\text{Tr}(R^n) = t_n$: $t_{n+3} = \frac{t_{n+2} - t_{n+1} + 3 \cdot t_n}{3}$ et

$t_0 = 3$	$t_1 = \frac{1}{3}$	$t_2 = \frac{-5}{9}$	$t_3 = \frac{73}{27}$
-----------	---------------------	----------------------	-----------------------

I~4) Déduisez : $\text{Tr}(R^n) = 1 + 2 \cdot \cos(n \cdot \arccos(-1/3))$.

C'est une suite récurrente linéaire d'équation caractéristique $\lambda^3 = \frac{\lambda^2 - \lambda + 3}{3}$.

On cherche les racines de $3X^3 - X^2 + X - 3$. On factorise en $(X-1) \cdot (3X^2 + 2X + 3)$.

On a trois racines distinctes :

$$1, \frac{-1 + i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3} \text{ et } \frac{-1 - i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}$$

Le cours nous dit que t_n est de la forme $a \cdot 1^n + b \cdot \left(\frac{-1 + i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}\right)^n + c \cdot \left(\frac{-1 - i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}\right)^n$, avec b et c conjugués.

On constate avec les données initiales encadrées ci-dessus : $a = b = c = 1$.

On a donc $t_n = 1^n + \left(\frac{-1 + i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}\right)^n + \left(\frac{-1 - i \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{3}\right)^n$ pour tout n .

Mais quel rapport avec l'énoncé ? Si on pose $\theta = \arccos(-1/3)$, on a $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$ et $\sin(\theta) = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{3}$.

On reconnaît bien $t_n = 1 + \left(e^{i \cdot \theta}\right)^n + \left(e^{-i \cdot \theta}\right)^n$ pour tout n .

Par formules de Euler et Moivre : $t_n = 1 + 2 \cdot \cos(n \cdot \theta)$

D'ailleurs, au passage, on avait $X^3 - \frac{X^2}{3} + \frac{X}{3} - 1 = (X-1) \cdot (X^2 + \frac{2}{3}X + 1)$ et on retrouvait nos polynômes $X^2 - 2 \cdot \cos(\theta) \cdot X + 1$ croisés dès le mois de septembre.

I~5) Montrez que $\text{Tr}(M^n)$ est, pour n dans $\mathbb{N}^*$, un rationnel de la forme $\frac{v_n}{3^n}$ avec v_n entier, congru à 1 modulo 3.

Ce n'est pas avec la forme $t_n = 1 + 2 \cdot \cos(n \cdot \theta)$ qu'on montre que les t_n sont tous rationnels, sauf à utiliser les polynôme d'un certain Pafnouti Tchebitchev.

Mais par récurrence simple, on montre que R^n est dans $M_3(\mathbb{Q})$ pour tout n .

La trace est donc une somme de rationnels, c'est un élément du corps $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

On sent d'ailleurs les 3 qui vont s'accumuler au dénominateur. Mais pourquoi ne disparaîtraient ils pas tout à coup, comme dans

On pose $v_n = 3^n \cdot t_n$. On va montrer que les v_n sont tous des entiers. On a $v_0 = 3$, $v_1 = 1$, $v_2 = -5$ et $v_3 = 73$. C'est bien parti. On part encore de $t_{n+3} = \frac{t_{n+2} - t_{n+1} + 3 \cdot t_n}{3}$ et on multiplie par 3^{n+3} :

$$v_{n+3} = v_{n+2} - 3 \cdot v_{n+1} + 9 \cdot v_n$$

Une récurrence à triple hérédité dit que ce sont toujours des entiers.

On réduit modulo 3 : $v_{n+3} = v_{n+1} \pmod{3}$.

Les v_k sont tous des entiers de même congruence modulo 3 : $v_n = 1 \pmod{3}$ pour tout n (au moins pour n pouvant s'écrire $k+3$, ce qui explique que $n=0$ soit à part).

I~6) Montrez que le groupe engendré par R pour la multiplication est de cardinal infini.

Les rationnels t_n sont de la forme $\frac{v_n}{3^n}$ avec $v_n = 1 \pmod{3}$. Ils ne se simplifient donc pas.

Ils ont donc tous des dénominateurs différents.

Ce sont donc des rationnels tous différents.

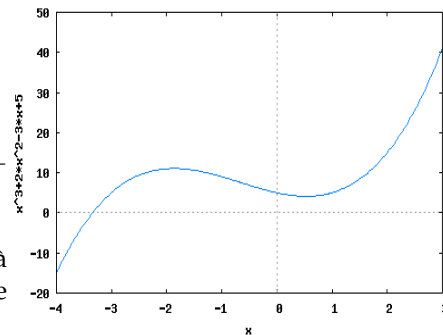
Les matrices R^n sont donc toutes différentes. Et il y en a une infinité. Le groupe $\{R^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est bien infini.

Pratiquement, ce sont des rotations de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ ayant toutes le même axe et des angles en $n \cdot \arccos(-1/3)$. Comme $\arccos(-1/3)$ n'est pas un multiple rationnel de π , on tombe sur des angles tous différents, même en réduisant modulo 2π .

II~0) On admet que les éléments du sous-groupe G engendré par S et R sont de la forme $S^p \cdot R^{a_1} \cdot S \cdot R^{a_2} \cdot S \cdot R^{a_3} \dots R^{a_d} \cdot S^q$ où les a_i sont des entiers relatifs, et où p et q valent 0 ou 1 (par exemple $S \cdot R^2 \cdot S \cdot R^{-3} \cdot S$ ou $R^5 \cdot S \cdot R^7 \cdot S$ ou $R^8 \dots$). Montrez que les éléments de G ont tous au moins une valeur propre réelle (imaginez le graphe du polynôme caractéristique d'une matrice de taille 3).

L'idée est de former toutes les matrices qu'on peut avec R et S . On va avoir toutes les puissances de R , et toutes les puissances de S . Mais les puissances de S ne sont que deux : I_3 et S .

Comme R et S ne sont pas permutables, quand on met bout à bout des R et des S un peu au hasard, on n'a pas de simplification (hormis si deux S sont côte à côte).



Chaque matrice M de G est de taille 3 à coefficients réels.

Son polynôme caractéristique est de degré 3, de la forme $-\lambda^3 + \text{Tr}(M) \cdot \lambda^2 - \text{Min}_2(M) \cdot \lambda + \det(M)$.

C'est un polynôme de degré 3 à coefficients réels.

Par théorème des valeurs intermédiaires avec comportement à l'infini, on trouve qu'il y a une ou trois racines (ou même une simple et une double en cas critique).

On peut retenir que toute matrice réelle de format impair admet au moins une valeur propre réelle.

II~1) On prend M dans G de la forme $S^p \cdot R^{a_1} \cdot S \cdot R^{a_2} \cdot S \cdot R^{a_3} \dots R^{a_d} \cdot S^q$, simplifiez ${}^t M \cdot M$.

On prend M dans G , elle est de la forme $M = S^p \cdot R^{a_1} \cdot S \cdot R^{a_2} \cdot S \cdot R^{a_3} \dots R^{a_d} \cdot S^q$.

On calcule sa transposée : ${}^t M = {}^t(S^q) \cdot {}^t(R^{a_d}) \cdot {}^t S \cdot {}^t(R^{a_{d-1}}) \dots {}^t(R^{a_1}) \cdot {}^t(S^p)$ (règle : ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$).

On effectue : ${}^t M \cdot M = \left({}^t(S^q) \cdot {}^t(R^{a_d}) \cdot {}^t S \cdot {}^t(R^{a_{d-1}}) \dots {}^t(R^{a_1}) \cdot {}^t(S^p) \right) \cdot \left(S^p \cdot R^{a_1} \cdot S \cdot R^{a_2} \dots R^{a_d} \cdot S^q \right)$

Par associativité, on regroupe ceux du milieu de ${}^t(S^p) \cdot S^p$ en étudiant les deux cas possibles :

$p = 0$	$p = 1$
I_3	$S \cdot {}^t S = S^2 = I_3$

Le terme du milieu se simplifie : ${}^t M \cdot M = {}^t(S^q) \cdot {}^t(R^{a_d}) \cdot {}^t S \cdot {}^t(R^{a_{d-1}}) \dots {}^t(R^{a_1}) \cdot R^{a_1} \cdot S \cdot R^{a_2} \dots R^{a_d} \cdot S^q$.

Cette fois, on a ${}^t(R^a) \cdot R^a$. C'est ${}^t R \cdot {}^t R \dots {}^t R \cdot R \cdot R \dots R$. Chaque rencontre ${}^t R \cdot R$ donne I_3 . Et au final, il ne reste plus rien là encore.

Dans ${}^t M \cdot M = {}^t(S^q) \cdot {}^t(R^{a_d}) \cdot {}^t S \cdot {}^t(R^{a_{d-1}}) \dots S \cdot S \cdot R^{a_2} \dots R^{a_d} \cdot S^q$ les $S \cdot S$ se simplifient à nouveau.

On a derechef une rencontre ${}^t(R^{a_2}) \cdot R^{a_2}$ qui donne encore I_3 .

Bref, tout se simplifie étape par étape grâce à ${}^t S \cdot S = I_3$ et ${}^t(R^a) \cdot R^a = I_3$.

Finalement : ${}^t M.M = I_3$

II~2) Déduisez pour tout vecteur propre de M , noté U de valeur propre λ : ${}^t U.U = {}^t (M.U).(M.U) = \lambda^2.{}^t U.U$.

On prend un vecteur propre de M de valeur propre λ . On traduit : $M.U = \lambda.U$ (vecteur colonne).

On transpose : ${}^t (M.U) = \lambda.{}^t U$ (le réel λ passe au travers) : vecteur ligne.

On multiplie : ${}^t (M.U).(M.U) = \lambda.{}^t U.\lambda.U = (\lambda)^2.{}^t U.U$ (le réel passe encore au travers).

On vérifie les formats : $\begin{pmatrix} \nabla & \star \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \star & \star \\ \star & \star \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla \\ \star \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot \begin{pmatrix} \nabla & \star \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \nabla \\ \star \end{pmatrix} = \lambda^2 \cdot (\diamond) = \text{reel}$

Ensuite, on a ${}^t (M.U).(M.U) = ({}^t U.{}^t M).(M.U) = {}^t U.{}^t M.M.U = {}^t U.I_3.U = {}^t U.U$.

II~3) Déduisez que 1 est toujours valeur propre de M .

Par transitivité : ${}^t U.U = \lambda^2.{}^t U.U$.

On a envie de simplifier : $1 = \lambda^2$.

Il y a un détail à surveiller : le réel ${}^t U.U$ est non nul. Et c'est une somme de carrés de réels $\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$\sum_{k=1}^n (x_k)^2$. Comme le vecteur est non nul, cette somme est non nulle.

On a donc bien $\lambda^2 = 1$.

Les seules valeurs propres possibles pour une matrice de G sont -1 et 1 (en tout cas pour ce qui est des valeurs propres réelles).

Il nous reste à prouver que les éléments de G ont pour valeur propre 1.

On sait déjà qu'ils ont au moins une valeur propre réelle. Mais on ne sait rien des deux autres.

On va distinguer deux cas :

- les trois valeurs propres sont réelles

on a vu qu'elles ne pouvaient valoir que 1 ou -1

or, leur produit vaut 1 (déterminant)

il n'est donc pas possible que les trois valeurs propres valent -1 (produit égal à -1)

il y a donc au moins une des valeurs propres qui vaut 1

- il y a au moins une valeur propre non réelle

mais comme le polynôme caractéristique est à coefficients réels, le conjugué de cette valeur propre est aussi valeur propre

comme il y a une valeur propre réelle, le spectre est du type [réel, complexe, conjugué]

le produit des valeurs propres vaut 1 (déterminant) : réel.carré du module du complexe=1

le réel ne peut donc pas être négatif

par élimination, la valeur propre vaut 1

Je résume : spectre d'un élément de G : $\begin{bmatrix} 1, 1, 1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1, -1, -1 \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} 1, z, \bar{z} \end{bmatrix}$

En fait, les éléments de G sont des rotations, comme produit de rotations.

Et une rotation de $\mathbb{R}^3$, ça a toujours un axe, et cet axe, c'est la droite de valeur propre 1.

Attention, quand on compose deux rotations d'axes distincts, on obtient une nouvelle rotation dont l'axe n'est pas facile à déterminer.

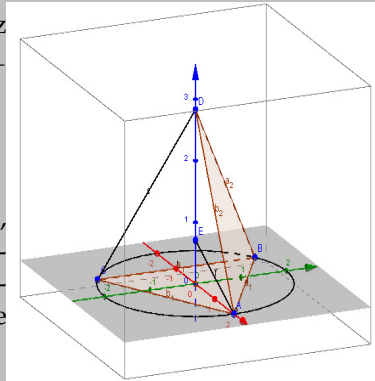
III~0) Retrouvons ici pourquoi l'angle $\text{Arccos}(-1/3)$ intervient en mathématiques, en physique et en chimie, avec le tétraèdre (le chimiste l'écrit $109^\circ 47'$ et des poussières car il adore apprendre par coeur des trucs approximatifs et de surcroît cabalistiques quand il est si simple de les retrouver en une ligne). Un tétraèdre a pour sommets A_0 à A_3 avec tous les $A_i A_j$ égaux, et pour centre de gravité G .

Simplifiez $(\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3)$, développez $(\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3) \cdot (\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3)$.

Concluez : $(\vec{GA}_i, \vec{GA}_k) = \text{Arccos}(-1/3)$.

Vérifiez que c'est aussi $2 \cdot \text{Arctan}(\sqrt{2})$.

Pour l'obtenir d'une autre façon : $A_0(2, 0, 0)$, $A_1(-1, \sqrt{3}, 0)$, $A_2(-1, -\sqrt{3}, 0)$ et $A_3(0, 0, 2\sqrt{2})$. Vérifiez que les $A_i A_k$ sont tous égaux. Donnez les coordonnées du centre de gravité G . Retrouvez le cosinus de l'angle $(\vec{GA}_i, \vec{GA}_k)$.



On a quatre points de A_0 à A_3 et leur centre de gravité (c'est à dire leur moyenne).

Par définition même de l'isobarycentre, le vecteur $\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3$ est nul.

Sinon, on note (x_k, y_k, z_k) les coordonnées de chacun des points, on sait que G a pour coordonnées $\left(\frac{x_0 + x_1 + x_2 + x_3}{4}, \dots\right)$ et le calcul confirme la chose.

Bref, $\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3$ est nul.

Donc, le produit scalaire $(\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3) \cdot (\vec{GA}_0 + \vec{GA}_1 + \vec{GA}_2 + \vec{GA}_3)$ est nul aussi.

Mais quand on le développe, on a seize termes : $\sum_{\substack{i \leq 3 \\ k \leq 3}} \vec{GA}_i \cdot \vec{GA}_k$.

Il y a quatre termes à mettre à part : ceux où i et k coïncident : $\vec{GA}_i \cdot \vec{GA}_i$.

Mais, de par la position centrale de G , ces quatre termes sont tous égaux par symétrie des rôles à $|\vec{GA}_0|^2$.

Il reste ensuite douze termes avec i différent de j , qui mesurent non plus des normes mais des produits scalaires de deux vecteurs de même norme, faisant entre eux un angle inconnu.

Quoi qu'il en soit, par symétrie des rôles, les douze termes ont la même valeur $\vec{GA}_0 \cdot \vec{GA}_1$ qu'on écrit aussi $|\vec{GA}_0|^2 \cdot \cos(\alpha)$ où α est l'angle qu'on retrouve entre tous les "rayons vecteurs".

La grande somme vaut donc $4 \cdot |\vec{GA}_0|^2 + 12 \cdot |\vec{GA}_0|^2 \cdot \cos(\alpha)$.

Mais on a dit aussi qu'elle était nulle.

On simplifie, on fait passer de l'autre côté : $\cos(\alpha) = -1/3$.

On rappelle la formule : $\cos(\alpha) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ avec $t = \tan(\alpha/2)$. On isole : $3 \cdot (1-t^2) = -(1+t^2) : t^2 = 2$. On extrait : $t = \sqrt{2}$ car $\alpha/2$ est entre 0 et $\pi/2$.

On a donc $\text{Arccos}\left(-\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \text{Arctan}(\sqrt{2})$

On prend les points et on mesure les distances

	$(2, 0, 0)$	$(-1, \sqrt{3}, 0)$	$(-1, -\sqrt{3}, 0)$	$(0, 0, 2\sqrt{2})$
$(2, 0, 0)$	0	$\sqrt{3^2 + 3}$	$\sqrt{3^2 + 3}$	$\sqrt{2^2 + 4 \cdot 2}$
$(-1, \sqrt{3}, 0)$	$\sqrt{3^2 + 3}$	0	$2 \cdot \sqrt{3}$	$\sqrt{1 + 3 + 4 \cdot 2}$
$(-1, -\sqrt{3}, 0)$	$\sqrt{3^2 + 3}$	$2 \cdot \sqrt{3}$	0	$\sqrt{1 + 3 + 4 \cdot 2}$
$(0, 0, 2\sqrt{2})$	$\sqrt{2^2 + 4 \cdot 2}$	$\sqrt{1 + 3 + 4 \cdot 2}$	$\sqrt{1 + 3 + 4 \cdot 2}$	0

Elles valent toutes $\sqrt{12}$, on a bien un tétraèdre régulier.

On détermine son centre de gravité en calculant la moyenne des coordonnées : il est sur l'axe Oz : $G(0, 0, \sqrt{2}/2)$.

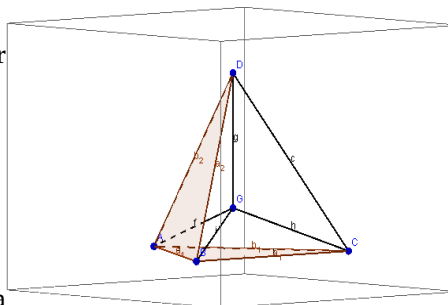
On prend ensuite deux vecteurs issus de ce centre $\vec{GA_0}$ et $\vec{GA_3}$ par

commodité : $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$.

Déjà, les deux ont la même norme : $\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

On calcule leur produit scalaire : $-3/2$.

On rappelle : $\vec{GA_0} \cdot \vec{GA_3} = |\vec{GA_0}| \cdot |\vec{GA_3}| \cdot \cos(\widehat{\vec{GA_0}, \vec{GA_3}})$ et on a encore un cosinus qui vaut $-1/3$.



Remarque : suivant la dimension n , l'angle au centre de la "figure" régulière à $n + 1$ sommets est

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	n
$\text{Arccos}(-1) = \pi$	$\text{Arccos}(-1/2) = 2\pi/3$	$\text{Arccos}(-1/3)$	$\text{Arccos}(-1/n)$
segment	triangle équilatéral	tétraèdre	?

On rappelle la formule $\cos(\theta) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$. Avec $\cos(\theta) = -1/3$, on aboutit à $\tan^2(\theta/2) = 2$.

On garde la valeur positive, car θ est entre 0 et π (et $\theta/2$ entre 0 et $\pi/2$) : $\theta/2 = \text{Arctan}(\sqrt{2})$.

7

Lycee Charlemagne

MPSI2

Année 2023/24

FORMES

n est un entier naturel donné, on note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n . On se donne $n + 1$ réels distincts a_0 à a_n .

Montrez que chaque application $P \mapsto P(a_k)$ est une forme linéaire, notée φ_{a_k} .

Pour chaque polynôme P , la quantité $P(a)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$.

Pour P et Q donnés, ainsi que α et β , on a bien $\varphi_a(\alpha \cdot P + \beta \cdot Q) = \alpha \cdot \varphi_a(P) + \beta \cdot \varphi_a(Q)$, qui d'ailleurs vaut $\alpha \cdot P(a) + \beta \cdot Q(a)$.

On a bien pour chaque a une forme linéaire.

Montrez que ces formes sont indépendantes (on pourra utiliser par exemple $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$).

On part d'une relation du type $\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \varphi_{a_k} = 0$ (forme linéaire nulle). On doit montrer que les α_k sont tous nuls.

On traduit l'hypothèse : $\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \varphi_{a_k}(P) = 0$ (réel nul) pour tout polynôme P .

On pousse plus loin : $\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot P(a_k) = 0$ pour tout P (sans le "pour tout P ", tout est perdu).

• Si on ignore l'indication de l'énoncé, on regarde pour de polynômes P bien choisis :

$$\begin{array}{llllll} P(X) = 1 & : & \alpha_0 & + \alpha_1 & + \dots & + \alpha_n & = 0 \\ P(X) = X & : & \alpha_0 \cdot a_0 & + \alpha_1 \cdot a_1 & + \dots & + \alpha_n \cdot a_n & = 0 \\ P(X) = X^2 & : & \alpha_0 \cdot (a_0)^2 & + \alpha_1 \cdot (a_1)^2 & + \dots & + \alpha_n \cdot (a_n)^2 & = 0 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ P(X) = X^n & : & \alpha_0 \cdot (a_0)^n & + \alpha_1 \cdot (a_1)^n & + \dots & + \alpha_n \cdot (a_n)^n & = 0 \end{array}$$

C'est un système de VanDerMonde en les inconnues α_k , de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_0 & a_1 & & a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ (a_0)^n & (a_1)^n & & (a_n)^n \end{pmatrix}$ (de taille $n + 1$ sur

$n + 1$ disons le). La matrice est inversible (je peux même vous répéter son déterminant), l'unique solution est : tous les α_k sont nuls.

Mais on peut aussi utiliser l'indication et introduire le polynôme $\prod_{k=1}^n (X - a_k)$. Oui, on ne va que de 1 à n . Il est

donc de degré n et on est en droit de lui appliquer l'hypothèse : $\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot P_0(a_k) = 0$. Comme presque tous les a_k sont racines de P_0 , il ne reste que $\alpha_0 \cdot P_0(a_0) = 0$. Comme $P_0(a_0)$ vaut $\prod_{k=1}^n (a_0 - a_k)$, il est non nul, et il vient sans tarder : $\alpha_0 = 0$.

Avec les autres polynômes de Lagrange (puisque ce sont eux) :

$$\prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (X - a_k) \text{ donne } \alpha_i. \prod_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \neq i}} (a_0 - a_k) = 0 \text{ puis } \alpha_i = 0.$$

Bref, toute famille $(\varphi_{a_0}, \dots, \varphi_{a_n})$ est libre dans le dual $(L(E, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Déduisez $\exists(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(4) = \alpha \cdot P(0) + \beta \cdot P(1) + \gamma \cdot P(2)$.

Or, ce dual est de dimension $\dim(E) \cdot \dim(\mathbb{R})$ c'est à dire $n + 1$.

Une telle famille est donc une base de $(L(E, \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Toute autre forme linéaire s'exprime d'une façon unique comme combinaison linéaire de ces formes fondamentales.

Prenons comme proposé le cas $n = 2$ et les trois "formes d'évaluation en un point φ_0, φ_1 et φ_2 ". Elles forment une base de l'espace des formes linéaires sur $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$.

La forme φ_4 s'exprime à l'aide de celles ci avec une écriture $\varphi_4 = \alpha \cdot \varphi_0 + \beta \cdot \varphi_1 + \gamma \cdot \varphi_2$.

En redescendant d'un étage : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], P(4) = \alpha \cdot P(0) + \beta \cdot P(1) + \gamma \cdot P(2)$

Ceci ne raconte rien de plus que "quand je connais un polynôme de degré inférieur ou égal à 2 en trois points, je le connais partout". Par exemple, si je connais P en 0, 1 et 2, je le connais en 4. Et les coefficients qui me permettent d'exprimer $P(4)$ à l'aide de $P(0), P(1)$ et $P(2)$ sont les mêmes pour tous les polynômes P .

$$\text{L'élève qui aime calculer bêtement part d'un système } \left\{ \begin{array}{ccc|c} & & c & = P(0) \\ a & +b & +c & = P(1) \\ 4.a & +2.b & +c & = P(2) \end{array} \right\}, \text{ trouve } a, b \text{ et } c \text{ puis}$$

calcule $16.a^2 + 4.b + c$.

Aimer calculer n'est pas un défaut du tout.

C'est aimer calculer bêtement qui l'est.

Que pensez vous du résultats $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, P(3) = \alpha \cdot P(-1) + \beta \cdot P(0) + \gamma \cdot P(1) + \delta \cdot P(2)$.

On fait de même en dimension 4 avec les polynômes de degré inférieur ou égal à 3. La forme φ_3 est combinaison de $\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1$ et φ_2 (avec unicité).

On a donc $\exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, \forall P \in \mathbb{R}_3[X], P(3) = \alpha \cdot P(-1) + \beta \cdot P(0) + \gamma \cdot P(1) + \delta \cdot P(2)$.

Et c'est mille fois mieux que

$\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \exists(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4, P(3) = \alpha \cdot P(-1) + \beta \cdot P(0) + \gamma \cdot P(1) + \delta \cdot P(2)$

dans laquelle α, β, γ et δ dépendent de P (mais qui est juste, comme conséquence de la précédente).

Complétez : $\forall P \in \mathbb{R}_1[X], \int_0^1 P(t).dt = P(\dots)$.

La suite, c'est : la forme $P \mapsto \int_0^1 P(t).dt$ est combinaison linéaire (simple) de formes $P \mapsto P(a)$ et $P \mapsto P(b)$ quand on travaille sur le dual de $(\mathbb{R}_1[X], +, \cdot)$.

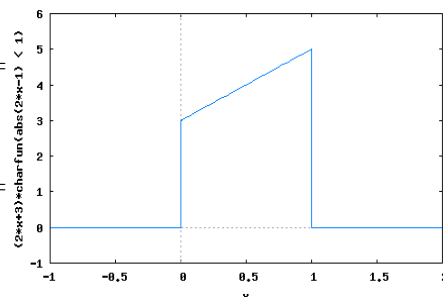
Mais il y a mieux, en choisissant bien le point a , les coefficients de la combinaison sont 1 et 0.

On regarde pour un polynôme quelconque $\int_0^1 (\lambda \cdot x + \mu).dx = \frac{\lambda}{2} + \mu$.

Pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 1 : $\int_0^1 P(t).dt =$

$$P\left(\frac{1}{2}\right).$$

Géométriquement c'est l'aire d'un trapèze.



Montrez : $\forall P \in \mathbb{R}_3[X], \int_0^1 P(t).dt = \frac{P\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{3}$.

Pour montrer $\int_0^1 P(t).dt = \frac{P\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + P\left(\frac{1}{2}\right) + P\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{3}$ pour tout P de $\mathbb{R}_3[X]$, quelle est la meilleure démarche mathématique ?

Le calcul certes, mais raisonnable.

Comme c'est une formule "linéaire" (de chaque côté on a une forme linéaire en P), il suffit de la prouver pour les vecteurs de la base canonique.

On va donc la prouver pour 1, X , X^2 et X^3 et non pas remplir des lignes et des lignes avec des $a.X^3 + b.X^2 + c.X + d$. Je ne dirai même pas que c'est une démarche de mathématicien(ne), mais tout simplement une démarche d'ingénieur qui découpe le travail en tâches distinctes, à confier à différents services.

$P(X)$	intégrale de 0 à 1	$P(a) + P(b) + P(c)$
1	1	3
X	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
X^2	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2$
X^3	$\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3 + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^3$

On voit que l'avant-dernière case nécessite un calcul et donne $\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{16}$ (les double-produits se simplifient) c'est à dire 1. La division par 3 redonne bien $\frac{1}{3}$.

Et là encore, un tableau m'a permis de rendre la chose claire, propre et intelligible.

Complétez : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \int_0^1 P(t).dt = \frac{P(\dots) + P(\dots)}{2}$.

Pour la dernière, je succombe à nouveau à mon vice :

$\frac{1}{8}$	$+3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$	$+3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{16}$	$+\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{64}$
$\frac{1}{8}$			
$\frac{1}{8}$	$-3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}$	$+3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{16}$	$-\frac{2 \cdot \sqrt{2}}{64}$

La somme vaut $\frac{3}{8} + 6 \cdot \frac{1}{16}$. On simplifie : $\frac{3}{4}$ et on divise par 4. C'est acquis.

Bilan : la valeur de l'intégrale d'un polynôme de degré inférieur ou égal à 3 sur $[0, 1]$, c'est la gentille moyenne de P en trois points bien choisis, tous trois dans $[0, 1]$, environ $\begin{matrix} P(0.15) & P(0.5) & P(0.85) \end{matrix}$

Hélas, la formule n'est pas valable pour un degré plus élevé. Ou alors il faudra rajouter des points. Mais où ? Je vous laisse deviner. Euh, non, ne cherchez pas.

On remonte aux polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On cherche a et b vérifiant $\int_0^1 P(t).dt = \frac{P(a) + P(b)}{2}$ pour tout polynôme P . Il suffit que ce soit vrai pour ceux de la base canonique.

$P(X)$	intégrale	moyenne	équation
1	1	1	aucune
X	$\frac{1}{2}$	$\frac{a+b}{2}$	$a+b=1$
X^2	$\frac{1}{3}$	$\frac{a^2+b^2}{2}$	$a^2+b^2=\frac{3}{2}$

Le système se résout par substitution encore plus vite que par les formules de Viète : $\begin{matrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \end{matrix}$

8 f est un endomorphisme de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ vérifiant $f \circ f \circ f = 0$ (application nulle). Montrez : $\text{rg}(f) + \text{rg}(f \circ f) \leq n$ (pensez à la formule du rang).

Si l'on a $f \circ f \circ f = 0$ alors on a $\text{Im}(f^2) \subset \text{Ker}(f)$ (chaque $f^2(\vec{a})$ a une image nulle par f).

On passe aux dimensions : $\dim(\text{Im}(f^2)) \leq \dim(\text{Ker}(f))$.

On rappelle ce qu'est le rang : la dimension de l'image, et on sort la formule du rang : $\text{rg}(f^2) \leq n - \text{rg}(f)$.
C'est fini.

◁9▷

Une matrice carrée de taille n est dite symétrique si $a_i^k = a_k^i$ pour tout couple (i, k) . Montrez que les matrices symétriques de taille n forment un espace vectoriel (dimension ?).

Une matrice carrée de taille n est dite gentil-symétrique si elle est symétrique par rapport à la "seconde" diagonale, comme $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & c \\ h & i & f & b \\ j & h & e & a \end{pmatrix}$. Montrez que c'est un espace vectoriel de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (dimension ?) noté G_n . Quantifiez l'appartenance à G_n : $a_i^k = a_{\dots}$.

Déterminez la dimension de $G_n \cap S_n$. Déterminez la dimension de $G_n + S_n$.

Bon, pour « espace vectoriel », il suffit de dire que la matrice nulle est symétrique et qu'une combinaison de matrices symétriques l'est aussi.

Ou alors on l'écrit $\text{Vect}(E_i^j + E_j^i \mid i \leq j \leq n)$ avec $E_i^j + E_j^i$ qui a ses 1 en colonne i et ligne j et vice versa.

On notera qu'on peut prendre $i \leq j$, car pour $i = j$, on récupère les matrices « de la diagonale ».

	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$
$i = 1$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Pour saisir en taille 3 :		$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$i = 2$			$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
$i = 3$			$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

La dimension est $n + (n - 1) + \dots + 1$ ce qui fait $\frac{n \cdot (n + 1)}{2}$.

Pour les gentil-symétriques, la dimension est la même.

On peut se contenter de l'affirmer.

On peut aussi écrire le critère : $a_i^k = a_{n+1-k}^{n+1-i}$

(obtenu par tâtonnements $\begin{pmatrix} a_1^1 = a_n^n & a_1^2 = a_{n-1}^{n-1} & a_1^3 = a_{n-2}^{n-2} & \dots & a_1^n = a_1^n \\ a_2^1 = a_{n-1}^{n-1} & a_2^2 = a_{n-2}^{n-2} & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$ et ainsi de suite).

On peut donner une base : (voir ci dessous).

On peut donner une caractérisation : $J_n \cdot M$ est symétrique avec J la matrice « antidiagonale » : $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On retrouve sous cette forme que les deux espaces auront bien la même dimension.

Pour l'intersection, on a plusieurs symétries, qui réduisent le nombre de coefficients à choisir.

	symétrique	et gentil-symétrique	les deux à la fois
	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$	$b = e$ et $a = f$	$\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$
En format 3 :	dimension 6	on en perd deux	dimension 4
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

	symétrique	et gentil-symétrique	les deux à la fois
	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$	$a = j, b = i, c = g, e = h$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & c \\ c & f & e & b \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$
En format 4 :	dimension 10	on en perd quatre	dimension 6
	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Formule générale : il faut remplir une partie de la matrice et le reste tombe par les deux symétries :

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La dimension va dépendre de la parité de n , à cause du coefficient central.

n impair	n pair
$n = 2.p + 1$	$n = 2.p$
$(2.p + 1) + (2.p - 1) + (2.p - 3) + \dots + 1$	$2.p + (2.p - 2) + (2.p - 4) + \dots + 2$
$(p + 1)^2$	$p.(p + 1)$

La dimension de la somme est donnée par la formule de Grassmann.

n impair	n pair
$n = 2.p + 1$	$n = 2.p$
$2. \frac{(2.p + 1).(2.p + 2)}{2} - (p + 1)^2$	$2. \frac{(2.p).(2.p + 1)}{2} - p.(p + 1)$
$p.(p + 1)$	p^2

◀10▶ A, B et C sont trois sous-espaces vectoriel de $(E, +, \cdot)$. Montrez que si on suppose $A + B = C + B$, on n'a pas forcément $A = C$.
 Montrez que si on suppose $A + B = C + B$ et $A \cap B = C \cap B$, on n'a pas forcément $A = C$.
 Montrez que si on suppose $A + B = C + B$ et $A \cap B = C \cap B$ et $A \subset C$, alors on a forcément $A = C$ (attention, même si la preuve par les dimensions passe bien, elle n'est pas légitime, il faut une vraie preuve commençant par « on prend $\vec{c}$ dans C ... »).

Avec $A = \text{Vect}(\vec{i})$, $B = \text{Vect}(\vec{j})$ et $C = \text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$ dans le plan, on a $A + B = C + B = \mathbb{R}^2$ mais on n'a pas $A = C$.

On a d'ailleurs aussi $A + B = C + B = \mathbb{R}^2$ et $A \cap B = C \cap B = \{ \vec{0} \}$ et toujours pas $A = C$.

Si on utilise les dimensions et la formule de Grassmann, l'hypothèse $A + B = C + B$ et $A \cap B = A \cap C$ donne $\dim(A) = \dim(C)$.

Si on y ajoute l'inclusion $A \subset C$ on a alors $A = C$.

Prenons une preuve de vrai matheux avec les hypothèses $A + B = C + B$, $A \cap B = C \cap B$ et $A \subset C$.
 Pour avoir $A = C$ il nous manque juste $C \subset A$.

On prend donc $\vec{c}$ dans C (objectif : $\vec{c} \in A$).

On se laisse porter en regardant quelle hypothèse utiliser sans se mettre à introduire des vecteurs venus de nulle part.

$\vec{c}$ est dans C donc dans $C + B$ (puisque $C \subset C + B$).

Par hypothèse, le voilà dans $A + B$.

On l'écrit donc $\vec{a} + \vec{b}$ avec $\vec{a}$ dans A et $\vec{b}$ dans B .

On a donc $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ et même $\vec{c} - \vec{a} = \vec{b}$.

Pourquoi j'écris ça ? Parce que $\vec{c} - \vec{a}$ est dans C (différence de deux vecteurs de C puisque $A \subset C$).

Et il est dans B puisque c'est $\vec{b}$.

Ce vecteur est donc dans $B \cap C$.

Mais par hypothèse, le voilà donc dans $B \cap A$.

Le vecteur $\vec{b}$ est dans A ? C'est drôle, mais $\vec{a}$ y est aussi.

Leur somme $\vec{a} + \vec{b}$ est dans A .

C'est fini, $\vec{c}$ est dans A .

Rien de fou, pas de gros théorème, juste de la logique, et des propositions qu'on enchaîne.

Comme d'hab.

Bref, difficulté maximale pour qui maîtrise mal les maths et ceoit que c'est un outil pour calculer alors que c'est un outil pour raisonner.

◁11▷ Soient f et g deux endomorphismes de $(E, +, \cdot)$, espace vectoriel de dimension finie. On suppose $g \circ f = 0$ (application nulle) et $f + g$ injective. Montrez alors $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ et $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$. Déduisez $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$.

Un classique. Une fois qu'on l'a en main, tout se déroule sans aucun problème.

La composition $g \circ f = 0$ donne $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ puis $\text{rg}(f) \leq \dim(\text{Ker}(g)) = \dim(E) - \text{rg}(g)$.

On a déjà $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \leq \dim(E)$ avec une des deux hypothèses.

S'il y avait ne serait ce qu'un vecteur $\vec{k}$ non nul dans $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g)$, il vérifierait $f(\vec{k}) + g(\vec{k}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Le noyau de $f + g$ serait non trivial, et l'application $f + g$ ne serait pas injective.

Mais alors par la formule de Grassmann : $\dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

Mais $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ ne peut pas être plus gros que E . On a donc $\dim(E) \geq \dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$.

On remplace par la formule du rang : $\dim(E) \geq \dim(E) - \text{rg}(f) + \dim(E) - \text{rg}(g)$.

On trouve $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) \geq \dim(E)$ qui est la relation qui nous manquait.

◁12▷ Soient f et g deux applications linéaires de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dans $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$. Montrez qu'il existe au moins une matrice non nulle M de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ vérifiant $f(M) = g(M) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On se donne f et g linéaires de $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dans $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ et il faut en déduire des choses.

Or, on ne sait rien de plus de f et g ; on n'a aucune donnée explicite. C'est donc qu'on va jouer uniquement sur les nombres en jeu. Et pour celà, c'est la formule du rang et/ou la formule de Grassmann qui vont servir.

Le résultat final attend des relations du type $f(M) = 0_{2 \times 2}$; c'est une histoire de noyau.

Que dire : $\dim(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot) = 9$ et $\dim(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot) = 4$. Ayant $\text{Im}(f) \subset M_2(\mathbb{R})$, on a immédiatement $\text{rg}(f) \leq 4$. Par soustraction à 9, on a $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 5$ (d'un espace de dimension 9 vers un espace de dimension 4, il faut perdre au moins cinq dimension).

De la même façon, $\text{Ker}(g)$ est "gros" : $\dim(\text{Ker}(g)) \geq 5$.

5 et 5, c'est gros. Ces deux sous-espaces sont obligés de se rencontrer.

En l'occurrence

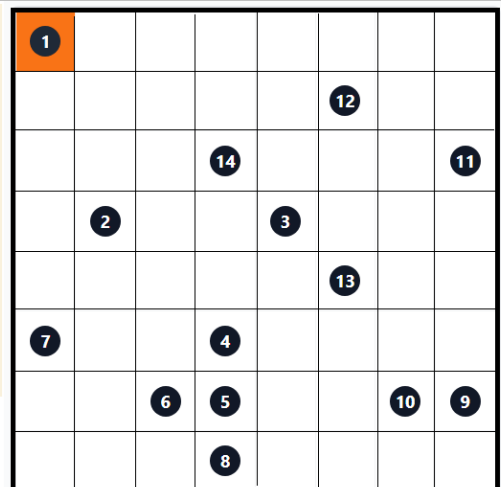
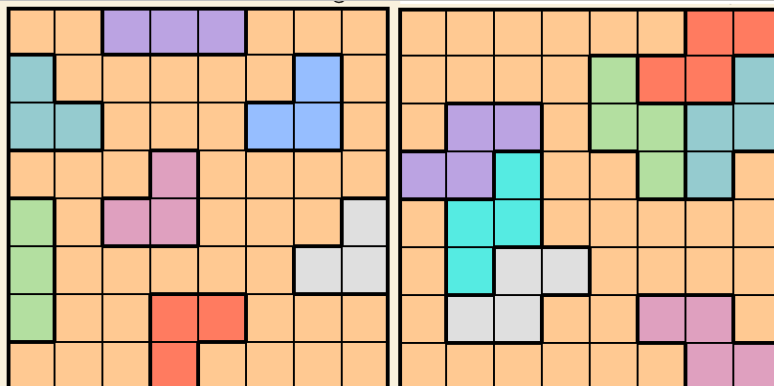
$$\dim(\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)) = \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)) - \dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$$

Comme $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g)$ est inclus dans $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$, sa dimension ne peut dépasser 9 ; alors que $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g))$ dépasse 10.

C'est donc que $\dim(\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g))$ vaut au moins 1. Il y a donc au moins une matrice non nulle dans cette intersection. Elle vérifie $f(M) = g(M) = 0_{2 \times 2}$.

Additionner, compter, majorer. Aucun calcul, juste de la tactique.

Et putain, si ça c'est pas du concret, il vous faut quoi ?



◁14▷

♥ Calculez $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2015}$ (sans diagonaliser). On pose : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculez J^2 et J^4 (on rappelle : $j = e^{2.i.\pi/3}$).
 Écrivez la matrice de taille 4 dont le terme de ligne n et colonne k (en indexation Pythonienne de 0 à 3) est $i^{n.k}$ (i est le célèbre complexe de carré -1). Écrivez A , calculez sa trace. Calculez A^2 et A^4 . Calculez A^{2015} .
 ♠ Généralisez en dimension n .

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis par récurrence immédiate : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2.n} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n = 2^n . I_2$.

Par produit : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{2015} = 2^{1007} . \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ en utilisant } 1 + j + j^2 = 0.$$

$$\text{Ensuite } J^4 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \text{ puis } A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A^4 = 16 . I_4.$$

Je ne donne pas ici la généralisation.

En effet, vous pouvez la formuler (proprement, si possible).

Mais de là à la prouver.

Et on rappelle qu'une généralisation sans preuve, c'est de la biologie (et encore), mais pas des maths.

En maths, tout ce qui est affirmé sans preuve est à mettre au panier (et dans un coin de votre esprit pour y réfléchir quand même).

◁15▷

♥ On pose $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Montrez qu'il y a $6 \times 5 \times 4 \times 3$ applications injectives de A dans B (et combien de B dans A ?).

Montrez qu'il y a $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ applications strictement croissantes de A dans B (et combien de B dans A ?).

Combien y a-t-il d'applications surjectives de A dans B ?

Montrez : pour toute application $f : (f \text{ surjective de } A \text{ dans } B) \Rightarrow (f \text{ injective de } A \text{ dans } B)$.

On définit : $f : A \rightarrow B$ par $f(1) = 6, f(2) = 5, f(3) = 8$ et $f(4) = 7$. Combien y a-t-il d'applications g de B dans A vérifiant $f \circ g = Id_B$? Combien y a-t-il d'applications h de B dans A vérifiant $h \circ f = Id_A$?

Pour qu'une application de A dans B soit injective, il suffit de choisir l'image de 1, puis celle de 2, puis celle de 3 et enfin celle de 4.

Il y a 6 choix pour l'image de 1. Il n'en reste que 5 pour l'image de 2 (ne pas reprendre $f(1)$ si l'application s'appelle f). De même, pour $f(3)$ il ne reste que 4 choix et ainsi de suite.

De B dans A , il y en a 0. C'est en effet impossible. Et ceci s'écrit aussi 4.3.2.1.0.0.0 si l'on suit le même raisonnement des choix multiples.

Astuce jolie et classique. Pour construire une application strictement croissante, il suffit de choisir son ensemble image.

Et l'ensemble image correspond ici au choix de 4 éléments parmi 6. C'est $\binom{6}{4}$, qui s'écrit effectivement

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3 \times 4}.$$

Quel rapport effectivement ?

Si l'ensemble image fait de 4 éléments est fixé (par exemple $\{5, 7, 8, 10\}$), l'image de 1 est forcément le plus petit élément (ici 5) : sinon, qui aura pour antécédent ce plus petit élément ?

Et 2 a pour image l'élément suivant par ordre croissant. Et ainsi de suite.

De B dans A , il n'y a aucune application strictement croissante, car strictement croissante implique injective.

Une application ne peut pas être surjective de A dans B (ensemble image de cardinal maximum 4).

L'implication « f surjective de A dans B implique f injective de A dans B » est ici du type « faux implique qu'importe ».

On se donne $f(1) = 6, f(2) = 5, f(3) = 8$ et $f(4) = 7$.

Pour déterminer g de B dans A , il suffit de déterminer l'image de chacun des six éléments de B (à choisir convenablement dans A).

La condition $f \circ g = Id_B$ dit par exemple $f(g(5)) = 5$. La seule solution est $g(5) = 2$.

De même $f(g(6)) = 6$ impose $g(6) = 1$ (seul 1 a pour image 6).

De même $f(g(7)) = 7$ impose $g(7) = 4$.

Enfin, $f(g(8)) = 8$ impose $g(8) = 3$.

Mais ensuite, que valent $g(9)$ et $g(10)$?

On veut $f(g(9)) = 9$. Et aucun élément de A ne vérifie $f(a) = 9$.

Il n'y a aucune application g qui convienne.

De toutes façons, la condition $f \circ g = Id_B$ dit que g est injective. Et g ne peut pas l'être de B dans A .

Elle dit aussi que f devra être surjective sur B , ce qui n'est pas le cas.

Passons à $h \circ f = Id_A$ d'inconnue h .

On a forcément $h(f(1)) = 1$ d'où $h(6) = 1$,

$h(f(2)) = 2$ d'où $h(5) = 2$

$h(f(3)) = 3$ d'où $h(8) = 3$

$h(f(4)) = 4$ d'où $h(7) = 4$

Quatre valeurs de h sont imposées.

Mais $h(9)$ peut valoir ce qu'il veut (du moment qu'il est dans A). En effet, la condition « $h(f(b)) = b$ pour tout b » n'impose rien à $h(9)$ puisque 9 n'est pas dans l'ensemble image de f .

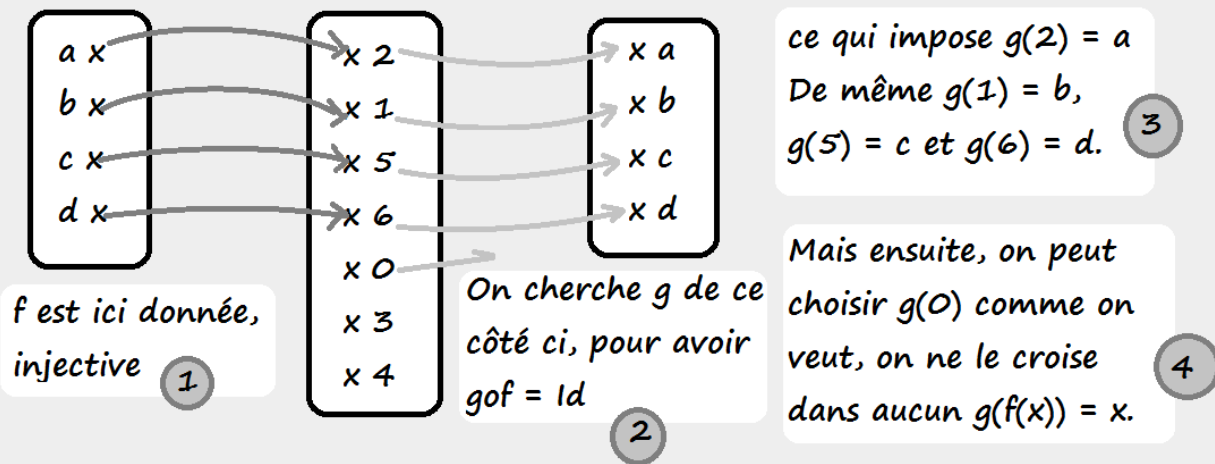
On a quatre choix pour $f(9)$ et encore quatre choix pour $f(10)$. Indépendants.

On a donc seize applications h qui conviennent.

16

On définit $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $f(a) = 2, f(b) = 1, f(c) = 5$ et $f(d) = 6$. Montrez que cette application est injective de E dans F . Existe-t-il g vérifiant $g \circ f = Id_E$. Si oui, combien de solutions. Si non, calculez $\int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt$.

L'injectivité est acquise, tous les éléments ont des images différentes.



Rien ne s'oppose a priori à la construction de g en déterminant les images par g de chacun des éléments de F .

élément	images possibles	explication	nombre de choix
0	a, b, c, d	aucun rôle dans les $g(f(x))$	4
1	b	seule possibilité pour $g(f(b)) = b$	1
2	a	seule possibilité pour $g(f(a)) = a$	1
3	a, b, c, d	aucun rôle dans les $g(f(x))$	4
4	a, b, c, d	aucun rôle dans les $g(f(x))$	4
5	c	seule possibilité pour $g(f(c)) = c$	1
6	d	seule possibilité pour $g(f(d)) = d$	1

On a $4 \times 4 \times 4$ applications g possibles.

Si on veut quand même calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt$, on n'invente pas de formules louches pour $u^n \cdot (u')^2$ ou autres.

Mais si on avait eu $\int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^2(t) \cdot dt$ ou $\int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt$ ou $\int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^6(t) \cdot dt$, on savait faire.

C'était $\left[\frac{\sin^3(t)}{3}\right]_0^{\pi/2}$ ou $\left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_0^{\pi/2}$ ou $\left[\frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^{\pi/2}$.

Ce qui est utile c'est d'avoir un cosinus tout seul face à des puissances de sinus.

$$\begin{aligned}
 \text{Et on va s'y ramener : } \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \cos^4(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot (\cos^2(t))^2 \cdot \sin^4(t) \cdot dt \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot (1 - \sin^2(t))^2 \cdot \sin^4(t) \cdot dt \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot (1 - 2\sin^2(t) + \sin^4(t)) \cdot \sin^4(t) \cdot dt \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt - 2 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^6(t) \cdot dt + \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cdot \sin^8(t) \cdot dt \\
 \int_0^{\pi/2} \cos^5(t) \cdot \sin^4(t) \cdot dt &= \left[\frac{\sin^5(t)}{5}\right]_0^{\pi/2} - 2 \cdot \left[\frac{\sin^7(t)}{7}\right]_0^{\pi/2} + \left[\frac{\sin^9(t)}{9}\right]_0^{\pi/2}
 \end{aligned}$$

On trouve $\frac{8}{315}$ Et si on n'a pas vu cette méthode une fois, il n'est pas si évident que ça de l'inventer.

17 Soient quatre matrices de taille 2 sur 2 de trace nulle. Montrez qu'elles forment une famille liée^a.

a. liée : l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres

Les matrices de format 2 sur 2 et de trace nulle, c'est $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$. De dimension 3. Quatre éléments de cet ensemble forment nécessairement une famille liée.

Plus algèbre linéaire que cet argument, tu meurs...

Sinon, on prend quatre matrices, avec leur douze coefficients en $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ et il faut en exprimer une à l'aide des quatre autres.

Ce sont comme quatre vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ -a \end{pmatrix}$ dans $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. On peut calculer leur déterminant : $\begin{vmatrix} a & a' & a'' & a^\circ \\ b & b' & b'' & b^\circ \\ c & c' & c'' & c^\circ \\ -a & -a' & -a'' & -a^\circ \end{vmatrix}$,

il est nul. La famille est liée.

Et même : $\begin{pmatrix} a & b & c & -a \\ a' & b' & c' & -a' \\ a'' & b'' & c'' & -a'' \\ a^\circ & b^\circ & c^\circ & -a^\circ \end{pmatrix}$ a deux colonnes proportionnelles (relation de dépendance linéaire). Son déterminant est donc nul.

La transposée $\begin{pmatrix} a & b & c & -a \\ b & b' & b'' & b^\circ \\ c & c' & c'' & c^\circ \\ -a & -a' & -a'' & -a^\circ \end{pmatrix}$ a à son tour un déterminant nul.

C'est donc que l'une des colonnes est combinaison des autres.

C'est donc qu'une des matrices est combinaison des autres.

Et on dit quoi au physicien qui réclame : « laquelle, et quelle combinaison ? ».

On lui répond qu'on a prouvé son existence sans la construire explicitement ! N'est-ce pas le sommet de la créativité ? Mieux qu'un artiste et mieux qu'un dieu !

◁ 18 ▷

Calculez $\int_0^1 \text{Arctan}(\sqrt{1-x^2}).dx$ (parties et $s = \sin(\theta)$ par exemple).

Cette intégrale existe, car la fonction sous le signe somme est continue. Pas forcément dérivable il est vrai, à cause de $\sqrt{1-x^2}$ en 1.

On va quand même intégrer par parties, car Arctan est connue pour sa dérivée :

$$\int_0^1 \text{Arctan}(\sqrt{1-x^2}).dx = \left[x.\text{Arctan}(\sqrt{1-x^2}) \right] + \int_0^1 \frac{2.x}{(2-x^2).2.\sqrt{1-x^2}}.x.dx$$

1	$\leftrightarrow$	x
$\text{Arctan}(\sqrt{1-x^2})$	$\hookrightarrow$	$\frac{1}{1+(\sqrt{1-x^2})^2} \cdot \frac{-2.x}{2.\sqrt{1-x^2}}$

Le terme crochet est nul. Et l'intégrale est celle de $\frac{x^2}{(2-x^2).2.\sqrt{1-x^2}}$! Il reste du travail.

On va pose « naturellement » $x = \sin(\theta)$.

Si, c'est quand même assez naturel, puisque on a $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ou même simplement $\sqrt{1-x^2}$ qui fait penser aux lignes trigonométriques.

Ou plutôt on pose $\theta = \text{Arcsin}(x)$ pour éviter toute ambiguïté.

L'intégrale devient (et on va la noter I)

$$\int_0^1 \frac{2.x}{(2-x^2).\sqrt{1-x^2}}.x.dx = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta)).\cos(\theta)}.d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta))}d\theta$$

(avec un dénominateur qui effectivement ne s'annule jamais).

Si on a croisé déjà des intégrales de ce type, on se dit qu'on va forcer $\frac{1}{\cos^2(\theta)}$ et $\tan(\theta)$ à venir.

De l'habitude, ou le fait d'avoir un jour croisé Bioche.

On remplace le 2 par $2.\cos^2(\theta) + 2.\sin^2(\theta)$.

$$\int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2-\sin^2(\theta))}.d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{(2.\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}.d\theta$$

On factorise de force $\cos^2(\theta)$ au dénominateur (attention en $\pi/2$).

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{2.\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta).(2+\tan^2(\theta))}.d\theta$$

On a envie de l'écrire $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2.\tan^2(\theta)}{(2+\tan^2(\theta))}d\theta$, mais on perd la présence de la dérivée de la tangente, dont on a grand besoin.

Il faut encore remplacer $\sin^2(\theta)$ par $\frac{\tan^2(\theta)}{1+\tan^2(\theta)}$.

Et cette fois, en posant $t = \tan(\theta)$ on a (enfin) $I = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \frac{2.t^2}{(2+t^2).(1+t^2)}.d\theta$.

On décompose en éléments simples $\frac{T}{(1+T).(2+T)} = \frac{2}{2+T} - \frac{1}{1+T}$:

$$I = \int_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{2+t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right).d\theta$$

Pour arriver à $\frac{\pi}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2}$.

Si vous avez trouvé un chemin plus court, n'hésitez pas...

◁19▷

Soit f de classe C^6 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Complétez

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$$

Montrez que la matrice carrée de cette formule est inversible.

Deduez que si f et $f^{(6)}$ sont bornées sur $\mathbb{R}$, alors $f', f'', f^{(3)}, f^{(4)}$ et $f^{(5)}$ le sont aussi.

Quand on effectue le produit matriciel et qu'on regarde la ligne k (indexation non pythonienne), on veut

$$f(a+k) - f(a) - k \cdot f'(a) - \frac{k^2}{2} \cdot f''(a) - \frac{k^3}{6} \cdot f^{(3)}(a) - \frac{k^4}{4!} \cdot f^{(4)}(a) - \frac{k^5}{5!} \cdot f^{(5)}(a) = ?$$

Ceci fait furieusement penser à un développement limité

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1^5) \\ o(2^5) \\ o(3^5) \\ o(4^5) \\ o(5^5) \end{pmatrix}$$

Non, c'est n'importe quoi ! Ça n'a aucun sens.

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o(1^5)_{1 \rightarrow 0} \\ o(2^5)_{2 \rightarrow 0} \\ o(3^5)_{3 \rightarrow 0} \\ o(4^5)_{4 \rightarrow 0} \\ o(5^5)_{5 \rightarrow 0} \end{pmatrix}$$

Ça n'a toujours aucun sens, mais au moins c'est d'une poésie folle ces « quand 3 tend vers 0 »³.

Alors, si ce n'est pas développement limité le mot clef, je propose « formule de Taylor ».

Et nos points d'interrogations sont des choses comme $\frac{3^6}{5!} \cdot \int_0^1 (1-t)^5 \cdot f^{(6)}(1+t \cdot 3) \cdot dt$ (changez le 3 en chacun des entiers).

Sinon, on pourra utiliser une formule de Taylor Lagrange (ou plutôt cinq)

$$\begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \frac{1}{6!} \cdot \begin{pmatrix} f^{(6)}(x + \theta_1) \\ f^{(6)}(x + 2 \cdot \theta_2) \\ f^{(6)}(x + 3 \cdot \theta_3) \\ f^{(6)}(x + 4 \cdot \theta_4) \\ f^{(6)}(x + 5 \cdot \theta_5) \end{pmatrix}$$

chacun des cinq θ_i étant entre 0 et 1.

La matrice est inversible. J'ai calculé son déterminant.

Et VanDerMonde l'avait fait avant moi

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{vmatrix} = 1.2.3.4.5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \\ 1 & 5 & 25 & 125 & 625 \end{vmatrix}$$

3. Troyes relégué en seconde division ?

et on trouve 5!.

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 3-1 & 4-1 & 5-1 \\ 3-2 & 4-2 & 5-2 \\ 4-3 & 5-3 \\ 4-3 \end{pmatrix} \quad (\text{ transposez la si le rôle des colonnes et lignes ne vous plait pas}).$$

J'ai 34560 et je m'en moque pas mal.

On repart le la formule matricielle et on obtient

$$\begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x)/2 \\ f^{(3)}(x)/6 \\ f^{(4)}(x)/24 \\ f^{(5)}(x)/120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \\ 3 & 9 & 27 & 81 & 243 \\ 4 & 16 & 64 & 256 & 1024 \\ 5 & 25 & 125 & 625 & 3125 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f(x+1) - f(x) \\ f(x+2) - f(x) \\ f(x+3) - f(x) \\ f(x+4) - f(x) \\ f(x+5) - f(x) \end{pmatrix} - \frac{1}{6!} \cdot \begin{pmatrix} f^{(6)}(x + \theta_1) \\ f^{(6)}(x + 2.\theta_2) \\ f^{(6)}(x + 3.\theta_3) \\ f^{(6)}(x + 4.\theta_4) \\ f^{(6)}(x + 5.\theta_5) \end{pmatrix}$$

de la forme $M^{-1} \cdot (U - V)$.

Si f est bornée par M toutes les composantes de U sont entre $-2.M$ et $2.M$.

Si $f^{(5)}$ est bornée par K , toutes les composantes de V sont entre $-K/6!$ et $K/6!$.

Par addition, les composantes de $U - V$ sont plus petites que $2.M + \frac{K}{6!}$.

Quand on pose ce vecteur sur la matrice inverse (dont le plus grand coefficient en valeur absolue peut être noté A), on obtient des combinaisons de nos $f(x+k) - f(x) - \frac{f^{(5)}(x+\dots)}{6!}$. Bref, on obtient des quantités bornées (par $6.A \cdot \frac{2.6!.M + K}{6!}$ si vous y tenez).

Bref, chaque composante est bornée, chaque $f^{(i)}$ est bornée.

◀ 20 ▶

On définit : $f = x \mapsto [x] \cdot \sin(\pi.x)$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que l'équation $\int_0^x f(t).dt = 0$ a une solution entre 3 et 4.

L'application est continue en tout point d'un intervalle du type $]n, n+1[$ (ouvert), car elle y est de la forme $x \mapsto n \cdot \sin(\pi.x)$.

Les seuls points posant problème sont donc les entiers relatifs n de $\mathbb{Z}$.

Comme c'est une définition avec une partie entière, il est judicieux de regarder à droite et à gauche.

intervalle	$]n-1, n[$	n	$]n, n+1[$
fonction	$(n-1) \cdot \sin(\pi.x)$	0	$n \cdot \sin(\pi.x)$
limite en n	à gauche : 0	0	0 à droite

Les deux limites latérales coïncident avec la valeur de la fonction. Elle est continue aussi en n de $\mathbb{Z}$.

Maintenant qu'elle est continue sur un intervalle tel que $[3, 4]$, on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

On découpe donc l'intégrale par relation de Chasles :

$\int_0^1 f(t).dt = \int_0^1 0.dt$	$\int_1^2 f(t).dt = \int_1^2 \sin(\pi.t).dt$	$\int_2^3 f(t).dt = \int_2^3 2 \cdot \sin(\pi.t).dt$	$\int_3^4 f(t).dt = \int_3^4 3 \cdot \sin(\pi.t).dt$
0	$-\frac{2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$-\frac{6}{\pi}$
		$f(3) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \geq 0$	$f(4) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{6}{\pi} \leq 0$

Et encore une fois, un bon tableau vaut mieux qu'un con discours.

Si vous vous contentez de dire « oui, j'ai le bon argument », vous n'avez pas l'esprit à réussir aux concours.

Si vous vous demandez « ai je rendu la chose claire et compréhensible », vous avez l'esprit ingénieur...

Mots clefs : limite à droite et à gauche, relation de Chasles, théorème des valeurs intermédiaires.

4. Oui, un tableau, c'est plus lisible que des formules partout que l'on ne relie pas entre elles au premier coup d'œil et qui s'étalent sur des lignes et des lignes ; y'a écrit « maths », donc on ne calcule pas, on communique.

<21>



Le professeur a demandé de calculer la moyennes des entiers de 1 à N . L'élève Hall-Honter (Pourelaveh-Lelinj) a trouvé 8,8. Le professeur lui dit : "tu t'es trompé, tu as oublié de compter un entier (mais tu as bien divisé par le nombre de termes de ta somme)". Retrouvez l'entier oublié et la question initiale du professeur.

On note N l'entier jusqu'au-quel il faut sommer, et k l'entier oublié par l'élève dans son calcul du numérateur.

On note μ la vraie moyenne.

$$\text{On a donc } \mu = \frac{N \cdot (N+1)}{2 \cdot N} \text{ et } 8,8 = \frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - k}{N-1}.$$

On peut encadrer suivant le terme oublié :

$$\frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - N}{N-1} \leq 8,8 \leq \frac{\frac{N \cdot (N+1)}{2} - 1}{N-1}$$

N ne peut valoir que 16 ou 17.

On teste : N vaut 16 et k vaut 4.

$$\text{Vérification : } \frac{1+2+3+5+6+\dots+16}{15} = \frac{132}{15} = 8,8$$

<22>

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces (appelés dés de Bradley Effron).

Montrez que la probabilité que A batte B est $2/3$.

Montrez que la probabilité que B batte C est $2/3$.

Montrez que la probabilité que C batte D est $2/3$.

Quelle est la probabilité que D batte A ?

On fait se battre A contre B . A n'a que deux issues possibles, B n'en a qu'une :

$$P(A=0) = \frac{1}{3} \quad P(A=4) = \frac{2}{3} \quad P(B=3) = 1$$

On dresse, même si c'est inutile ici un tableau

	A = 0	A = 4
B = 3	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

On ne garde que le cas où A bat B :

	A = 0	A = 4
B = 3		$\frac{2}{3}$

On commence à remplir

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$			
C				
D				

pour dire que A bat B avec probabilité $\frac{2}{3}$ (et que B ne bat A qu'avec

probabilité $\frac{1}{3}$).

En revanche, B bat C deux fois sur 3 (B a toujours 3, et C ne fait mieux qu'une fois sur trois).

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		
D				

Plus intéressant : C contre D :

	C = 2 (p=2/3)	C = 6 (p=1/3)
D = 1 (p=1/2)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$
D = 5 (p=1/2)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Les variables aléatoires des dés sont indépendantes, donc les probabilités des cases sont des produits.

5. j'ai laissé des sixièmes partout pour bien vérifier que la somme des probabilités vaut 1

		$C = 2 \text{ (p=2/3)}$	$C = 6 \text{ (p=1/3)}$	
C gagne sur D :	$D = 1 \text{ (p=1/2)}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	Total : $P(C > D) = \frac{2}{3}$ (et par soustraction
	$D = 5 \text{ (p=1/2)}$		$\frac{1}{6}$	

$$P(D > C) = \frac{1}{3}.$$

	A	B	C	D
A		$\frac{1}{3}$		
B	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$	
C		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$
D			$\frac{2}{3}$	

Jusque là, $A > B$ $B > C$ $C > D$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$.

		$D = 1 \text{ (p=1/2)}$	$D = 5 \text{ (p=1/2)}$
Mais la surprise va venir de D contre A :	$A = 0 \text{ (p=1/3)}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$A = 4 \text{ (p=2/3)}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$

		$D = 1 \text{ (p=1/2)}$	$D = 5 \text{ (p=1/2)}$	
A gagne sur D :	$A = 0 \text{ (p=1/3)}$			dans un cas sur trois.
	$A = 4 \text{ (p=2/3)}$	$\frac{2}{6}$		

C'est surprenant $A > B$ $B > C$ $C > D$ $D > A$ à chaque fois avec probabilité $\frac{2}{3}$

A est meilleur que B

B est meilleur que C

C est meilleur que D

D est meilleur que A .

La relation « être meilleur que au moins une fois sur trois » n'est pas transitive.

Jouons vraiment : Les dés sont posés sur la table. Je vous laisse en choisir un, et j'en prend un à mon tour (je choisis bien évidemment^a).

On lance plusieurs fois les dés.

Je vous bats deux fois sur trois. Pas de bol pour vous.

Vous en avez marre, je vous dis « on change de dés ? ».

Vous prenez le mien, et moi évidemment, je prend le suivant dans la liste.

Et à nouveau, je vous bats deux fois sur trois.

Quel que soit le dé que vous choisissiez, je prendrai le bon pour vous battre deux fois sur trois.

Le fait de vous laisser le choix est en fait un désavantage pour vous... Sympathique, non ?

^a. si vous avez pris B et que je prends B aussi, ça va être assez peu intéressant comme jeu

Il existe d'autres modèles assez similaires à ces dés, avec d'autres faces et d'autres probabilités, mais toujours « non transitifs ».

23 ♣ Pouvez vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ?
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

On veut qu'il existe a et b entiers vérifiant $4 + \heartsuit = a + b$ et $4 \cdot \heartsuit - 2 = a \cdot b$.

L'équation $x^2 - (4 + \heartsuit) \cdot x + (4 \cdot \heartsuit - 2)$ doit avoir des racines réelles et même entières.

$\heartsuit$ doit être entier, et le discriminant $\heartsuit^2 - 8 \cdot \heartsuit + 24$ doit être un carré parfait d'entier.

On, il vaut $(\heartsuit - 4)^2 + 8$, et c'est déjà presque un carré d'entier.

Il faut donc que $(\heartsuit - 4)^2 + 8$ et $(\heartsuit - 4)^2$ soient deux carrés alors qu'ils sont proches...

La seule solution est $1 + 8$ et 1 .

On est sur la piste de deux possibilités : $\heartsuit = 5$ ou $\heartsuit = 3$.

Il reste à voir si les deux conviennent (on a juste raisonné par implications) :

$\heartsuit = 3$	$\heartsuit = 5$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
$x^2 - 7x + 10 = 0$	$x^2 - 9x + 18 = 0$
5 et 2	5 et 2
$D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2.5^n+2^n}{3} & \frac{2.5^n-2^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n-2^n}{3} & \frac{5^n+2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}$	$P.D.P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6^n+2.3^n}{3} & \frac{2.6^n-2.3^n}{3} \\ \frac{6^n-3^n}{3} & \frac{2.6^n+3^n}{3} \end{pmatrix}$

◀ 24 ▶

Soit f une application linéaire. Montrez : $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(f - \text{Id}) + \text{Ker}(f - 2.\text{Id}) = \text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2.\text{Id})$.

On donne : $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 5x - 3y - 2z \\ 4x - 2y - 2z \\ x - y + 2z \end{pmatrix}$.

Un élève entend prouver $\text{Ker}(f) \oplus \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2.\text{Id}) = \mathbb{R}^3$ par analyse et synthèse.

Il écrit ce qui suit : $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ avec $\vec{a}$ dans $\text{Ker}(f)$, $\vec{b}$ dans $\text{Ker}(f - \text{Id})$ et $\vec{c}$ dans $\text{Ker}(f - 2.\text{Id})$.

Il déduit $f(\vec{u}) = \vec{0} + \vec{b} + 2.\vec{c}$, puis $f^2(\vec{u}) = \vec{b} + 4.\vec{c}$. Il déduit $\vec{c} = \frac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \frac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$. Quel sens a-t-il traité ?

Ensuite, il propose $\vec{c} = \frac{f^2(\vec{u}) - f(\vec{u})}{2}$, $\vec{b} = 2.f(\vec{u}) - f^2(\vec{u})$ et $\vec{a} = \frac{2.\vec{u} - 3.f(\vec{u}) + f^2(\vec{u})}{2}$ et vérifie $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Quel sens a-t-il prouvé ?

Trouvez l'erreur.

Montrez qu'en remplaçant $x - y + 2z$ par $x - y$, le résultat devient correct.

◀ 25 ▶

Décomposez $x \mapsto 2.|x + 1|$ en $p + i$ avec p paire et i impaire, puis représentez p et i .

Certes $x \mapsto |x|$ est paire. Mais ici, la fonction est décalée. Son axe de symétrie a pour équation $x = -1$. Ce n'est plus l'axe $0y$.

Il faut donc séparer.

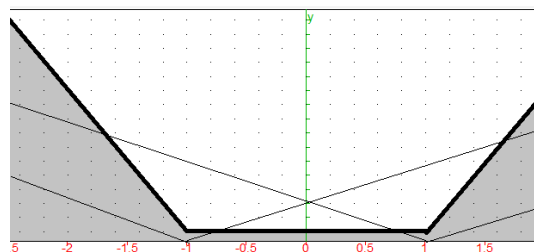
La formule « toute prête », obtenue par condition nécessaire dit

$$\begin{aligned} f(x) &= p(x) + i(x) \\ f(-x) &= p(-x) + i(-x) \\ f(-x) &= p(x) - i(x) \end{aligned}$$

puis $p(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ et $p(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$

On peut alors découper par intervalles

x	$] -\infty, -1[$	-1	$] -1, 1[$	1	$]1, +\infty[$
$2. x + 1 $	$-2 - 2x$	0	$2x + 2$	4	$2x + 2$
$2. -x + 1 $	$2 - 2x$	4	$2 - 2x$	0	$2x - 2$
$p(x)$	$-2x$	2	2	2	$2x$
$i(x)$	-4	-4	$2x$	4	4



Sans petit dessin pour conclure, cet exercice est totalement stérile...

Le plus fort est le cas des élèves qui tracent p et i avec des formules erronées, et ne voient même pas que p n'est pas paire par exemple.

◀26▶

On définit, pour f continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$:

$$N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|.dt \quad N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt} \quad N_\infty(f) = \sup\{|f(t)| \mid t \in [0, 1]\}$$

Calculez ces trois normes pour les applications suivantes : $t \mapsto t^n$, $\exp$, $t \mapsto \sin(\pi.t)$.

Montrez : $N_1 \leq N_\infty$ (c'est à dire $\forall f, N_1(f) \leq N_\infty(f)$), $N_2 \leq N_\infty$ et $N_1 \leq N_2$ (là, il faut penser à quelque chose, ou à quelqu'un ou à quelques uns).

L'application $f \mapsto |f(0)| + N_1(f')$ est elle une norme sur $C_1([0, 1], \mathbb{R})$ (les applications dérivables à dérivée continue).

	$N_1(f) = \int_0^1 f(t) .dt$	$N_2(f) = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2.dt}$	$N_\infty(f) = \sup\{ f(t) .dt \mid t \in [0, 1]\}$
$t \mapsto t^n$	$\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{\sqrt{2.n+1}}$	1 (en 1)
$t \mapsto \sin(\pi.t)$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1 (en 1/2)

Pour f donnée, on écrit $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|.dt \leq \int_0^1 N_\infty(f).dt = N_\infty(f)$.

De même,

$$(N_2(f))^2 = \int_0^1 (f(t))^2.dt \leq \int_0^1 (N_\infty(f))^2.dt = (N_\infty(f))^2$$

et on passe à la racine.

Enfin, on écrit avec l'aide de Cauchy et Schwarz :

$$(N_1(f))^2 = \left(\int_0^1 |f(t)|.dt \right)^2 = \left(\int_0^1 1 \cdot |f(t)|.dt \right)^2 \leq \left(\int_0^1 1^2.dt \right) \cdot \left(\int_0^1 |f(t)|^2.dt \right) = (N_2(f))^2$$

◀27▶

Pour tout k , on note E_k l'application $x \mapsto [x/k]$. Montrez que la famille $(E_1, E_2, E_3, E_4, E_5)$ est libre dans l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour les lois usuelles.

On se donne cinq réels et on suppose : $\alpha_1.E_1 + \alpha_2.E_2 + \alpha_3.E_3 + \alpha_4.E_4 + \alpha_5.E_5 = 0$ (fonction nulle). L'objectif est $\alpha_1 = \dots = \alpha_5 = 0$.

On traduit l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_1.[x] + \alpha_2.[x/2] + \alpha_3.[x/3] + \alpha_4.[x/4] + \alpha_5.[x/5] = 0$.

On prend des points particuliers :

point	formule	conclusion	report
$x = 1$	$\alpha_1.1 + 0 = 0$	$\alpha_1 = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_2.[x/2] + \alpha_3.[x/3] + \alpha_4.[x/4] + \alpha_5.[x/5] = 0$
$x = 2$	$0.2 + \alpha_1.1 + 0 = 0$	$\alpha_2 = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_3.[x/3] + \alpha_4.[x/4] + \alpha_5.[x/5] = 0$
$x = 3$	$0.3 + 0.1 + \alpha_3.1 = 0$	$\alpha_3 = 0$	$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha_4.[x/4] + \alpha_5.[x/5] = 0$

et ainsi de suite. Les α_i sont nuls. La famille est libre.

◀28▶

Un point (a, b) est un point critique de F (fonction numérique de deux variables dérivable) si les deux dérivées partielles p et q (notées aussi F'_1 et F'_2 ou même F'_x et F'_y , ou encore $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ et $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$) s'annulent en (a, b) .

Trouvez les points critiques des applications suivantes :

a	$(x, y) \mapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$	e	$(x, y) \mapsto x^2.y^3$
b	$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	f	$(x, y) \mapsto (x-1)^2 + 2.y^2$
c	$(x, y) \mapsto \sin(x). \sin(y). \sin(x+y)$	g	$(x, y) \mapsto x^3.y + x^3 - x^2.y$
d	$(x, y) \mapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4$	h	$(x, y) \mapsto e^{x-y}.(x^2 - 2.y^2)$

a	$(x, y) \mapsto (x-y)^2 + x^3 + y^3$	e	$(x, y) \mapsto x^2.y^3$
	$2.(x-y) + 3.x^2 = 0$		$2.x.y^3 = 0$
	$-2.(x-y) + 3.y^2 = 0$		$3.x^2.y^2 = 0$
	$(0, 0)$		$(0, 0)$

b	$(x, y) \mapsto \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	f	$(x, y) \mapsto (x-1)^2 + 2.y^2$
	$2.a.x + 2.b.y = 0$		$2.(x-1) = 0$
	$2.b.x + 2.c.y = 0$		$4.y = 0$
	$(0, 0)$ sauf si...		$(0, 0)$

c	$(x, y) \mapsto \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y)$	g	$(x, y) \mapsto x^3 \cdot y + x^3 - x^2 \cdot y$
	$\cos(x) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(x+y) = 0$		$3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y = 0$
	$\cos(y) \cdot \sin(y) \cdot \sin(x+y) + \sin(x) \cdot \sin(y) \cdot \cos(x+y) = 0$		$x^3 - x^2 = 0$
	A faire		(1, -3) et tous les (0, y)
d	$(x, y) \mapsto (x-y)^2 + x^4 + y^4$	h	$(x, y) \mapsto e^{x-y} \cdot (x^2 - 2 \cdot y^2)$
	$2 \cdot (x-y) + 4 \cdot x^3 = 0$		$e^{x-y} \cdot (x^2 + 2 \cdot x - 2 \cdot y^2) = 0$
	$-2 \cdot (x-y) + 4 \cdot y^3 = 0$		$e^{x-y} \cdot (-x^2 + 2 \cdot y^2 - 4 \cdot y) = 0$
	(0, 0)		(0, 0) et (-4, -2)

On donne $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. On définit $f = M \mapsto (Tr(M), Tr(A \cdot M), Tr(A^2 \cdot M), Tr(A^3 \cdot M))$. Montrez que f est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ dans $\mathbb{R}^4$. Calculez $f(I_2)$ et $f(A)$ et $f(A^{-1})$. Un élève dit que cette application est de rang 6. Prouvez qu'il a tort. Un élève prétend que f est de rang 1. Prouvez qu'il a tort. Pour mettre tout le monde d'accord, calculez le rang de f . Donnez une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$. Donnez une base de $Im(f)$.
Un professeur vous demande de calculer $Tr(f)$. Que lui répondez vous ?

Les frmats sont compatibles pour les calculs des produits et des traces.

Enfin, composante par composante, on a pour tout couple de matrices et de réels (M, N) et (α, β) et chaque exposant k

$$Tr(A^k \cdot (\alpha \cdot M + \beta \cdot N)) = \alpha \cdot Tr(A^k \cdot M) + \beta \cdot Tr(A^k \cdot N)$$

Tous calculs faits :

$$\begin{array}{lcl} I_2 & \mapsto & (2, 4, 14, 52) \\ A & \mapsto & (4, 14, 52, 194) \\ A^{-1} & \mapsto & (4, 2, 4, 14) \end{array}$$

Diagonaliser A ne sera pas génial, car ses valeurs propres manquent de rationalité. En revanche, $A^4 = \begin{pmatrix} 41 & 112 \\ 56 & 153 \end{pmatrix}$ si on en a besoin.

Le rang est la dimension de l'ensemble image.

Et l'ensemble image est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Comment sa dimension pourrait-elle atteindre 6 ?

Au mieux, le rang de f vaut 4.

Dans l'ensemble image, on a $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 14 \\ 52 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 52 \\ 194 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires.

L'image est au moins un plan de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$. Le rang vaut au moins 2.

On fait de l'algèbre linéaire, donc on ne calcule pas l'image d n'importe quelle matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, c'est trop lourd à écrire.

$$\text{Si vous y tenez : } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+d \\ a+b+2 \cdot c+3 \cdot d \\ 3 \cdot a+4 \cdot b+11 \cdot c+8 \cdot d \\ 11 \cdot a+15 \cdot b+30 \cdot c+41 \cdot d \end{pmatrix}.$$

On prend juste une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$: $(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ et on calcule l'image de chacun

$$(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \\ 41 \end{pmatrix})$$

Par linéarité, on a une base de l'image

$$(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \\ 41 \end{pmatrix})$$

On confirme que ces vecteurs engendrent un espace de dimension entre 2 et 4.

De manière méthodique on calcule un déterminant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 11 \\ 11 & 15 & 30 & 41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 8 & 8 \\ 11 & 15 & 30 & 30 \end{vmatrix} = 0$$

Les vecteurs sont tous combinaisons de $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix} \right)$. L'ensemble image est au plus de dimension 3.

Mais on a même $2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 8 \\ 30 \end{pmatrix}$. Encore un qui saute.

L'ensemble image est de dimension 2, c'est un plan.

Et le rang de f vaut 2.

On l'a eu sans passer par la dimension du noyau et la formule du rang, comme quoi il ne faut pas apprendre par coeur une méthode dans un livre et croire que c'est toujours la même qu'on applique. Il faut comprendre huit idées. C'est tellement plus intelligent !

D'ailleurs, tout vient de la formule de Cayley Hamilton : $A^2 = \text{Tr}(A).A - \det(A).I_2$. Si si : $A^2 = 4.A - I_2$.

On a donc $\text{Tr}(A^2.M) = 4.\text{Tr}(A.M) - \text{Tr}(A)$.

La troisième composante de chaque vecteur image se déduit des deux premières.

De même $A^3 = 4.A^2 - A = 15.A - 4.I_2$.

On a donc aussi $\text{Tr}(A^3.M) = 15.\text{Tr}(A.M) - 4.\text{Tr}(A)$.

La dernière composante est somme des deux premières.

Bref, il suffit de connaître les deux premières composantes du vecteur image pour le connaître en entier.

L'ensemble image est de dimension 2 : $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 4.y - x \\ 15.y - 4.x \end{pmatrix} \right)$ (à vérifier pour toutes les images calculées).

Le noyau de f est formé des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifiant $\text{Tr}(M) = \text{Tr}(A.M) = \text{Tr}(A^2.M) = \text{Tr}(A^3.M) = 0$.

Elles sont déjà de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ avec ensuite trois fois la même condition : $-2.a + b + 2.c = 0$.

On les écrit $\begin{pmatrix} a & 2.a - 2.c \\ c & -a \end{pmatrix}$ et le noyau est bien de dimension 2.

On en trouve une base : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

Pour un supplémentaire, il suffit de prendre deux matrices (par exemple de la base canonique), qui ne sont pas dans ce noyau et qui sont non colinéaires (prenez plutôt l'habitude de linéairement indépendantes qui se généralise à plus de vecteurs). Par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Mais il y a bien d'autres choix.

Le cours assure que les images de ces deux vecteurs forment une base de l'ensemble image. $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 15 \end{pmatrix} \right)$

f ne va pas de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même, on ne peut donc pas calculer sa trace.

Certes, la matrice de f $\text{Mat}_{\text{Cano}}^{\text{Cano}}(f)$ existe, mais les deux sobriquets *Cano* ne désignent pas la même base canonique

:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

et on peut s'amuser à changer l'une sans changer l'autre.

◀ 30 ▶

Donnez un supplémentaire de l'ensemble des matrices de taille n sur n de trace nulle.

Donnez un supplémentaire de l'ensemble des matrices de taille n sur n de diagonale nulle

C'est un espace de dimension $n^2 - 1$ (choisir tous les coefficients, sauf le dernier qui est l'opposé de la somme de ce que vous avez choisi jusqu'à présent sur la diagonale). au sein d'un espace de dimension n^2 .

Choisissez une matrice de déterminant non nul, comme I_n et regardez la droite engendrée.

Toute matrice est en effet la somme d'une matrice de trace nulle et d'un multiple de I_n , et ce d'une façon unique : $A = T + \lambda.I_n$ avec $\text{Tr}(T) = 0$ et λ réel

Analyse : on passe à la trace : $\text{Tr}(A) = 0 + \lambda.n$, $\lambda = \frac{\text{Tr}(A)}{n}$ et donc $T = A - \frac{\text{Tr}(A)}{n}.I_n$.

Synthèse : c'est bon.

Tout ce qu'on attend de vous : un sous-espace de dimension 1 (une droite, engendrée par un vecteur) et bien sûr pas engendré par une matrice qui serait de trace nulle.

Les matrices de diagonale nulle sont plus nombreuses et forment un espace vectoriel de dimension $n^2 - n$.

En taille 3 :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Et un supplémentaire :

$$\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

En notant E_i^k la matrice de la base canonique « un 1 en ligne i et colonne k », l'espace des matrices de diagonale nulle est $\text{Vect}(E_i^k)_{i \neq k}$ (de dimension $n^2 - n$).

Un supplémentaire est $\text{Vect}(E_i^i)_{i \leq n}$.

◀ 31 ▶

♥ On note $(E, +, \cdot)$ l'espace des combinaisons linéaires de $x \mapsto \frac{1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$, $x \mapsto \frac{x}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ et $x \mapsto \frac{x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$. Montrez que ce espace est de dimension 3. Montrez que $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ sont dans $(E, +, \cdot)$ et en forment une base.

On nous donne trois vecteurs.

Ils forment une famille génératrice de l'espace vectoriel qu'ils engendrent.

C'est même une phrase qui se contente de répéter ce qu'elle dit au début.

Pour que ces trois vecteurs forment une base, on doit juste vérifier qu'ils sont linéairement indépendants.

On prend a , b et c et on suppose

$$\left(x \mapsto \frac{a + b.x + c.x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} \right) = \left(x \mapsto 0 \right)$$

La fonction polynôme du numérateur est nulle sur $\mathbb{R} - \{1, -2, 3\}$, ses coefficients sont nuls.

Libre et génératrice de ce qu'elle engendre, c'est une base de l'espace des applications de la forme

$$\left(x \mapsto \frac{\alpha + \beta.x + \gamma.x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} \right)$$

La première difficulté avec les trois applications qu'on nous donne, c'est « sont elles dans cet espace vectoriel ? ». Beh oui, il y a ça avant même les calculs.

Franchement, pour vous $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ c'est $\left(x \mapsto \frac{\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\right)$ pour un bon choix de α , β et γ ?

Oui, puisque c'est $\left(x \mapsto \frac{(x+2) \cdot (x-3)}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\right)$ puisque le dénominateur se factorise en $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x-1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$

On fait de même avec les deux autres.

Les trois vecteurs $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, $x \mapsto \frac{1}{x+2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ sont dans notre espace vectoriel. Mais on ne sait pas encore si ils l'engendrent. Ni même si les décompositions sont uniques. Mais on est en algèbre linéaire. Et donc en maths. On sait être flemmard.

On vérifie la liberté, et on aura « base » par un simple argument de cardinal.

On se donne donc a , b et c et on suppose $\left(x \mapsto \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-3}\right) = \left(x \mapsto 0\right)$.
Par la méthode des pôles, on trouve $a = 0$ puis $b = 0$ et $c = 0$.

Les trois vecteurs forment une famille libre de cardinal égal à la dimension de l'espace.
On tient une base de notre espace.

Tout vecteur se décompose, d'une façon unique, suivant cette famille.

Toute application de la forme $\left(x \mapsto \frac{\alpha + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}\right)$ se décompose d'une façon unique sous la forme $\left(x \mapsto \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-3}\right)$.

Et si vous ne prouvez que l'unicité de la décomposition (par condition nécessaire et justement méthode des pôles), vous êtes en fait un génie, vous avez compris que la liberté suffisait.

Et si vous appliquez on propose/on vérifie, vous êtes aussi un génie. Vous avez compris que « génératrice » suffisait.

Tiens, un point de langage que je soulève :

la décomposition en éléments simples, c'est « bvase » et « unicité »

et la recomposition en éléments simples c'est « génératrice » et « on propose/on vérifie ».

◀32▶

On se place dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $\{f \mid f(1) = 0\}$ et $\{x \mapsto a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$ et donnez la dimension d'un d'entre eux. Montrez qu'ils sont supplémentaires dans E .

$(E, +, \cdot)$ et $\{f \mid f(1) = 0\}$ sont de dimension infinie (on trouve déjà tous les $x \mapsto x^n - 1$).
 $\{x \mapsto a \cdot x \mid a \in \mathbb{R}\}$ est la droite engendrée par $x \mapsto x$. Dimension 1.

Toute application f se décompose d'une façon unique en $(x \mapsto f(x) - x \cdot f(1)) + (x \mapsto x \cdot f(1))$.

◀33▶

♥ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ d'équation $x + y - 2z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\vec{i} + \vec{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\vec{j} + \vec{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).

Une base de P : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Une base de D : $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Une famille génératrice de $P + D : \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

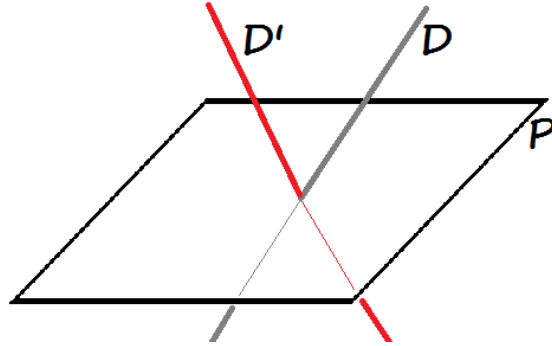
Petit calcul de déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$.

La famille est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ donc $P + D = \mathbb{R}^3$ et même $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.

On fait de même avec $P + D' = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

On a bien $P \oplus D = P \oplus D' = \mathbb{R}^3$.

Et seuls les polymérisateurs de formules le nez collé à la feuille, le cerveau oublié en amphi 21 voudront simplifier.



Et cet exercice ne sert à rien si vous n'avez pas en tête un dessin comme ça pendant que vous le traitez.

◀34▶

On pose $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$. vérifiez que c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

On calcule le déterminant relatif à la base canonique. Il est non nul, c'est une base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

On peut aussi revenir à la définition de « famille libre » par un système, puis exploiter « et cette famille a le bon cardinal ».

On peut aussi combiner ces vecteurs pour essayer de retrouver les trois vecteurs de la base canonique.

Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et de $\text{Vect}(\vec{c})$?

C'est impossible. Un tel espace devrait avoir pour dimension à la fois 1 et 2.

Je sais, en mécanique quantique, c'est jouable. Ou pas.

Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et de $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{c})$?

Existe-t-il un sous-espace vectoriel qui soit supplémentaire à la fois de $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et de $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{c})$ et même de $\text{Vect}(\vec{b}, \vec{c})$?

On prend un sous-espace de dimension 1 : par exemple $\text{Vect}(\vec{i})$.

On vérifie que trois déterminants sont nuls : $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{i})$, $\det(\vec{a}, \vec{c}, \vec{i})$ et $\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{i})$.

Bon ça marche.

◀35▶

Résolvez $x^4 - 4^x = 17$.

◀36▶

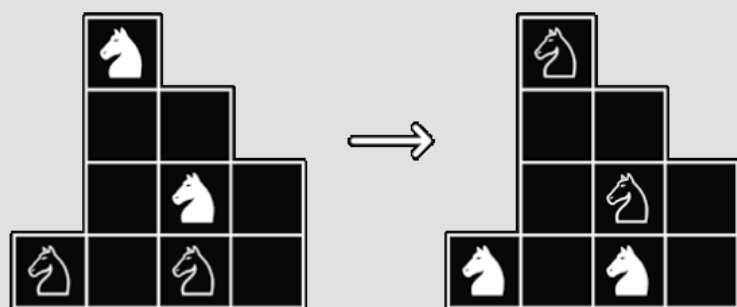
L'application $P(X) \mapsto P(X+1)$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$.

Donnez sa matrice de la base canonique vers la base canonique.

Donnez sa matrice de la base canonique vers la base $(X^2, (X+1)^2, (X+2)^2)$ après avoir vérifié que c'est bien une base de $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)$.

Existe-t-il une base B telle que sa matrice de B dans B soit $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Existe-t-il une base B telle que sa matrice de B' dans B' soit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

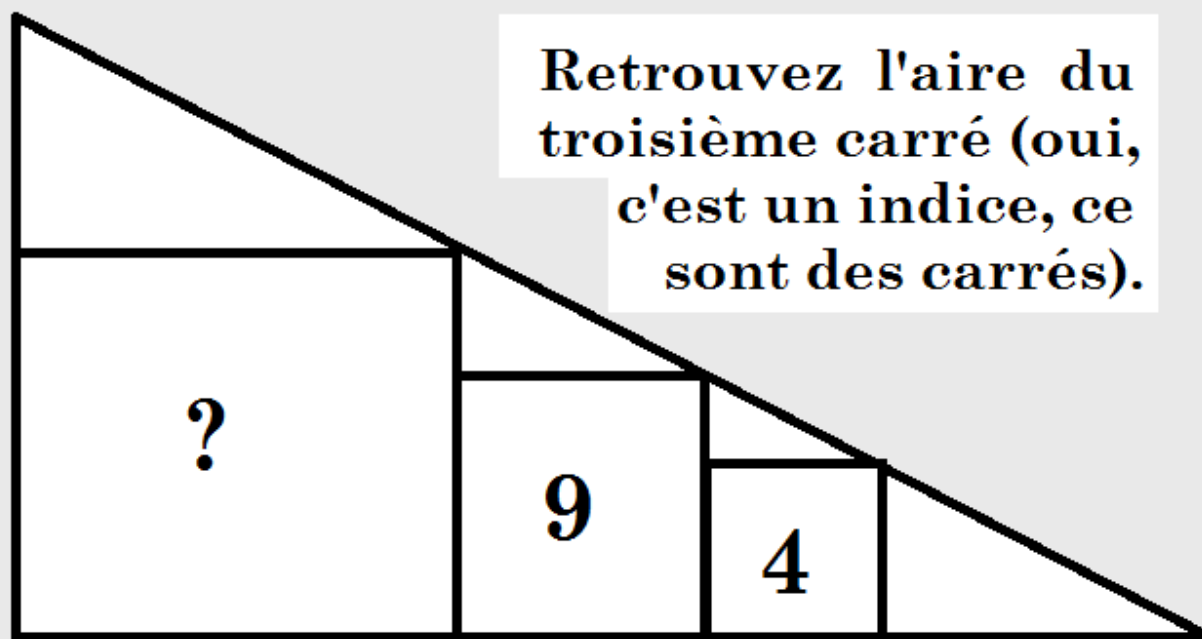


Passez de la première situation à la seconde ; les mouvements autorisés sont ceux des cavaliers, et deux cavaliers ne peuvent occuper la même case.

Commencez par transformer cette portion d'échiquier en graphe (les sommets sont les cases, deux sommets sont reliés si on peut passer d'une case à l'autre par un saut de cavalier).

<37>

Bel exercice sur les graphes finalement.



Retrouvez l'aire du troisième carré (oui, c'est un indice, ce sont des carrés).

<38>