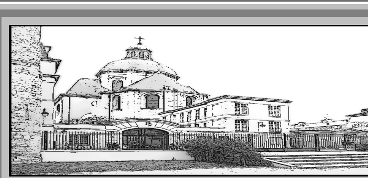
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 juin
$\mathcal{M.P.S.I.2}$



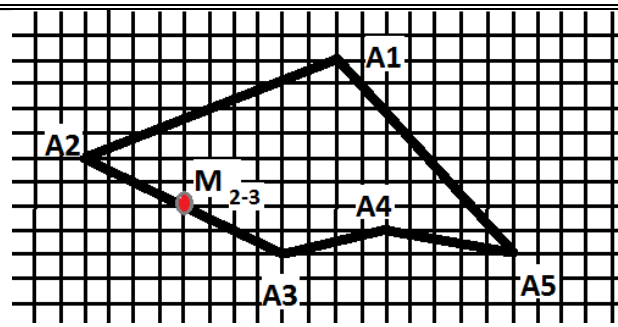
2024 2025

TD31

◃0▹ ♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$. Montrez que C_A contient toutes les puissances de A. Montrez que $(I_2,\ A)$ est une base de C_A.

◃1▹ Soient f et g deux application linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, espaces vectoriels de dimension finie. Montrez que si il existe φ dans $GL(F)$ vérifiant $f = \varphi \circ g$, alors on a $Ker(g) = Ker(f)$.
Réciproquement, on suppose $Ker(g) = Ker(f)$. En utilisant alors une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$ dans $(E, +, .)$, donnez une application φ de F dans F linéaire et bijective, vérifiant $f = \varphi \circ g$.

◃2▹ Sur les croisements du papier quadrillé de la carte du trésor, cinq points A_1 à A_5 sont marqués. Montrez que je peux en prendre alors deux dont le milieu est aussi sur un croisement du papier quadrillé. *C'est une histoire de parité dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*



◃3▹ ♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + y - z = 0$.

◃4▹ Montrez que l'espace des matrices antisymétriques de taille $n + 1$ a la même dimension que l'espace des matrices symétriques de taille n.

◃5▹ Calculez à 10^{-7} près $\sqrt[1/\ln(5)]{e}$ et même pourquoi pas à 10^{-8} près...

◃6▹ On se donne quatre polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3(X), +, .)$ et quatre réels distincts a_0, a_1, a_2 et a_3 *(pourquoi est ce que cela ne se quantifie pas $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$?)*. On définit alors la matrice M de terme général $P_i(a_k)$. Montrez que si la famille est liée, son déterminant est nul.
Exprimez cette matrice à l'aide de la matrice exprimant les P_i sur la base canonique et d'une matrice de VanDer-Monde. Montrez que le déterminant de M est nul si et seulement si la famille des P_i est libre.

Chaque polynôme $\sum_{j=0}^{d} c_j.X^j$ est représenté par la liste $[c_0, \dots c_d]$. Votre script devra prendre en entrée la liste `LP` des `d` polynômes et la liste `A` des abscisses $[a_0, \dots a_{d-1}]$ et retourner la matrice `M` *(de taille `d` sur `d`)* définie ci dessus.

◃7▹ ♡ Ajustez pour qu'elles aient même trace, même somme des mineurs de taille 2 et même déterminant :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On appelle mineurs de taille 2 de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ chacun des trois déterminants $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c \\ a'' & c'' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} b' & c' \\ b'' & c'' \end{vmatrix}$ (que vaut cette somme si la matrice est triangulaire ?)

◃8▹ ♡ Donnez deux matrices carrées de taille 2 de trace 6 et de déterminant 9. Lesquelles sont diagonalisables ?

◃9▹ ♡ Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ à la fois sur la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ mais aussi sur la base $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, b.\overrightarrow{i} +$

$3.\overrightarrow{j}$). Retrouvez a et b. Que constatez vous alors pour le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}$ quand vous l'écrirez sur la nouvelle base ?
Les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ sur une base $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, c'est le couple de réels $(\alpha,\ \beta)$ vérifiant $\overrightarrow{a}=\alpha.\overrightarrow{i}+\beta.\overrightarrow{j}$).

◃10▹ Montrez que pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, il existe un vecteur $\overrightarrow{\alpha}$ vérifiant $\forall \overrightarrow{b}\in\mathbb{R}^2$, $\det(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b})=\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{b}$. Montrez qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{a}$, de même norme. On pourrait le noter $\wedge(\overrightarrow{a})$. Déterminez $\wedge(\wedge(\overrightarrow{a}))$.
Montrez que pour tout triplet $(\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{b},\ \overrightarrow{c})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il existe un vecteur $\wedge(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})$ vérifiant $\forall\overrightarrow{a}$, $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d})=\overrightarrow{a}.(\wedge(\overrightarrow{b},\overrightarrow{c},\overrightarrow{d}))$.

◃11▹ Montrez que l'implication suivante est une bêtise :
$(A.U=B.U$ et $A\neq B)\Rightarrow U=0_n$ (A et B sont des matrices carrées, de taille n sur n et U est un vecteur colonne de taille n).

◃12▹ Montrez que la famille $(X+X^2+X^3+X^4,\ 1+X^2+X^3+X^4,\ 1+X+X^3+X^4,\ 1+X+X^2+X^4,\ 1+X+X^2+X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Explicitez les composantes des polynômes de la base canonique sur cette base.
Quelle relation vérifient les composantes sur cette base des polynômes nuls en 1.

◃13▹ Pouvez vous compléter pour qu'elle soit nilpotente : $\begin{pmatrix}2&1&-4&2\\3&&-3&\\2&0&-2&\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$.

◃14▹ Déterminez les triplets $(a,\ b,\ c)$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $\left(\begin{pmatrix}a.b\\b\\a\end{pmatrix},\begin{pmatrix}b\\b.c\\c\end{pmatrix},\begin{pmatrix}a\\c\\a.c\end{pmatrix}\right)$ soit libre.

◃15▹ L'application $\cos^3.\sin$ est elle dans l'espace vectoriel engendré par $(s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4,\ s_5)$ où l'on pose $s_k=(\theta\longmapsto\sin(k.\theta))$.
Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces six vecteurs.

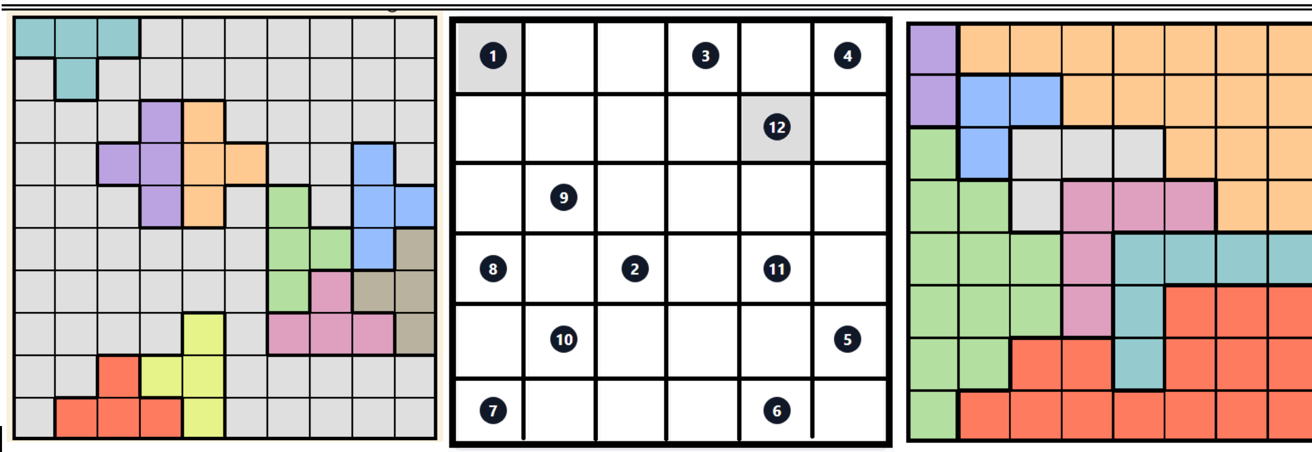
◃16▹ ♡ Un tétraèdre régulier a pour sommets A, B, C et D et pour centre O.
On note M la matrice dont les quatre colonnes sont $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.
Montrez que ${}^tM.M$ est de la forme $\begin{pmatrix}c&n&n&n\\n&c&n&n\\n&n&c&n\\n&n&n&c\end{pmatrix}$.
Montrez : $\begin{vmatrix}c&n&n&n\\n&c&n&n\\n&n&c&n\\n&n&n&c\end{vmatrix}=(c+3.n).(n-c)^3$.
Justifiez : $\det({}^tM.M)=0$. Pourquoi n'a-t-on pas $\det(M)=0$?
Déduisez que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})$ vaut $Arccos(-1/3)$ *(que les physiciens et chimistes vous demandent de retenir par ♡ sous la forme idiote de 109 degrés et je ne sais combien de secondes car ils aiment la complication inutile)*.

◃17▹ Le corps est $(\{0,1,2,3,4\},+,\times)$ pour l'addition et la multiplication modulo 5. On prend l'espace vectoriel $(\{0,1,2,3,4\}^3,+,.)$. Donnez une base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ du plan d'équation $x+2.y+3.z=0$. Combien ce plan a-t-il de vecteurs ? Quelle est sa dimension ?
Combien existe-t-il de vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{u})$ soit une base de $(\{0,1,2,3,4\}^3,+,.)$.

◃18▹ ♡ Quels sont les vecteurs de C que l'on peut ajouter à B pour en faire une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$: $B=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, $C=\left[\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right]$.

◃19▹ Une matrice carrée M est nilpotente si il existe un entier k vérifiant $M^k=O_n$. Ayant constaté que $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ sont des matrices nilpotentes linéairement indépendantes, l'élève Tongrocuge-Doipassé déduit « l'espace vectoriel des matrices nilpotentes de taille 3 sur 3 est de dimension 6 ». Le colleur Hizenioublack corrige « non, au moins de dimension 6, mais peut être plus ». Montrez que les deux sont vraiment cons comme c'est pas permis.

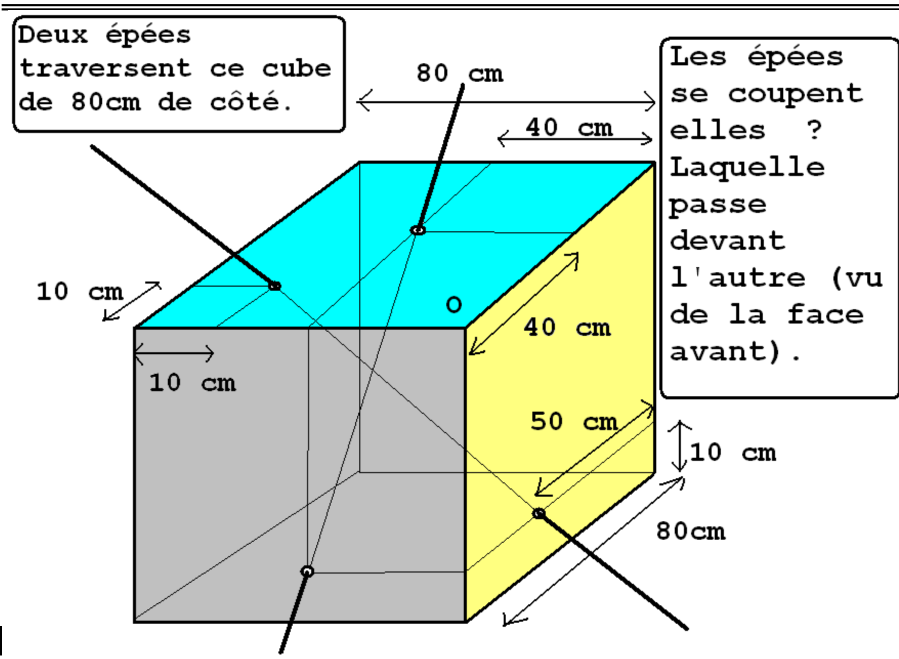
20 Pour tout n, on pose $c_n = (\theta \longmapsto \cos(n.\theta))$ et $s_n = (\theta \longmapsto \sin(n.\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$, enlevez un vecteur pour en faire une famille libre.



21

22 $\vec{i} + 2.\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k}$ et $2.\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ont pour composantes $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$. Retrouvez qui sont ces trois vecteurs de base.
Et si pour changer on décidait qu'on n'est pas sur $\mathbb{R}$ mais sur l'ensemble des entiers de 0 à 6 pour les opérations modulo 7.

23 Donnez une base directe de $\mathbb{R}^2$ sur laquelle $\vec{i} + \vec{j}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(beaucoup de réponses possibles)*.



Vous serez amené à vous placer dans un repère d'origine O. Vous déterminerez dans ce repère les équations des deux droites matérialisant ces épées et à vous demander ce qu'il en est du système déterminant l'intersection.

24

25 ♡ Sachant que $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{k} + \vec{i}$ ont pour composantes respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, vous déduisez que l'on n'est pas sur la base canonique *(ou alors, je ne peux plus rien pour vous)*. Donnez les composantes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sur cette base. Retrouvez cette base.

26 Une famille de vecteurs $(\vec{a_1}, \ldots \vec{a_p})$ est dite "positivement génératrice" de $(E, +, .)$ si

$\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \exists(\alpha_1, \dots \alpha_p) \in (\mathbb{R}^+)^p,\ \overrightarrow{u} = \alpha_1.\overrightarrow{u_1} + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}$
Montrez que toute famille positivement génératrice de $(E, +, .)$ est génératrice de $(E, +, .)$ mais n'en est pas une base [1] (en décomposant $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$).
Montrez que $(\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, -\overrightarrow{k})$ est positivement génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Trouvez une famille positivement génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ de cardinal 4.

◁27▷ Soit A une matrice carrée de format n vérifiant $|a_i^i| > \sum_{k \neq i} |a_i^k|$ pour tout i. On suppose (peut être à tort) qu'il existe un vecteur U non nul vérifiant $A.U = 0_n$(vecteur nul de taille n). On suppose que des n composantes du vecteur U, la plus grande en valeur absolue est u_m. En étudiant la ligne $\sum_{k=1}^{n} a_m^k.u_k = 0$, trouvez la contradiction.
Déduisez que $\det(A)$ est donc non nul.

◁28▷ On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On note $(E', +, .)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ *(la linéarité c'est $\varphi(a.P + b.Q) = a.\varphi(P) + b.\varphi(Q)$).*
Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto P'(2)$ sont dans E' et forment une famille libre *(on pourra poser $\alpha.\varphi_1 + \beta.\varphi_2 + \gamma.\varphi_3 = 0$ et appliquer aux polynômes de la base canonique).*
Montrez que $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$, $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P(1)$, $P \longmapsto P(2)$ sont dans E' mais forment une famille liée.

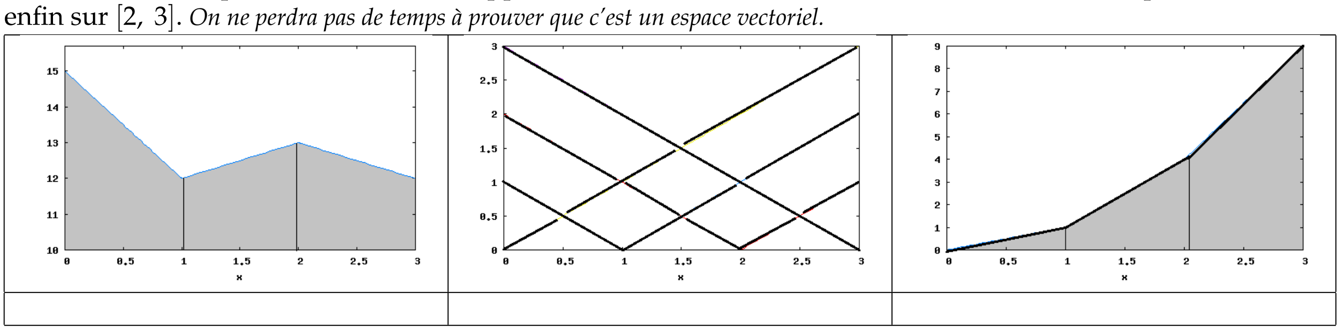
◁29▷ ♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M.U = \lambda.U\}$ est un espace vectoriel. Donnez en une base et la dimension.

◁30▷ ♡ Combien de sous familles de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$ sont libres ? Combien sont des bases de $(\mathbb{R}^3, +, .)$? Combien sont génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$?
Même jeu de questions avec $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5.\overrightarrow{k})$.

◁31▷ Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, la famille $(2.\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1})$ est elle libre ?
Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, la famille $(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}, \dots \overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1})$ est elle libre ?
Si la famille $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, la famille $\left(\sum_{i \neq 1} \overrightarrow{e_2}, \sum_{i \neq 2} \overrightarrow{e_i}, \sum_{i \neq 3} \overrightarrow{e_i}, \dots \sum_{i \neq n} \overrightarrow{e_i}\right)$ est elle libre ?
Mêmes questions si on remplace $\mathbb{R}$ par le corps des entiers $\{0, \dots p-1\}$ pour l'addition et la multiplication modulo p.

◁32▷ P, Q, R et S sont des polynômes. Montrez que si la famille $(P,\ Q,\ R,\ S)$ est liée dans $(\mathbb{R}[X], +, .)$, alors la famille $\left(\begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(4) \\ P(5) \\ P(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(4) \\ Q(5) \\ Q(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(4) \\ R(5) \\ R(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(4) \\ S(5) \\ S(7) \end{pmatrix} \right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$.
Montrez qu'il est possible que cette famille de $(\mathbb{R}^5, +, .)$ soit liée alors que $(P,\ Q,\ R,\ S)$ est libre.

◁33▷ ♡♠ On note A l'ensemble des applications de $[0,\ 3]$ dans $\mathbb{R}$ affines par morceaux sur les segments du type $[k,\ k+1]$. Ce n'est pas clair ? Ce sont les applications continues de $[0,\ 3]$ dans $\mathbb{R}$, affines sur $[0,\ 1]$, puis sur $[1,\ 2]$ et enfin sur $[2,\ 3]$. *On ne perdra pas de temps à prouver que c'est un espace vectoriel.*



1. (sauf si la famille est vide)

Montrez que φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3 sont dans A avec $\varphi_k = x \longmapsto |x-k|$.

Montrez qu'elles forment une famille libre *(estimez* $\sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\varphi_k$ *en* 0, 1, 2 *et* 3*)*.

Que pouvez vous dire de $\dim(A)$?
Décomposez $x \longmapsto 1$ suivant $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$.
Montrez que deux éléments de A qui coïncident en 0, 1, 2 et 3 sont égaux.
Que vaut $\dim(A)$?
Décomposez sur $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ l'élément f de A vérifiant $f(k) = k^2$ pour tout k de 0 à 3.

Inversez la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

◁34▷ On se donne cinq vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_5}$ dans un espace vectoriel $(E,\ +,\ .)$ tels que $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4})$, $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ soient libres. Montrez qu'on ne peut pas déduire que $(\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2},\ \overrightarrow{u_3},\ \overrightarrow{u_4},\ \overrightarrow{u_5})$ soit libre.

◁35▷ Dans l'espace vectoriel des fractions de la forme $\dfrac{a.X^3+b.X^2+c.X+d}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, on a deux bases :

$C_2 = \dfrac{X^2}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, $C_1 = \dfrac{X}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, $C_0 = \dfrac{1}{(X-1).(X-2).(X+3)}\Big)$ et $P_1 = \dfrac{1}{(X-1)}$, $P_2 = \dfrac{1}{(X-2)}$, $P_{-3} = \dfrac{1}{(X+3)}$, $P_\infty = 1$, .

En pensant à $\dfrac{(X-2).(X+3)}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, complétez : $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ -6 & & & \end{pmatrix} & \begin{matrix} C_3^* \\ C_2^* \\ C_1^* \\ C_0^* \end{matrix} \\ \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_{-3} & P_\infty \end{matrix} & \end{array}$. Inversez la matrice obtenue. Exprimez alors C_1 comme combinaison linéaire de P_1,P_2et P_3.

Complétez $\dfrac{a.X^3+b.X^2+c.X+d}{(X-1).(X+2).(X-3)} = \diamondsuit + \dfrac{\heartsuit}{X-1} + \dfrac{\clubsuit}{X+2} + \dfrac{\spadesuit}{X-3}$.

◁36▷ ♡ Calculez les trois déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

◁37▷ On pose

$$B = (\theta \longmapsto e^{4.\theta},\ \theta \longmapsto e^{2.\theta},\ \theta \longmapsto 1,\ \theta \longmapsto e^{-2.\theta},\ \theta \longmapsto e^{-4.\theta})$$

et

$$\beta = (ch^4,\ ch^3.sh,\ ch^2.sh^2,\ ch.sh^3,\ sh^4)$$

Montrez que $Vect(B)$ *(noté E)* est de dimension 5. Montrez que β est une famille libre de $(E,+,.)$.
Montrez que si f est dans E alors f' y est aussi.

Si f a pour composantes $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ sur la base β, quelles sont les composantes $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ de f' sur cette base ? Donnez la matrice M vérifiant $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$. Donnez la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de M.

◁38▷ On définit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$. Complétez pour que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ soient vecteurs propres.

Donnez son spectre. Calculez $(A - I_3).(A - 2.I_3)$. Déduisez que A n'est pas diagonalisable. Calculez $(A - I_3)^2.(A - 2.I_3)$.

Si vous visez l'étoile, trigonalisez la, c'est à dire rendez la semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ *(dite "forme de Jordan")*.

◁39▷ ♡ On se donne une matrice A de taille 4 sur 4. Montrez que la famille $(I_4,\ A,\ A^2, \ldots A^{16})$ est liée.
Montrez qu'il existe au moins un polynôme non nul P vérifiant $P(A) = 0_{4,4}$.

Montrez que si la matrice M est diagonalisable, il existe un polynôme de degré 4 vérifiant à la fois $P(D) = 0_{4,4}$ et $P(M) = 0_{4,4}$.

◃40▹ Montrez que l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a + 2.b + c - 3.d$ est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$. Mettez la sous la forme $M \longmapsto Tr(A.M)$ pour A bien choisie à préciser.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez sa dimension.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr({}^tM.M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez sa dimension.

◃41▹ ♡ $M = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & & 13 \\ & -12 & -4 \end{pmatrix}$ a pour vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(valeur propre)* et pour valeurs propres -3 et 4. Retrouvez son polynôme caractéristique, et diagonalisez la.

◃42▹ On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que les vecteurs colonne de A forment une famille liée. Montrez qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $A.U = 0_3$. Calculez ${}^tA.A$ et prouvez que son déterminant est nul.
Calculez $A.{}^tA$ et calculez son polynôme caractéristique.
Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des vecteurs U vérifiant $A.U = 0_3$?

◃43▹ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ muni de la base canonique.

$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{ccccc} x & +y & -z & +2.t & = 0 \\ x & +2.y & +z & -3.t & = 0 \end{array} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{ccccc} 3.x & +2.y & +z & +t & = 0 \\ x & -y & +z & +2.t & = 0 \end{array} \right\}$.

Donnez une base de E, une base de F. Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E \cap F$. Donnez une base de $E + F$, la dimension des quatre sous-espaces cités, et complétez la dernière famille en base de $\mathbb{R}^4$.

◃44▹ F, G et H sont trois droites de $(\mathbb{R}^n, +, .)$. Quelles valeurs peut prendre $dim((F + G) \cap H)$?
Quelles valeurs peut prendre $dim(((F + G) \cap H) + ((G + H) \cap F) + ((H + F) \cap G))$?

◃45▹ Est il possible de choisir $\overrightarrow{a}$ pour que les quatre familles $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{a})$, $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{a})$, $(\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, \overrightarrow{a})$ et $(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{a})$ soient des bases de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Et si on ajoute « bases directes » ?

◃46▹ ♡ Ajustez a pour que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix}$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Rendez la quand même semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ *(trop dur de trouver α)*.

◃47▹ Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des matrices symétriques carrées de taille n sur n de trace nulle ?
Quelle est la dimension de l'espace des matrices carrées de taille n sur n vérifiant $Tr({}^tM.M) = 0$? (calculez cette trace)

◃48▹ ♡ A est une matrice carrée. Montrez que A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.
Montrez que les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.
♣ Donnez une matrice carrée A, réelle de taille 2 telle que les valeurs propres de A^2 soient négatives.

◃49▹ Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nuls en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X - 1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X - 1$ ou $X + 1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X - 1$ et $X + 1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

◃50▹ Montrez qu'il y a 70 tétraèdres dont les sommets sont des sommets du cube $[0,\ 1]^3$.

Montrez que douze d'entre eux ont un volume nul.
Rappel : le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{base \times hauteur}{3}$ soit $\dfrac{volume\ tetraedre}{6}$.
Donnez un tétraèdre de volume $\dfrac{1}{6}$. Donnez un tétraèdre de volume $\dfrac{1}{3}$. Montrez qu'il n'en existe aucun de volume $\dfrac{1}{2}$.
Combien ont pour volume $\dfrac{1}{6}$?

◁ 51 ▷ ♡ Déterminez noyau et image de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ 2.a \end{pmatrix}$ après avoir évidemment affirmé que cette application est bien linéaire.
Donnez un antécédent de chacun des vecteurs de la base canonique par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ 2.a+c \end{pmatrix}$. Déterminez noyau et image de cette application linéaire.

◁ 52 ▷ Montrez que si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^2 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.
Vrai ou faux : si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^3 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.

◁ 53 ▷ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.
Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

◁ 54 ▷ Montrez que de toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on peut extraire une sous-suite qui converge.

◁ 55 ▷ Une suite réelle croissante dont la moyenne de Cesàro converge est elle aussi convergente ?

◁ 56 ▷ ♡ Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \\ & -10 & \end{pmatrix}$ en matrice de projecteur *($p \circ p = p$ et donc $M^2 = M$)* ?
Si oui, calculez son déterminant et son polynôme caractéristique.
Donnez son noyau *(ensemble des vecteurs d'image nulle)* et son image *(ensemble des vecteurs atteints)*.
Et tant qu'on y est, diagonalisez la.
Si non, donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\ln(1-t)}$.

◁ 57 ▷ A est une matrice de projection, complétez la : $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 4 & \end{pmatrix}$. Donnez son noyau K et une base de son image I. Donnez l'équation cartésienne de son ensemble image. Montrez que son image est $Ker(I_3 - A)$. Montrez que $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un espace vectoriel. Montrez que M est dans C si et seulement si on a $\forall U \in K,\ M.U \in K$ et $\forall V \in I,\ M.V \in I$.

◁ 58 ▷ Soit p un projecteur et n un endomorphisme nilpotent de $(\mathbb{R}^d, +, .)$. On suppose de plus $p \circ n = n \circ p$. On pose $f = p + n$. Calculez $Tr(f^k)$ pour tout entier naturel k.

◁ 59 ▷ On note P l'ensemble des projecteurs de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *(n vaut au moins 2)*. Déterminez l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p+q)$.
Montrez que l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto \det(p+q)$ est $\mathbb{R}$.
Quel est l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p \circ q)$?

◁ 60 ▷ p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{R}^3$, vérifiant $Tr(p+q) = 4$. Montrez alors $Im(p) \cap Im(q) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Déduisez que 2 est valeur propre de $p+q$.

◁61▷ ♡ Montrez que la dérivation est un endomorphisme sur l'espace des solutions de l'équation $y'' + a.y' + b.y = 0$. Donnez sa trace et son déterminant.

◁62▷ Un élève dit « j'ai voulu calculer la trace et le déterminant de $M \longmapsto M^2$ de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même. J'ai donc calculé la matrice de cet endomorphisme sur la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Ayant pour images $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant nul et de trace 2.

Mais j'ai pris ensuite la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

La trace a changé. Or le cours dit que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.. »

◁63▷ A est une matrice de taille 3 vérifiant $A^2 = A$ *(projection)*. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son déterminant en fonction de celui de A. Déterminez sa trace dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez sa trace dans le cas général.

◁64▷

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Généralités

Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou même de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est dite convexe si pour tout triplet ordonné (a, b, c) avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

I∼0) Montrez l'équivalence entre la positivité de ce déterminant et le jeu d'inégalités :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

I∼1) Montrez que les applications affines sont convexes, de même que $x \longmapsto x^2$.

I∼2) Montrez que l'ensemble des applications convexes est stable par addition.

I∼3) Montrez que $x \longmapsto |x|$ est convexe (distinguer suivant la position de a, b et c par rapport à 0).

II∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si $x \longmapsto f(-x)$ est convexe.

II∼1) Montrez que f est convexe de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $x \longmapsto x.f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Dérivabilité

III∼0) Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout x, et pour tout triplet (h, k, t) avec $h < k < 0 < t$: $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k) - f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t) - f(x)}{t}$
(on pourra prendre $(a, b, c) = (x+h, x+k, x)$ puis un autre triplet).

III∼1) Déduisez que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ est croissante majorée sur $]-\infty, 0[$.

III∼2) Déduisez que f est dérivable à gauche en tout point. f est elle dérivable à droite en tout point ?

III∼3) f est elle continue en tout point ? f est elle dérivable en tout point ?

III∼4) Montrez $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ (ceci répond partiellement à la question précédente ?) pour tout x.

III∼5) En prenant $(x,\ \dfrac{x+y}{2},\ y)$ dans le rôle de a, b et c, montrez $f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$ pour tout couple $(x,\ y)$ avec $x \leqslant y$.

III∼6) Déduisez que f'_g et f'_d sont croissantes.

III∼7) Montrez que si f est convexe et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est croissante.

IV∼0) Montrez que si f est dérivable avec f' croissante, alors f est convexe.

IV∼1) Justifiez que expest convexe.

Inégalités de convexité

V∼0) On se donne a et c avec $a \leqslant c$. Montrez que $t \longmapsto (1-t).a + t.c$ est bijective de $[0,\ 1]$ dans $[a,\ c]$ (explicitez sa réciproque).

V∼1) Montrez que f est convexe si et seulement si
pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a + t.c) \leqslant (1-t).f(a) + t.f(c)$.

V∼2) Montrez que si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe.

VI∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si pour tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a $f\Big(\dfrac{\lambda_1.x_1 + \ldots + \lambda_n.x_n}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}\Big) \leqslant \dfrac{\lambda_1.f(x_1) + \ldots + \lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n}$.
pour un sens, vous pourrez considérer le cas particulier $n = 2$
pour l'autre sens, vous pourrez faire une récurrence sur n en étudiant $(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} + t.x_{n+1}$ pour $t = \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}}$.

VI∼1) Déduisez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$: $\exp\left(\dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqslant \dfrac{e^{x_1} + \ldots + e^{x_n}}{n}$.

VI∼2) Déduisez pour tout n et tout n uplet de réels strictement positifs $(a_1, \dots a_n)$: $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leqslant \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$.

VI∼3) Montrez pour f convexe et g continue : $f\Big(\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt\Big) \leqslant \dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(g(t)).dt$ *(inégalité de Jensen).*

Factorielle

L'objectif est de montrer que la fonction factorielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est logarithmiquement convexe (c'est à dire que son logarithme est convexe), *puis de montrer qu'il existe une unique application qui généralise la factorielle à $\mathbb{R}^+$ et reste logarithmiquement convexe. On l'appelle fonction* Γ (gamma).

VII∼0) Montrez, pour trois entiers naturels a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$: $\left(\dfrac{b!}{a!}\right)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \left(\dfrac{c!}{b!}\right)^{b-a}$, déduisez que $n \longmapsto \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

VIII∼0) Pour x réels strictement positif donné et n entier naturel, on pose $I_n(x) = \dfrac{n^x.n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$.
Montrez : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$.

Calculez $I_n(3)$ et donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

Simplifiez $I_n(p)$ si p est un entier naturel et donnez sa limite quand n tend vers $+\infty$.

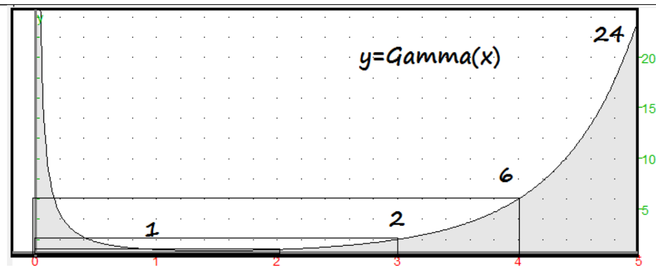
Montrez que chaque application $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

IX∼0) x est un réel strictement positif donné ; montrez : $(t+1)^{x+1} - t^{x+1} \geqslant (x+1).t^x$ pour tout t positif.

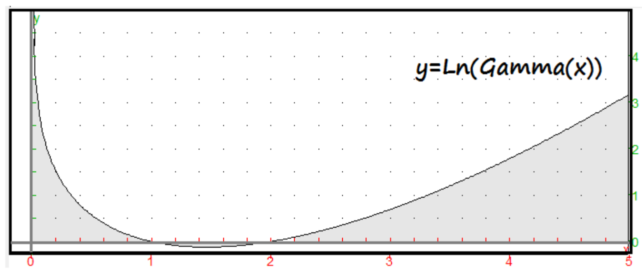
IX~1) Déduisez : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$ pour tout entier naturel n. Déduisez que $(I_n(x))_n$ est une suite croissante.

IX~2) Montrez pour tout x que la suite $(I_n(x))$ converge. *On pose alors* $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.

X~0) Exprimez $I_n(x+1)$ à l'aide de $I_{n+1}(x)$. Déduisez : $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.



Montrez que $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0, +\infty[$.



Déduisez que Γ est convexe.

On a donc montré que Γ est une fonction logarithmiquement convexe, qui généralise la factorielle à $]0, +\infty[$ (en fait, historiquement, à cause de ce sale Gauss, il perdure un décalage depuis toujours : $\Gamma(p) = (p-1)!$).

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

Unicité

Passons à : « c'est la seule généralisation de la factorielle ».

XI~0) *Soit f une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+1) = x.f(x)$ pour tout x et f est logarithmiquement convexe.* Calculez $f(n)$ pour tout entier naturel n.

XI~1) *On pose* $g = \ln(f)$. Montrez pour tout x et tout n : $g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)$.

XI~2) Montrez pour k entier, plus grand que x : $\frac{g(n)-g(n-1)}{1} \leqslant \frac{g(x+n)-g(n)}{x} \leqslant \frac{g(n+k)-g(n)}{k}$.

XI~3) Déduisez : $\frac{g(x+n)-g(x)}{x} - \ln(n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

XI~4) Déduisez $g(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(x.\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(I_n(x))$.

◁65▷ Déterminez le noyau de $f \longmapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

◁66▷ Montrez que $\varphi = A \longmapsto a_1^1 + 2.a_1^2 + 3.a_1^3 + a_2^2 + 2.a_2^3 + a_3^3$ est une forme linéaire sur $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Combien de matrices ont pour image 1 ? Donnez U vérifiant $\forall A,\ \varphi(A) = Tr(A.{}^tU)$.
On pose alors $\psi = A \longmapsto Tr(A.U)$ et $\zeta = A \longmapsto Tr(A.U^2)$.
Donnez la dimension de $Ker(\varphi) \cap Ker(\psi) \cap Ker(\zeta)$.

◁67▷ ♡ Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez : $Ker(f^0) \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset Ker(f^3) \ldots$
♡ Déterminez la liste de ces noyaux si f est l'endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dont la matrice sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez en passant le trace de chaque puissance de cette matrice.

♡ Même question avec celui dont la matrice est la transposée de la précédente : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

♡ Même question avec celui dont la matrice est $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

♣ Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^{10}, +, .)$ dont la liste des dimensions des noyaux itérés $(Ker(f^k))$ soit $0-3-5-7-8-8-8\ldots$. Donnez alors la liste des dimensions des images itérées *(le mieux sera de donner la matrice de votre endomorphisme sur la base canonique)*.

♡ Donnez un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$, $Ker(f^2) = \{x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \mid y + z = 0\}$ et $Ker(f^3) = \mathbb{R}^3$.

♠ Donnez un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$, $Ker(f^3) = \{x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \mid y + z = 0\}$ et $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$.

◃68▹ ♡ Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez l'équivalence entre $Im(f) = Im(f^2)$ et $Im(f) + Ker(f) = E$.

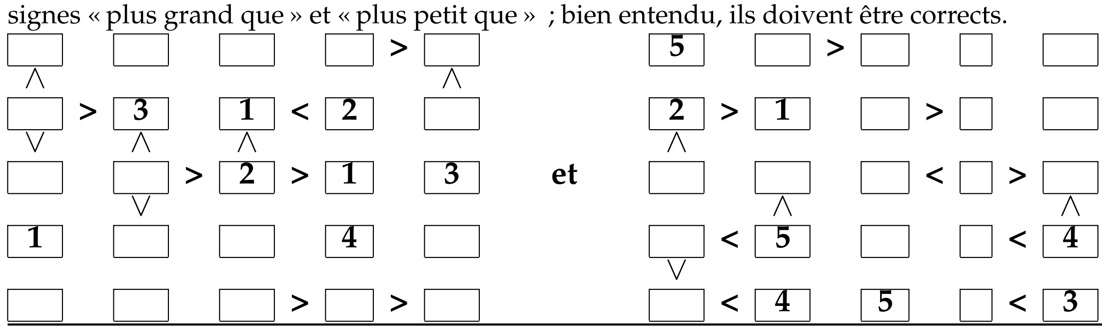
◃69▹ ♡ Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez l'équivalence entre $Im(f) = Im(f^3)$ et $Im(f) = Im(f^2)$.

◃70▹ Montrez que $P(X) \longmapsto (X-2).P'(X) - P(2).(X^2 - X + 1)$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$. Calculez sa trace et son déterminant en donnant sa matrice sur la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$. Auriez vous obtenu la même trace et le même déterminant en travaillant sur une autre base ?

◃71▹ On note E l'espace vectoriel engendré par les $c^k.s^{5-k}$ pour k de 0 à 5 *(on pose comme toujours $c = \cos$ et $s = \sin$)*. Donnez sa dimension.
Montrez que la dérivation est un endomorphisme de $(E, +, .)$. Donnez son noyau et son image. Calculez sa trace et son déterminant après avoir complété sa matrice

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & -1 & 0 & & & 0 & (s^5)^* \\
5 & 0 & & & & 0 & (c.s^4)^* \\
0 & & 0 & & & & (c^2.s^3)^* \\
0 & & 3 & & & & (c^3.s^2)^* \\
0 & 0 & & & & & (c^4.s)^* \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & (c^5)^* \\
f(s^5) & f(c.s^4) & f(c^2.s^3) & f(c^3.s^2) & f(c^4.s) & f(c^5) &
\end{array}$$

◃72▹ **Rappel des règles :** sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.



◃73▹ On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Écrivez un script `Python` qui s'en charge.

◃74▹ Construisez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$, $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $Ker(f) \subset Im(f)$ *(vous pouvez construire sa matrice sur la base canonique, je vous ai déjà offert une colonne...)*. Calculez alors $rg(f)$ et $rg(f^2)$.

◃75▹ On note T_n l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n de trace nulle. On note S_n l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n symétriques. Quelle est la dimension de $S_n + T_n$?
Pour quelles valeurs de n et p existe-t-il un isomorphisme entre S_n et T_p ?

◃76▹ Donnez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifiant $Ker(f) \subset Im(f)$ et qui ne soit pas un automorphisme (quelle sera alors la dimension de $Ker(f)$ et la dimension de $Im(f)$?).

◃77▹ ♡ On pose $M = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

Déterminez $Im(M)$, $Ker(M)$, $Ker(M) \cap Im(M)$, $Ker(M^2)$,$Im(M^2)$, $Ker(M^2) \cap Im(M^2)$ (notations abusives pour $Ker(U \longmapsto M.U)$ et autres).
Explicitez la suite $(\dim(Ker(M^n))_{n \geqslant 0}$.

◁78▷ On note E_i^k la matrice avec des zéros partout, sauf un 1 en ligne i et colonne j. Montrez que $Vect(E_i^k \mid i < k)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R}), +, .)$ formé de matrices toutes nilpotentes.

◁79▷ Montrez que toute matrices carrée de taille 3 sur 3 vérifiant $Tr(M) = Tr(M^2) = \det(M) = 0$ est nilpotente.
Montrez que toute matrice carrée de taille 3 sur 3 vérifiant $Tr(M) = Tr(M^2) = Tr(M^3) = 0$ est nilpotente.
On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton : toute matrice de taille 3 vérifie $M^3 - Tr(M).M^2 + Tr(Com(M)).M - \det(M) = 0_{3,3}$.

◁80▷ Peut on avoir $g \circ f = Id_E$ et pas $g = f^{-1}$? Oui. Prenez pour $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des suites réelles, et pour g l'application qui transforme la suite (u_n) en la suite (u_{n+1}) (vérifiez sa linéarité). Et construisez f linéaire aussi pour avoir $g \circ f(u) = u$ pour toute suite u. Montrez que ni f ni g n'est bijective.

◁81▷ Construisez *(en donnant sa matrice sur la base canonique de* $(\mathbb{K}^2, +, .)$*)* un endomorphisme de $(\mathbb{K}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j})$ et de trace nulle *(*$(\mathbb{K}, +, \times)$ *est le corps des entiers de* 0 *à* 6 *pour l'addition et la multiplication modulo* 7*).*