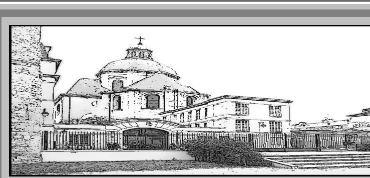
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 9 juin
M.P.S.I.2



2024 2025

TD31

◁0▷ ♡ On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $C_A = \{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$. Montrez que C_A contient toutes les puissances de A. Montrez que $(I_2,\ A)$ est une base de C_A.

On prend dans le rôle de M une matrice de la forme A^k. On vérifie : $A.A^k = A^k.A$. Oui, car la multiplication matricielle est associative.

On résout
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
A priori, quatre équations, quatre inconnues. On ne va guère avoir le choix. Mais très vite il ne reste que deux équations :
$$\begin{array}{ccccccccc} a & & +2.c & & = & a & +3.b & & \\ & b & & +2.d & = & 2.a & +b & & \\ 3.a & & +c & & = & & & c & +3.d \\ & 3.b & & +d & = & & & 2.c & +d \end{array}$$
donne juste $a = d$ et $3.b = 2.c$.

Remarque : *Sur quatre équations, il n'en reste que deux. Le système est très dégénéré.*
Mais c'est normal, il y a des informations inutiles, du fait même que $Tr(A.M) = Tr(M.A)$ et aussi $\det(A.M) = \det(M.A)$.
On sait aussi qu'il doit y avoir beaucoup de solutions (si le système n'avait pas été dégénéré, il n'y en aurait eu qu'une) : les puissances de A.

Les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ \frac{3}{2}.b & a \end{pmatrix}$.

On les écrit même $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ce qui permet de dire que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix}$ forment une base de notre espace vectoriel.[1]

Mais l'écriture $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ nous rapproche de la formule attendue.

Et même $\left(a - \frac{b}{2}\right).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{b}{2}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ pour avoir les deux matrices de l'énoncé.

◁1▷ Soient f et g deux application linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, espaces vectoriels de dimension finie. Montrez que si il existe φ dans $GL(F)$ vérifiant $f = \varphi \circ g$, alors on a $Ker(g) = Ker(f)$.
Réciproquement, on suppose $Ker(g) = Ker(f)$. En utilisant alors une base d'un supplémentaire de $Ker(f)$ dans $(E, +, .)$, donnez une application φ de F dans F linéaire et bijective, vérifiant $f = \varphi \circ g$.

On suppose donc dans le sens simple $\boxed{f = \varphi \circ g}$ avec φ linéaire et bijective de $(F, +, .)$ dans lui même (c'est déjà ici la question de cours pour élève de faible niveau : rappelez la définition du groupe linéaire $(GL(F), \circ)$).

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(g)$. Il vérifie $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$; on compose par φ : $\varphi(g(\overrightarrow{a})) = \varphi(\overrightarrow{0_F}) = \overrightarrow{0_F}$ par linéarite. On reconnaît "$\overrightarrow{a} \in Ker(f)$". On a prouvé $Ker(g) \subset Ker(f)$.

Pour l'autre sens, on peut partir de $\varphi(g(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0_F}$ et utiliser l'injectivité de φ pour aboutir à $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$.
On peut aussi le jouer avec finesse : $g = \varphi^{-1} \circ f$ donc $Ker(f) \subset Ker(g)$.

On suppose cette fois $\boxed{Ker(f) = Ker(g)}$ Il faut construire φ bijective, vérifiant $f = \varphi \circ g$.

Pour certains, on n'a rien, on ne peut rien faire.
Je dirai "oui, on ne peut rien calculer". Mais on n'est pas en maths pour calculer, on est en maths pour construire, réfléchir et surveiller des variables.

Pour construire φ, il faut donner les images des p vecteurs d'une base de $(F, +, .)$. On n'a pas de base de $(F, +, .)$? On va en construire une, adaptée à notre problème.

1. base : tout élément de l'espace vectoriel se décompose d'une façon unique comme combinaison linéaire des éléments de la base ; par exemple $(1,\ i)$ est une base de $\mathbb{C}$

On prend une base de $Ker(f)$ et $Ker(g)$: $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{n-r}})$. On la complète en base de $(E, +, .)$: $(\overrightarrow{e_1}, \dots \overrightarrow{e_{n-r}}, \overrightarrow{e_{n-r+1}}, \dots \overrightarrow{e_n})$.
Le cours *(ou même dix secondes de réflexion)* garantit alors que $(f(\overrightarrow{e_{n-r+1}}), \dots f(\overrightarrow{e_n}))$ est une base de $Im(f)$ et $(g(\overrightarrow{e_{n-r+1}}), \dots g(\overrightarrow{e_n}))$ une base de $Im(g)$. En tant que familles libres de $(F, +, .)$ on les complète en bases de $(F, +, .)$: $(f(\overrightarrow{e_{n-r+1}}), \dots f(\overrightarrow{e_n}), \overrightarrow{c_1}, \dots \overrightarrow{c_{p-r}})$ et $(g(\overrightarrow{e_{n-r+1}}), \dots g(\overrightarrow{e_n}), \overrightarrow{\gamma_1}, \dots \overrightarrow{\gamma_{p-r}})$. Il suffit de définir l'application
φ : $g(\overrightarrow{e_{n-r+1}}) \longmapsto f(\overrightarrow{e_{n-r+1}})$...$g(\overrightarrow{e_n}) \longmapsto f(\overrightarrow{e_n})$, $\overrightarrow{\gamma_1} \longmapsto \overrightarrow{c_1}$ jusqu'à $\overrightarrow{\gamma_{p-r}} \longmapsto \overrightarrow{c_{p-r}}$

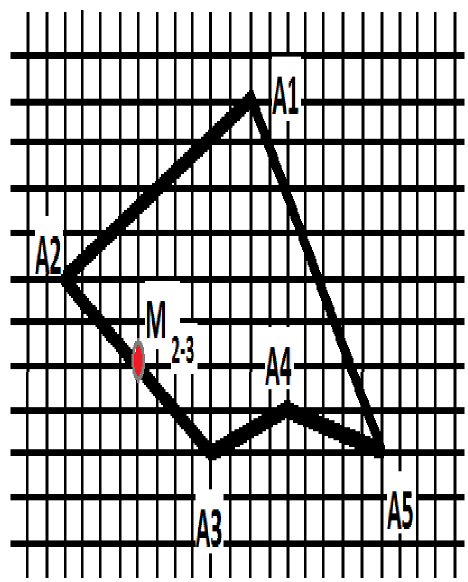
Défini sur une base et étendue par linéarité, c'est un endomorphisme.
Transformant une base en base, c'est un automorphisme.
Et on a bien $\varphi(g(\overrightarrow{e_k})) = f(\overrightarrow{e_k})$ pour tout k *(pour k plus petit que $n - r$, c'est l'appartenance aux noyaux qui donne $\overrightarrow{0_F} = \overrightarrow{0_F}$, et après, c'est notre définition).*

Sinon, il y a l'approche matricielle. On suppose que f et g sont linéaires de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$. On se donne des bases β et Γ, et on écrit $Mat_\Gamma^\beta(f) = A$ et $Mat_\Gamma^\beta(g) = B$.
Comme f et g ont le même rang, on peut mettre A sous la forme $P.J_{n,p,r}.Q$ et B sous la forme similaire $P'.J_{n,p,r}.Q'$ avec la même matrice $J_{n,p,r}$ au milieu *($n = dim(E)$ colonnes, $p = dim(F)$ lignes et $r = rg(A)$ nombre de 1 sur la "diagonale").*
Les matrices P, Q, P' et Q' sont inversibles *(certaines de taille p sur p et d'autres de taille n sur n).*
Mais comme f et g ont le même noyau, on peut prendre les mêmes matrices Q et Q' *(matrice de passage, passant de la base β à une base du noyau complétée à gauche en base de $(E, +, .)$).*
On a donc $A = P.J_{n,p,r}.Q$ et $B = P'.J_{n,p,r}.Q$. Comme Q et Q' sont inversibles, on a $A = P.(P')^{-1}.P'.J_{n,p,r}.Q$ c'est à dire $A = (P.P'^{-1}).B$. Il suffit de dire que $P.(P')^{-1}$ est la matrice *(inversible)* d'un automorphisme de $(F, +, .)$ (de Γ dans Γ).

Aucun effort, aucune prise de tête sur des calculs. Il faut juste savoir jouer sur plusieurs tableaux.
C'est le genre d'exercices qu'adore (aussi) Johan Wattiez en M.P.S.I.1

◁2▷ Sur les croisements du papier quadrillé de la carte du trésor, cinq points A_1 à A_5 sont marqués. Montrez que je peux en prendre alors deux dont le milieu est aussi sur un croisement du papier quadrillé. *C'est une histoire de parité dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.*

On se donne donc cinq points $A_1(x_1, y_1)$ à $A_5(x_5, y_5)$. Les x_i et les y_i sont entiers.
Les milieux sont des $C_{i,j} = \left(\frac{x_i + x_j}{2}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$. Pour que l'un d'entre eux soit sur le quadrillage, il faut et il suffit que $\frac{x_i + x_j}{2}$ et $\frac{y_i + y_j}{2}$. Ceci revient à demander que x_i et x_j soient de même parité *(tous deux pairs ou tous deux impairs)* ; de même pour y_i et y_j.
Réduisons les composantes modulo 2. On a cinq "points" $A'_1(p_1, q_1)$ à $A'_5(p_5, q_5)$.
Les quatre valeurs possibles sont (0, 0), (1, 0), (0, 1) et (1, 1).
Cinq points pour quatre valeurs, deux des A'_i sont égaux *(principe des tiroirs).*
On prend deux indices concernés : $A'_i(p_i, q_i) = A'_j(p_j, q_j)$. On interprète : $x_i = x_j \bmod 2$ et $y_i = y_j \bmod 2$. On termine : $\frac{x_i + x_j}{2} \in \mathbb{Z}$ et $\frac{y_i + y_j}{2} \in \mathbb{Z}$. Le milieu de $[A_i, A_j]$ est dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.



◁3▷ ♡ Donnez une base de l'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $2.x + y - z = 0$.

Ce sont des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x + y \end{pmatrix}$.

On les écrit $x.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ils se décomposent d'une façon unique à l'aide de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs forment une base de notre plan.

Plus simple que ça, tu meurs.
Bon, certes, on pouvait choisir au hasard deux vecteurs non colinéaires dans ce plan, mais avoyez que là, c'est fourni clef en main.

◃4▹

Montrez que l'espace des matrices antisymétriques de taille $n+1$ a la même dimension que l'espace des matrices symétriques de taille n.

Le premier est de dimension $\dfrac{(n+1).(n+1-1)}{2}$.
Le second est de dimension $\dfrac{(n+1).n}{2}$. C'est pareil.

Pour saisir : on remplit une matrice symétrique de taille n en choisissant les termes au dessus de la diagonale.
on remplit une matrice antisymétrique en choisissant les termes strictement au dessus de la diagonale (la diagonale est nulle à cause de $-a = a$).
On a autant de termes à choisir.

Pour mieux saisir encore avec $n = 4$.

symétriques de taille 4	antisymétriques de taille 5
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ -a & 0 & e & f & g \\ -b & -e & 0 & h & i \\ -c & -f & -h & 0 & j \\ -d & -g & -i & -j & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ * & e & f & g \\ * & * & h & i \\ * & * & * & j \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & a & b & c & d \\ * & 0 & e & f & g \\ * & * & 0 & h & i \\ * & * & * & 0 & j \\ * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}$
$4+3+2+1 = \dfrac{4.5}{2}$	$4+3+2+1 = \dfrac{4.5}{2}$

◃5▹

Calculez à 10^{-7} près $\sqrt[1/\ln(5)]{e}$ et même pourquoi pas à 10^{-8} près...

$$\sqrt[1/\ln(5)]{e} = e^{\ln(5)} = 5$$

car $\sqrt[a]{b} = b^{\frac{1}{a}}$

Et si je le posais en Terminale celui là ?

◃6▹

On se donne quatre polynômes P_0, P_1, P_2 et P_3 dans l'espace vectoriel $(\mathbb{R}_3(X), +, .)$ et quatre réels distincts a_0, a_1, a_2 et a_3 *(pourquoi est ce que cela ne se quantifie pas $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$?)*. On définit alors la matrice M de terme général $P_i(a_k)$. Montrez que si la famille est liée, son déterminant est nul.
Exprimez cette matrice à l'aide de la matrice exprimant les P_i sur la base canonique et d'une matrice de VanDerMonde. Montrez que le déterminant de M est nul si et seulement si la famille des P_i est libre.
Chaque polynôme $\sum_{j=0}^{d} c_j.X^j$ est représenté par la liste $[c_0, \ldots c_d]$. Votre script devra prendre en entrée la liste `LP` des `d` polynômes et la liste `A` des abscisses $[a_0, \ldots a_{d-1}]$ et retourner la matrice `M` *(de taille `d` sur `d`)* définie ci dessus.

Déjà, la relation $a_0 \neq a_1 \neq a_2 \neq a_3$ n'interdit pas $a_1 = a_3$ ou $a_2 = a_0$.
Il est effectivement bien plus intelligent de dire « tous distincts » que d'inventer des chaines de non égalités, ou même des $\forall(i,\ j),\ a_i \neq aj$ (toujours pas correct, voyez vous pourquoi ?).

Quelle famille serait liée ? Celle des polynômes (qui a une chance d'être libre, les polynômes sont quatre, et $(\mathbb{R}_3(X), +, .)$ est de dimension 4).
Pas la famille de réels, quatre réels dans $\mathbb{R}$ (espace vectoriel de dimension 1) sont forcément liés...

On suppose que l'un des $P_i$est combinaison linéaire des autres.
Par exemple, par symétrie des rôles : $P_3 = a.P_0 + b.P_1 + c.P_2$.

Mais alors dans la matrice
$$\begin{pmatrix} P_0(a_0) & P_0(a_1) & P_0(a_2) & P_0(a_3) \\ P_1(a_0) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2(a_0) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3(a_0) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \end{pmatrix}$$
l'une des lignes est combinaison linéaire des autres.
La matrice a donc un déterminant nul.

Si on pose par exemple $P(X) = \alpha + \beta.X + \gamma.X^2 + \delta.X^3$, alors on a

$$\begin{pmatrix} P(a_0) & P(a_1) & P(a_2) & P(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_0)^2 & (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 \\ (a_0)^3 & (a_1)^3 & (a_2)^3 & (a_3)^3 \end{pmatrix}$$

On compacte :

$$\begin{pmatrix} P_0(a_0) & P_0(a_1) & P_0(a_2) & P_0(a_3) \\ P_1(a_0) & P_1(a_1) & P_1(a_2) & P_1(a_3) \\ P_2(a_0) & P_2(a_1) & P_2(a_2) & P_2(a_3) \\ P_3(a_0) & P_3(a_1) & P_3(a_2) & P_3(a_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ (a_0)^2 & (a_1)^2 & (a_2)^2 & (a_3)^2 \\ (a_0)^3 & (a_1)^3 & (a_2)^3 & (a_3)^3 \end{pmatrix}$$

et ceci répond parfaitement à la demande.

Les a_i étant distincts, la matrice de VanDerMonde est inversible (déterminant non nul).

La matrice initiale M a donc un déterminant nul si et seulement si $\begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 & \gamma_0 & \delta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3 \end{pmatrix}$ (ou sa transposée) a un déterminant nul.

Et la transposée est précisément celle qui exprime les vecteurs P_i sur la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$.

Script Python.

◁7▷

♡ Ajustez pour qu'elles aient même trace, même somme des mineurs de taille 2 et même déterminant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On appelle mineurs de taille 2 de la matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ chacun des trois déterminants $\begin{vmatrix} a & b & \\ a' & b' & \\ & & . \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & & c \\ & . & \\ a'' & & c'' \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} . & & \\ & b' & c' \\ & b'' & c'' \end{vmatrix}$ (que vaut cette somme si la matrice est triangulaire ?)

On égalise les traces $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On nomme les deux coefficients : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & a \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -7 & 0 & 13 \\ b & -5 & 42 \\ -11 & -1 & 18 \end{pmatrix}$.

On égalise les déterminants $2.a - 4 = -13.b - 379$.

On égalise la somme des mineurs de taille 2 : $4 = 4$.

Finalement, même si on s'attendait à deux conditions et un système, on n'en a qu'une.

Par exemple : $b = 1$ et $a = -194$.

Question : les deux matrices sont elles alors semblables ?

Oui, par transitivité, en les rendant semblables à la même matrice diagonale.

◁8▷

♡ Donnez deux matrices carrées de taille 2 de trace 6 et de déterminant 9. Lesquelles sont diagonalisables ?

Une seule sera diagonalisable, celle qui est déjà diagonale : $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Toutes les autres ont une valeur propre double et ne se diagonalisent pas.

Comme $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

◁9▷ ♡ Un vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ à la fois sur la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ mais aussi sur la base $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j}, b.\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j})$. Retrouvez a et b. Que constatez vous alors pour le vecteur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ quand vous l'écrirez sur la nouvelle base ?
Les composantes d'un vecteur $\overrightarrow{a}$ sur une base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, c'est le couple de réels (α, β) vérifiant $\overrightarrow{a} = \alpha.\overrightarrow{i} + \beta.\overrightarrow{j})$.

A faire.

◁10▷ Montrez que pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$ du plan, il existe un vecteur $\overrightarrow{\alpha}$ vérifiant $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^2$, $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{b}$.
Montrez qu'il est orthogonal à $\overrightarrow{a}$, de même norme. On pourrait le noter $\wedge(\overrightarrow{a})$. Déterminez $\wedge(\wedge(\overrightarrow{a}))$.
Montrez que pour tout triplet $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^4$, il existe un vecteur $\wedge(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d})$ vérifiant $\forall \overrightarrow{a}$, $\det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}) = \overrightarrow{a}.(\wedge(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}, \overrightarrow{d}))$.

A faire.

◁11▷ Montrez que l'implication suivante est une bêtise :
$(A.U = B.U$ et $A \neq B) \Rightarrow U = 0_n$ (A et B sont des matrices carrées, de taille n sur n et U est un vecteur colonne de taille n).

La formule $A.U = B.U$ donne $(A - B).U = 0_n$.
Mais si $A - B$ n'est pas inversible, on peut justement trouver au moins un vecteur U non nul vérifiant ceci !

◁12▷ Montrez que la famille $(X + X^2 + X^3 + X^4,\ 1 + X^2 + X^3 + X^4,\ 1 + X + X^3 + X^4,\ 1 + X + X^2 + X^4,\ 1 + X + X^2 + X^3)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$. Explicitez les composantes des polynômes de la base canonique sur cette base.
Quelle relation vérifient les composantes sur cette base des polynômes nuls en 1.

On l'exprime sur la base canonique et on calcule le déterminant :

$$\begin{array}{cc} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{array}{c} 1^* \\ X^* \\ (X^2)^* \\ (X^3)^* \\ (X^4)^* \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & P_4 \end{array} & \end{array}$$

ce déterminant classique vaut 4 : en sommant toutes les colonnes sur la première
en sortant un facteur 4
puis en soustrayant cette colonne sur les autres

Il suffit d'inverser cette matrice.
Ou de dire

$$1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4}$$

il ne reste qu'à soustraire : $1 = \dfrac{P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4}{4} - P_0$ et ainsi de suite.

Dans les deux cas, on aboutit à la matrice $\dfrac{1}{4}.\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Si vous avez cherché à inverser par les formules en cofacteurs, c'est que votre approche de l'algèbre linéaire est trop figée, manque de souplesse de changements de points de vue. Oubliez vos réflexes « j'apprends une méthode, et c'est la seule ». On n'est plus en train de passer le bac.

Que se passe-t-il pour un polynôme nul en 1 ?
Sur la base canonique, la somme de ses composants vaut 0 (puisque $P(1) = a + b + c + d + e$ si on a écrit $P(X) = a + b.X + c.X^é + d.X^3 + e.X^4$.

Mais sur cette base ?
Compléter...

◃ 13 ▹ Pouvez vous compléter pour qu'elle soit nilpotente : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & & -3 & \\ 2 & 0 & -2 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On nomme les éléments, puis on résout

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & a & -3 & b \\ 2 & 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & a & -3 & b \\ 2 & 0 & -2 & c \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dès la première ligne, c'est raté. Elle ne sera pas nilpotente d'indice 2. Mais peut être plus.
On tente en lui imposant une trace nulle et un déterminant nul (la seule valeur propre acceptable est 0 et la trace est la somme des valeurs propres).
a est nul.

On attaque ensuite $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & b-4c+4 \\ b & 3 & -b-6 & 6-3c \\ c & 2 & -c-4 & 4-2c \\ 0 & 1 & -2 & 2-c \end{pmatrix}$.

Comme elle est aussi nilpotente, sa trace est nulle : $c = 1$.

On passe à $A^2 = \begin{pmatrix} b-2 & 1 & -b & 2b-3 \\ 0 & b & -2b & 4b-6 \\ 0 & 1 & -2 & 2b-3 \\ 0 & 0 & 0 & b-2 \end{pmatrix}$. Et cette fois, b vaut 2 :

A^0	A	A^2	A^3	A^4
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -8 & 3 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\{\overrightarrow{0}\}$	$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$	$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$	$\mathbb{R}^4$
$\mathbb{R}^4$	$2.z = y + t$		$(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$	$\{\overrightarrow{0}\}$

Et je vous offre les puissances, puis les noyaux et images.

◃ 14 ▹ Déterminez les triplets (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ tels que $(\begin{pmatrix} a.b \\ b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b.c \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ c \\ a.c \end{pmatrix})$ soit libre.

Il faut et il suffit que le déterminant soit non nul.
Il vaut $a.b.c.(a.b.c - a - b - c + 2)$ (pas mieux que Sarrus ici).

• Si a, b ou c est nul, la famille est liée. Par exemple $(\begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ b.c \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix})$ a deux vecteurs colinéaires.

• Si $a.b.c + 2$ est égal à $a + b + c$, il y a une relation de dépendance linéaire à trouver.

• Sinon, la famille est libre.

◃ 15 ▹ L'application $\cos^3 . \sin$ est elle dans l'espace vectoriel engendré par $(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5)$ où l'on pose $s_k = (\theta \longmapsto \sin(k.\theta))$.
Quelle est la dimension de l'espace vectoriel engendré par ces six vecteurs.

Les formules de Tchebytchev donnent $\sin(x) = \sin(x).1$

$$\sin(2.x) = \sin(x).2.\cos(x)$$

$$\sin(3.x) = \sin(x).(4.\cos^2(x) - \cos(x))$$
$$\sin(4.x) = \sin(x).(8.\cos^3(x) - 4.\cos(x)$$

pour tout x
On combine $\sin(4.x) + 2.\sin(2.x) = 8.\sin(x).\cos^3(x)$ pour tout x.
On divise par 8 et surtout on libère x : $\sin.\cos^3 = \dfrac{s_4 + 2.s_2}{8}$.
La réponse est « oui » : elle est dans l'espace vectoriel.

---

s_0 peut être enlevée de la famille, elle n'engendre rien...
Ensuite, les cinq fonctions sont indépendantes (=forment une famille libre).
La relation $\alpha_1.s_1 + \alpha_2.s_2 + \alpha_3.s_3 + \alpha_4.s_4 + \alpha_5.s_5 = 0$ (fonction nulle) conduit à $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$.
On écrit $\alpha_1.\sin(x) + \alpha_2.\sin(2.x) + \alpha_3.\sin(3.x) + \alpha_4.\sin(4.x) + \alpha_5.\sin(5.x) = 0$ pour tout x
et on regarde en des x particuliers bien choisis pour obtenir un système non dégénéré.
Ou alors on dérive et on calcule aussi en quelques points bien choisis.

La dimension de l'espace vectoriel engendré est donc 5.

◃16▹ ♡ Un tétraèdre régulier a pour sommets A, B, C et D et pour centre O.
On note M la matrice dont les quatre colonnes sont $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.
Montrez que ${}^tM.M$ est de la forme $\begin{pmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{pmatrix}$.
Montrez : $\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c + 3.n).(n - c)^3$.
Justifiez : $\det({}^tM.M) = 0$. Pourquoi n'a-t-on pas $\det(M) = 0$?
Déduisez que l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$ vaut $Arccos(-1/3)$ *(que les physiciens et chimistes vous demandent de retenir par ♡ sous la forme idiote de 109 degrés et je ne sais combien de secondes car ils aiment la complication inutile)*.

La matrice M est de la forme $\begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix}$.
Le produit donne

$$\begin{pmatrix} x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \\ x_C & y_C & z_C \\ x_D & y_D & z_D \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_A & x_B & x_C & x_D \\ y_A & y_B & y_C & y_D \\ z_A & z_B & z_C & z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_A)^2 + (y_A)^2 + (z_A)^2 & & & \\ x_A.x_B + y_A.y_B + z_A.z_B & (x_B)^2 + (y_B)^2 + (z_B)^2 & & \\ & & (x_C)^2 + \ldots + (z_C)^2 & \\ & & & (x_D)^2 \end{pmatrix}$$

Les trois termes diagonaux sont égaux, c'est $OA^2 = OB^2 = OC^2$.

Les six autres termes sont des produits scalaires $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et autres.
Ils sont tous égaux, puisque O est le centre du tétraèdre.

Bref, on a une matrice de la forme indiquée avec $c = |OA|^2$ et $n = |OA|.|OB|.\cos(AOB)$.

Le calcul $\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c + 3.n).(n - c)^3$ se fait en sommant d'abord toutes les colonnes sur la première.
On a alors un $c + 3.n$ qu'on sort :

$$\begin{vmatrix} c & n & n & n \\ n & c & n & n \\ n & n & c & n \\ n & n & n & c \end{vmatrix} = (c + 3.n).\begin{vmatrix} 1 & n & n & n \\ 1 & c & n & n \\ 1 & n & c & n \\ 1 & n & n & c \end{vmatrix} = (c + 3.n).\begin{vmatrix} 1 & n & n & n \\ 0 & c - n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c - n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c - n \end{vmatrix}$$

On n'a pas $\det(M) = 0$ car M n'est pas carrée. Elle n'a même pas de déterminant.

◁17▷ Le corps est $(\{0,1,2,3,4\},+,\times)$ pour l'addition et la multiplication modulo 5. On prend l'espace vectoriel $(\{0,1,2,3,4\}^3,+,.)$. Donnez une base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ du plan d'équation $x+2.y+3.z=0$. Combien ce plan a-t-il de vecteurs ? Quelle est sa dimension ?
Combien existe-t-il de vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{u})$ soit une base de $(\{0,1,2,3,4\}^3,+,.)$.

Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} 3.y+2.z \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On les écrit $y.\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+z.\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
On peut donner cinq valeurs à y et autant à z.
Il y a donc 25 vecteurs dans ce plan.
Et comme tout « plan », il est de dimension 2.

On peut compléter en choisissant a, b et c pour rendre $\begin{pmatrix} 3 & 2 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$ inversible (comme ça on aura une base).
Il y a 125 triplets possibles.
Et seulement 25 à éviter (les vecteurs du plan).
On a donc 100 choix possibles pour ce troisième vecteur.
Remarque : | *Tout sauf un vecteur du plan, c'est même géométriquement facile à comprendre.*

◁18▷ ♡ Quels sont les vecteurs de C que l'on peut ajouter à B pour en faire une base de $(\mathbb{R}^3,+,.)$: $B=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$, $C=\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$.

◁19▷ Une matrice carrée M est nilpotente si il existe un entier k vérifiant $M^k=O_n$. Ayant constaté que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont des matrices nilpotentes linéairement indépendantes, l'élève Tongrocuge-Doipassé déduit « l'espace vectoriel des matrices nilpotentes de taille 3 sur 3 est de dimension 6 ». Le colleur Hizenioublack corrige « non, au moins de dimension 6, mais peut être plus ».
Montrez que les deux sont vraiment cons comme c'est pas permis.

Certes les six matrices obtenues sont indépendantes.
Il suffit de partir de $a.A+b.B+\ldots=0_{3,3}$ et d'obtenir $a=b=\ldots=0$ en regardant où sont placés les 1.

Mais les matrices nilpotentes ne forment pas un espace vectoriel !
La somme de deux matrices nilpotentes ne l'est plus forcément.
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes, mais $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est plus.
Comment parler alors de dimension ?

En revanche, il peut être intéressant de regarder la dimension du plus petit espaces vectoriel contenant les matrices nilpotentes.
Ce sera ici 8.

◁20▷ Pour tout n, on pose $c_n=(\theta\longmapsto\cos(n.\theta))$ et $s_n=(\theta\longmapsto\sin(n.\theta))$. Montrez que la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$ est libre dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$. Montrez que la famille $(s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)$ est liée dans $(C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ +,\ .)$, enlevez un vecteur pour en faire une famille libre.

Pour la liberté de la famille $(c_0,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4)$, on se donne α_0 à α_4 quelconques.
On suppose $(\theta\longmapsto\sum_{k=0}^{4}\alpha_k.\cos(k.\theta))=(\theta\longmapsto 0)$ (fonction nulle).
On exploite les polynômes de Tchebychev et on écrit ce que c'est que d'être la fonction nulle :

$$\forall\theta,\ \sum_{k=0}^{5}\alpha_k.T_k(\cos(\theta))=0$$

On a alors
$$\forall c \in [-1,\ 1],\ \sum_{k=0}^{5} \alpha_k.T_k(c) = 0$$

Le polynôme $\sum_{k=0}^{5} \alpha_k.T_k$ a une infinité de racines, il est nul.

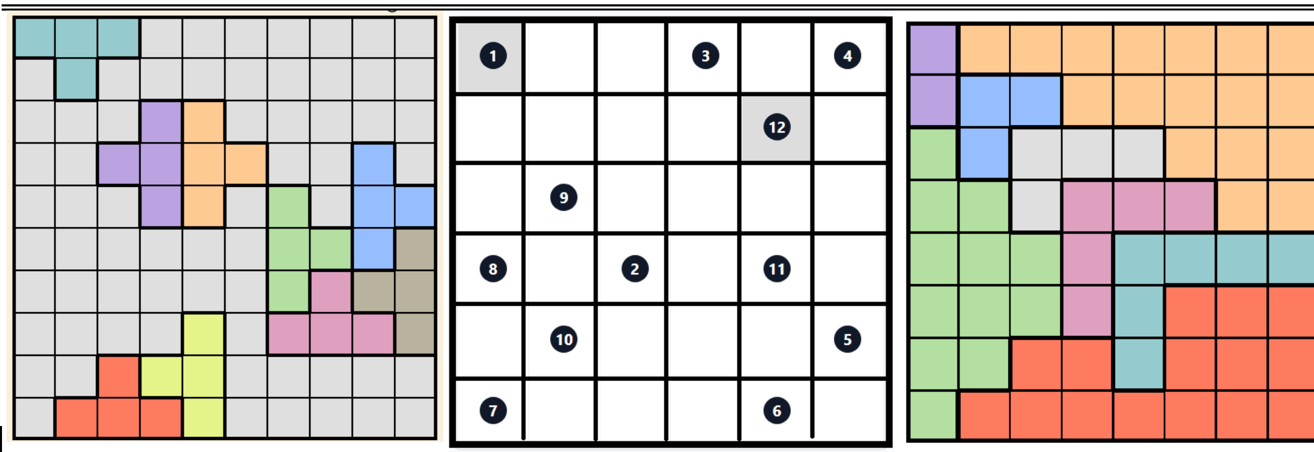
Mais en regardant le coefficient dominant de $\sum_{k=0}^{5} \alpha_k.T_k$, on déduit que α_5 est nul. Et de proche en proche, tous les α_k sont nuls.

Façon livre : Si la famille était liée, il y aurait un $(n+1)-$uplet d'α_i vérifiant $\sum_k \alpha_k.T_k = 0$.
On prend le plus grand indice i tel que α_i soit non nul, on le note r.
On regarde le terme dominant du polynôme $\sum_k \alpha_k.T_k$, c'est $2^{r-1}.\alpha_r.X^r$. Ce n'est donc pas le polynôme nul. Contradiction.

La famille $(s_0,\ s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)$ contient le vecteur nul. Comment voulez vous qu'elle soit libre ?
En revanche, $(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4)$ est libre.
Supposons pour un quadruplet $(\alpha_1, \dots \alpha_4)$: $\alpha_1.s_1 + \alpha_2.s_2 + \alpha_3.s_3 + \alpha_4.s_4 = 0$ (fonction nulle).
On dérive : $\alpha_1.c_1 + 2.\alpha_2.c_2 + 3.\alpha_3.c_3 + 4.\alpha_4.c_4 = 0$ (fonction toujours nulle).
On est ramené à la question précédente : les α_i sont nuls.

On pouvait aussi utiliser les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

◁ 21 ▷



◁ 22 ▷ $\vec{i} + 2.\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k}$ et $2.\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ ont pour composantes $\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$ sur la base $(\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3})$. Retrouvez qui sont ces trois vecteurs de base.
Et si pour changer on décidait qu'on n'est pas sur $\mathbb{R}$ mais sur l'ensemble des entiers de 0 à 6 pour les opérations modulo 7.

On a donc
$$\begin{aligned} \vec{i} + 2.\vec{j} + \vec{k} &= 5.\vec{e_1} + 5.\vec{e_2} + 4.\vec{e_3}, \\ \vec{i} + \vec{j} + 2.\vec{k} &= 3.\vec{e_1} + 8.\vec{e_2} + 4.\vec{e_3} \\ 2.\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} &= 4.\vec{e_1} + 7.\vec{e_2} + 4.\vec{e_3} \end{aligned}$$
Et on veut retrouver les $\vec{e_i}$.
C'est donc juste un système à résoudre.

On peut l'écrire, de manière un peu louche : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix}$

Oui, je trouve ça louche dans la mesure où on a un vecteur de vecteurs... mais sinon, formellement, c'est parfait.

On multiplie à gauche par l'inverse : $\begin{pmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_3} \\ \vec{e_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 3 & 8 & 4 \\ 4 & 7 & 4 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix}$.

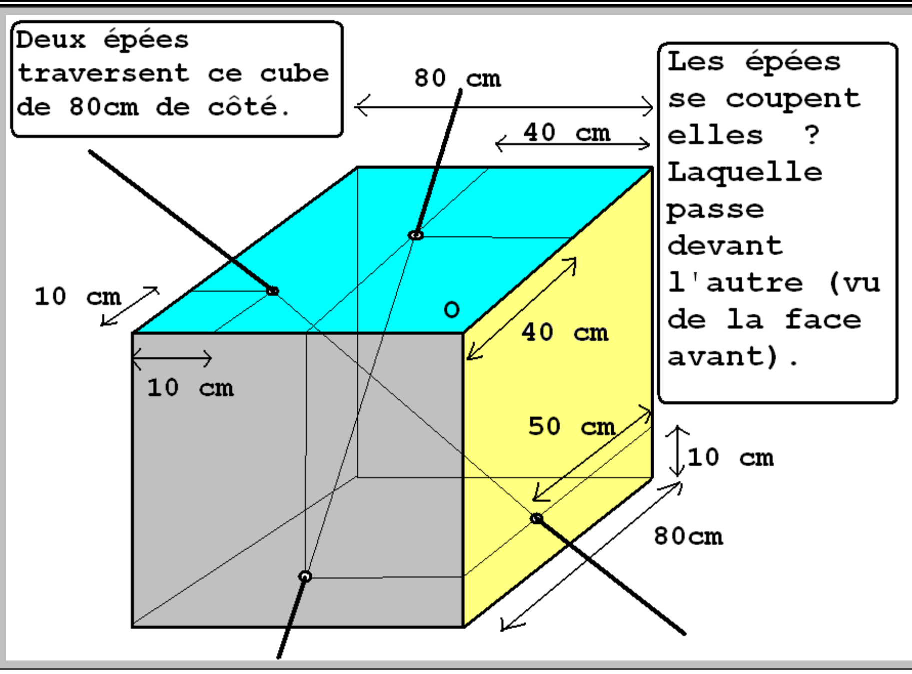
On précise toujours de quel côté on multiplie. Et surtout, mille fois surtout, on n'invente pas un truc comme $A.U = B.V \Rightarrow U = \dfrac{B}{A}.V$ si A et B sont des matrices.
La notation $\dfrac{1}{A}$ n'a de sens que pour une multiplication commutative. D'ailleurs, vous écrivez quand même $g \circ f^{-1}$ et pas $\dfrac{g}{f}$. Et vous savez que $g \circ f^{-1}$ n'est pas la même chose que $f^{-1} \circ g$. Du moins j'espère...

Tous calculs faits : $\overrightarrow{e_1} = 3.\overrightarrow{i} - 3.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{e_2} = 2.\overrightarrow{i} - 2.\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{e_3} = -6.\overrightarrow{i} + \dfrac{27}{4}.\overrightarrow{j} + 4.\overrightarrow{k}$ (moche !).

◁23▷ Donnez une base directe de $\mathbb{R}^2$ sur laquelle $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(beaucoup de réponses possibles)*.

On veut deux vecteurs $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ vérifiant $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} = \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_2}$.
Par exemple $\overrightarrow{e_2} = -\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i}$. On vérifie qu'elle est directe : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour déterminant 1.

Mais il y a d'autres solutions.

◁24▷ 

Vous serez amené à vous placer dans un repère d'origine O. Vous déterminerez dans ce repère les équations des deux droites matérialisant ces épées et à vous demander ce qu'il en est du système déterminant l'intersection.

◁25▷ ♡ Sachant que $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{k} + \overrightarrow{i}$ ont pour composantes respectives $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$, vous déduisez que l'on n'est pas sur la base canonique *(ou alors, je ne peux plus rien pour vous)*. Donnez les composantes de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sur cette base. Retrouvez cette base.

On somme les trois : $2.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$.

On divise : $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Par soustraction, $\overrightarrow{i}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On traduit : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + 2.\overrightarrow{c}$ en appelant $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$ les trois vecteurs de la nouvelle base.

On soustrait aussi : $\overrightarrow{j}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{k}$ a pour composantes $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Il ne reste plus qu'à inverser la relation $\begin{pmatrix} \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{c} \end{pmatrix}$ pour récupérér $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{c}$.

◃26▹ Une famille de vecteurs $(\overrightarrow{a_1}, \dots \overrightarrow{a_p})$ est dite "positivement génératrice" de $(E, +, .)$ si $\forall \overrightarrow{u} \in E,\ \exists(\alpha_1, \dots \alpha_p) \in (\mathbb{R}^+)^p,\ \overrightarrow{u} = \alpha_1.\overrightarrow{u_1} + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}$
Montrez que toute famille positivement génératrice de $(E, +, .)$ est génératrice de $(E, +, .)$ mais n'en est pas une base[a] (en décomposant $\overrightarrow{u}$ et $-\overrightarrow{u}$).
Montrez que $(\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, -\overrightarrow{k})$ est positivement génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Trouvez une famille positivement génératrice de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ de cardinal 4.

a. (sauf si la famille est vide)

La définition dit que tout vecteur se décompose. On a donc une famille génératrice.
Mais il y a des vecteyrs colinéaires. Elle n'est pas libre et ne sera pas une base.
Le vecteur $-\overrightarrow{u_1}$ se décompose de deux façons : $\overrightarrow{u_1} = (-1).\overrightarrow{u_1} + 0.\overrightarrow{u_2} + \dots + 0.\overrightarrow{u_p}$
$\overrightarrow{u_1} = \alpha_1.\overrightarrow{u_1} + \alpha_2.\overrightarrow{u_2} + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{u_p}$ avec des coefficients tous positifs
Ce sont deux décomositions différentes en tant que famille génératrice.

Tout vecteur de $\mathbb{R}^4$ s'écrit $x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$ avec x, y et z réels positifs... ou négatifs.
On va donc l'écrire $x.\overrightarrow{i} + 0.(-\overrightarrow{i}) + y.\overrightarrow{j} + 0.(-\overrightarrow{j}) + z.\overrightarrow{k} + 0.(-\overrightarrow{k})$ si les trois sont positifs
$0.\overrightarrow{i} + |x|.\overrightarrow{i} + 0.\overrightarrow{j} + |y|.\overrightarrow{j} + 0.\overrightarrow{k} + |z|.(-\overrightarrow{k})$ si les trois sont négatifs
$x.\overrightarrow{i} + 0.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + 0.\overrightarrow{j} + 0.\overrightarrow{k} + |z|.(-\overrightarrow{k})$ si seul z est négatif
et ainsi de suite.
Proprement, $\dfrac{(x+|x|)}{2}.\overrightarrow{i} + \dfrac{(|x|-x)}{2}.\overrightarrow{i} + \dfrac{(x+|x|)}{2}.\overrightarrow{j} + \dfrac{(|y|-y)}{2}.\overrightarrow{j} + \dfrac{(z+|z|)}{2}.\overrightarrow{k} + \dfrac{(|z|-z)}{2}.\overrightarrow{k}$.

Attention, il ne faut pas proposer une famille de vecteurs qui dépendrait du vecteur choisi à décomposer.
Mais on peut prendre la famille « universelle » $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, -(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}))$.
C'est le troisième vecteur qui va prendre en charge le coefficient « le plus négatif ».
Je vous l'explique sur des exemples, à vous de généraliserl'agorithme :

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 7.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 6.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mais l'écriture n'est pas unique :

$$\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5.\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

◃27▹ Soit A une matrice carrée de format n vérifiant $|a_i^i| > \sum_{k \neq i} |a_i^k|$ pour tout i. On suppose (peut être à tort) qu'il existe un vecteur U non nul vérifiant $A.U = 0_n$(vecteur nul de taille n). On suppose que des n composantes du vecteur U, la plus grande en valeur absolue est u_m. En étudiant la ligne $\sum_{k=1}^{n} a_m^k.u_k = 0$, trouvez la contradiction.
Déduisez que $\det(A)$ est donc non nul.

On va montrer que la seule solution de $M.X = 0_n$ est le vecteur nul quand « la diagonale est dominante ». Et l'idée n'est pas de calculer le déterminant, mais de vraiment s'attaquer au système.

Ce système d'équation s'écrit $\begin{array}{cccccc} a_1^1.x_1 & +a_1^2.x_2 & +\dots & +a_1^n.x_n & = & 0 \\ a_2^1.x_1 & +a_2^2.x_2 & +\dots & +a_2^n.x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1.x_1 & +a_n^2.x_2 & +\dots & +a_n^n.x_n & = & 0 \end{array}$

et même $\begin{array}{cccccc} & a_1^2.x_2 & +a_1^3.x_3 & +\dots & +a_1^n.x_n & = & -a_1^1.x_1 \\ a_2^1.x_1 & & +a_2^3.x_3 & +\dots & +a_2^n.x_n & = & -a_2^2.x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n^1.x_1 & +a_n^2.x_2 & +a_n^3.x_3 & +\dots & +a_n^n.x_n & = & -a_n^n.x_n \end{array}$

Le vecteur est supposé non nul, il a des composantes non nulles, et une d'entre elles est la plus grande ne valeur absolue. Disons x_i.

On regarde alors la ligne i : $\sum_{k\neq i} a_i^k.x_k = a_i^i.x_i$.

On passe à la valeur absolue : $|\sum_{k\neq i} a_i^k.x_k| = |a_i^i|.|x_i|$.

Par inégalité triangulaire : $\sum_{k\neq i} |a_i^k|.|x_k| \geqslant |a_i^i|.|x_i|$.

Mais comme $|x_i|$ est le plus grand : $\sum_{k\neq i} |a_i^k|.|x_i| \geqslant \sum_{k\neq i} |a_i^k|.|x_k| \geqslant |a_i^i|.|x_i|$ (les $|a_i^k|$ sont positifs).

On exploite l'hypothèse en ligne i : $|a_i^i|.|x_i| > \sum_{k\neq i} |a_i^k|.|x_i| \geqslant \sum_{k\neq i} |a_i^k|.|x_k| \geqslant |a_i^i|.|x_i|$.

C'est la contradiction attendue.

Remarque : *On note qu'on avait n hypothèse de domination sur la diagonale.*
On n'en utilise qu'une.
Mais comme on ne sait pas sur quelle ligne il va falloir l'utiliser, il faut l'avoir pour toutes...

La seule solution de $M.U = 0_n$ est $U = 0_n$ c'est que la famille des vecteurs colonne est libre. C'est une base. La matrice est inversible.

Pour saisir, un exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ est inversible.

Supposons $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ avec x, y ou z non nul (au moins un des trois), et cherchons la contradiction.

On regarde le plus grand des trois nombres $|x|$, $|y|$ et $|z|$. Disons « $|y|$ est le plus grand ».
On regarde alors l'équation $-x + 6.y + 3.z = 0$.
On l'écrit $6.y = x - 3.z$ puis $6.|y| = |x - 3.z| \leqslant |x| + 3.|z|$.
On majore même car $|y|$ est le plus grand : $6.|y| = |x - 3.z| \leqslant |x| + 3.|z| \leqslant |y| + 3.|y| = 4.|y|$. On la tient, notre contradiction !

◃28▹ On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On note $(E', +, .)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$ *(la linéarité c'est $\varphi(a.P + b.Q) = a.\varphi(P) + b.\varphi(Q)$).*
Montrez que $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P'(1)$ et $P \longmapsto P'(2)$ sont dans E' et forment une famille libre *(on pourra poser $\alpha.\varphi_1 + \beta.\varphi_2 + \gamma.\varphi_3 = 0$ et appliquer aux polynômes de la base canonique).*
Montrez que $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$, $P \longmapsto P(0)$, $P \longmapsto P(1)$, $P \longmapsto P(2)$ sont dans E' mais forment une famille liée.

On donne un nom aux trois applications et on vérifie la linéarité de la première par exemple [2]

Linéarité : On se donne P et q ainsi que α et β et on compare $\varphi_1(\alpha.P + \beta.Q)$ et $\alpha.\varphi_1(P) + \beta.\varphi_1(Q)$.
Les deux valent $\alpha.P(0) + \beta.Q(0)$.
Et il est inutile de mettre P sous la forme $a.X^2 + b.X + C$, c'est là encore avoir le nez dans la boue du chemin au lieu de regarder l'objectif. Question d'étage encore.
En maths, physique et science, le bon étage est celui des fonctions f et pas celui des réels $f(x)$.
Mais seul le prof de maths vous le dit, les autres croient que vous avez déjà compris ça.

Liberté.

2. question évidente qui se traite en deux lignes, mais qui pose un énorme problème aux élèves n'ayant pas la fibre matheuse : qui sont les variables ? Et les variables, ce sont les polynômes, et surtout surtout surtout pas les X ; on se place au bon étage si on veut intégrer, bordel !

On se donne α, β et γ et on suppose $\alpha.\varphi_1 + \beta.\varphi_2 + \gamma.\varphi_3 = 0$ (forme linéaire nulle).
L'objectif est $\alpha = \beta = \gamma$.
On traduit : pour tout P on a $\alpha.\varphi_1(P) + \beta.\varphi_2(P) + \gamma.\varphi_3(P) = 0$ (on redescend d'un étage)
On a donc : $\forall P,\ \alpha.P(0) + \beta.P'(1) + \gamma.P'(2) = 0$.
L'élève qui aime calculer calculer calculer[3] écrit P sous la forme $a.X^2 + b.X + c$ et obtient un système qui doit être vrai pour tou triplet $(a,\ b,\ c)$. Il peut alors identifier et aboutir à $\alpha = \beta = \gamma = 0$ (et rien sur a, b et puisque eux sont dans un $\forall$.
L'élève qui est matheux va dire « je choisis bien les polynômes P à convoquer et j'arrive au résultat sans effort ».
Pour cela, il prend $P = X^2 - 2.X$ pour commencer.
On reporte ce polynôme dans l'information $\alpha.P(0) + \beta.P'(1) + \gamma.P'(2) = 0$ et lui nous donne $\alpha.0 + \beta.0 + \gamma. = 0$. γ est donc nul.
$P = .X$ pour continuer et cette fois $\alpha.P(0) + \beta.P'(1) + 0.P'(2) = 0$ lui donne $\beta = 0$.
P=1 et cette fois α aussi s'annule.
On a donc prouvé $(\forall P,\ \alpha.P(0) + \beta.P'(1) + \gamma.P'(2) = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0)$.
L'élève qui reste fumeux en maths dit « mais le matheux a juste utilisé trois polynômes alors que l'hypothèse est « pour tout P », il n'a donc pas tout prouvé. Mais c'est une HYPOTHÈSE justement. On nous dit que c'est vrai pour tous. On a juste besoin d'en convoquer deux ou trois pour arriver à la réponse. C'est donc parfaitement suffisant.
S'il s'était agi d'une CONCLUSION en $\forall P$, il est vrai alors que l'avoir prouvé juste pour quelques uns n'aurait strictement rien prouvé. Mais le symbole $\Rightarrow$ a un sens précis, non ?
En fait, on a enchaîné

$$(\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \alpha.P(0)+\beta.P'(1)+\gamma.P'(2) = 0) \Rightarrow (\forall P \in \textit{les trois utiles},\ \alpha.P(0)+\beta.P'(1)+\gamma.P'(2) = 0) \Rightarrow (\alpha = \beta = \gamma = 0)$$

L'application $P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$ prend un polynôme et calcule un entier.
Et on a aussi pour tout couple $(P,\ Q)$ et tout couple $\alpha,\ \beta$: $\int_0^1 \alpha.P + \beta.Q = \alpha. \int_0^1 P + \beta. \int_0^1 Q$.
De même les trois autres sont linéaires.

On a envie de jouer sur un argument de dimension « quatre vecteurs dans un espace de dimension 3, ils forment une famille liée ».
Mais sait on si l'espace des applications linéaires de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension " ?

Le mieux est d'écrire une d'entre elle comme combinaison des autres.
On va montrer que $\int_0^1 P(t).dt$ s'exprime à l'aide de $P(0)$, $P(1)$ et $P(2)$ pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à 2.
Mais surtout, que les coefficients ne dépendent pas de P.

$$\exists(\alpha, \beta, \gamma),\ \forall P,\ \int_0^1 P(t).dt = \alpha.p(0) + \beta.P(1) + \gamma.p(2)$$

Et le rôle du $\forall P$ et sa position sont CAPITAUX. C'est là qu'il y a des maths.
Le reste ne sera que calcul, c'est à dire sciences au sens large.

Le système à résoudre est

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{1} = \alpha(.c) + \beta.(a + b + c) + \gamma(4.a + 2.b + c)$$

C'est un système ça ?
Non, car je l'ai écrit comme un cochon.
Les inconnues sont α, β et γ. Et il y a un énorme $\forall(a, b, c)$ devant $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{1} = \alpha(c) + \beta.(a+b+c) + \gamma(4.a+2.b+c)$.
Et c'est ce $\forall(a, b, c)$ qui va permettre d'identifier le coefficient de a : $\beta + 4.\gamma = \frac{1}{3}$
le coefficient de b : $\beta + 2.\gamma = \frac{1}{2}$
le coefficient de c : $\alpha + \beta + \gamma = 1$

3. il sera bon en physique et c'est très bien pour tout le monde... sauf pour moi, mais on s'en fout

Cette fois, c'est un système de trois équations à trois inconnues :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On le résout : $\alpha = \dfrac{5}{12}$, $\beta = \frac{2}{3}$ et $\gamma = \dfrac{-1}{12}$.

On résume : pour tout P de degré inférieur ou égal à 2 : $\displaystyle\int_0^1 P(t).dt = \frac{5.P(0) + 8.P(1) - P(2)}{12}$.

Ce qui est ici pleinement du domaine de l'algèbre linéaire : on a validé la formule ci dessus pour $P = 1$, pour $P = X$ et pour $P = X^2$: alors on l'a pour tout P de degré inférieur ou égal à 2.

◃29▹

♡ On pose $U = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M.U = \lambda.U\}$ est un espace vectoriel. Donnez en une base et la dimension.

On montre que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in \mathbb{R},\ M.U = \lambda.U\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. l'inclusion est dans la définition.
Pour la présence du neutre, on a bien $O_{2,2}.U = \lambda.U$ avec λ nul d'ailleurs.
On prend A et B dans cet ensemble, ainsi que deux réels α et β. On a déjà $A.U = \lambda_A.U$ pour un certain λ_A et $B.U = \lambda_B.U$ pour un certain λ_B *(pourquoi serait ce le même, bougres d'andouilles !)*. On a alors $(\alpha.A + \beta.B).U = (\alpha.\lambda_A + \beta.\lambda_B).U$.
Comme $(\alpha.\lambda_A + \beta.\lambda_B)$ est un réel qu'on peut noter μ, on a bien $(\alpha.A + \beta.B).U = \mu.U$, ce qui confirme la présence de $\alpha.A + \beta.B$ à l'ensemble.

En écrivant la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, la condition devient « $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont colinéaires ». Comment exprimer cela ? par la nullité d'un déterminant : $\begin{vmatrix} 2.a + 3.b & 2 \\ 2.c + 3.d & 3 \end{vmatrix} = 0$. On trouve la relation $6.a + 9.b = 4.c + 6.d$.

On en choisit trois, et le quatrième vient. On a des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a + 3.b/2 - 2.c/3 \end{pmatrix}$. on les sépare en $a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$. On a trois matrices (on prendra leur multiples si nécessaire), qui forment une famille génératrice :

	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2/3 \end{pmatrix}$
vérification	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Elles forment une famille libre :

$$\alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta.\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \alpha.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entraine

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

La dimension est de 3.

Comment rendre votre réponse absurde ? Avec des λ qui resteraient dans la matrice, alors que la définition est $\exists \lambda$.

◃30▹

♡ Combien de sous familles de $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$ sont libres ? Combien sont des bases de $(\mathbb{R}^3, +, .)$? Combien sont génératrices de $(\mathbb{R}^3, +, .)$?
Même jeu de questions avec $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5.\overrightarrow{k})$.

	libres			
cardinal 0	vide			
cardinal 1	$(\overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i} +$
cardinal 2	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	
	$(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	
cardinal 3	$(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} - \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - 3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}$
cardinal 4	impossible			

Une famille libre de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ ne peut pas avoir plus de trois vecteurs.

Ambigüité : la famille $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$ doit-elle être comptée six fois, en tant que $(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$, $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j})$ et autres permutations, car l'ordre des vecteurs d'une famille est important.

	bases			
cardinal < 3	impossible			
cardinal 3	$(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},$
cardinal 4	impossible			

Ici, j'oserais dire qu'il est important de distinguer $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$ de $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$ par exemple, car si un vecteur a pour composantes $(x,\ y,\ z)$ sur l'une, il a alors pour composantes $(y,\ x,\ z)$ sur l'autre.
Et la notion d'orientation a son importance dans $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour la géométrie...

Il faut quand même vérifier pour chacune des quatre que le déterminant relatif à la base canonique est non nul :

	bases			
cardinal 3	$(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}$
	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$

Les familles génératrices sont les bases, et aussi leurs sur-familles, comme $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$ (et ses mélanges).
On peut d'ailleurs vérifier en décomposant les trois vecteurs de la base canonique :

	bases			
cardinal 3	$(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{i},$
	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 3$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 1$	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3$	$\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$
$\overrightarrow{i}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$		
$\overrightarrow{j}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 3.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$		
$\overrightarrow{k}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$		
inverse	$\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$	

Je vous laisse compléter.

A vous de comprendre que « par transitivité, si on sait reconstruire $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ à l'aide des trois vecteurs, on sait reconstruire tout le monde.

Même type de raisonnement avec $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-3.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+5.\overrightarrow{k})$, cette fois, il y a plus de grandes familles, de cardinal 4 ou 5, mais elles ne peuvent être que génératrices.

◁31▷ Si la famille $(\overrightarrow{e_1},\ldots\overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, la famille $(2.\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_1},\ldots\overrightarrow{e_n}+\overrightarrow{e_1})$ est elle libre ?
Si la famille $(\overrightarrow{e_1},\ldots\overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, la famille $(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2},\ \overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3},\ \overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_4},\ldots\overrightarrow{e_n}+\overrightarrow{e_1})$ est elle libre ?
Si la famille $(\overrightarrow{e_1},\ldots\overrightarrow{e_n})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E,+,.)$, la famille $\left(\sum_{i\neq 1}\overrightarrow{e_2},\ \sum_{i\neq 2}\overrightarrow{e_i},\ \sum_{i\neq 3}\overrightarrow{e_i},\ldots\sum_{i\neq n}\overrightarrow{e_i}\right)$ est elle libre ?
Mêmes questions si on remplace $\mathbb{R}$ par le corps des entiers $\{0,\ldots p-1\}$ pour l'addition et la multiplication modulo p.

On suppose donc que $\lambda_1.\overrightarrow{e_1}+\ldots+\lambda_n.\overrightarrow{e_n}=\overrightarrow{0}$ implique $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.
C'est une hypothèse, on verra à l'utiliser quand on en aura besoin.

On s'intéresse à la liberté de $(2.\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_3}+\overrightarrow{e_1},\ldots\overrightarrow{e_n}+\overrightarrow{e_1})$. On prend donc n réels quelconques μ_1 à μ_n (vous oubliez toujours d'introduire vos variables, de les quantifier ; et si vous le faites, vous mettez un truc en $\forall$ à

un bout de ligne « pour faire plaisir au prof »).
On suppose $2.\mu_1.\overrightarrow{e_1} + \mu_2.(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_1}) + \mu_3.(\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_1}) + \ldots + \mu_n.(\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$. On veut montrer (en utilisant H) que les μ sont tous nuls.
Déjà, on développe et regroupe :

$$(2.\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n).\overrightarrow{e_1} + \mu_2.\overrightarrow{e_2} + \mu_3.\overrightarrow{e_3} + \ldots + \mu_n.\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$$

On utilise H : $(2.\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n) = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n = 0$.
Les μ_i de $i = 2$ à $i = n$ sont nuls. mais en reportant dans la première, μ_1 est nul aussi.
La nouvelle famille est libre.

On pouvait aussi se placer dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n})$, dire que $Vect(\overrightarrow{e_1}, \ldots \overrightarrow{e_n})$ en est une base, et calculer le déterminant de la nouvelle famille :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si toutefois on travaille avec les entiers modulo 2, ce résultat tombe à l'eau. Le vecteur $2.\overrightarrow{e_1}$ est nul.
Et une famille contenant le vecteur nul est liée...

On écrit à nouveau l'hypothèse H.
On se donne μ_1 à μ_n et on suppose $\mu_1.(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) + \mu_2.(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) + \mu_3.(\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}) \ldots + \mu_n.(\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$.
On développe et regroupe : $(\mu_1 + \mu_n).\overrightarrow{e_1} + (\mu_1 + \mu_2).\overrightarrow{e_2} + (\mu_2 + \mu_3).\overrightarrow{e_3} + \ldots + (\mu_n + \mu_{n-1}).\overrightarrow{e_n} = \overrightarrow{0}$.
On utilise l'hypothèse H : $(\mu_1 + \mu_n) = (\mu_1 + \mu_2) = (\mu_2 + \mu_3) = \ldots = (\mu_n + \mu_{n-1}) = 0$.
On traite de petites valeurs de n pour comprendre.

$(\mu_1 + \mu_3) = (\mu_1 + \mu_2) = (\mu_2 + \mu_3) = 0$	$(\mu_1 + \mu_4) = (\mu_1 + \mu_2) = (\mu_2 + \mu_3) = (\mu_3 + \mu_4) = 0$
donne $\mu_1 = -\mu_2 = \mu_3 = -\mu_1$	donne $\mu_1 = -\mu_2 = \mu_3 = -\mu_4$
puis $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$	mais rien ne donne que chaque μ_k est nul.

On peut comprendre que tout dépend de la parité de n.
Dans tous les cas, on aboutit à $\mu_1 = -\mu_2 = \mu_3 = -\mu_4$ et ainsi de suite. Mais aussi $\mu_1 = -\mu_n$.

Si n est impair, de la forme $2.p + 1$, on a $\mu_1 = -\mu_2 = \mu_3 = \ldots = -\mu_{2.p} = \mu_{2.p+1}$ et $\mu_{2.n+1} = -\mu_1$.
On met bout à bout : $\mu_1 = -\mu_1$. Donc μ_1 est nul, et tous les autres tombent.
La famille est libre.

Si n est pair, de la forme $2.p$, on a $\mu_1 = -\mu_2 = \mu_3 = \ldots = -\mu_{2.p}$ et la dernière (ou première) redonne $\mu_1 = -\mu_n$.
Finalement, une équation ne sert à rien.
Et plus rien ne force les μ_i à être nuls.
Mais c'est peut être qu'on a mal regardé.
On tente alors de vraiment lier la famille : $(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}) - (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) + (\overrightarrow{e_3} + \overrightarrow{e_4}) - \ldots + (\overrightarrow{e_{n-1}} + \overrightarrow{e_n}) - (\overrightarrow{e_n} + \overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{0}$.

On le voyait là aussi avec le déterminant de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'un est nul, et pas l'autre.

Cela dit, pour les entiers modulo 2, la famille est liée, quoi qu'on y fasse.

Le dernier exemple fait appel à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Quand on part de $\mu_1.\Big(\sum_{i\neq 1} \overrightarrow{e_i}\Big) + \mu_2.\Big(\sum_{i\neq 2} \overrightarrow{e_i}\Big) + \mu_3.\Big(\sum_{i\neq 3} \overrightarrow{e_i}\Big) \ldots + \mu_n.\Big(\sum_{i\neq n} \overrightarrow{e_i}\Big) = \overrightarrow{0}$

on aboutit à $\begin{array}{ccccccc} & \mu_2 & +\mu_3 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & & +\mu_3 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\mu_3 & +\ldots & & = & 0 \end{array}$

On compare L_1 et L_2 : $\mu_1 = \mu_2$.
On compare L_2 et L_3 : $\mu_2 = \mu_3$.
Et ainsi de suite.
Tous les μ_i sont égaux.
Mais on reporte alors dans la première : $(n-1).\mu_1$ est nul.
C'est donc que μ_1 est nul. Et tous les sont.

On peut aussi sommer toutes les lignes, quitte à en avoir une de plus.

$$\begin{array}{ccccccc} & \mu_2 & +\mu_3 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & & +\mu_3 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\mu_3 & +\ldots & & = & 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cccccc} & \mu_2 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\ldots & & = & 0 \\ (n-1).\mu_1 & +(n-1).\mu_2 & +\ldots & +(n-1).\mu_n & = & 0 \end{array}$$

On simplifie par $n-1$ non nul : $\begin{array}{cccccc} & \mu_2 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\ldots & & = & 0 \\ \mu_1 & +\mu_2 & +\ldots & +\mu_n & = & 0 \end{array}$.

On soustrait alors $L_{n+1} - L_1$ pour avoir $\mu_1 = 0$.
Et ainsi de suite.

Bref, la famille est libre.
Sauf si on travaille avec des entiers modulo p (avec $p = n-1$).

◁ 32 ▷

P, Q, R et S sont des polynômes. Montrez que si la famille $(P,\ Q,\ R,\ S)$ est liée dans $(\mathbb{R}[X], +, .)$, alors la famille $\left(\begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(4) \\ P(5) \\ P(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(4) \\ Q(5) \\ Q(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(4) \\ R(5) \\ R(7) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(4) \\ S(5) \\ S(7) \end{pmatrix}\right)$ est liée dans $(\mathbb{R}^5, +, .)$.
Montrez qu'il est possible que cette famille de $(\mathbb{R}^5, +, .)$ soit liée alors que $(P,\ Q,\ R,\ S)$ est libre.

Imaginons qu'on a, par symétrie des rôles : $P(X) = a.Q(X) + b.R(X) + c.S(X)$ pour un triplet $(a,\ b,\ c)$ [4].

On a alors $\begin{pmatrix} P(1) \\ P(2) \\ P(4) \\ P(5) \\ P(7) \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} Q(1) \\ Q(2) \\ Q(4) \\ Q(5) \\ Q(7) \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} R(1) \\ R(2) \\ R(4) \\ R(5) \\ R(7) \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} S(1) \\ S(2) \\ S(4) \\ S(5) \\ S(7) \end{pmatrix}$ (composante par composante).

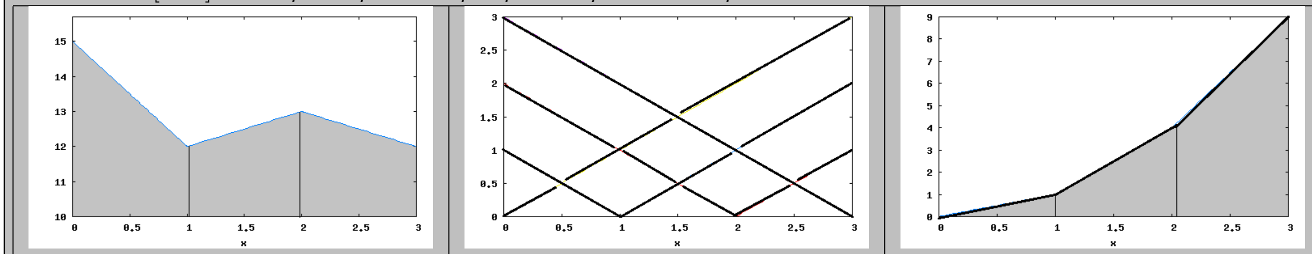
En général, famille liée est une propriété qui se transmet.

Et ensuite ? Peut on trouver une famille libre (P, Q, R, S) telle que la famille des évaluations soit liée ?
Sans effort. Prenons $(1,\ X,\ X^2,\ X.(X-1).(X-2).(X-3).(X-4))$. Elle est libre.
Et l'une des colonnes images est nulle...

---

4. et ils peuvent être nuls, ce qui importe, c'est juste 1 devant P est non nul

◁33▷ ♡♠ On note A l'ensemble des applications de $[0,\ 3]$ dans $\mathbb{R}$ affines par morceaux sur les segments du type $[k,\ k+1]$. Ce n'est pas clair ? Ce sont les applications continues de $[0,\ 3]$ dans $\mathbb{R}$, affines sur $[0,\ 1]$, puis sur $[1,\ 2]$ et enfin sur $[2,\ 3]$. *On ne perdra pas de temps à prouver que c'est un espace vectoriel.*



Montrez que φ_0, φ_1, φ_2 et φ_3 sont dans A avec $\varphi_k = x \longmapsto |x-k|$.

Montrez qu'elles forment une famille libre *(estimez* $\sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\varphi_k$ *en* 0, 1, 2 *et* 3*).*

Que pouvez vous dire de $\dim(A)$?
Décomposez $x \longmapsto 1$ suivant $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$.
Montrez que deux éléments de A qui coïncident en 0, 1, 2 et 3 sont égaux.
Que vaut $\dim(A)$?
Décomposez sur $(\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3)$ l'élément f de A vérifiant $f(k) = k^2$ pour tout k de 0 à 3.
Inversez la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ce sont des fonctions comme la courbe de l'impôt sur le revenu, en fonction de vos revenus. Affines par morceaux, continues aux points de raccordement (et même ailleurs évidemment).
La première figure donne l'allure générale d'un élément quelconque.
La figure suivante donne la forme des φ_k.
La dernière donne un élément particulier à décomposer.

Chaque φ_k est affine sur $]-\infty,\ k]$ puis sur $[k,\ +\infty[$ et donc sur chaque intervalle inclus dedans, comme $[0,\ 1]$ ou $[2,\ 3]$.
Le coefficient directeur vaut d'ailleurs 1 ou -1.

Ensuite, chaque φ_k est continue, comme toute fonction valeur absolue.

Rappel : | La fonction valeur absolue est continue, c'est du cours. Elle est même lipschitzienne de rapport 1. Ce qu'elle a comme défaut, c'est de ne pas être dérivable en n point, avec deux demi tangentes différentes.

Pour la liberté de la famille des φ_k, on a plusieurs approches possibles.

On se donne des α_i et on suppose $\sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\varphi_k = 0$. Il faut montrer que chaque α_i est nul.
Il n'est pas judicieux de jouer sur les signes, certes les φ_k sont toutes positives, mais les α_i peuvent avoir un signe.

La plus agréable à généraliser est l'étude de dérivabilité, avec un petit raisonnement par l'absurde.
Supposons qu'un des α_k est non nul.
On écrit alors $\sum_{i \neq k} -\dfrac{\alpha_i}{\alpha_k}.\varphi_i = \varphi_k$.
Et on regarde en $x = k$ (je devrais écrire « on regarde en k », mais je crains que ceux d'entre vous qui n'ont pas le bon usage des variables ne comprennent pas bien).
Chaque application $-\dfrac{\alpha_i}{\alpha_k}.\varphi_i$ est dérivable en $x = k$ (elle y est affine, de coefficient directeur $\pm\dfrac{\alpha_i}{\alpha_k}$.
Leur somme est dérivable en ce point $x = k$.
En revanche, avec ses deux demi-tangentes, φ_k n'est pas dérivable en $x = k$.
D'où contradiction.

S'il est impossible qu'un α_k soit nul, c'est que tous le sont.

Remarque : Pourquoi avoir prouvé la liberté par l'absurde, alors qu'en fait, c'est juste le raisonnement « la famille ne peut pas être liée ».

Sinon, on peut partir directement de $\sum_{k=0}^{3} \alpha_k.\varphi_k = 0$ et estimer en un nombre suffisant de points pour pouvoir conclure (au moins 4 puisqu'il y a quatre inconnues [5]).

partout	$\alpha_0.\lvert x\rvert$	$+\alpha_1.\lvert x-1\rvert$	$+\alpha_2.\lvert x-2\rvert$	$+\alpha_3.\lvert x-3\rvert$	$=$	0
en 0		α_1	$+2.\alpha_2$	$+3.\alpha_3$	$=$	0
en 1	α_0		$+\alpha_2$	$+2.\alpha_3$	$=$	0
en 2	$2.\alpha_0$	$+\alpha_1$		$+\alpha_3$	$=$	0
en 3	$3.\alpha_0$	$+2.\alpha_1$	$+\alpha_2$		$=$	0

Tiens, là, on fait le test : êtes vous matheux ou...
Si vous êtes autre chose, vous résolvez le système (par substitutions si vous êtes définitivement idiots, par combinaisons si vous êtes scientifique).

Mais si vous êtes matheux (ou physicien, ou scientifique), vous calculez $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. Il est non nul (-12), le système est de Gabriel C. et n'a que la solution « tous les α_i sont nuls ».

Remarque : On peut évidemment regarder en d'autres points comme 0, 1/3, $\sqrt{2}$ et e, mais je n'en vois pas l'intérêt.

D'autres approches sont encore possibles.

On a une famille libre de quatre vecteurs. La dimension vaut au moins 4. Et peut être plus...

Peut on décomposer 1 (c'est bien une application : $x \longmapsto 1$), à l'aide $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto |x-1|$, $x \longmapsto |x-2|$ et $x \longmapsto |x-3|$ (en tout cas sur $[0,\ 3]$, car ailleurs, ce n'est guère possible, chacune ayant un point de non dérivabilité tandis que $x \longmapsto 1$ est dérivable partout).
On comprend qu'on ne va pas utiliser $x \longmapsto |x-1|$ ni $x \longmapsto |x-2|$ à cause de ce qu'elles font en 1 et en 2.
On propose $x \longmapsto \frac{|x|+|x-3|}{3}$ (c'est à dire $\dfrac{1.\varphi_0 + 0.\varphi_1 + 0.\varphi_2 + 1.\varphi_3}{3}$).
On vérifie sur $[0,\ 3]$, cette application s'écrit juste $x \longmapsto \frac{x+3-x}{3}$, c'est bien elle.

Attention : Si vous rédigez sous la forme $a.\varphi_0 + b.\varphi_1 + c.\varphi_2 + d.\varphi_3 = (x \longmapsto 1)$
$\Rightarrow (a.0 + b.1 + c.2 + d.3 = 1,\ a.1 + b.0 + c.1 + d.2 = 1,\ a.2 + b.1 + c.0 + d.1 = 1,\ a.3 + b.2 + c.1 + d.0 = 1)$
$\Rightarrow a = d = \dfrac{1}{3}$ *et* $b = c = 0$
alors vous savez calculer, mais vous ne savez pas raisonner.
En effet, vous avez écrit partout ces ineptes $\Rightarrow$ qui servent à la liberté mais pas au caractère générateur.

Prenons f et g dans E, vérifiant $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ et $f(3) = g(3)$ et montrons $f = g$.
Au fait, la difficulté était elle pour vous comprendre le sens de « qui coïncident en 0, 1, 2 et 3 », puis de comprendre quelle implication il fallait montrer ?
En tant que prof, on ne se rend pas toujours compte que c'est déjà au niveau du langage que buttent certains élèves.

Il faut montrer $f = g$ pas seulement en ces quatre points, mais aussi sur $[0,\ 1]$, sur $[1,\ 2]$ et sur $[2,\ 3]$.
Mais regardons par exemple sur $[1,\ 2]$. f et g sont alors deux applications affines, qui coïncident en deux points. Elles sont égales...

On fait de même sur chaque « petit intervalle », grâce aux extrémités.

On se dit que la dimension de E ne va pas dépasser 4.
Un élément de E est totalement déterminé par la connaissance de quatre réels...

Un élément f de E est totalement déterminé par l'élément $(f(0),\ f(1),\ f(2),\ f(3))$ dans $\mathbb{R}^4$.

On peut aussi dire que chaque fonction affine est déterminée par deux coefficients. la dimension de E serait alors 2×3 (deux coefficients sur $[0,\ 1]$, deux sur $[1,\ 2]$ et deux sur $[2,\ 3]$). Mais le raccordement en 1 fait perdre une dimension. De même que celui en 2. Il reste donc 4 coefficients à choisir.

On se fixe une fonction $x \longmapsto a.x + b$ sur $[0,\ 1]$ (deux dimension). Sur l'intervalle $[1,\ 2]$, comme $f(1)$ est imposé, on choisit le coefficient directeur : $x \longmapsto c.(x-2) + (a+b)$. Et sur le dernier intervalle, on choisit aussi un coefficient

5. cette estimation de « au moins quatre équations car il y a quatre inconnues », c'est la base même de l'algèbre linéaire ; si vous n'avez pas ce réflexe, que faites vous ici ?

directeur, puisque la valeur en 2 est donnée à partir de a, b et c.

On inverse $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ par la méthode qu'on veut : résolution de système
pivot de Gauss
calculatrice
comatrice et division par le déterminant

On peut même chercher le lien avec ce qui précède : si le vecteur $\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$ est connu, comment retrouver a, b, c et d dans $f = a.\varphi_0 + b.\varphi_1 + c.\varphi_2 + d.\varphi_3$?

$\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Disposant de cette matrice, on l'utilise pour calculer $\frac{1}{6}.\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
et obtenir $f = 2.\varphi_0 + 1.\varphi_1 + 1.\varphi_2 - 1.\varphi_3$ ou si vous préférez : $f = x \longmapsto 2.|x| + |x-1| + |x-2| - |x-3|$.
Vérifiez si vous n'avez pas confiance.

◃34▹ On se donne cinq vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_5}$ dans un espace vectoriel $(E, +, .)$ tels que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4})$, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_5})$, $(\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_5})$ soient libres. Montrez qu'on ne peut pas déduire que $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_5})$ soit libre.

J'oserais dire qu'on ne peut pas le déduire parce que trop d'élèves pressés de conclure juste parce que ça sonne bien auraient justement voulu le déduire, et qu'il ne faut pas faire confiance aux élèves qui affirment des choses sans preuve.

On va donner un contre-exemple. Il ne peut être donné que dans un espace vectoriel de dimension au moins égale à 4. Pourquoi pas $(\mathbb{R}^4, +, .)$?
Et quatre vecteurs de la base canonique, et un autre :

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est libre et ainsi de suite.

Mais la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est liée, car le dernier est la somme des premiers.

◃35▹ Dans l'espace vectoriel des fractions de la forme $\dfrac{a.X^3+b.X^2+c.X+d}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, on a deux bases :
$C_2 = \dfrac{X^2}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, $C_1 = \dfrac{X}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, $C_0 = \dfrac{1}{(X-1).(X-2).(X+3)}$) et $P_1 = \dfrac{1}{(X-1)}$, $P_2 = \dfrac{1}{(X-2)}$, $P_{-3} = \dfrac{1}{(X+3)}$, $P_\infty = 1$, .

En pensant à $\dfrac{(X-2).(X+3)}{(X-1).(X-2).(X+3)}$, complétez : $\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 3 & \\ -6 & & & \end{pmatrix} & \begin{array}{c} C_3^* \\ C_2^* \\ C_1^* \\ C_0^* \end{array} \\ \begin{array}{cccc} P_1 & P_2 & P_{-3} & P_\infty \end{array} & \end{array}$. Inversez la matrice obtenue.

Exprimez alors C_1 comme combinaison linéaire de P_1,P_2et P_3.

Complétez $\dfrac{a.X^3+b.X^2+c.X+d}{(X-1).(X+2).(X-3)} = \diamondsuit + \dfrac{\heartsuit}{X-1} + \dfrac{\clubsuit}{X+2} + \dfrac{\spadesuit}{X-3}$.

◃36▹ ♡ Calculez les trois déterminants suivants : $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (trouvez la combinaison entre colonnes...)

et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$

◃37▹ On pose
$$B = (\theta \longmapsto e^{4.\theta},\ \theta \longmapsto e^{2.\theta},\ \theta \longmapsto 1,\ \theta \longmapsto e^{-2.\theta},\ \theta \longmapsto e^{-4.\theta})$$
et
$$\beta = (ch^4,\ ch^3.sh,\ ch^2.sh^2,\ ch.sh^3,\ sh^4)$$
. Montrez que $Vect(B)$ *(noté E)* est de dimension 5. Montrez que β est une famille libre de $(E,+,.)$.
Montrez que si f est dans E alors f' y est aussi.

Si f a pour composantes $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$ sur la base β, quelles sont les composantes $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}$ de f' sur cette base ? Donnez la matrice M vérifiant $\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = M.\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}$. Donnez la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de M.

◃38▹

On définit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$. Complétez pour que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ soient vecteurs propres.

Donnez son spectre. Calculez $(A-I_3).(A-2.I_3)$. Déduisez que A n'est pas diagonalisable. Calculez $(A-I_3)^2.(A-2.I_3)$.

Si vous visez l'étoile, trigonalisez la, c'est à dire rendez la semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ *(dite "forme de Jordan")*.

On veut $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & \\ & & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. La première ligne donne $\lambda = 1$.
Les suivantes donnent
$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Un coefficient est inaccessible.

Mais cette fois $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -5 & 6 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

On a deux vecteurs propres et deux valeurs propres : 2 et 1.
Calà ne suffit pas à diagonaliser A.

A a miantenant pour polynôme caractéristique $X^3 - 4.X^2 + 5.X - 2$.

On trouve deux valeurs propres seulement : 1 et 2 (déjà trouvées).
La nouveauté : 1 est racine double.

On note qu'on pouvait trouver la dernière valeur propre par $1 + 2 + \lambda = Tr(A) = 4$.

Même si on ne voit pas le lien, on calcule : $(A - I_3).(A - 2.I_3) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$.
Il ne reste pas grand chose, mais il reste quelquechose.

Et ceci permet de dire « par l'absurde » que A n'est pas diagonalisable.

Imaginons effectivement que A se diagonalis een $A = P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On a alors
$$A - \lambda.I_3 = P.D.P^{-1} - \lambda.I_3 = P.D.P^{-1} - P.(\lambda.I_3).P^{-1} = P.(D - \lambda.I_3).P^{-1}$$
On remplace :
$$(A - I_3).(A - 2.I_3) = (P.(D - 1.I_3).P^{-1}).(P.(D - 2.I_3).P^{-1}) = P.(D - 1.I_3).(D - 2.I_3).P^{-1})$$
Mais qui est alors $(D - 1.I_3).(D - 2.I_3)$? C'est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Et ceci donne la matrice nulle.
On multiplie par P et P^{-1} : $(A - I_3).(A - 2.I_3) = P.0_{n,n}.P^{-1} = 0_{n,n}$.
Ce n'est pas le cas ici, c'est donc qu'il reste des morceaux.

Quitte à anticper sur la suite, on remplace $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ par $D' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Le produit $(D' - 1.I_3).(D' - 2.I_3)$ donne $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et il n'est plus nul !

En revanche, $(A - I_3)^2.(A - 2.I_3)$ est la matrice nulle.
On a mis un exposant plus élevé sur le terme associé à la racine double.
Et $(D' - 1.I_3)^2.(D' - 2.I_3)$ est nul aussi. Comme par hasard...

On cherche P sous forme de trois colonnes vérifiant $A.P = P.D'$ (oui, D' et non pas D, vous avez vu le prime ?).
Les coefficients de la diagonale de D ne peuvent être que les deux valeurs propres (dont la double) déjà trouvées.
On veut
$$A.\begin{pmatrix} U & V & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & V & W \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
On reconnaît : $A.U = U$. C'est le premier vecteur propre.

Puis $A.V = U + V$. C'est plus original. Mais les vecteurs solutions sont en $\begin{pmatrix} z+1 \\ 1 \\ z \end{pmatrix}$. Choisossons $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Enfin, $A.W = 2.W$ nous incite à prendre le vecteur propre de valeur propre 2.

P prend forme : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Et elle a pour déterminant -1. Inversible.

On confime : $M = P.D'.P^{-1}$.

La forme $D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est du type « diagonale plus nilpotente » (avec les deux qui commutent).
On l'appelle forme de Jordan.
Et on prononce Jordan, et pas Jordnae à l'anglaise.
Camille Jordan était un mathématicien français (et barbu), son nom se prononce à la française.
Quant à son prénom : Marie Ennemond Camille... je ne félicite pas ses parents.

On ne confondra aps avec la résolution des systèmes linéaires de Gauss Jordan, qui fait cette fois référence à un Jordan allemdand (Wilhelm).

◃39▹

♡ On se donne une matrice A de taille 4 sur 4. Montrez que la famille $(I_4,\ A,\ A^2, \dots A^{16})$ est liée.
Montrez qu'il existe au moins un polynôme non nul P vérifiant $P(A) = 0_{4,4}$.
Montrez que si la matrice M est diagonalisable, il existe un polynôme de degré 4 vérifiant à la fois $P(D) = 0_{4,4}$ et $P(M) = 0_{4,4}$.

Toutes ces matrices existent.
Elles sont 17.
Toutes sont dans $M_4(\mathbb{R})$. Et $(M_4(\mathbb{R}), +, .)$ est de dimension 16.
Un vecteur de plus que la dimension. La famille est liée.

Il y a donc une relation de dépendance linéaire de la forme

$$\alpha_0.I_4 + \alpha_1.M + \alpha_2.M^2 + \ldots + \alpha_{16}.M^{16} = 0_{4,4}$$

Avec au moins un coefficient non nul.
On pose alors $P(X) = \alpha_0.X^0 + \alpha_1.X + \alpha_2.X^2 + \ldots + \alpha_{16}.X^{16}$. Ce polynôme a au moins un coefficient non nul, il est non nul.

Mais si M est diagonalisable, il y a plus simple.
On écrit $I_4 = P.I_4.P^{-1} = P.Dia(1,1,1,1).P^{-1}$
$M = P.D.P^{-1} = P.Dia(a_0, a_1, a_2, a_3).P^{-1}$
$M^2 = P.D^2.P^{-1} = P.Dia((a_0)^2, (a_1)^2, (a_2)^2, (a_3)^2).P^{-1}$
$M^3 = P.D^3.P^{-1} = P.Dia((a_0)^3, (a_1)^3, (a_2)^3, (a_3)^3).P^{-1}$
$M^4 = P.D^4.P^{-1} = P.Dia((a_0)^4, (a_1)^4, (a_2)^4, (a_3)^4).P^{-1}$
Si on combine $\alpha_0.I_4 + \alpha_1.M + \alpha_2.M^2 + \alpha_3.M^3 + \alpha_4.M^4$.
On va factoriser P et P^{-1}.

Au milieu, on va avoir une matrice diagonale dont les termes sont $\begin{pmatrix} f(a_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(a_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f(a_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & f(a_3) \end{pmatrix}$

avec $f(x) = a_0 + a_1.x + a_2.x^2 + a_3.x^3 + a_4.x^4$.
Rapidement écrit : $f(M) = P.f(D).P^{-1} = P.Dia(f(a_0), \dots f(a_3)).P^{-1}$.
Si on choisit comme polynôme f de racines a_0, a_1, a_2 et a_3 (c'est $x \longmapsto (x-a_0).(x-a_1).(x-a_2).(x-a_3)$, et c'est donc le polynôme caractéristique).
Les termes de la matrice diagonale sont donc nuls. La matrice diagonale est nulle : $f(M) = P.f(D).P^{-1} = P.0_{4,4}.P^{-1} = 0_{4,4}$.
C'est le théorème de Cayley-Hamilton, démontré ici sans efforts dans le cas « diagonalisable ».

◃40▹

Montrez que l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto a + 2.b + c - 3.d$ est linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$. Mettez la sous la forme $M \longmapsto Tr(A.M)$ pour A bien choisie à préciser.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez sa dimension.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr({}^tM.M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez sa dimension.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & \\ & 2.b - 3.d \end{pmatrix}$$

On la tient notre matrice A.

L'ensemble $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid Tr(A.M) = 0\}$ contient la matrice nulle et est stable par combinaisons.
Mais surtout, il s'écrit $\{\begin{pmatrix} -2.b - c + 3.d & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid (b, c, d) \in \mathbb{R}^3\}$.
On l'écrit $Vect(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.
Et c'est un espace vectoriel. De plus ces trois matrices sont indépendantes.
La dimension est 3.

Les matrices vérifiant $Tr({}^tM.M)$ ne sont pas légions. Il n'y a que la matrice nulle (écrivez, vous arrivez à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$).
C'est donc un sous-espace de dimension 0 et de base ( ) (famille vide).

◃ 41 ▹

♡ $M = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & & 13 \\ & -12 & -4 \end{pmatrix}$ a pour vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *(valeur propre)* et pour valeurs propres -3 et 4.
Retrouvez son polynôme caractéristique, et diagonalisez la.

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & & 13 \\ & -12 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La première ligne donne $\alpha = 2$.
La seconde complète le coefficient central :
de même la dernière.

On vérifie $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & 13 & 13 \\ 18 & -12 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On résout à présent $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & 13 & 13 \\ 18 & -12 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -3. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et le même avec 4.
Ces systèmes sont fort heureusement dégénérés.
On trouve des solutions, toutes proportionnelles :
$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & 9 & 13 \\ 18 & -12 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2.y \\ y \\ 3.y \end{pmatrix} = 4. \begin{pmatrix} 2.y \\ y \\ 3.y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & 9 & 13 \\ 18 & -12 & -4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ 3.x/2 \\ 0 \end{pmatrix} = -3. \begin{pmatrix} x \\ 3.x/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

On a donc valeurs propres et vecteurs propres associés

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	4	-3

On diagonalise :

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & 6 \\ -24 & 9 & 13 \\ 18 & -12 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

◃ 42 ▹

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrez que les vecteurs colonne de A forment une famille liée. Montrez qu'il existe au moins un vecteur non nul U vérifiant $A.U = 0_3$. Calculez ${}^tA.A$ et prouvez que son déterminant est nul.
Calculez $A.{}^tA$ et calculez son polynôme caractéristique.
Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des vecteurs U vérifiant $A.U = 0_3$?

Ils sont cinq dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$, inutile de chercher plus loin.

Si on veut : $C_2 = C_3 + C_5$.
Mais aussi $2.C_1 + 3.C_2 = 4.C_3 + C_4$.

Ce qui s'écrit aussi $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Et toute combinaison convient aussi. Et même

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & -4 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inutile de calculer explicitement ${}^tA.A$. On a un vecteur vérifiant $A.U = 0_3$ donc ${}^tA.A.U = {}^t A.0_3 = 0_5$.
On a un vecteur non nul dont l'image par ${}^tA.A$ est nulle. C'est que la matrice est non inversible.

Sinon : ${}^tA.A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Et on a toujours $C_2 = C_3 + C_5$ par exemple. Et c'est évidemment le coup du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On peut aussi expliquer : A prend des vecters de $\mathbb{R}^5$ et les expédie dans $\mathbb{R}^3$. Elle doit perdre des dimensions.
${}^tA$ va de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^5$.
Et globalement, ${}^tA.A$ va de $\mathbb{R}^5$ dans $\mathbb{R}^5$ mais en transitant par $\mathbb{R}^3$.
Il y a un engorgement qui fait perdre des dimensions.

Le produit $A.{}^tA$ ets plus simple : $\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.
Son polynôme caractéristique est $X^3 - 15.X^2 + 58.X - 41$.
Et celui de ${}^tA.A$ est $X^5 - 15.X^4 + 58.X^3 - 41.X^2$.
Je vous laisse y réfléchir.

◃43▹ ♡ On se place dans $(\mathbb{R}^4, +, .)$ muni de la base canonique.
$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrr} x & +y & -z & +2.t & = 0 \\ x & +2.y & +z & -3.t & = 0 \end{array} \right\}$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{rrrrr} 3.x & +2.y & +z & +t & = 0 \\ x & -y & +z & +2.t & = 0 \end{array} \right\}$.
Donnez une base de E, une base de F. Vérifiez que $\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E \cap F$. Donnez une base de $E + F$, la dimension des quatre sous-espaces cités, et complétez la dernière famille en base de $\mathbb{R}^4$.

On écrit la forme générale des éléments de E en résolvant un système en x et y pour z et t fixés :
$\begin{pmatrix} 3.z - 7.t \\ -2.z + 5.t \\ z \\ t \end{pmatrix}$ d'où une base $\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

On peut aussi dire que E est de dimension 2 (noyau d'une application de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$ qui atteint bien tout $\mathbb{R}^2$.
Il suffit alors de donner deux vecteurs de E pris au hasard du moment qu'ils sont indépendants.
On peut d'ailleurs profiter du don de l'énoncé : un vecteur est proposé.

Pour F on procède de même : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ -5.x - 5.y \\ 2.x + 3.y \end{pmatrix}$ d'où une base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$.
On peut aussi proposer et vérifier.

Le vecteur $\left(\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est dans E (deux équations vérifiées), et dans F (idem).

Il forme une famille libre de $E \cap F$.
Mais la dimension de E\cap F ne peut pas être 2.
Sinon, on aurait $E \cap F = E$ (inclusion plus égalité des dimensions) et $E \cap F = F$ (même raisone).
On aurait alors $E = F$ ce qui n'est pas le cas (il suffit de vérifier qu'un des ecteurs troucvés dans E n'est pas dans F).

$\dim(E) = 2$	$\dim(F) = 2$	$\dim(E \cap F) = 1$	$\dim(E + F) = 3$

Pour avoir une base de $E + F$ (qu'il nous est interdit d'acrire $E \oplus F$), il suffit de partir de $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de le compléter en base de E (un vecteur non colinéaire) et en base de F.

On peut donc proposer ($\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$).

On vérifie sa liberté en extrayant un déterminantn non nul : $\begin{vmatrix} -6 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 30$.

On peut aussi partir d'une famille génératrice de $E + F$: ($\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$).

On constate (comme prévu) que son déterminant est nul.

On enlève un vecteur et le tour est joué : ($\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$).

Et je vous laisse exprimer $\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ comme combinaison.

◃ 44 ▹

F, G et H sont trois droites de $(\mathbb{R}^n, +, .)$. Quelles valeurs peut prendre $dim((F + G) \cap H)$?
Quelles valeurs peut prendre $dim(((F + G) \cap H) + ((G + H) \cap F) + ((H + F) \cap G))$?

$F + G$ est une droite (cas $F = G$) ou un plan (cas général, dimension 2).
L'intersection avec la droite H peut donner $\{0\}$, de dimension 0
H de dimension 1 (si H inclus dans $F + G$)
et pas plus, il faut être inclus dans H.
De même, $(G + H) \cap F$ est de dimension 0 ou 1.
La somme de trois sous-espaces de dimensions 0 ou 1 ne pourra pas dépasser 3.

On pourra sans restreindre la généralité se placer dans $\mathbb{R}''$. En effet, tout se passe dans $F + G + H$ dont la dimension ne dépassera pas 3.

Avec $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{k})$, on a

$F + G$	$(F + G) \cap H$	$G + H$	$(G + H) \cap F$	$H + F$	$(H + F) \cap G$	somme
$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$\{\overrightarrow{0}\}$

Avec $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{i})$, on a

$F + G$	$(F + G) \cap H$	$G + H$	$(G + H) \cap F$	$H + F$	$(H + F) \cap G$	somme
$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i})$	$Vect(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i})$	$Vect(\overrightarrow{i})$	$Vect(\overrightarrow{i})$	$\{\overrightarrow{0}\}$	$Vect(\overrightarrow{i})$

On pouvait aussi prendre trois fois $Vect(\overrightarrow{i})$ pour arriver au même résultat.

Avec $F = Vect(\overrightarrow{i})$, $G = Vect(\overrightarrow{j})$ et $H = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$, on a

$F + G$	$(F + G) \cap H$	$G + H$	$(G + H) \cap F$	$H + F$	$(H + F) \cap G$	somme
$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{j})$	$Vect(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

cette fois, on a atteint la dimension 2.
Mais pour la dimension 3 ? Il faut que chaque $(F + G) \cap H$ soit de dimension 1. ce qui force la droite à être incluse dans le plan

Mais alors on a $H \subset (F+G)$, $G \subset (F+H)$ et $F \subset (G+H)$.
Les trois droites sont coplanaires.
On ne pourra pas avoir plus que $((F+G)\cap H) + ((G+H)\cap F) + ((H+F)\cap G)$ égal à ce plan.

◁ 45 ▷

Est il possible de choisir $\overrightarrow{a}$ pour que les quatre familles $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{a})$, $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{a})$, $(\overrightarrow{i}+3.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i}+2.\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{a})$ et $(\overrightarrow{i}-\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{i}+\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{a})$ soient des bases de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Et si on ajoute « bases directes » ?

Elles ont toutes le bon nombre de vecteurs. il suffit d'exiger que des déterminants soient non nuls. Et strictement positifs pour l'autre question.

$\begin{vmatrix}1&1&a\\0&1&b\\0&0&c\end{vmatrix}\neq 0$	$\begin{vmatrix}1&0&a\\-1&1&b\\1&0&c\end{vmatrix}\neq 0$	$\begin{vmatrix}1&1&a\\0&2&b\\3&0&c\end{vmatrix}\neq 0$	$\begin{vmatrix}1&1&a\\-1&0&b\\0&1&c\end{vmatrix}\neq 0$
$c\neq 0$	$c\neq a$	$-6.a+3.b+2.c\neq 0$	$-a-b+c\neq 0$
$c>0$	$c-a>0$	$-6.a+3.b+2.c>0$	$-a-b+c>0$

Le vecteur $\overrightarrow{k}$ convient pour les deux questions en une.

◁ 46 ▷

♡ Ajustez a pour que $\begin{pmatrix}1&1\\a&3\end{pmatrix}$ ne soit pas diagonalisable dans $\mathbb{C}$. Rendez la quand même semblable à $\begin{pmatrix}\alpha&1\\0&\alpha\end{pmatrix}$ *(trop dur de trouver α).*

Le polynôme caractéristique sera de degré 2. Si il admet deux racines distinctes, la matrice se diagonalisera.On va donc imposer que $X^2-4.X+(3-a)$ ait une racine double. Cette racine est alors 2 (somme des racines). On impose $a=-1$.
Si $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$ se diagonalisait, ce serait forcément en $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$. Et elle serait déjà égale à $2.I_2$.
Mais on va quand même trouver P vérifiant $M.P=P.\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.
En termes de colonnes de la matrice P, en notant U la première : $M.U=2.U$.
Un vecteur propre. Pas trop le choix : $U=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (ou un de ses multiples)..
Bon début : $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\1&b\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$
Ensuite : $a+b=1+2.a$ et $-a+3.b=1+2.b$. On peut choisir a.
$\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

◁ 47 ▷

Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des matrices symétriques carrées de taille n sur n de trace nulle ?
Quelle est la dimension de l'espace des matrices carrées de taille n sur n vérifiant $Tr({}^tM.M)=0$? (calculez cette trace)

Trace nulle : n^2-1 car une seule composante est « contrainte ».

$Tr({}^tM.M)$ est la somme des carrés des coefficients de la matrice.
Il n'y a que la matrice nulle. Et la dimension vaut 0 (base vide).

On travaille sur $\mathbb{R}$. Sinon, sur $\mathbb{C}$ ce n'est même pas un espace vectoriel.

◁ 48 ▷

♡ A est une matrice carrée. Montrez que A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique et donc les mêmes valeurs propres.
Montrez que les valeurs propres de A^2 sont les carrés des valeurs propres de A.
♣ Donnez une matrice carrée A, réelle de taille 2 telle que les valeurs propres de A^2 soient négatives.

◁ 49 ▷

Parmi ces sous-ensembles de l'espace vectoriel des polynômes lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

polynômes nuls en 0	polynômes à coefficients positifs ou nuls
polynômes de degré 3	polynômes multiples de $X-1$
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$
polynômes de terme constant nul	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$
polynômes de terme constant 1	polynômes nul en 1 ou en 3
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair	

Il suffit de vérifier à chaque fois la présence du neutre, la stabilité par addition, et multiplication par un réel. Ou sinon, on trouve un contre-exemple.

polynômes nuls en 0	oui	polynômes à coefficients positifs ou nuls	non
noyau de $P \longmapsto P(0)$		passage à l'opposé	
polynômes de degré 3	non	polynômes multiples de $X-1$	oui
absence du nul, ou même $(X^3+1)-(X^3+X)$		stabilités...	
polynômes ne contenant que des monômes de degré impair	oui	polynômes multiples de $X-1$ ou $X+1$	non
$Vect(X,\ X^3,\ X^5,\ldots)$		stabilité : $2.(X+1)+(X-1)$ n'est multiple d'aucun	
polynômes de terme constant nul	oui	polynômes multiples de $X-1$ et $X+1$	oui
trois lignes plus haut !		de la forme $(X^2-1).P(X)$	
polynômes de terme constant 1	non	polynômes nul en 1 ou en 3	non
où est le nul ?		$(X-1)+(X-3)$ n'est plus nul en 1 ni en 3	
polynômes dont la dérivée est soit nulle, soit ne contenant que des monômes de degré impair			
oui : $Vect(1,\ X^2,\ X^4,\ X^6,\ldots)$			

◁50▷ Montrez qu'il y a 70 tétraèdres dont les sommets sont des sommets du cube $[0,\ 1]^3$.
Montrez que douze d'entre eux ont un volume nul.
Rappel : le volume d'un tétraèdre est $\dfrac{base \times hauteur}{3}$ soit $\dfrac{volume\ tetraedre}{6}$.
Donnez un tétraèdre de volume $\dfrac{1}{6}$. Donnez un tétraèdre de volume $\dfrac{1}{3}$. Montrez qu'il n'en existe aucun de volume $\dfrac{1}{2}$.
Combien ont pour volume $\dfrac{1}{6}$?

◁51▷ ♡ Déterminez noyau et image de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ 2.a \end{pmatrix}$ après avoir évidemment affirmé que cette application est bien linéaire.
Donnez un antécédent de chacun des vecteurs de la base canonique par $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ 2.a+c \end{pmatrix}$. Déterminez noyau et image de cette application linéaire.

On écrit cette application $f = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, et la linéarité est acquise ($M.(\alpha.U + \beta.V) = \alpha.M.U + \beta.M.V$)

Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} a+b-c \\ a-b+c \\ 2.a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cartésienne : $b = c$ et $a = 0$.

Paramétrique : $\boxed{Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})}$

Le noyau est de dimension 1. l'image est de dimension 2.

On y prend deux vecteurs indépendants : $\boxed{Im(f) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix})}$

On trouve une équation cartésienne en exigeant la coplanarité : $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

L'image a pour équation $x + y = 2.z$ (vérifiée par nos deux vecteurs proposés).

Exemple : C'est ainsi que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est dans l'image et c'est l'image de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ entre autres.
Et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vous conduirait à un système incohérent, sans solution.

◁52▷ Montrez que si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^2 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.
Vrai ou faux : si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^3 + a_n)$ convergent, alors (a_n) converge.

Si $((a_n)^2 - a_n)$ et $((a_n)^2 + a_n)$ convergent, alors leur différence converge. C'est aussi simple que ça.
Il ne reste qu'à diviser par 2.

Peut on reconstruire a_n à partir de $(a_n)^2 - a_n$ et $(a_n)^3 + a_n$ par des combinaisons, produits, élévations au carré ?
Pas évident. Alors un contre-exemple ? Pas notre célèbre $((-1)^n)$.
Posons $b_n = (a_n)^2 - a_n$ et $c_n = (a_n)^3 + a_n$ pour tout n.
Et effaçons ces n en travaillant à l'étage des suites.
On a alors $b^3 - c^2 = -3.a^5 + a^4 - a^3 - a^2$. Elle converge comme différence de produits de suites convergentes.
On la note d. On a ensuite $d + 3.b.c = -2.a^4 + 2.a^3 - 4.a^2$. Elle converge à son tour.
On lui ajoute $2.b^2$ et voilà que $-2.a^3 - 2.a^2$ converge.
On combine avec $2.c$ et cette fois, c'est $-2.a^2 + 2.a$ qui converge.
On combine avec b et cette fois, c'est a qui converge. On l'a eue.

Attention	Tout raisonnement commençant par « notons α la limite de $(a_n)^2$ ou autre est entâché d'erreurs dès le début. Il est fini le monde où toute suite converge. N'écrivez jamais $\lim_{n\to+\infty} a_n$ si vous n'avez rien qui vous donne l'existence de cette limite..

◁53▷ On définit $f = X \longmapsto M.X$ avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & & 1 & \\ & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ et $P = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$. Donnez la dimension de P et une équation cartésienne de P.

Ajustez les coefficients de M pour avoir $Im(f) \subset P$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \in Ker(f)$. A-ton $Im(f) = P$? Donnez une base et la dimension de $Ker(f)$ (rappelle : $Ker(f)$ est le sous-espace vectoriel des vecteurs dont l'image est nulle).

L'application $X \longmapsto M.X$ va bien de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ (formats compatibles). Et c'est la seule possibilité.
Elle est linéaire, puisque $M.(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.M.X + \mu.M.Y$ par distributivité.

Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont indépendants. Ils engendrent donc un plan de $(\mathbb{R}^3, +,)$. On en trouve une équation par condition de coplanarité :
$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. On peut aussi proposer $2.x - .y + .z = 0$. C'est l'équation d'un plan (dimension). il contient les deux vecteurs, c'est lui le plan cherché.

Chaque image $\begin{pmatrix} x & +2.y & +a.z & +t \\ 3.x & +c.y & +z & +d.t \\ e.x & -3.y & +f.z & +3.t \end{pmatrix}$ doit vérifier ce jeu d'équations.
Mais sous cette forme, on s'y perd un peu pour savoir qui on cherche,
sachant $2.(x + 2.y + a.z + t) - (3.x + c.y + z + d.t) + (e.x - 3.y + f.z + 3.t) = 0$.
Mais quel est le rôle de x , de y et ainsi de suite...

La bonne approche de matheux, c'est de dire qu'on va regarder pour une base, ou pour l'image d'une base.
Par exemple : $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ est l'image du premier vecteur de $\mathbb{R}^4$. Elle doit être dans P. On a donc $2.1 - 3 + e = 0$.
On recommence avec $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -3 \end{pmatrix}$, image du second vecteur. Cette fois : $2.2 - c - 3 = 0$.
Et ainsi de suite.

> On notera que par exemple la dernière équation $2.1 - d + 3 = 0$ correspond à avoir pris $x = y = z = 0$ et $t = 1$ dans une condition qui doit être vraie pour tout quadruplet (x, y, z, t).
> Sinon, la condition qui semble n'être que nécessaire est aussi suffisante.
> L'image de chaque vecteur $x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+x_3\overrightarrow{e_3}+x_4\overrightarrow{e_4}$ est $x_1.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_1})+x_2.\overrightarrow{f(e_2)}+x_3.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_3})+x_4.\mathrm{f}(\overrightarrow{e_4})$, et la voilà dans P par stabilité.

A ce stade : $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix}$ avec une relation entre les deux coefficients qui manquent.

On notera qu'on a en fait $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ou en transposant : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ & 1 & \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ce serait ça, transposer une matrice .

Mais il nous reste une information : le noyau : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On tient la matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}}$

On vérifie quand même que le troisième vecteur est dans P.

Pour le noyau, on doit juste résoudre : $\begin{array}{ccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \\ x & -3.y & +z & +3.t & = & 0 \end{array}$.

Trois équations pour quatre inconnues. On va avoir un espace de dimension $4-3$ ce qui fait 1.

On connaît déjà un vecteur dedans ! On a donc $Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix})$. De dimension 1.

Sauf que...

Une des équations ne sert à rien. C'est par exemple $L_3 = -2.L_1 + L_2$.

Le noyau est de dimension 2 : $\begin{array}{cccccc} x & +2.y & & +t & = & 0 \\ 3.x & +y & +z & +5.t & = & 0 \end{array}$

On se donne x et y, et on trouve t et z.

Les vecteurs du noyau sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 2.x+9.y \\ -x-2.y \end{pmatrix}$. Plus propre : $\begin{pmatrix} x & \\ & y \\ 2.x & +9.y \\ -x & -2.y \end{pmatrix}$.

Le noyau est de dimension 2, et c'est $\boxed{Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix})}$

◁ 54 ▷ Montrez que de toute suite bornée à valeurs dans $\mathbb{Z}$, on peut extraire une sous-suite qui converge.

◁ 55 ▷ Une suite réelle croissante dont la moyenne de Cesàro converge est elle aussi convergente ?

On se souvient que si la suite converge, sa moyenne converge aussi. Mais on n'a pas de réciproque.

Toutefois ici, une hypothèse de croissance nous interdit de faire ce qu'on croise dans nos divers contre-exemples habituels.

Et on se dit qu'on va pouvoir utiliser tout ce qui marche sur les suites croissantes : elles convergent si et seulement si elles sont bornées, et sinon, elles divergent vers $+\infty$.

On prend une suite croissante. Elle n'a que deux possibilités. Soit elle est majorée et alors elle converge, soit qu'elle ne l'est pas, et alors elle diverge vers $+\infty$. Mais dans ce cas, sa moyenne de Cesàro devrait aussi partir à l'infini. Et voilà. Par l'absurde, ça passait bien.

◁ 56 ▷ ♡ Pouvez vous compléter $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & & \\ & -10 & \end{pmatrix}$ en matrice de projecteur *($p \circ p = p$ et donc $M^2 = M$)* ?

Si oui, calculez son déterminant et son polynôme caractéristique.

Donnez son noyau *(ensemble des vecteurs d'image nulle)* et son image *(ensemble des vecteurs atteints)*.

Et tant qu'on y est, diagonalisez la.

Si non, donnez le développement limité d'ordre 3 en 0 de $t \longmapsto \dfrac{\ln(1+t)}{\ln(1-t)}$.

A faire.

◁57▷ A est une matrice de projection, complétez la : $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ & 0 & -1 \\ & 4 & \end{pmatrix}$. Donnez son noyau K et une base de son image I. Donnez l'équation cartésienne de son ensemble image. Montrez que son image est $Ker(I_3 - A)$. Montrez que $\{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un espace vectoriel. Montrez que M est dans C si et seulement si on a $\forall U \in K,\ M.U \in K$ et $\forall V \in I,\ M.V \in I$.

On nomme les coefficients absents, puis on effectue le produit A^2, et on l'égalise à A :

$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ a & 0 & -1 \\ b & 4 & c \end{pmatrix}$

On a quelques équations $9 + a + b = -3$, $-3.a - b = a$.

On résout directement ce système : $a = 4$ et $b = -16$. On reporte dans une des autres : $c = 5$.

Les conditions nécessaires sont ensuite suffisante.

Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -16 & 4 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a trois équations, mais l'une est combinaison des autres : $z = 4.x$, $y = -x$. Les vecteurs sont de la forme $\begin{pmatrix} x \\ -x \\ 4.x \end{pmatrix}$.

Une base du noyau est $\boxed{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right)}$ (et le noyau est de dimension 1).

On veut des vecteurs de l'image :

$$\begin{pmatrix} -3.x & +y & +z \\ 4.x & & -z \\ -16.x & +4.y & +5.z \end{pmatrix} = x.\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} + y.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + z.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

On a une famille génératrice de l'image $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$. Mais ce n'est pas une base de l'image :

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + 4.\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(les trois coefficients de la combinaison sont ceux des vecteurs du noyau).

On enlève un vecteur, et la famille libre $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right)$ est une base de l'image.

Pour l'équation cartésienne, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans l'image si et seulement si $\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ est liée.

On annule un déterminant et on a l'équation $\begin{vmatrix} -3 & 1 & x \\ 4 & 0 & y \\ -16 & 4 & z \end{vmatrix} = 0$. On trouve $\boxed{4.x - y - z = 0}$ *(que vérifient les vecteurs* $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -16 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$*).*

On note C l'ensemble des matrices carrées M vérifiant $A.M = M.A$. La matrice nulle en fait partie.

Si M et M' en font partie, si α et β sont deux réels, alors on a $A.(\alpha.M + \beta.M') = \alpha.A.M + \beta.A.M' = \alpha M.A + \beta.M'.A = (\alpha.M + \beta.M').A$. On reconnaît que $\alpha.M + \beta.M'$ est dans C.

Prenons M dans C : $M.A = A.M$.

On montre alors que K est stable par A et I aussi.

On prend U dans K : $A.U = 0$. On étudie si $M.U$ est dans K, c'est à dire si on a $A.(M.U) = 0_3$.

Mais justement,

$$A.(M.U) = (A.M).U = (M.A).U = M.(A.U) = M.0_3 = 0_3$$

On montre que I est stable aussi par K.

On a la définition plus simple pour les éléments de l'image d'un projecteur, c'est le noyau du projecteur associé :

on prend V dans I : $(A - I_3).V = 0_3$. On pose $W = M.V$ et on vérifie :

$$(A - I_3).W = (A - I_3).M.V = A.M.V - M.V = M.A.V - M.V = M.(A.V - V) = M.0_3 = 0_3$$

Passons à la réciproque. On suppose que K et I sont stables. Il faut montrer $A.M = M.A$.
Pour le prouver, on va montrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, on a $A.M.X = M.A.X$.
Par caractérisation des projecteurs, X s'écrit $U + V$ avec U dans K et V dans I.
On effectue : $M.A.U = M.A.U + M.A.V = M.0_3 + M.V = M.V$ (caractérisation de K et de I).
On effectue aussi : $A.M.X = A.M.U + A.M.V$. Comme $M.U$ est dans K (stabilité de K), on a $A.(M.U) = 0$. Comme $M.V$ est dans I, on a $A.(M.V) = M.V$.
Par transitivité : $A.M.X = M.V = M.A.X$. Il y a égalité.

◁58▷ **Soit p un projecteur et n un endomorphisme nilpotent de $(\mathbb{R}^d, +, .)$. On suppose de plus $p \circ n = n \circ p$. On pose $f = p + n$. Calculez $Tr(f^k)$ pour tout entier naturel k.**

La trace d'un projecteur est égale à son rang (sur une base adaptée, on l'écrit $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si il projette sur un plan en effaçant une droite).

La trace d'une matrice nilpotente (sur une base adaptée, on a une matrice triangulaire supérieure $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple).
La trace est linéaire : $Tr(p + n) = Tr(p) + Tr(n) = rg(p)$.

On élève à la puissance k : $(p + n)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}.p^{k-i}.n^i$ car ils commutent.
Mais toutes les puissances de p donnent p (sauf une qui donne Id).
On isole un p tout seul (venant de p^k) et le reste est factorisable par n.
Exemple : $(p + n)^3 = p + 3.p.n + 3.p.n^2 + n^3$.
Le morceau factorisable par n est encore nilpotent, au pire de même indice que n :
$(n \circ truc)^r = n^r \circ truc^r$ car tout commute : $(3.p.n + 3.p.n^2 + n^3)^r = n^r \circ (3.p + 3.p.n + n^2)^r = 0 \circ (3.p + 3.p.n + n^2)^r = 0$.

On a donc la même forme $(p + n)^k = p + n'$ avec le même projecteur p et n' nilpotente.
On a donc $Tr((p + n)^k) = Tr(p)$ pour tout k... différent de 0.
Et 0 est à part : $Tr((p + n)^0) = Tr(Id) = \dim(E)$.

◁59▷ **On note P l'ensemble des projecteurs de $(\mathbb{R}^n, +, .)$ *(n vaut au moins 2)*. Déterminez l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p + q)$.
Montrez que l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto \det(p + q)$ est $\mathbb{R}$.
Quel est l'ensemble image de $P \times P$ par l'application $(p,\ q) \longmapsto Tr(p \circ q)$?**

La trace est linéaire : $Tr(p + q) = Tr(p) + Tr(q)$. Et la trace d'un projecteur est égale à son rang. Elle peut aller de 0 à n.
La quantité $Tr(p + q)$ peut aller de 0 à $2.n$ (en restant entière) et elle peut prendre toutes les valeurs.
$Tr(P \times Q) = [0,\ 2.n] \cap \mathbb{N}$

Que dire du déterminant de la somme ?
Le déterminant d'un seul projecteur vaut 0 (non injectif) ou 1 (projecteur particulier Id).
Mais la somme ?
Regardons en taille 2. Un projecteur de rang 1 a pour trace 1 et déterminant 0.
Toute matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & \\ & 1-a \end{pmatrix}$ remplit la première condition.
Pour la seconde en plus : $\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$. La condition est nécessaire, est elle suffisante ?
$\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix}$
On additionne deux matrices de projecteur : une de ce type et une de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

la somme a pour déterminant $\begin{vmatrix} 1+a & a \\ 1-a & 1-a \end{vmatrix}$ ce qui fait $1-a^2-a.(1-a)$. Et ce $1-a$ peut parcourir $\mathbb{R}$ tout entier.

L'ensemble image est au moins égal à $]-\infty,\ +\infty[$ avec ces sommes $\begin{pmatrix} a & a \\ 1-a & 1-a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Inutile d'en chercher plus : l'ensemble image est $\mathbb{R}$.

◁ 60 ▷

p et q sont deux projecteurs de $\mathbb{R}^3$, vérifiant $Tr(p+q)=4$. Montrez alors $Im(p)\cap Im(q) \neq \{\overrightarrow{0}\}$. Déduisez que 2 est valeur propre de $p+q$.

La trace est linéaire. On a donc $Tr(p)+Tr(q)=4$.

La trace d'un projecteur est égale à son rang, car on peut le diagonaliser sous la forme $P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ ou $P.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ (pour les formes non triviales).

On donc $rg(p)+rg(q)=4$.
Ou encore $\dim(Im(p))+\dim(Im(q))=4$.
Par la formule de Grassmann appliquée à $Im(p)+Im(q)$ (dont la dimension ne saurait excéder 3), on trouve $\dim(Im(p)\cap Im(q)) \geqslant 1$.
L'intersection ne se réduit pas au seul vecteur nul.[6].

Prenons un vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul dans $Im(p)\cap Im(q)$.
Et calculons $p(\overrightarrow{a})$ et $q(\overrightarrow{a})$.
Pour un projecteur p, $p(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$ dès que $\overrightarrow{a}$ est dans le noyau. En effet, on retient la formule capitale : $Im(p)=Ker(Id-p)$.
On a de même $q(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$.

Le vecteur $\overrightarrow{a}$ non nul vérifie $p+q)(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{a}$.
Si ça, ce n'est pas « vecteur propre de valeur propre 2 » !

◁ 61 ▷

♡ Montrez que la dérivation est un endomorphisme sur l'espace des solutions de l'équation $y''+a.y'+b.y=0$. Donnez sa trace et son déterminant.

On est sur un espace $Vect(t\longmapsto e^{\alpha.t},\ t\longmapsto e^{\beta.t})$ avec α et β racines de l'équation caractéristique.

On écrit la matrice de la dérivation sur la base écrit ci dessus : $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. La trace vaut $\alpha+\beta$ et c'est $-a$.

Le déterminant vaut $\alpha.\beta$ et c'est b.

Mais si on a une racine double ? La base « naturelle » est $(t\longmapsto e^{\alpha.t},\ t\longmapsto t.e^{\alpha.t})$. La matrice est $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

La trace est $2.\alpha$ qui vaut encore $-a$ et le déterminant est encore b.

Et si on le joue « physicien » dans le cas où on a des valeurs propres complexes $\dfrac{-a+i.\omega}{2}$ et $\dfrac{-a+i.\omega}{2}$.
On prend pour base $(t\longmapsto e^{-a.t/2}.\cos(\omega.t)),\ (t\longmapsto e^{-a.t/2}.\sin(\omega.t))$.
La matrice est alors $\begin{pmatrix} -\frac{a}{2} & \omega \\ -\omega & -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$, la trace est encore $a-$ et le déterminant b.

◁ 62 ▷

6. sous-espace réduit au vecteur nul = dimension 0, et sinon, la dimension vaut au moins 1

Un élève dit « j'ai voulu calculer la trace et le déterminant de $M \longmapsto M^2$ de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même. J'ai donc calculé la matrice de cet endomorphisme sur la base canonique $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$. Ayant pour images $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de déterminant nul et de trace 2.
Mais j'ai pris ensuite la base $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et j'ai trouvé la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La trace a changé. Or le cours dit que la trace d'un endomorphisme ne dépend pas de la base choisie.. »

Tous ses calculs d'images sont exacts.
Mais cet élève est un crétin.
L'application $M \longmapsto M^2$ n'est pas linéaire. Aucun des calculs de matrices n'a donc de sens !

◃ 63 ▹

A est une matrice de taille 3 vérifiant $A^2 = A$ *(projection)*. Montrez que $M \longmapsto A.M$ est un endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son déterminant en fonction de celui de A. Déterminez sa trace dans le cas $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminez sa trace dans le cas général.

On va poser $\varphi = M \longmapsto A.M$. Elle prend un élément de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ et retourne un élément du même espace.
Et elle est linéaire, par distributivité de la multiplication matricielle sur l'addition : $A.(\alpha.M + \beta.N) = \alpha.A.M + \beta.A.N$ en quantifiant.

On constate que A et I_3 ont la même image : $A \longmapsto A.A + A$ et $I_3 \longmapsto A.I_3 = A$.
Notre endomorphisme de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ n'est pas injectif. Son déterminant est nul.

Sauf si A est déjà égale à I_3. mais dans ce cas, φ est l'identité. Et son déterminant vaut 1.

On se place sur la base canonique et on calcule les images de neuf vecteurs de la base canonique, qu'on décompose :

	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	1	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
image de	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{array}$	$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\end{array}$

La trace vaut 6. Et c'est vrai aussi pour A matrice de projecteur de rang 2. En changeant de base.

◃ 64 ▹

Lycee Charlemagne MPSI2 Annee 2023/24

. Généralités .

Une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou même de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$) est dite convexe si pour tout triplet ordonné $(a,\ b,\ c)$ avec $a \leqslant b \leqslant c$, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

I∼0) Montrez l'équivalence entre la positivité de ce déterminant et le jeu d'inégalités :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

I∼1) Montrez que les applications affines sont convexes, de même que $x \longmapsto x^2$.

Pour une application affine, le déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha.a+\beta & \alpha.b+\beta & \alpha.c+\beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est toujours nul (quel que soit l'ordre de a, b et c). Il est donc positif ou nul.
Les applications affines sont convexes (et concaves).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a).(c-a).(c-b)$$

(VanDerMonde après deux échanges). Si on a pris $a \leqslant b \leqslant c$, il est fait de trois facteurs positifs, il est positif.

I∼2) Montrez que l'ensemble des applications convexes est stable par addition.

On prend f et g convexes. On se donne un triplet ordonné. Par multilinéarité du déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a)+g(a) & f(b)+g(b) & f(c)+g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Cette somme est positive.

I∼3) Montrez que $x \longmapsto |x|$ est convexe (distinguer suivant la position de a, b et c par rapport à 0).

Pour la valeur absolue, on a plusieurs cas

cas	$a \leqslant b \leqslant c \leqslant 0$	$a \leqslant b \leqslant 0 \leqslant c$	$a \leqslant 0 \leqslant b \leqslant c$	$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c$
$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \lvert a\rvert & \lvert b\rvert & \lvert c\rvert \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & -b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$
	0	$2.c.(b-a)$	$-2.a.(c-b)$	0

Dans tous les cas, ce déterminant est positif.

II∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si $x \longmapsto f(-x)$ est convexe.

On suppose que f est convexe. On pose $g = x \longmapsto f(-x)$.
On se donne un triplet $(a,\ b,\ c)$ avec $a \leqslant b \leqslant c$.

On calcule $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f(-a) & f(-b) & f(-c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ f(-a) & f(-b) & f(-c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

On échange deux colonnes : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ g(a) & g(b) & g(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & -b & -a \\ f(-c) & f(-b) & f(-a) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Or, on a justement $-c \leqslant -b \leqslant -a$. La convexité de $f$assure que ce déterminant est positif.

On a juste finalement fait une symétrie d'axeOy, la convexité s'est conservée.

II∼1) Montrez que f est convexe de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $x \longmapsto x.f\left(\frac{1}{x}\right)$ est convexe $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose que f est convexe sur $]0,\ +\infty[$. On pose $h = x \longmapsto x.f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On se donne un triplet $(a,\ b,\ c)$ avec $0 < a \leqslant b \leqslant c$.
On calcule

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a.f(1/a) & b.f(1/b) & c.f(1/c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a.b.c. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(1/a) & f(1/b) & f(1/c) \\ 1/a & 1/b & 1/c \end{vmatrix}$$

(on a sorti a, b et c par multilinéarité).
On échange deux lignes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a.b.c. \begin{vmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ f(1/a) & f(1/b) & f(1/c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

On échange deux colonnes :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ h(a) & h(b) & h(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a.b.c. \begin{vmatrix} 1/c & 1/b & 1/a \\ f(1/c) & f(1/b) & f(1/a) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Or, on a justement $\dfrac{1}{c} \leqslant \dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. La convexité de f appliquée au triplet ordonné $\left(\dfrac{1}{c},\ \dfrac{1}{b},\ \dfrac{1}{a}\right)$ assure que ce déterminant est positif.
Et le facteur $a.b.c$ devant l'est aussi.

Cet exercice est joli, mais je n'en vois pas ensuite d'application à des fonctions convexes bien choisies...

A-t-on raisonné par équivalences ?

On a juste prouvé

f convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto f(-x)$ convexe
f convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto x.f(1/x)$ convexe

On peut affirmer qu'on a raisonné par équivalences... Pas tout à fait convaincant.
Mais appliquons notre résultat non pas à f mais à sa transformé :

g convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto g(-x)$ convexe	et c'est	$x \longmapsto f(x)$
h convexe	$\Rightarrow$	$x \longmapsto x.h(1/x)$ convexe	et c'est	$x \longmapsto x.\left(\dfrac{1}{x}.f\left(\dfrac{1}{1/x}\right)\right)$

Le résultat dans le sens direct fournit sa propre réciproque quand on l'applique à la transformée à la place de f !

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Dérivabilité	.

III∼0) Soit f une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que pour tout x, et pour tout triplet $(h,\ k,\ t)$ avec $h < k < 0 < t$: $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$
(on pourra prendre $(a,\ b,\ c) = (x+h,\ x+k,\ x)$ puis un autre triplet).

On suppose f convexe. On pourra donc écrire $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$ mais attention, seulement après avoir vérifié $a \leqslant b \leqslant c$!

On veut prouver $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour $h \leqslant k < 0 < t$.

On n'a pas $f(h)$, $f(k)$, mais $f(a+h)$, $f(a+k)$ et autres.

On va donc considérer $x+h \leqslant x+k < x < x+t$. Un quadruplet, donc deux triplets ordonnés au moins :

$x+h \leqslant x+k < x$	$x+k < x < x+t$
$\begin{vmatrix} x+h & x+k & x \\ f(x+h) & f(x+k) & f(x) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} x+k & x & x+t \\ f(x+k) & f(x) & f(x+t) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$
$\begin{vmatrix} h & k & x \\ f(x+h)-f(x) & f(x+k)-f(x) & f(x) \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} k & x & t \\ f(x+k)-f(x) & f(x) & f(x+t)-f(x) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \geqslant 0$
$\begin{vmatrix} h & k \\ f(x+h)-f(x) & f(x+k)-f(x) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} k & t \\ f(x+k)-f(x) & f(x+t)-f(x) \end{vmatrix} \leqslant 0$ 1 est en position « négative »
$(f(x+k)-f(x)).h \geqslant (f(x+h)-f(x)).k$	$(f(x+t)-f(x)).k \leqslant (f(x+k)-f(x)).t$
$\dfrac{f(x+k)-f(x)}{h} \geqslant \dfrac{f(x+h)-f(x)}{k}$ On a divisé par $h.k$ qui est positif !	$\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \geqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$ On a divisé par $k.t$ qui est négatif !

Ce sont exactement les inégalités attendues, à mettre bout à bout.

On notera que si on se laisse guider par les combinaisons sur les colonnes, le calcul devient plus simple.
Mais je ne peux pas vous interdire de raisonner encore comme des élèves de Terminale, en cherchant toujours à tout développer plutôt que de chercher à rendre les choses agréables...

III∼1) Déduisez que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ est croissante majorée sur $]-\infty,\ 0[$.

III∼2) Déduisez que f est dérivable à gauche en tout point. f est elle dérivable à droite en tout point ?

L'inégalité $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$ montre que $h \longmapsto \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$est croissante sur $]-\infty,\ 0[$.
L'inégalité $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ montre qu'elle est majorée, par exemple par $\dfrac{f(x+1)-f(x)}{1}$ *(ne dépendant pas de h).*
En tant qu'application croissante majorée, elle a une limite en 0 par valeur inférieure.

Les taux d'accroissement à gauche ont une limite...
L'application est dérivable à gauche en tout point x.

III∼3) f est elle continue en tout point ? f est elle dérivable en tout point ?

Passons à droite, avec plus ou moins de rigueur ou d'expertise.

Méthode propre : je recommence les mêmes idées.
Pour tout triplet $h < 0 < t < s$, on a $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \leqslant \dfrac{f(x+s)-f(x)}{s}$.
L'application $t \longmapsto \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ est croissante sur $]0,\ +\infty[$.
L'application $t \longmapsto \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ est minorée sur $]0,\ +\infty[$ par exemple par $\dfrac{f(x-1)-f(x)}{-1}$.
Elle admet donc une limite en 0^+.

Pur physicien, au sens noble du terme.

Méthode moins propre : j'affirme.
On fait « le même type de raisonnement à droite », ça marche aussi bien.

Pur matheux, pas forcément au sens le plus noble du terme.

Méthode propre : j'enchaîne les idées.
On a montré f convexe implique f dérivable à gauche en tout point.
On a montré f convexe implique $x \longmapsto f(-x)$ convexe.
On a donc f convexe implique $x \longmapsto f(-x)$ dérivable à gauche en tout point x.
Et ceci donne que f est dérivable à droite en tout point $-x$.

Donc en tout point.

> *Pur matheux. Au sens « concours » du terme.*

---

f est dérivable à gauche en tout point, donc continue à gauche (développement d'ordre 1 implique développement d'ordre 0).
f est dérivable à droite en tout point, donc continue à droite.
f est continue de chaque côté en tout point, donc continue.
f est bien continue en tout point.

> *Une application discontinue ne peut pas être convexe.*
> *Mais c'est directement offert dans notre inégalité avec les déterminants...*

f est dérivable à droite et à gauche en tout point. Ceci ne garantit pas qu'elle soit dérivable. Rien ne dit que $f'_g(x)$ sera égal à $f'_d(x)$.

> *Peut être la suite pourrait nous le dire. mais justement, on voit ensuite des f'_d et f'_g.*
> *Et puis on a vu l'exemple de la valeur absolue... Convexe mais pas dérivable en 0.*

III∼4) **Montrez $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$ (ceci répond partiellement à la question précédente ?) pour tout x.**

Repartons de $\dfrac{f(x+k)-f(x)}{k} \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ pour $k < 0 < t$.
Faisons tendre k vers 0 par valeur inférieure (vers 0^- quoi), maintenant qu'on sait que la limite existe. Le premier membre tend vers $f'_{g(x)}$.
On a donc $f'_g(x) \leqslant \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$.
Faisons tendre t vers 0 par valeur supérieure (on sait que la limite existe) : $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

> *Erreur fatale et classique de l'élève non matheux : passer à la limite sans avoir d'ores et déjà prouvé l'existence des limites. C'est à ça qu'on voit la différence fondamentale entre le matheux et le... comment appeler ça, un truc qui sait faire des calculs mais n'a pas conscience qu'il n'a justifié aucune existence ? Comment appeler celui qui confond passage à la limite et théorème d'encadrement ?*

On note que pour la valeur absolue, en 0 on a $f'_g = -1$ et $f'_d = 1$. Conforme.

III∼5) **En prenant $(x,\ \dfrac{x+y}{2},\ y)$ dans le rôle de a, b et c, montrez $f'_d(x) \leqslant f'_g(y)$ pour tout couple $(x,\ y)$ avec $x \leqslant y$.**

Si on prend x et y avec x pus petit que y, on peut insérer $\dfrac{x+y}{2}$ entre les deux. Et on a donc un triplet ordonné sur lequel appliquer la formule du déterminant :

$$\begin{vmatrix} x & b & y \\ f(x) & f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) & f(y) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

puis par exemple

$$\frac{f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) - f(x)}{\dfrac{x+y}{2} - x} \leqslant \frac{f(y) - f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{y - \dfrac{x+y}{2}}$$

Ce sont deux taux d'accroissements, de la forme $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ avec $t = \dfrac{y-x}{2}$ *(positif)*
et $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k}$ avec $k = \dfrac{x-y}{2}$ *(négatif)*

Le premier est plus grand que la limite à droite quand t tend vers 0^+ des $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t}$ *(limite à droite d'application croissante).*

Le second est plus grand que la limite à gauche quand k tend vers 0^- des $\dfrac{f(y+k)-f(y)}{k}$ *(limite à gauche d'application croissante)*.
On a donc

$$f'_d(x) \leqslant \frac{f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)-f(x)}{\dfrac{x+y}{2}-x} \leqslant \frac{f(y)-f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)}{y-\dfrac{x+y}{2}} \leqslant f'_g(y)$$

III∼6) **Déduisez que f'_g et f'_d sont croissantes.**

On met tout bout à bout ? $f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(y) \leqslant f'_d(y)$.

Effaçons ce qui ne sert pas :

$f'_g(x) \leqslant \ldots \leqslant f'_g(y) \leqslant \ldots$	$\ldots \leqslant f'_d(x) \leqslant \ldots \leqslant f'_d(y)$
f'_g est croissante	f'_d est croissante

III∼7) **Montrez que si f est convexe et dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors f' est croissante.**

L'hypothèse ajoutée est f est dérivable. On sait donc par avance que f' existe en tout point.
Et quitte à regarder à droite et à gauche, f' est croissante.
Donc f' est croissante.

IV∼0) **Montrez que si f est dérivable avec f' croissante, alors f est convexe.**

Supposons f dérivable et f' croissante.

On se donne alors a, b et c avec $a < b < c$ et calculons le célèbre déterminant $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ qu'on écrit $\begin{vmatrix} a-b & b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(b) & f(c)-f(b) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ puis $-\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(c)-f(b) \end{vmatrix}$ et enfin $\begin{vmatrix} b-a & c-b \\ f(b)-f(a) & f(c)-f(b) \end{vmatrix}$ et enfin $(b-a).(f(c)-f(b))-(c-b).(f(b)-f(a))$.
Par théorème des accroissements finis, $f(c)-f(b)$ s'écrit $(c-b).f'(\gamma)$ pour un γ de $]b,\ c[$
$f(b)-f(a)$ s'écrit $(b-a).f'(\alpha)$ pour un γ de $]a,\ b[$
On a donc

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (c-b).(b-a).(f(\gamma)-f'(\alpha))$$

avec $a < \alpha < b < \gamma < c$.
Par croissance de f', chacun des trois termes du produit est positif ou nul. Ce produit l'est aussi.

Pour f dérivable, il y a donc équivalence entre « f convexe » et « f' croissante ».

Pour f de classe D^2, avec théorème du cours, il y a équivalence entre « f convexe » et « f'' positive ».

IV∼1) **Justifiez que expest convexe.**

L'exponentielle a pour dérivée l'exponentielle, croissante...
Elle est donc convexe.

Lycee Charlemagne — MPSI2 — Annee 2023/24

Inégalités de convexité

V∼0) **On se donne a et c avec $a \leqslant c$. Montrez que $t \longmapsto (1-t).a+t.c$ est bijective de $[0,\ 1]$ dans $[a,\ c]$ (explicitez sa réciproque).**

L'application $t \longmapsto (1-t).a+t.c$ est affine, croissante. L'image de 0 est a et l'image de 1 est c.
Toute valeur intermédiaire entre a et c est atteinte une fois.

D'ailleurs, un réel b entre a et c est l'image de $t = \dfrac{b-a}{c-a}$ (équation du premier degré).
Et ce t est positif (numérateur et dénominateur positifs), plus petit que 1 (numérateur inférieur au dénominateur).

Résumé :

	$t \in [0,\ 1]$	$\longrightarrow$	$(1-t).a+t.c \in [a,\ c]$	barycentre
Thalès	$\dfrac{b-a}{c-a}$	$\longleftarrow$	$b \in [a,\ c]$	

V∼1) Montrez que f est convexe si et seulement si
pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$.

Supposons f convexe.
On se donne a et c avec $a \leqslant c$, et on se donne t dans $[0,\ 1]$.
On sait que pour tout b entre a et c, on a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

En particulier pour $b = (1-t).a+t.b$ (qui est bien entre a et c) : $\begin{vmatrix} a & (1-t).a+t.c & c \\ f(a) & f((1-t).a+t.c) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$

On développe

$$-f(a).\begin{vmatrix} (1-t).a+t.c & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + f((1-t).a+t.b).\begin{vmatrix} a & c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - f(b).\begin{vmatrix} a & (1-t).a+t.c \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

On simplifie :

$$f(a).(1-t).(c-a) + (a-c).f((1-t).a+t.b) + f(b).t.(a-c) \geqslant 0$$

On fait passer de l'autre côté en simplifiant par $c-a$ positif :

$$f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$$

L'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images.

Mais il manque un cas. Si si.
Que fait on si a est plus grand que c ?
Il faut échanger les rôles... Et remplacer t par $1-t$.

Réciproquement ;
supposons pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [0,\ 1]$ on a $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$.

On se donne alors a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$.
On pose $t = \dfrac{b-a}{c-a}$. Il est entre 0 et 1. On peut alors utiliser l'hypothèse : $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$.
Elle devient

$$f(b) \leqslant \Big(1 - \frac{b-a}{c-a}\Big).f(a) + \frac{b-a}{c-a}.f(c)$$

puis $(c-a).f(b) \leqslant (c-b).f(a) + (b-a).f(c)$ (car $c-a$ est positif).

On regroupe et on reconnaît $\begin{vmatrix} a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$ (développé par rapport à sa seconde ligne).

On a prouvé l'équivalence.

Et vu qu'il y a des variables à introduire à chaque fois, dans un bon ordre, on ne peut pas dire qu'on a raisonné par équivalences...

V∼2) Montrez que si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe.

On prend f convexe, et h convexe aussi et croissante.
On ne va pas utiliser la définition par déterminant pour prouver que $h \circ f$ est convexe.
On va utiliser le critère « pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R}^2 \times [0,\ 1]$,

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$$

On se donne donc a, b et t.
On écrit la convexité de f :

$$f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$$

On compose par g croissante :

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant g((1-t).f(a)+t.f(c))$$

Dans le membre de droite, on pose $a' = f(a)$ et $c' = f(c)$ et on utilise la convexité de g :

$$g((1-t).a' + t.c') \leqslant (1-t).g(a') + t.g(c')$$

On met bout à bout $g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant g((1-t).f(a)+t.f(c))$ et
$g((1-t).f(a)+t.f(c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$

On a obtenu

$$g(f((1-t).a+t.c)) \leqslant (1-t).g(f(a)) + t.g(f(c))$$

c'est ce qu'on voulait.

VI∼0) Montrez que f est convexe si et seulement si pour tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a $f\Big(\dfrac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big) \leqslant \dfrac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$.
pour un sens, vous pourrez considérer le cas particulier $n=2$
pour l'autre sens, vous pourrez faire une récurrence sur n en étudiant $(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n} + t.x_{n+1}$ pour $t = \dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n+\lambda_{n+1}}$.

Appelons petite inégalité celle en
« pour tout triplet $(a,\ c,\ t)$ de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,\ 1]$ on a $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$ ».

Appelons grande inégalité celle en
« pour tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big) \leqslant \frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

»[7].

Passons de la grande à la petite.
On suppose que la grande est vraie pour tout n (c'est ça l'essentiel).
Elle l'est donc pour n gal à 2 (cas particulier).
On a donc « pour tout couplet $(x_1,\ x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ et tout couplet $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^2$:

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big) \leqslant \frac{\lambda_1.f(x_1)+\lambda_2.f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2}$$

Si maintenant on nous donne a, c quelconques et t dans $[0,\ 1]$, on prend $x_1 = a$, $x_2 = b$, $\lambda_1 = 1-t$ et $\lambda_2 = t$ (positifs).
L'hypothèse devient

$$f((1-t).a+t.c) = f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\lambda_2.x_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big) \leqslant \frac{\lambda_1.f(x_1)+\lambda_2.f(x_2)}{\lambda_1+\lambda_2} = (1-t).f(a)+t.f(c)$$

C'est la petite inégalité de convexité !

Passons de la petite à la grande.
On suppose qu'on pourra utiliser la formule $f((1-t).a+t.c) \leqslant (1-t).f(a)+t.f(c)$ autant de fois qu'on veut avec t entre 0 et 1.
On note P_n la propriété pour tout n uplet $(x_1, \dots x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et tout n-uplet $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ de $(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big) \leqslant \frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$

que l'on veut établir pour tout n.
On va le faire par récurrence sur n. Pour n gal à 1, c'est évidemment vrai.
Pour n égal à 2, on reconnaît la petite inégalité de convexité prise en hypothèse, mais on n'en pas pas besoin.

On se donne n, on suppose P_n vraie, et on veut prouver P_{n+1}.
On prend donc $n+1$ réels de x_1 à x_{n+1} et $n+1$ pondérations positives de λ_1 à λ_{n+1}.
On veut prouver

$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big) \leqslant \frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_{n+1}.f(x_{n+1})}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}$$

7. je ferme les guillemets ouverts deux lignes plus haut

quitte à utiliser
$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$
et la petite inégalité de convexité.
Comme suggéré, on calcule $(1-t).\dfrac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}$ pour $t=\dfrac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n+\lambda_{n+1}}$.
On trouve
$$(1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}=\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}$$
Et surtout, t est entre 0 et 1 (sinon, on ne peut rien faire !).
La petite inégalité de convexité donne donc
$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)=f\Big((1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}\Big)\leqslant(1-t).f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big)+t.f(x_{n+1})$$
Mais l'hypothèse de rang n donne
$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}$$
On multiplie par $(1-t)$ (positif), on ajoute le terme au bout :
$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)=f\Big((1-t).\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_n.x_n}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.x_{n+1}\Big)\leqslant(1-t).\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_n}+t.f(x_{n+1})$$
On remplace t par sa valeur :
$$f\Big(\frac{\lambda_1.x_1+\ldots+\lambda_{n+1}.x_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}\Big)\leqslant\frac{\lambda_1.f(x_1)+\ldots+\lambda_n.f(x_n)}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}+\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n+1}}.f(x_{n+1})$$
C'est exactement ce qu'on voulait au rang $n+1$.
La récurrence s'achève.

VI∼1) Déduisez pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout n uplet $(x_1,\ldots x_n)$: $\exp\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\dfrac{e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}}{n}$.

La fonction exponentielle est convexe (on l'a prouvé par dérivée seconde).
On peut donc lui appliquer la grande inégalité de convexité. Mais pourquoi n'y a-t-il pas de λ_k dans la formule attendue $\exp\left(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right)\leqslant\dfrac{e^{x_1}+\ldots+e^{x_n}}{n}$? Simplement parce qu'on a pris les λ_k tous égaux à 1 (positifs, oui !).
Et on a donc bien $f\Big(\dfrac{x_1+\ldots+x_n}{n}\Big)\leqslant\dfrac{f(x_1)+\ldots+f(x_n)}{n}$, avec $f=\exp$.

VI∼2) Déduisez pour tout n et tout n uplet de réels strictement positifs $(a_1,\ldots a_n)$: $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$.

On nous donne des a_i strictement positifs ? Oui. Ce sont eux qui sont donnés.
Alors on pose $x_i=\ln(a_i)$ pour tout i (oui, c'est dans ce sens, on nous donne les a_i, on définit les x_i).

La formule devient $\exp\left(\dfrac{\ln(a_1)+\ldots+\ln(a_n)}{n}\right)\leqslant\dfrac{e^{\ln(a_1)}+\ldots+e^{\ln(a_n)}}{n}$.

Par propriété du logarithme, on trouve bien $(e^{\ln(a_1\ldots a_n)})^{1/n}\leqslant\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ (comparaison des moyennes).

Dans la grande majorité des copies d'élèves, les variables sont mal quantifies.
On ne tape pas sur les hypothèses en introduisant les variables dans le mauvais ordre.
Poser $a_i=e^{x_i}$ revient à disposer des x_i et à définir les a_i alors que les a_i sont en $\forall$ dans l'énoncé.
D'ailleurs, si au lieu de dire « a_i donné, on pose $x_i=\ln(a_i)$ », on part de x_i et on pose $a_i=e^{x_i}$, qu'est ce qui assure que les $a_i$sont bien quelconques ?

VI∼3) Montrez pour f convexe et g continue : $f\Big(\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt\Big)\leqslant\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(g(t)).dt$ *(inégalité de Jensen)*.

On veut établir $f\Big(\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt\Big)\leqslant\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(g(t)).dt$ avec g continue et f convexe.

Déjà, on observe que f est continue car convexe. Les composées sont continues. Les intégrales existent.
Et quel rapport avec la convexité ? Des sommes ? Oui ! De Riemann.

$\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b f(g(t)).dt$ est la limite de $\dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(g\Big(a+k.\dfrac{b-a}{n}\Big)\Big)$ quand n tend vers l'infini.
$\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt$ est la limite de $\dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(a+k.\dfrac{b-a}{n}\Big)$ quand n tend vers l'infini.
$f\Big(\dfrac{1}{b-a}.\displaystyle\int_a^b g(t).dt\Big)$ est la limite de $f\Big(\dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(a+k.\dfrac{b-a}{n}\Big)\Big)$ (continuité de f).

Or, justement, pour tout n, on a

$$f\Big(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(g\Big(a+k.\frac{b-a}{n}\Big)\Big)$$

(c'est avec des λ_k égaux à 1 et des x_k égaux à $g\Big(a+k.\dfrac{b-a}{n}\Big)$).
Il suffit de passer à la limite(s) *(on sait qu'elles existent)* : l'image de l'intégrale est plus petit que l'intégrale des images.

Il suffisait pour cette question de penser aux sommes de Riemann et de passer à la limite...

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24

Factorielle

L'objectif est de montrer que la fonction factorielle de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ est logarithmiquement convexe (c'est à dire que son logarithme est convexe), *puis de montrer qu'il existe une unique application qui généralise la factorielle à $\mathbb{R}^+$ et reste logarithmiquement convexe. On l'appelle fonction* Γ (gamma).

VII∼0) Montrez, pour trois entiers naturels a, b et c vérifiant $a \leqslant b \leqslant c$: $\Big(\dfrac{b!}{a!}\Big)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \Big(\dfrac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$, déduisez que $n \longmapsto \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

On se donne trois entiers a, b et c avec $a < b < c$. On doit montrer que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ est positif.
On calcule ce déterminant en soustrayant déjà la deuxième colonne aux autres (comme a est le plus petit, $\ln(b!/a!)$ est cohérent à envisager).

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(a!) & \ln(b!) & \ln(c!) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b & c-b \\ \ln(a!/b!) & \ln(b!) & \ln(c!/b!) \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a-b & c-b \\ \ln(a!/b!) & \ln(c!/b!) \end{vmatrix}$$

Ce nombre est $(b-a).\ln\Big(\dfrac{c!}{b!}\Big) - (c-b).\ln\Big(\dfrac{b!}{a!}\Big)$ et même

$$\ln\Big(\Big(\frac{c!}{b!}\Big)^{b-a}\Big) - \ln\Big(\Big(\frac{b!}{a!}\Big)^{c-b}\Big)$$

Mais qui est $\dfrac{b!}{a!}$? C'est $(a+1).(a+2)\dots(b)$. On a $b-a$ termes, tous plus petits que b.

Mais qui est $\Big(\dfrac{b!}{a!}\Big)^{c-b}$? C'est $\Big((a+1).(a+2)\dots(b)\Big)^{c-b}$. On a $(c-b).(b-a)$ termes, tous plus petits que b.

De même qui est $\dfrac{c!}{b!}$? C'est $(b+1).(b+2)\dots(c)$. On a $c-b$ termes, tous plus grands que b.

Mais qui est $\Big(\dfrac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$? C'est $\Big((b+1).(b+2)\dots(c)\Big)^{c-b}$. On a $(c-b).(b-a)$ termes, tous plus grands que b.

Il y a autant de termes dans $\Big(\dfrac{b!}{a!}\Big)^{c-b}$ que dans $\Big(\dfrac{c!}{b!}\Big)^{b-a}$.
Mais dans l'un : tous les facteurs plus grands UE b, dans l'autre tous les facteurs plus petits que b.

On a donc
$$\left(\frac{b!}{a!}\right)^{c-b} \leqslant b^{(c-b).(b-a)} \leqslant \left(\frac{c!}{b!}\right)^{b-a}$$
On passe au logarithme. Le déterminant est positif...

VIII∼0) Pour x réels strictement positif donné et n entier naturel, on pose $I_n(x) = \dfrac{n^x.n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$.
Montrez : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$.

Chaque produit $I_n(x)$ dépend de deux variables effectivement : n et x.
La relation $I_n(x) = \displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt = n^x.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ doit pouvoir se démontrer par récurrence...
Déjà, on passe de $\displaystyle\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n.t^{x-1}.dt$ à $n^x.\displaystyle\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ par changement de variable $t = n.u$.
On a alors $dt = n.du$ et $t^{x-1} = n^{n-1}.u^{x-1}$. C'est bien un n^x devant.

On va donc ensuite prouver par récurrence sur n (à x fixé) : $\dfrac{I_n(x)}{n^x} = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$ c'est à dire $\dfrac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)} = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$.
Pour n égal à 0, on a bien $\dfrac{1}{x} = \displaystyle\int_0^x u^{x-1}.dx = \left[\frac{u^x}{x}\right]_0^1$ (seule difficulté : on dérive $u \longmapsto u^x$ à x fixé).

On se donne n (et x) et on suppose $\dfrac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)} = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.dx$.
On calcule alors $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx$ par parties :

$(1-u)^{n+1}$	$\hookrightarrow$	$-(n+1).(1-u)^n$
u^{x-1}	$\hookleftarrow$	$\dfrac{u^x}{x}$

Le crochet est nul en $u = 0$ (par u^x avec x strictement positif) et en 1 (par $(1-u)^n$).
Mais qu'a-t-on ? $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = 0 + \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^x.dx$.
On ne retrouve pas l'intégrale précédente ?
Allez, un peu d'initiative : $\displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.u.du$
$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.(1-(1-u)).du$$
$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\left[\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du - \int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.du\right]$$
La relation est de la forme $x.J = (n+1).(I-J)$ avec $I = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$ et $J = \displaystyle\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.du$.
Quitte à faire passer d l'autre côté : $(n+1+x).J = (n+1).I$.
On peut reporter :
$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^x.dx = \frac{n+1}{n+1+x}.\int_0^1 (1-u)^n.u^{x-1}.du$$
Il est temps de remplacer par hypothèse de récurrence :
$$\int_0^1 (1-u)^{n+1}.u^{x-1}.dx = \frac{n+1}{n+1+x}.\frac{n!}{x.(x+1)\dots(x+n)}$$
C'est bien la formule attendue.

Calculez $I_n(3)$ et donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

$$I_n(3) = \frac{n^3.n!}{3.4.\dots(n+3)} = \frac{n^3.n!}{(n+3)!/2} = \frac{n^3.n!}{n!.(n+1).(n+2).(n+3)}.2 = \frac{2.n^3}{(n+1).(n+2).(n+3)}$$
Quand n tend vers l'infini, le numérateur est égal à $2.n^3$ et le dénominateur est équivalent à n^3.
Le quotient est équivalent à 2. Il tend vers 2.

Niveau Terminale (si il y a encore un niveau) : le quotient se comporte comme le quotient de ses termes de plus haut degré.

Simplifiez $I_n(p)$ si p est un entier naturel et donnez sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Que se passe-t-il si x est un entier naturel p : $I_n(p) = \dfrac{n^p.n!}{p.(p+1)\dots(p+n)}$.

Comme p est entier, le dénominateur est à son tour une factorielle ou plutôt un quotient de factorielles : $(n+p).(n+p-1)\dots p = \dfrac{(n+p)!}{(p-1)!}$.

On a donc $I_n(p) = \dfrac{n^p.n!(p-1)!}{(n+p)!}$.

On y trouve un coefficient binomial ?

Mais en quoi ceci va-t-il aider ? Surtout si à la fin on doit obtenir $(p-1)!$ si on en croit les questions suivantes...

Simplifions plutôt

$$\frac{(n+p)!}{n!} = (n+p).(n+p-1)\dots(n+1)$$

On a donc $I_n(p) = \dfrac{n^p}{(n+1).(n+2)\dots(n+p)}.(p-1)!$.

Montrez que chaque application $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

Pour montrer la convexité de $x \longmapsto \ln(I_n(x))$, on développer cette application :
$\ln(I_n) = (x \longmapsto x.\ln(n) + \ln(n!) - \ln(x) - \ln(x+1) - \dots \ln(x+n))$.

On dérive une fois : $x \longmapsto \ln(n) - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+1} - \dots - \dfrac{1}{x+n}$.

La constante est constante.

Chaque $x \longmapsto \dfrac{1}{x+k}$ est décroissante sur $]0,\ +\infty[$.

La somme est croissante, puisqu'on a un signe moins devant chaque $x \longmapsto \dfrac{1}{x+k}$.

La dérivée est croissante.

L'application est convexe.

IX∼0) | x est un réel strictement positif donné ; montrez : $(t+1)^{x+1} - t^{x+1} \geqslant (x+1).t^x$ pour tout t positif. |

Le réel x est fixé. On doit montrer sur $\mathbb{R}^+$: $(t+1)^{x+1} - t^x \geqslant (1+x).t^x$.

C'est quoi cette formule ? Posons $\varphi = t \longmapsto t^{x+1}$.

On doit prouver $\varphi(t+1) - \varphi(t) \geqslant \varphi'(t)$.

Et si on faisait appel au théorème des accroissements finis ?

Il existe c entre $t$et $t+1$ vérifiant $\dfrac{\varphi(t+1)-\varphi(t)}{t+1-t} = \varphi'(c) = (x+1).c^x$.

Comme c est plus grand que t (et x positif), on a

$$\varphi(t+1) - \varphi(t) = \frac{\varphi(t+1)-\varphi(t)}{t+1-t} = \varphi'(c) = (x+1).c^x \geqslant (x+1).t^x$$

On pouvait aussi écrire une formule de Taylor : $\varphi(t+1) = \varphi(t) + 1.\varphi'(t) +$ reste avec un reste positif à cause du signe de la dérivée seconde.

On pouvait aussi écrire $\dfrac{(t+1)^{x+1} - t^{x+1}}{x+1} = \left[\dfrac{u^{x+1}}{x+1}\right]_{u=t}^{u=t+1} = \displaystyle\int_t^{t+1} u^x.du \geqslant \int_t^{t+1} t^x.du = t^x$.

De la belle analyse. Digne de la belle algèbre.

IX∼1) | Déduisez : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$ pour tout entier naturel n. Déduisez que $(I_n(x))_n$ est une suite croissante. |

On doit prouver ensuite $(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+1+x)$. On se dit que ça ressemble au résultat précédent pour $t = n$ (positif).

On a prouvé $(n+1)^{x+1} - n^{x+1} \geqslant (x+1).n^x$.

On fait passer de l'autre côté : $(n+1)^{x+1} \geqslant n^{x+1} + (x+1).n^x$

$$(n+1)^{x+1} \geqslant n.n^x + (x+1).n^x$$
$$(n+1)^{x+1} \geqslant n^x.(n+x+1)$$

On voit le rapport avec la croissance de $n \longmapsto I_n(x)$?
Calculons le quotient (termes positifs) :

$$\frac{I_{n+1}(x)}{I_n(x)} = \frac{(n+1)^x.(n+1)!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}.\frac{1}{\dfrac{n^x.n!!}{x.(x+1)\dots(x+n)}} = \frac{(n+1)^x}{n^x}.\frac{(n+1)}{(n+x+1)} = \frac{(n+1)^{x+1}}{n^x.(n+x+1)}$$

Quelle chance, la question précédente donne que ce terme est plus grand que 1.

Chaque suite $(I_n(x))_n$ est croissante.

Si on la majore, elle converge
Pour x donné, on majore $I_n(x)$ par $I_n([x]+1)$.
On majore $I_n([x]+1)$ par sa limite (car pour l'entier $[x]+1$, la convergence est acquise, vers la factorielle).

IX∼2) Montrez pour tout x que la suite $(I_n(x))$ converge. *On pose alors* $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} I_n(x)$.

X∼0) Exprimez $I_n(x+1)$ à l'aide de $I_{n+1}(x)$. Déduisez : $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.

Pour x et n donnés, on a $I_n(x+1) = \dfrac{n^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}$ et $I_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)^x.(n+1)!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}$.

On écrit $I_{n+1}(x) = \dfrac{(n+1)^{x+1}.n!}{x.(x+1)\dots(x+n+1)}$ en décalant un terme de la factorielle.

On poursuit : $I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}.\dfrac{(n+1)^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)} = \dfrac{1}{x}.\Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^{x+1}.\dfrac{n^{x+1}.n!}{(x+1)\dots(x+n+1)}$.

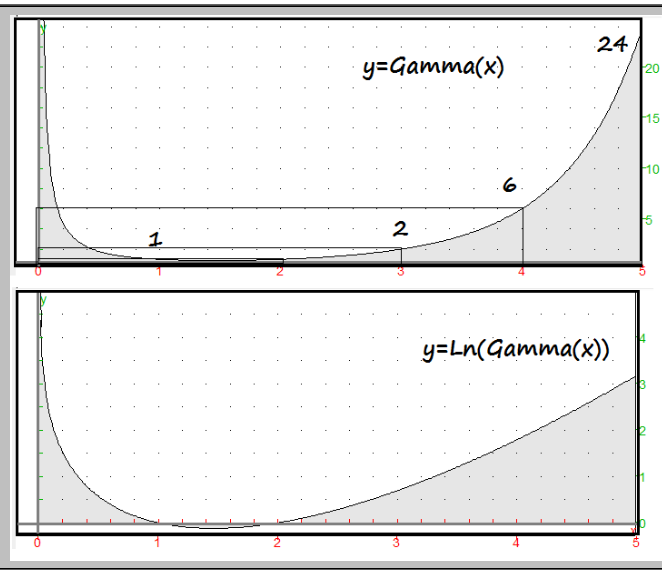
On a donc $I_{n+1}(x) = \dfrac{1}{x}.\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{x+1}.I_n(x+1)$.

Il est temps de faire tendre n vers l'infini ; les limites existent : $\Gamma(x) = \dfrac{1}{x}.\Gamma(x+1)$.
On a donc la formule $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$.
C'est de la forme $(x+1-1)! = x.(x-1)!$.

Montrez que $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$.

Déduisez que Γ est convexe.

On a donc montré que Γ est une fonction logarithmiquement convexe, qui généralise la factorielle à $]0,\ +\infty[$ (en fait, historiquement, à cause de ce sale Gauss, il perdure un décalage depuis toujours : $\Gamma(p) = (p-1)!$).



Chaque $x \longmapsto \ln(I_n(x))$ est convexe.

On se donne trois réels positifs ordonnés : $a < b < c$. On a $\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(I_n(a)) & \ln(I_n(b)) & \ln(I_n(c)) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$.

On fait tendre n vers l'infini. Chaque terme de la ligne du milieu converge (convergence de chaque $I_n(x)$ vers $\Gamma(x)$, et le logarithme est convexe) :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ \ln(\Gamma(a)) & \ln(\Gamma(b)) & \ln(\Gamma(c)) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \geqslant 0$$

On reconnaît la convexité de $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$.

Une limite d'applications convexes est convexe à son tour.

On sait passer de la convexité de $x \longmapsto \ln(\Gamma(x))$?
On compose à gauche par exp.
Et exp est convexe, croissante.
On a prouvé « si f est convexe, et h convexe et croissante alors $h \circ f$ est convexe ».
Bref, si $\ln(\Gamma)$ est convexe, alors Γ est convexe.

Lycee Charlemagne	MPSI2	Annee 2023/24
.	Unicité	.

Passons à : « c'est la seule généralisation de la factorielle ».

XI∼0) *Soit f une application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(1) = 1$, $f(x+1) = x.f(x)$ pour tout x et f est logarithmiquement convexe.* Calculez $f(n)$ pour tout entier naturel n.

XI∼1) *On pose $g = \ln(f)$.* Montrez pour tout x et tout n : $g(x+n) - g(x) - g(n) = \ln(x) + \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)$.

XI∼2) Montrez pour k entier, plus grand que x : $\frac{g(n)-g(n-1)}{1} \leqslant \frac{g(x+n)-g(n)}{x} \leqslant \frac{g(n+k)-g(n)}{k}$.

XI∼3) Déduisez : $\frac{g(x+n)-g(x)}{x} - \ln(n) \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$.

XI∼4) Déduisez $g(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(x.\ln(n) - \ln(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln(I_n(x))$.

◃65▹ Déterminez le noyau de $f \longmapsto f' - f$ de $C^\infty(\mathbb{R})$ dans lui même.
Déterminez le noyau de $P \longmapsto P' - P$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui même.

Si on résout $f' - f = 0$, on trouve que f est un multiple de l'exponentielle (et pas de e^x, on est d'accord !).
Le noyau de $f \longmapsto f' - f$ est $Vect(\exp)$.
Il est de dimension 1.

Mais avec des polynômes, on ne peut avoir $P' = P$ (degré), sauf avec $P = 0$.
Le noyau est réduit au vecteur nul. Et il est de dimension 0.

Passons à l'idée géniale de l'algèbre linéaire pour les suites récurrentes et/ou les équations différentielles linéaires.

L'opérateur $(u_0,\ u_1, \ldots u_n, \ldots) \longmapsto (u_1,\ u_2, \ldots u_{n+1}, \ldots)$ est linéaire. C'est juste celui qui décale tout le monde d'un cran.

Son carré, c'est $(u_0,\ u_1, \ldots u_n, \ldots) \longmapsto (u_2,\ u_3, \ldots u_{n+2}, \ldots)$.
Tout élève soucieux de la rigueur écrire bien $(\sigma(u))_n = u_{n+1}$ pour tout n, et n'écrira jamais $\sigma(u_n) = u_{n+1}$ qui n'a aucun sens.

> Vous me direz « on se comprend, pas grave ».
> Je vous dirai que ce n'est pas une raison pour mal parler et écorcher les mathématiques.
> C'est aussi moche que d'écrire $(f(x))'$. On se comprend dans les bas-fonds, mais ça ne veut rien dire.

Le noyau $Ker(\sigma - a.Id)$ est formé des suites vérifiant pour tout n $u_{n+1} = a.u_n$. Ce sont les suites géométriques de raison a.

Le noyau $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + a.b.Id)$ est formé des suites vérifiant pour tout n $u_{n+2} - (a+b).u_{n+1} + (a.b).u_n = 0$.
Avec $a = b = 1$ et $a.b = -1$ c'est la suite de Fibonacci.

Notre preuve sur les noyau dit que toute suite du gros noyau est la somme de deux suites des petits noyaux.

Toute solution de $\forall n,\ u_{n+2} = (a+b).u_{n+1} - (a.b).u_n$ est combinaison linéaire de deux suites géométriques d raisons a et b.

Toute la théorie et même la pratique des suites récurrentes linéaires racontée par des sommes de noyaux.

Pour les équations différentielles, σ est l'opérateur $f \longmapsto f'$ (avec justement $f'(x)$ qui a un sens, mais pas $(f(x))'$ comme le monde est petit.

◁66▷ Montrez que $\varphi = A \longmapsto a_1^1 + 2.a_1^2 + 3.a_1^3 + a_2^2 + 2.a_2^3 + a_3^3$ est une forme linéaire sur $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$. Combien de matrices ont pour image 1 ? Donnez U vérifiant $\forall A,\ \varphi(A) = Tr(A.^tU)$.
On pose alors $\psi = A \longmapsto Tr(A.U)$ et $\zeta = A \longmapsto Tr(A.U^2)$.
Donnez la dimension de $Ker(\varphi) \cap Ker(\psi) \cap Ker(\zeta)$.

On pourra dire que la linéarité est évidente.
Ou la démontrer avec deux matrices A et B.
Ou permuter l'ordre des questions : $\varphi(A) = Tr(A.^tU)$ donc $\varphi(\alpha.A + \beta.B) = Tr((\alpha.A + \beta.B).^tU)$

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha.A + \beta.B) &= Tr(\alpha.A.^tU + \beta.B.^tU)\\ \varphi(\alpha.A + \beta.B) &= \alpha.Tr(A.^tU) + \beta.Tr(B.^tU)\\ \varphi(\alpha.A + \beta.B) &= \alpha.\varphi(A) + \beta.\varphi(B)\end{aligned}$$

On n'oublie pas non plus de démontrer que φ va de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ dans $(\mathbb{R}, +, .)$.

On a $a_1^1 + 2.a_1^2 + 3.a_1^3 + a_2^2 + 2.a_2^3 + a_3^3 = Tr(\begin{pmatrix} a_1^1 + 2.a_1^2 + 3.a_1^3 & & \\ & a_2^2 + 2.a_2^3 & \\ & & a_3^3 \end{pmatrix}) = Tr(\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix})$.

Le noyau de φ est de dimension 8 puisque son image est de dimension 1.

Explictement le noyau est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & -a_1^1 - 2.a_1^2 - \ldots - 2.a_2^3 \end{pmatrix}$ avec huit coefficients à choisir comme on veut.

L'équation $\varphi(A) = 1$ a une infinité de solutions. Une solution particulière comme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ à laquelle on peut ajouter des solutions du noyau comme $\alpha.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Chacun des trois noyaux $Ker(\varphi)$, $Ker(\psi)$ et $Ker(\zeta)$ est de dimension 8 (dans un espace de dimension 9) et fait perdre une dimension.
Sauf cas de dégénérescence où l'une des trois formes $A \longmapsto Tr(A.^tU)$, $A \longmapsto Tr(A.U)$ $A \longmapsto Tr(A.U^2)$ serait combinaison des autres, on dit que l'intersection est de dimension $9 - 3$ ce qui fait 6.

◁67▷ ♡ Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez : $Ker(f^0) \subset Ker(f) \subset Ker(f^2) \subset Ker(f^3) \ldots$.
♡ Déterminez la liste de ces noyaux si f est l'endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dont la matrice sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Calculez en passant le trace de chaque puissance de cette matrice.
♡ Même question avec celui dont la matrice est la transposée de la précédente : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
♡ Même question avec celui dont la matrice est $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
♣ Construisez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^{10}, +, .)$ dont la liste des dimensions des noyaux itérés $(Ker(f^k))$ soit $0 - 3 - 5 - 7 - 8 - 8 - 8 \ldots$. Donnez alors la liste des dimensions des images itérées *(le mieux sera de donner la matrice de votre endomorphisme sur la base canonique)*.
♡ Donnez un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$, $Ker(f^2) = \{x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \mid y + z = 0\}$ et $Ker(f^3) = \mathbb{R}^3$.
♠ Donnez un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$, $Ker(f^3) = \{x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k} \mid y + z = 0\}$ et $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}$.

A faire.

◁68▷ Soit f un endomorphisme de $(E,+,.)$. Montrez l'équivalence entre $Im(f) = Im(f^2)$ et $Im(f) + Ker(f) = E$.

C'est dans le cours.
$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $Im(f) = Im(f^2)$.
$\boxed{\subset}$ On a déjà $Im(f) + Ker(f) \subset E$, ça c'est sûr.
$\boxed{\supset}$ On se donne $\overrightarrow{a}$ dans E. Comment utiliser l'hypothèse ?
On regarde $f(\overrightarrow{a})$. C'est un vecteur de $Im(f)$.
Il est donc dans $Im(f^2)$.
Il s'écrit $f^2(\overrightarrow{b})$ pour au moins un vecteur $\overrightarrow{b}$ de E.
On écrit $f(\overrightarrow{a}) = f(f(\overrightarrow{b}))$ puis $f(\overrightarrow{a} - f(\overrightarrow{b})) = \overrightarrow{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{a} - f(\overrightarrow{b})$ est dans $Ker(f)$! Génial.
$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a} - f(\overrightarrow{b})) + f(\overrightarrow{b})$
Mon premier est dans $Ker(f)$ et mon second dans $Im(f)$. C'est ce que l'on voulait.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $E = Ker(f) + Im(f)$.
$\boxed{\subset}$ On a déjà $Im(f^2) \subset Im(f)$.
$\boxed{\supset}$ Pour l'autre sens, on prend $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f)$. On l'écrit $f(\overrightarrow{a})$.
On décompose alors ce $\overrightarrow{a}$ de E comme somme d'un $\overrightarrow{k}$ de $Ker(f)$ et d'un $f(\overrightarrow{c})$ de $Im(f)$.
On a alors $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{k} + f(\overrightarrow{c})) = f(\overrightarrow{k}) + f^2(\overrightarrow{c}) = f^2(\overrightarrow{c})$.
Notre $\overrightarrow{b}$ de $Im(f)$ est dans $Im(f^2)$. C'est ce que l'on voulait.

◁69▷ ♡ Soit f un endomorphisme de $(E,+,.)$. Montrez l'équivalence entre $Im(f) = Im(f^3)$ et $Im(f) = Im(f^2)$.

A faire.

◁70▷ Montrez que $P(X) \longmapsto (X-2).P'(X) - P(2).(X^2 - X + 1)$ est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$. Calculez sa trace et son déterminant en donnant sa matrice sur la base canonique de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$. Auriez vous obtenu la même trace et le même déterminant en travaillant sur une autre base ?

L'existence et la linéarité de $P(X) \longmapsto (X-2).P'(X) - P(2).(X^2 - X + 1)$ étant acquises (linéarité de la dérivation, distributivité multiplicative), on montre le caractère « endo » en calculant les images de quatre vecteurs de base... Si chacun a son image dans $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$ il en sera de même de leurs combinaisons...

1	$\longmapsto -X^2 + X - 1$	$\begin{pmatrix} -1 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ -1 & . & . & . \\ 0 & . & . & . \end{pmatrix}$
X	$\longmapsto -2.X^2 + 3.X - 4$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & . & . \\ 1 & 3 & . & . \\ -1 & -2 & . & . \\ 0 & 0 & . & . \end{pmatrix}$
X^2	$\longmapsto -2.X^2 - 4$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & . \\ 1 & 3 & 0 & . \\ -1 & -2 & -2 & . \\ 0 & 0 & 0 & . \end{pmatrix}$
X^3	$\longmapsto 3.X^3 - 14.X^2 + 8.X - 8$	$\begin{pmatrix} -1 & -4 & -4 & -8 \\ 1 & 3 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & -2 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

La trace vaut 3, et le déterminant sa calcule.
Ils ne dépendant pas de la base choisie. Sur une autre base, la matrice reste semblable à celle ci...

◁71▷ On note E l'espace vectoriel engendré par les $c^k.s^{5-k}$ pour k de 0 à 5 *(on pose comme toujours $c = \cos$ et $s = \sin$)*. Donnez sa dimension.
Montrez que la dérivation est un endomorphisme de $(E,+,.)$. Donnez son noyau et son image. Calculez sa trace et son déterminant après avoir complété sa matrice

$$\begin{array}{cccccc|c}
0 & -1 & 0 & & & 0 & (s^5)^* \\
5 & 0 & & & & 0 & (c.s^4)^* \\
0 & & 0 & & & & (c^2.s^3)^* \\
0 & & 3 & & & & (c^3.s^2)^* \\
0 & 0 & & & & & (c^4.s)^* \\
0 & 0 & & 0 & 1 & 0 & (c^5)^* \\
f(s^5) & f(c.s^4) & f(c^2.s^3) & f(c^3.s^2) & f(c^4.s) & f(c^5) &
\end{array}$$

L'espace est engendré par six fonctions.
Sa dimension ne peut pas dépasser 6.
Si de plus les $c^k.s^{5-k}$sont indépendants, la dimension sera de 6.

On se donne six réels α_i pour i de 0 à 5, on suppose $\alpha_0.s^5 + \alpha_1.s^4.c + \ldots + \alpha_5.c^5 = 0$ (fonction nulle).
Cette affirmation « fonction nulle », c'est « pour tout x, le résultat $\alpha_0.\sin^5(x) + \alpha_1.\sin^4(x).\cos(x) + \ldots + \alpha_5.\cos^5(x)$ est nul ».
On regarde en $x = 0$ et en $x = \dfrac{\pi}{2}$. On trouve $\alpha_0 = \alpha_5 = 0$.
On recommence en d'autres valeurs, et c'est bon, les α_k sont tous nuls.

Bref, famille libre, donc base de ce qu'elle engendre, donc dimension 6.

On veut que la dérivation soit linéaire, de E dans lui même.
Que la dérivation soit linéaire, c'est sûr.
Qu'elle aille de E dans lui même, regardons.

> L'élève qui pense à regarder est scientifique. celui qui a raté cette partie de la question mérite juste la honte.

L'élève bourrin mais méticuleux prend $\alpha_0.s^5 + \alpha_1.s^4.c + \ldots + \alpha_5.c^5$ (élément générique de E) et la dérive. Il regroupe les termes et voit si on est resté dans E.

L'élève avec un cerveau ne prend pas un élément générique. Il prend les six éléments de la base, et vérifie pour chacun.
Si c'est vrai pour chacun, alors par linéarité, c'est vrai pour tout.

Et toc, c'est ça être matheux !

On regroupe même dans un tableau

s^5	$\longrightarrow$	$5.s^4.c$
$s^4.c$	$\longrightarrow$	$(4.s^3.c).c - (s).s^4$
$s^3.c^2$	$\longrightarrow$	$(3.s^2.c).c^2 - (2.c.s).s^3$
$s^2.c^3$	$\longrightarrow$	$(2.s.c).c^3 - (3.c^2.s).s^2$
$s.c^4$	$\longrightarrow$	$(c).c^4 - (4.c^3.s).s$
c^5	$\longrightarrow$	$-(5.c^4.s)$

Toutes les images obtenues sont des combinaisons des vecteurs de base. on est resté dans E.

Oui, le matheux fait des tableaux pour raconter ses résultats. Et le physicien fait des graphiques, avec des barres d'erreur.

Mais il y a mieux :

s^5	$\longrightarrow$		$5.s^4.c$				
$s^4.c$	$\longrightarrow$	$-(s).s^4$		$(4.s^3.c).c$			
$s^3.c^2$	$\longrightarrow$		$-(2.c.s).s^4$		$(3.s^2.c).c^2$		
$s^2.c^3$	$\longrightarrow$			$-(3.c^2.s).s$		$(2.s.c).c^3$	
$s.c^4$	$\longrightarrow$				$-(4.c^3.s).s$		$(c).c^4$
c^5	$\longrightarrow$					$-(5.c^4.s)$	

C'est encore mieux ainsi, non ?

Et la matrice qui eprime en colonne sur la base de E une par une les images des vecteurs de E ?

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

◃72▹ **Rappel des règles :** sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4et 5. Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

							>	
∧								∧
	>	**3**		**1**	<	**2**		
∨		∧		∧				
			>	**2**	>	**1**		**3**
		∨						
1						**4**		
					>		>	

et

5			>					
2	>	**1**			>			
∧								
					<		>	
		∧						∧
	<	**5**					<	**4**
∨								
	<	**4**		**5**			<	**3**

3		1		4		5	>	2
∧								∧
5	>	**3**		**1**	<	**2**		4
∨		∧		∧				
4		5	>	**2**	>	**1**		**3**
		∨						
1		2		3		**4**		5
2		4		5	>	3	>	1

et

5		3	>	1		4		2
2	>	**1**		4	>	3		5
∧								
4		2		3	<	5	>	1
		∧						∧
3	<	**5**		2		1	<	**4**
∨								
1	<	**4**		**5**		2	<	**3**

◃73▹ On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Écrivez un script `Python` qui s'en charge.

Finalement, on a un dé à treize faces équiprobables, c'est comme ça qu'il faut le voir.

```
def tirage() :
....L = [1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6]
....choix = randrange(13)
....return L[choix]
```

On peut faire tenir en une seule instruction `return([1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 6][randrange(13)])` si on y tient.

◃74▹ Construisez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k})$, $f(\overrightarrow{i}) = \overrightarrow{i}-2.\overrightarrow{j}+\overrightarrow{k}$ et $Ker(f) \subset Im(f)$ *(vous pouvez construire sa matrice sur la base canonique, je vous ai déjà offert une colonne...)*. Calculez alors $rg(f)$ et $rg(f^2)$.

On détermine ce qu'on peut de la matrice de f de la base canonique dans elle même. On connait la première colonne.
Et on sait aussi $f(\overrightarrow{k}) = f(\overrightarrow{i})+f(\overrightarrow{j})$, donc la troisième colonne est somme des deux premières.

A ce stade, on a $\begin{pmatrix} 1 & a & 1+a \\ -2 & b & b-2 \\ 1 & c & 1+c \end{pmatrix}$.

De plus, le vecteur $\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ doit être dans $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix})$ ou encore $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -2 & b & 1 \\ 1 & c & -1 \end{vmatrix} = 0$.

Il y a beaucoup de solutions. Comme $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Le rang de f vaut 2 car le noyau est de dimension 1 *(au moins)*, alors qu'on a dans l'image deux colonnes indépendantes.

On s'interroge sur le rang de f^2 *(au seul sens possible de $f \circ f$)*.
Il est inférieur ou égal à 2 car le rang ne peut que diminuer par composition.

Mais la relation $Ker(f) \subset Im(f)$ fait qu'il existe des au moins un vecteur dont l'image par f est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Par f^2, ce vecteur aura une image nulle. Et il est indépendant de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui a déjà une image nulle par f.

$Ker(f)$ est de dimension 1 et $Ker(f^2)$ est au moins de dimension 2
(sur mon exemple : $Vect(\overrightarrow{i}+\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{j}) \subset Ker(f)$).
Le rang de f est inférieur ou égal à 1.
Mais dans M^2 il y a au moins un coefficient non nul.
Le rang de f ne vaut pas 0. Il vaut donc 1 exactement.

◃75▹ On note T_n l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n de trace nulle. On note S_n l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n symétriques. Quelle est la dimension de $S_n + T_n$?
Pour quelles valeurs de n et p existe-t-il un isomorphisme entre S_n et T_p ?

◃76▹ Donnez un endomorphisme f de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ vérifiant $Ker(f) \subset Im(f)$ et qui ne soit pas un automorphisme (quelle sera alors la dimension de $Ker(f)$ et la dimension de $Im(f)$?).

On peut même prendre $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$.

◃77▹ ♡ On pose $M = \begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$
Déterminez $Im(M)$, $Ker(M)$, $Ker(M) \cap Im(M)$, $Ker(M^2)$,$Im(M^2)$, $Ker(M^2) \cap Im(M^2)$ (notations abusives pour $Ker(U \longmapsto M.U)$ et autres).
Explicitez la suite $(\dim(Ker(M^n)))_{n \geqslant 0}$.

$\begin{pmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$

On va repérer les vecteurs de la base canonique juste par leur indice de 1 à 8 .

$Ker(M)$	$Im(M)$	$Ker(M) \cap Im(M)$	$rg(M)$
[1, 2]	[1, 2, 3, 4, 5+7, 6+8]	[1, 2]	6
$Ker(M^2)$	$Im(M^2)$	$Ker(M^2) \cap Im(M^2)$	$rg(M^2)$
[1, 2, 3, 4]	[1, 2, 3+5+7, 4+6+8]	[1, 2]	4
$Ker(M^3)$	$Im(M^3)$	$Ker(M^3) \cap Im(M^3)$	$rg(M^3)$
[1, 2, 3, 4, 5, 6]	[1+3+5+7, 2+4+6+8]	[ ]	2

◃78▹ On note E_i^k la matrice avec des zéros partout, sauf un 1 en ligne i et colonne j. Montrez que $Vect(E_i^k \mid i < k)$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R}), +, .)$ formé de matrices toutes nilpotentes.

On a par exemple $E_1^3 = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.
Que les matrices considérées fassent un espace vectoriel, rien de plus normal, c'est la définition.
Reste à montrer qu'elles sont toutes nilpotentes.

En dimension 4, ce sont des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0&a&b&c \\ 0&0&d&e \\ 0&0&0&f \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$.

Les puissances d'une telle matrice donnent

$\begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&a&b&c \\ 0&0&d&e \\ 0&0&0&f \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&b'&c' \\ 0&0&0&e' \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&c'' \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$

On note

nom		exemple
T_0	l'espace $Vect(E_i^k \mid i \leqslant k)$	$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & b' & c' & d' \\ 0 & 0 & c'' & d'' \\ 0 & 0 & 0 & d''' \end{pmatrix}$
T_1	l'espace $Vect(E_i^k \mid i+1 \leqslant k)$	$\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & d'' \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix}$
T_2	l'espace $Vect(E_i^k \mid i+2 \leqslant k)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & d' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix}$
T_3	l'espace $Vect(E_i^k \mid i+3 \leqslant k)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix}$

et ainsi de suite, en repoussant peu à eu.
Et on montre que le produit d'un élément de T_j par un élément de Tj' est dans $T_{j+j'}$ (on repousse encore plus).

Preuve : Sans rigueur mais pour comprendre : avec T_1 et T_2

$$\begin{pmatrix} 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c' & d' \\ 0 & 0 & 0 & d'' \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 0 & \delta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & b.\delta' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & O \end{pmatrix}$$

Et proprement :
Il suffit de prouver que le produit d'un générateur de T_j par un générateur de $T_{j'}$ est dans $T_{j+j'}$.
On prend E_i^k et $E_{i'}^{k'}$ avec $i+j \leqslant k$ et $i'+j' \leqslant k'$ et on effectue le produit
$E_i^k.E_{i'}^{k'} = 0_{n,n}$ dans le cas le plus général (le 1 tombe sur des 0)
$E_i^k.E_{i'}^{k'} = E_i^{k'}$ si $k = i'$ (une fois le 1 tombe sur un 1).
Mais alors $i+j \leqslant k = i' \leqslant k'-j'$, et on a bien $i+(j+j') \leqslant k'$.

Ceci va entrainer que les carrés des éléments de T_1 sont dans T_2, puis leurs cubes dans T_3 et ainsi de suite.
Un élément de T_1 élevé à la puissance n arrive dans. Et là il ne reste que la matrice nulle.

Tout élément de T_1 est nilpotent d'indice au plus égal à n.

◃79▹ Montrez que toute matrices carrée de taille 3 sur 3 vérifiant $Tr(M) = Tr(M^2) = \det(M) = 0$ est nilpotente.
Montrez que toute matrice carrée de taille 3 sur 3 vérifiant $Tr(M) = Tr(M^2) = Tr(M^3) = 0$ est nilpotente.
On pourra utiliser le théorème de Cayley-Hamilton : toute matrice de taille 3 vérifie $M^3 - Tr(M).M^2 + Tr(Com(M)).M - \det(M) = 0_{3,3}$.

Le sens proposé est ici $Tr(M) = Tr(M^2 = \det(M) = 0 \Rightarrow M^3 = 0_{3,3}$.
On fait cette hypothèse sur les traces et le déterminant.
Et on ajoute la formule de Cayley-Hamilton (qu'on démontre à notre niveau en calculant brutalement avec neuf coefficients).
On a alors $M^3 - 0.M^2 + Min_2(M).M - 0.I_3 = 0_{3,3}$.
Il faut éliminer ce $Min_2(M)$ qui est aussi $Tr(Com(M))$.
Mais si on écrit $M = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$ puis $M^2 = \begin{pmatrix} a^2+a'b+a''c & & \\ & b'^2+a'b+b''c' & \\ & & c''^2+a''c+b''c' \end{pmatrix}$ on a $Tr(M) = a+b'+c'$ et

$$\begin{aligned} Min_2(M) &= (a.b'-a'.b)+(a.c''-a''.c)+(b'.c''-b''.c') \\ &= \tfrac{1}{2}.\Big(Tr(M^2)-(Tr(M))^2\Big) \end{aligned}$$

La relation $Tr(M) = Tr(M^2) = 0$ donne donc $Min_2(M) = 0$.
La relation de Cayley-Hamilton donne in fine : $M^3 - 0.M^2 + 0.M - 0.I_3 = 0$. Et M est nilpotente d'indice 3.

Et si l'hypothèse porte sur trois traces ?
Avec $Tr(M) =$ et $Tr(M^2) = 0$, on a déjà $Min_2(M) = 0$ et la relation de Cayley-Hamilton donne $M^3 - 0.M^2 + 0.M - \det(M).I_3 = 0_{3,3}$.
Passons à la trace : $Tr(M^3) = 3.\det(M)$.

L'hypothèse $Tr(M^3 = 0$ élimine encore : $\det(M)$ est donc nul.
Et en reportant : $M^3 = 0_{3,3}$.

La résultat se généralise en taille n sur n : si $Tr(M^k)$ est nul pour tout k de 1 à n, alors M est nilpotente.

Ce que le professeur cache derrière ces exercices : la trigonalisation.
Sur $\mathbb{C}$, toute matrice se trigonalise (ou triangule).

Question : Prenez M disons de taille 3 sur 3. Calculez son polynôme caractéristique.
Comme on est sur $\mathbb{C}$ et qu'il est de degré 3, il admet trois racines α, β et γ.[a]
On montre alors qu'il existe P inversible et T triangulaire vérifiant $M = P.T.P^{-1}$ avec $T = \begin{pmatrix} \alpha & v & v \\ 0 & \beta & w \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
Si M est diagonalisable, on peut imposer $u = v = w = 0$.

Et quelle est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit nilpotente ? C'est $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
On a alors $M = P.\begin{pmatrix} 0 & v & v \\ 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$, puis $M^2 = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1}$ et $M^2 = P.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.P^{-1} = 0_{3,3}$.

a. l se peut que certaines soient égales entre elles, c'est justement ce qui empêche parfois de diagonaliser

---

◁80▷ Peut on avoir $g \circ f = Id_E$ et pas $g = f^{-1}$? Oui. Prenez pour $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des suites réelles, et pour g l'application qui transforme la suite (u_n) en la suite (u_{n+1}) (vérifiez sa linéarité). Et construisez f linéaire aussi pour avoir $g \circ f(u) = u$ pour toute suite u. Montrez que ni f ni g n'est bijective.

On prend f qui déplace la suite dans l'autre sens, et comble le trou créée :

u	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...
$g(u)$	u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_{n+1}	u_{n+2}	...
$f(u)$	0	u_0	u_1	u_2	...	u_{n-1}	u_n	...

f et g transforment des suites en suites.
De plus, pour u et v données, on a $g(u+v) = g(u + g(v)$ en écrivant pour tout n : $(u+v)_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1}$.
On montre de même $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $g(\alpha.u) = \alpha.g(u)$ et $f(\alpha.u) = \alpha.f(u)$.

On étudie $g \circ f$ et $f \circ g$:

u	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...
$g(u)$	u_1	u_2	u_3	u_4	...	u_{n+1}	u_{n+2}	...
$f(g(u))$	0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...

g a perdu u_0, f n'arrivera pas à le retrouver.
$f \circ g$ n'est pas l'identité.
D'ailleurs, $Ker(g)$ contient la suite $(1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots, 0\ldots)$, cette suite reste dans $Ker(f \circ g)$.
Pour vous convaincre : $f(g((1,\ 0,\ 0,\ 0\ldots,0\ldots)) = f((0,\ 0,\ 0\ldots,0\ldots)) = (0,\ 0,\ 0\ldots,0\ldots)$.

u	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...
$f(u)$	0	u_0	u_1	u_2	...	u_{n-1}	u_n	...
$g(f(u))$	u_0	u_1	u_2	u_3	...	u_n	u_{n+1}	...

Ça marche : $g \circ f = Id_E$.

Résumé :

g surjective	f injective	$g \circ f = Id$ bijective	
g non injective	$Im(f) = \{(a_n) \mid a_0 = 0\}$	$f \circ g$ non surjective	$Im(f \circ g) = \{(a_n) \mid a_0 = 0\}$
$Ker(g) = Vect((1,0,0\ldots)\}$	f non surjective	$f \circ g$ non injective	$Ker(f \circ g) = Vect((1,0,0\ldots)\}$

Mais oui, on n'est pas en dimension finie... On n'a pas de théorème pour flemmard.

◁81▷ Construisez *(en donnant sa matrice sur la base canonique de* $(\mathbb{K}^2, +, .)$*)* un endomorphisme de $(\mathbb{K}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + 3.\overrightarrow{j})$ et de trace nulle *(*$(\mathbb{K}, +, \times)$ *est le corps des entiers de* 0 *à* 6 *pour l'addition et la multiplication modulo* 7*).*

On travaille en dimension 2. On veut une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
On veut une trace nulle : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$.
On veut que $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit dans le noyau : $a + 3.b = 0$ et $c + 3.d = 0$: $\begin{pmatrix} -3.b & b \\ -9.b & 3.b \end{pmatrix}$.
On choisit $b = 1$ (mais tout autre choix de 1 à 6 convient) : $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.
Tiens, elle est nilpotente. Normal : $Im(f) \subset Ker(f)$ (et même égalité).