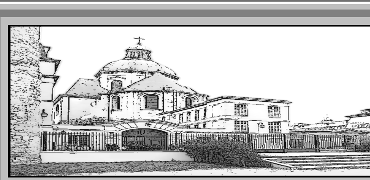
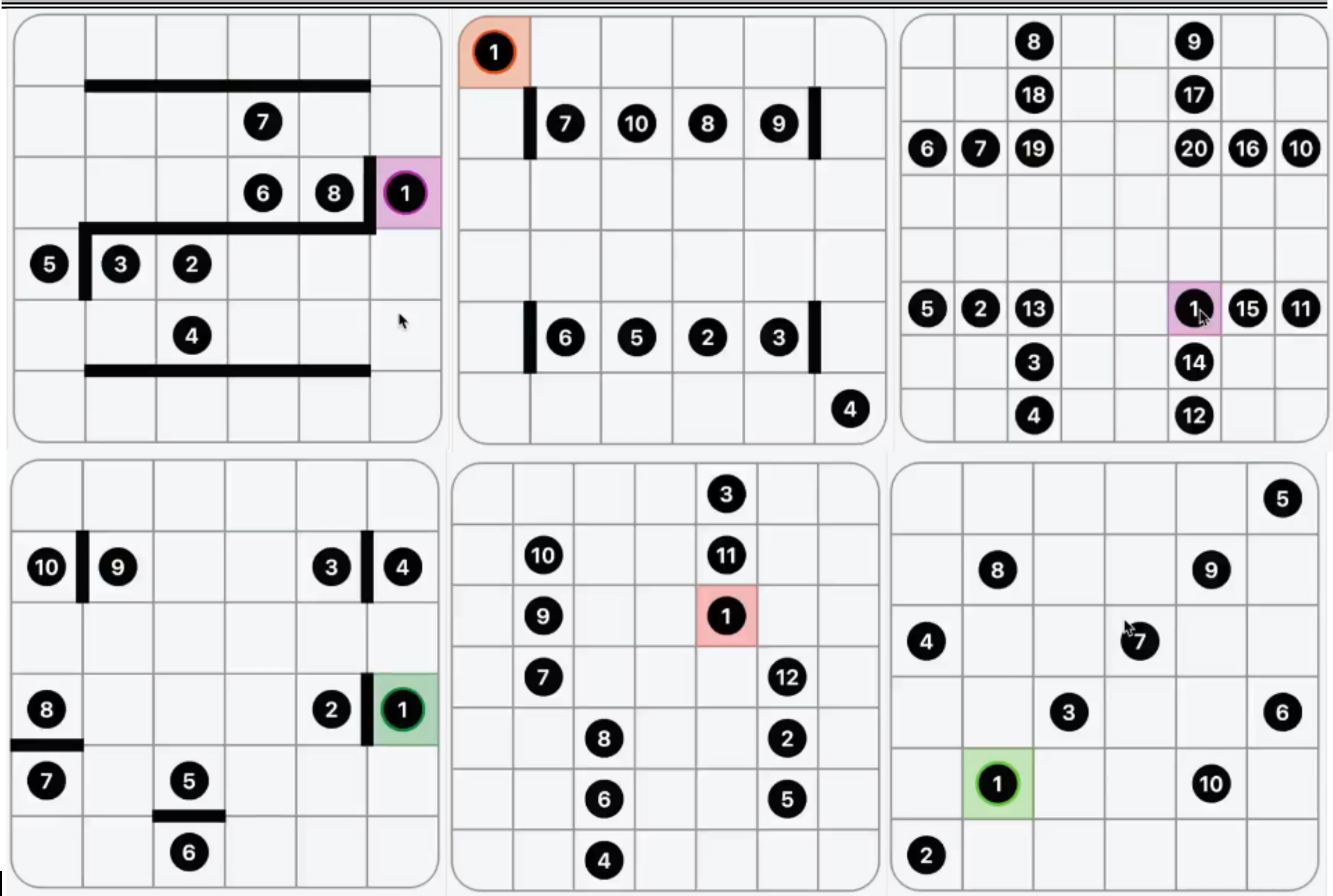
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 16 juin
M.P.S.I.2



2024 2025

TD32



◃0▹

◃1▹ ♡ On rappelle que $(A, B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$. L'application $M \longmapsto (M + {}^tM)/2$ est elle un projecteur orthogonal ? L'application $M \longmapsto^t M$ est elle une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$? Pour quelles matrices A l'application $M \longmapsto A.M$ est elle un endomorphisme de E, un automorphisme de E, une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$?
Qui est le projeté orthogonal d'une matrice M sur l'ensemble des matrices diagonales ?
Rappel : une isométrie est une application linéaire qui préserve les normes et produits scalaires : $\phi(f(\overrightarrow{u}), f(\overrightarrow{v})) = \phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

◃2▹ Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1 + t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}^+$?
Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1 + t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}$?

◃3▹ Complétez $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que ce soit la matrice d'un projecteur de $(\mathbb{R}^2, +, .)$. Diagonalisez la. Déterminez une base de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ *(après avoir vérifié que cet ensemble noté $Com(A)$ est bien un espace vectoriel Com comme commutant).*
Montrez que ce projecteur n'est pas orthogonal pour le produit scalaire usuel *(pour un projecteur, être orthogonal, c'est "noyau orthogonal à image").*

♣ Soit un produit scalaire ϕ pour lequel c'est un projecteur orthogonal. Déterminez alors $|\overrightarrow{i}|_\phi / |\overrightarrow{j}|_\phi$ et $(\widehat{\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j}})_\phi$.

◃4▹ Le prof Hitzan-Pourdèce-Hendrelap-Houbell est nul. Il a écrit dans son cours que $u.v$ avait pour dérivée $u'.v'$. Pour se justifier, il donne un exemple : $u = x \longmapsto e^{-x}$ et $v = x \longmapsto e^{x/2}$. Vérifiez.
Il propose aussi : $u = x \longmapsto e^{(x^2)}$ et $v = x \longmapsto e^x.\sqrt{1 - 2.x}$.

Devinez ce qu'il a proposé pour $u = x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.

Et pour $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^3}$?

◁5▷ On donne $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. On a trouvé $U_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 17/9 \\ -13/18 \end{pmatrix}$.
Déterminez A, U_3 et U_n pour tout n de $\mathbb{N}$. Déterminez aussi A_{-1}.
Placez les points de coordonnées U_n pour n de -1 à 5.
Donnez leurs coordonnées dans le repère $(O,\ \overline{I},\ \overline{J})$.

◁6▷ Un élève prétend que les valeurs propres de la somme de deux projecteurs du plan ne peuvent valoir que 0, 1 et 2.
Il explique : quand on additionne $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit ce qu'on peut obtenir".
En quoi a-t-il tort ?
Donnez suivant a le spectre de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis de $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1+2.a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (voyez vous la somme de deux projecteurs ?).

◁7▷ Pouvez vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ? *(les valeurs propres sont les coefficients diagonaux d'une matrice D diagonale semblable à M)*
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

◁8▷ ♡ On définit : $P \longmapsto P(X) - (X+1).P'(X)$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$. Déterminez son noyau, puis son image.
Même question avec $P \longmapsto 3.P(X) - (X+1).P'(X)$.

◁9▷ ♡ f et g sont linéaires de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f) \cap Kar(g) \subset Ker(\alpha.f + \beta.g)$ et $Im(\alpha.f + \beta.g) \subset Im(f) + Im(g)$.

◁10▷ ♡^{2} Un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ sur la base canonique $(\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$. Quelle est sa matrice sur la base $(\overrightarrow{j},\ 2.\overrightarrow{i},\ 3.\overrightarrow{k})$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} b' & -a' & c' \\ -b & a & -c \\ b'' & -a'' & c'' \end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \\ b & c & a \end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} a & -b & c \\ 2.a' & b' & 2.c' \\ a'' & -b'' & c'' \end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} a & c' & b'' \\ a'' & c & b \\ a' & c'' & b' \end{pmatrix}$?

◁11▷ ♡ Soient $(E, +, .)$,$(F, +, .)$ et $(G, +, .)$ trois espaces vectoriels de dimension finie. On prend f linéaire de E dans F et g de F dans G. En comparant $Im(g \circ f)$ et $Im(g)$ puis en comparant $Ker(g \circ f)$ et $Ker(f)$, montrez : $dim(Im(g \circ f)) \leqslant dim(Im(f))$ et $dim(Im(g \circ f)) \leqslant dim(Im(g))$.

◁12▷ Montrez pour f et g linéaires de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$: $Ker(f) \cap Ker(g) \subset Ker(f+g)$ (montrez qu'en général l'inclusion est stricte).
Montrez $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$ (et montrez qu'en général il n'y a pas égalité).

◁13▷ P est le plan d'équation $x + y + z = 0$. D est la droite d'équation $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Donnez la matrice sur la base canonique de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ de la projection sur P parallèlement à D. Donnez une base sur laquelle cette matrice est diagonale.

◁14▷ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur. Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez en une base et la dimension.

◁ 15 ▷ ♣ $M=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur. Retrouvez son rang, son noyau.

Pardon ? la question semble absurde ? Alors j'ajoute « surtout, l'entier modulo lequel on travaille $(\{0, 1, \dots p-1\}, +, \times)$ ».
Déterminez dimension et cardinal de l'ensemble des matrices permutables avec M.

◁ 16 ▷ $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g = Id_E$. Montrez $Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Montrez : $Im(g \circ f) = Im(g)$. Déduisez $E = Ker(f) \oplus Im(g)$. *Attention, on ne pourra pas utiliser la formule du rang. Il n'est indiqué nulle part que l'on soit en dimension finie.*

◁ 17 ▷ Montrez que $\frac{1}{29}.\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & 16 & 12 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ est un projecteur orthogonal (projecteur dont le noyau est orthogonal à l'image).

◁ 18 ▷ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & x^2 \end{vmatrix}$. plus généralement, soit $(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_k})$ une famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien $(E,+,.,\phi)$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur *(pas forcément dans $Vect(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_k})$)*. Calculez le déterminant de Gram $|G(\overrightarrow{u_1}, \dots \overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{v})|$.

◁ 19 ▷ ♡ Combien des 120 permutations de la liste $[a,\ b,\ c,\ d,\ e]$ laissent invariant le produit $b.c.d$?

◁ 20 ▷ Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$. Donnez son déterminant et sa trace.

◁ 21 ▷ ♡² Complétez $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 5 & \\ -1 & & 4 \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que le noyau de $X \longmapsto A.X$ soit $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et son ensemble image le plan d'équation $y = x + z$. Calculez $\det(A)$. Donnez alors le rang de A, A^2 et plus généralement A^n pour tout n.

Indiquez suivant la valeur de c le nombre de solutions de l'équation $A.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$.

On pose : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & \end{pmatrix}$ *(en complétant R pour qu'elle soit inversible)*. Calculez sans effort $R^{-1}.A.S$.
Résolvez l'équation $A.M = 0_3$ d'inconnue M dans $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$.
Quel est le rang de $M \longmapsto A.M$, de $(M_3(\mathbb{R}),+,.)$ dans lui même.

◁ 22 ▷ ♡ Calculez $Tr(M \longmapsto^t M)$. Attention, il ne s'agit pas de comparer $Tr(M)$ et $Tr(^tM)$, il s'agit d'un endomorphisme de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$.
Calculez aussi son déterminant.

◁ 23 ▷ On travaille avec le corps des entiers de 0 à $11-1$ (11 est un nombre premier) pour l'addition et la multiplication modulo 11. Déterminez dimension de l'image et du noyau de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ 2.x & +3.y & +z \\ x & +3.y & 6.z \end{pmatrix}$.

◁ 24 ▷ ♡ Soient $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux espaces vectoriel ; soit f linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$; soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $(E,+,.)$. Montrez l'équivalence entre $f(A) = f(B)$ et $A + Ker(f) = B + Ker(f)$.

◁ 25 ▷ $(E,+,.)$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Est il possible de construire f et g endomorphismes de $(E,+,.)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(1+X,\ 1+2.X^2+X^3)$ et $Ker(g \circ f) = \{P(X) \in E \mid P(1) = 0\}$?
Est il possible de construire f et g endomorphismes de $(E,+,.)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(1+X,\ 1+2.X^2+X^3)$ et $Ker(g \circ f) = Vect(2+X+2.X^2+X^3,\ X^3+2.X^2-X)$?

◁26▷ Ajustez pour qu'elle soit de rang 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & & 5 & 0 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix}$. Donnez alors le rang de A^2 et A^3.

◁27▷ A est une matrice donnée dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrez que $M \to Tr(A.M)$ est une forme linéaire de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son rang.

Montrez que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a + b - c + 2.d$ est une forme linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ et trouvez A telle qu'elle se mette sous la forme $M \to Tr(A.M)$.

Montrez que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \to a + b - c + 2.a' + b' - 4.c' + a''$ est une forme linéaire de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ et trouvez A telle qu'elle se mette sous la forme $M \to Tr(A.M)$.

On veut montrer que toute forme linéaire de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ se met sous la forme $A \to Tr(A.M)$.

Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on définit $\varphi_A = (M \to Tr(A.M))$. Comparez $\varphi_{\alpha.A+\beta.B}$ et $\alpha.\varphi_A + \beta.\varphi_B$. Déterminez $\varphi_A({}^tA)$. Déduisez que φ_A est la forme nulle si et seulement si A est la matrice nulle.

Concluez en étudiant $\dim(L(M_n(\mathbb{R}),\ R))$ et $rg(A \to \varphi_A)$.

◁28▷ ♡ Soit f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ et A (respectivement B) un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ (respectivement de $(F, +, .)$).

Montrez celle des deux qui est vraie : $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$ ou bien $f^{-1}(f(A)) = A \cap Ker(f)$.

Montrez celle des deux qui est vraie : $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$ ou bien $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$.

On rappelle, pour éviter les âneries : $f(A) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in A\}$ et $\overrightarrow{b} \in f(A) \Leftrightarrow (\exists \overrightarrow{a} \in A,\ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\}$ et $f^{-1}(B) = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) \in B\}$. Et on conseille que si ce type de définition vous dépasse, allez relire les coefficients des maths aux concours suivant la filière...

◁29▷ On pose $E = (\mathbb{R}_3[X], +, .)$. Montrez que $P \longmapsto (X^2 + 1).P(1) + (X + 1).P'(X)$ est un endomorphisme de E.

Donnez sa matrice sur la base canonique. Est elle inversible ? Donnez le noyau et l'image de cet endomorphisme.

◁30▷ Donnez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$. Y a-t-il plusieurs solutions ? Et si on impose que son déterminant soir nul ? Et si on impose que sa trace vaille 4 ?

◁31▷ Soit f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ et A (respectivement B) un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ (respectivement de $(F, +, .)$).

Montrez celle des deux qui est vraie : $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$ ou bien $f^{-1}(f(A)) = A \cap Ker(f)$.

Montrez celle des deux qui est vraie : $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$ ou bien $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$.

On rappelle, pour éviter les âneries : $f(A) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in A\}$ et $\overrightarrow{b} \in f(A) \Leftrightarrow (\exists \overrightarrow{a} \in A,\ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\}$ et $f^{-1}(B) = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) \in B\}$.

◁32▷ Promenons nous dans les bois pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était il nous mangerait. Mais comme il n'y est pas il ne nous mangera pas.

Quantifiez (c'est à dire mettez des implications).

◁33▷ Résolvez $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ d'inconnue réelle x *(peut on considérer que 0 est solution ?)*

◁34▷ Montrez que si f est paire et dérivable, alors f' est impaire.

Donnez un contre-exemple à "f impaire implique f' paire".

◁35▷ A l'École Nationale de Robotique / Université de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues (anglais/chinois) et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves ?

◁36▷ ♡ Étudiez $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 + 1}{3}$ *(discutez en fonction de u_0, en nommant les racines de l'équation $x^3 + 1 = 3.x$, sans chercher à les calculer).*

◁37▷ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2.u_n}$. Vous savez ce qu'il vous reste à faire.[1]

◁38▷ Petits exercices du cours :

a- La réciproque d'une application convexe est elle convexe ? concave ?
Qu'allez vous utiliser ? Déterminant ? Trois cordes ? Petite inégalité ? Grande inégalité ?
Et d'ailleurs, la réciproque existe-t-elle ?

b- Si f est convexe et g convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Pour démontrer ça, qu'allez vous utiliser ? déterminant ? Trois cordes ? Petit inégalité ? grande inégalité ?

c- Une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut elle être majorée ?

d- Pouvez vous construire f convexe de minimum 1 atteint à la fois en 2 et en 3 ?

e- Si le graphe de f (dérivable) est toujours au dessus de ses tangentes, peut on déduire que f est convexe.

◁39▷ J'ai acheté deux hexaèdres réguliers (beh si : des dés à six faces) non équilibrés, mais tout deux du même modèle (mêmes probabilités pour chaque face). Je les ai lancés tant de fois que le tableau suivant me donne la probabilité d'obtenir les sommes de 2 à 12 :

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
$1/64$	$1/16$	$1/16$	$3/32$	$7/32$	$3/32$	$13/64$		$7/64$	$1/32$	$1/64$

Pouvez vous retrouver la case qui manque ?
Pouvez vous retrouver la loi de probabilité de chaque dé ?

$P(A=1)$	$P(A=2)$	$P(A=3)$	$P(A=4)$	$P(A=5)$	$P(A=6)$
$P(B=1)$	$P(B=2)$	$P(B=3)$	$P(B=4)$	$P(B=5)$	$P(B=6)$

Et l'exercice niveau bac si vraiment vous ne pouvez pas faire le mien : pour des dés équilibrés à six faces, retrouvez

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
									$1/16$	$1/36$

◁40▷ Associez à chaque résultat faux son contre-exemple, et montrez que c'en est bien un :

$a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$ A	$a_n \sim b_n \Rightarrow \sin(a_n) \sim \sin(b_n)$ B	$a_n \sim b_n \Rightarrow \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$ C	$a_n \sim b_n \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$ D	$a_n \sim b_n \Rightarrow (1+a_n) \sim (1+b_n)$ E
α $a_n = n$ et $b_n = n+\pi$	β $a_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$ et $b_n = \dfrac{n+1}{n}$	γ $a_n = \dfrac{1-n}{n}$ et $b_n = \dfrac{2-n}{n}$	δ $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$	ε $a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$

◁41▷ E est un ensemble dénombrable (c'est à dire dont le cardinal ne dépasse pas celui de $\mathbb{N}$, ce peut être $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ rappelons le).

Une loi de probabilité est une application $p : E \longrightarrow [0,\ 1]$ telle que la somme $\sum_{x\in E} p(x)$ soit égale à 1.

La probabilité d'une partie A de E est alors $\sum_{x\in A} p(x)$ (existence ?).

Montrez qu'il y a une loi de probabilité constante (« uniforme ») sur range(N) (N fixe) mais qu'il n'y en a pas sur $\mathbb{N}$.

Montrez que $n \longmapsto 2^{-n-1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers pairs.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers impairs.

a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^n$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^{|n|}$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, alors $n \longmapsto \dfrac{p_{|n|}}{2}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ alors $n \longmapsto p_n + p_{-n}$ est (presque) une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$(que fait il modifier dans cette définition ?).

1. t si vous ne savez pas : indiquez suivant la valeur de u_0 la croissance / décroissance, convergence de la suite

Montrez que $\gamma = (a,\ b) \longmapsto 2^{-a-b}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.
r est un rationnel strictement positif fixé. Calculez la probabilité de $\left\{(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \dfrac{a}{b} = r\right\}$ qu'on va noter $\mu(r)$.
Ceci définit une loi de probabilité sur $\mathbb{Q}^{+*}$. Calculez $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3/4)$.
Montrez $\mu(r) = \mu(1/r)$.
Calculez $\mu(n)$ si n est un entier. Calculez $\mu(\mathbb{N})$ (« probabilité qu'un rationnel tiré au hasard selon la loi μ soit un entier) à 10^{-3} près.

Montrez que $(a,\ b) \longmapsto \dfrac{1}{(a+b+1).2^{a+b+1}}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

A quelle loi de probabilité correspond ce tableau ?

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
1	1/(3x4)	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
2	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
3	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
4	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(11x64)
5	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)

◃42▹ Source : d'après un oral de Centrale. On considère $n \geqslant 2$ joueurs, numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre. On définit la matrice $A = (a_i^k)_{i \leqslant n, k \leqslant n}$ de la manière suivante : $a_i^i = 0$, $a_i^k = 1$ si i a gagné contre k et $a_i^k = -1$ si k a gagné contre i. Écrivez une procédure renvoyant pour n donné une matrice de tournoi aléatoire.

Voici une procédure *(lourde, de complexité $n!$)* de calcul de déterminant, mais il manque une sous-procédure ; écrivez la :

```
def det(M) :
....if len(M)==0 :
........return 1
....S, signe = 0, 1
....for i in range(len(M)) :
........S += signe*M[i][0]*det(delRowCol(M,i,0))
....signe = -signe
....return S
```

On constate pour n impair que ces déterminants sont toujours nuls. Prouvez le.

$J_n = (1)_{i \leqslant n, k \leqslant n}$. Calculez $\det(J_n - I_n)$.

Soient M et N deux matrices coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrez que $\det(M)$ et $\det(N)$ sont deux entiers de même parité.

Déduisez que les matrices de tournois aléatoires en taille paire sont inversibles.

◃43▹ On note E l'ensemble des suites réelles. Soit σ un endomorphisme de $(E, +, .)$; a et b sont deux réels distincts, montrez : $Ker(\sigma^2 - (a+b).\sigma + (a.b).Id_E) = Ker(\sigma - a.Id_E) \oplus Ker(\sigma - b.Id_E)$.
On définit sur E l'application $\sigma = (u_n) \longmapsto (u_{n+1})$. Montrez que σ est un endomorphisme de E. Donnez pour tout λ la dimension et une base de $Ker(\sigma - \lambda.Id_E)$.
Retrouvez la forme générale de la suite de Fibonacci.

On définit : $\Gamma = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{x^2 - x - 1}$. Ajustez a et b pour avoir $\Gamma(0) = \Gamma'(0) = 1$.
Montrez que Γ admet pour tout n un développement limité en 0 à l'ordre n et montrez que les coefficients de Γ vérifient la relation de récurrence $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.
Décomposez Γ en éléments simples. Donnez alors son développement limité d'ordre n.
Retrouvez la forme générale de F_n.

◁44▷ ♣ On considère que $(\mathbb{R},+,.)$ est un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{Q},+,.)$, dont une base sera formée de 1 (premier vecteur de base) suivi de vecteurs que l'on ne précisera pas, puisqu'on ne sait pas le faire, et qu'on se contentera de noter $\overrightarrow{r_i}$ pour i dans un ensemble I.
On construit f : l'image d'un réel a se décomposant sous la forme $\alpha_0.1+\sum_{i\in I}\alpha_i.\overrightarrow{r_i}$ sera $\alpha_0.1$.
Montrez $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\leqslant\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple $(a,\ b)$, mais n'est pas convexe (elle n'est continue nulle part et n'est bornée sur aucun intervalle contenant plus d'un point).

◁45▷ ♡ Sur les quarante huit élèves, huit sont vraiment cons. Le colleur attend deux trinômes. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un con dans le lot ?

◁46▷ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3,+,.)$. Mettez la sous la forme ${}^tA.A$.
Donnez un vecteur *(non nul)* orthogonal au plan engendré par les deux premiers vecteurs de base. Construisez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3,+,.)$.
Le produit scalaire sous entendu dans la question, c'est

$$\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}\right)\longmapsto\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$$

◁47▷ ♡ Complétez $\dfrac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix}15&&\\-20&12&\\0&-15&20\end{pmatrix}$ pour que ce soit la matrice d'une isométrie de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel. Montrez que 1 en est alors valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.
Une isométrie est une application linéaire qui transforme une base orthonormée (comme la base canonique) en base orthonormée (vecteurs de norme 1*, deux à deux orthogonaux).*
Montrez que c'est équivalent à ${}^tM.M=I_n$.

◁48▷ On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
♡ Montrez qu'il n'existe aucun produit scalaire sur E tel que $P\longmapsto P'$ soit une isométrie.
♣ Existe-t-il un produit scalaire sur E tel que $P(X)\longmapsto P(X+1)$ soit une isométrie ?

On prend le produit scalaire $(P,Q)\longmapsto P(0).Q(0)+P(1).Q(1)+P(2).Q(2)$. Complétez $(1/\sqrt{3})$ en base orthonormée (il manque deux polynômes).
Faites tourner X d'un angle $\pi/2$ autour de 1.

◁49▷ Ajustez a_t et b_t pour que $t\longmapsto t^2$ et $t\longmapsto\sqrt{t}$ soient solutions de $t^2.y''_t+a_t.y'_t+b_t.y_t=0_{\forall t>0}$.

◁50▷ Ajustez a et b pour que $t\longmapsto t.\cos(\ln(t))$ soit solution de $t^2.y''_t+a.y'_t+b.y_t=0_{\forall t>0}$.

◁51▷ ♡ Montrez que $x\longmapsto(1-x).\int_0^x t.f(t).dt+x.\int_x^1(1-t).f(t).dt$ est nulle en 0 et en 1 et est deux fois dérivable. Et quelle est sa dérivée seconde ?

◁52▷ Montrez que $(P,\ Q)\longmapsto\int_{-1}^1 P(t).Q(t).dt$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}[X],+,.)$. On suppose que la famille (Q_n) est une famille de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $deg(Q_n)=n$. Montrez que Q_n a la même parité que n ($Q_n(-x)=(-1)^n.Q_n(x)$). Montrez que Q_n admet n racines distinctes, toutes entre -1 et 1 (on pourra raisonner par l'absurde, donner la liste de ses racines dans $]-1,\ 1[$ et étudier $\prod_a(X-a)$).

◁53▷ ♡ Montrez que la famille des $X^k.(1-X)^{6-k}$ *(pour k de 0 à 6)* est une base de $(\mathbb{R}_6[X],+,.)$. Calculez le déterminant de cette famille par rapport à la base canonique.

◁54▷ Simplifiez $\begin{vmatrix}\frac{1}{2.a}&\frac{1}{a+b}\\\frac{1}{b+a}&\frac{1}{2.b}\end{vmatrix}$. Montrez : $\begin{vmatrix}\frac{1}{2.a}&\frac{1}{a+b}&\frac{1}{a+c}\\\frac{1}{b+a}&\frac{1}{2.b}&\frac{1}{b+c}\\\frac{1}{c+a}&\frac{1}{c+b}&\frac{1}{2.c}\end{vmatrix}=\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$ en supposant que a, b, $c$et d sont quatre nombres strictement positifs.

Inventez la formule pour le déterminant de la matrice de taille n sur n de terme général $\dfrac{1}{a_k+a_i}$. Est elle cohérente pour n égal à 1.
Écrivez un script Python qui pour une liste $[a_1, \dots a_n]$ donnée calcule le déterminant en question.
Calculez aussi celui de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$ et enfin de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ Exprimez le dernier en supposant que a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$.

◁55▷ ♣ On sait : $A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et $B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & \\ 2 & & 1 \end{pmatrix}$. Complétez les termes qui manquent *(indication : pensez aussi aux carrés)*. Si vous trouvez deux solutions, choisissez celle avec des entiers.
Diagonalisez $A.B$ *(matrice de passage P, matrice diagonale D pour laquelle l'idée des carrés sera aussi utile)* et aussi $B.A$ *(matrice de passage Q)*.
Si je propose $A = P.D.Q^{-1}$, vous la calculez puis vous complétez pour trouver B ?

◁56▷ Montrez que $(3.\overrightarrow{i} + 2.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ \overrightarrow{i} + 4.\overrightarrow{j} + 2.\overrightarrow{k},\ -2.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\overrightarrow{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

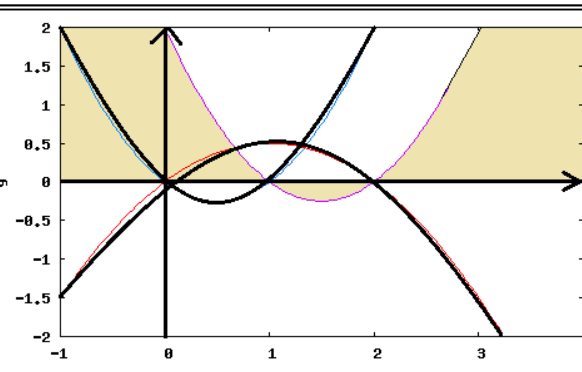
◁57▷ ♣ $(E, +, .)$ est l'ensemble des suites réelles bornées. F est l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrez que F est un sous-espace vectoriel strict de $(E, +, .)$.
Pour u et v dans E, on pose $\phi(u, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}.u_k.v_k$. Montrez que cette série converge effectivement. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$.
Qui sont les suites orthogonales à la suite $(1, 0, 0, \dots)$?
Montrez que seuls la suite nulle est orthogonale à toutes les suites de la forme $(0, 0 \dots 0, 1, 0, \dots)$.
Déduisez $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Est ce en contradiction avec le cours ?

◁58▷ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de Gram.

Pour les uns, une matrice de Gram c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) & \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) \\ \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) & \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}) & \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j}) \\ \phi(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k}) & \phi(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) & \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{k}) \end{pmatrix}$ pour un produit scalaire ϕ.

Pour les autres, une matrice de Gram c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} & \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} & \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} & \overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} & \overrightarrow{w}.\overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} & \overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} & \overrightarrow{w}.\overrightarrow{w} \end{pmatrix}$ pour le produit scalaire usuel.

Montrez que $(P, Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{2} P(k).Q(k)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$. Montrez que la famille $(X.(X-1),\ X.(2-X),\ (X-1).(X-2))$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
Qui sont les polynômes orthogonaux au sous-espace vectoriel des polynômes constants ? Donnez une base de ce plan. Donnez même une base orthonormée.
Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.
◁59▷



Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

Montrez que ce n'est pas une isométrie (c'est à dire certains vecteurs P n'ont pas la même norme que leur image). Existe-t-il des polynômes non constants qui ont la même norme que leur image.
Résolvez l'équation « P est orthogonal à $T(P)$ pour le produit scalaire ϕ ».

◁60▷ -a- On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\ \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(f,g) \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur $(E,+,.)$ (notation : $< f,\ g >$).

-b- Pour f dans E, on définit $V(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ et $V^*(f) = x \longmapsto \int_x^{\pi/2} f(t).dt$. Pourquoi la notation $V(f(x))$ est elle absurde ? Montrez que V et V^* sont deux endomorphismes de $(E,+,.)$. Sont ils injectifs ? Sont ils surjectifs ? Pourquoi ne pouviez vous pas appliquer la formule du rang ?
-c- Montrez pour f et g dans E : $< V(f),\ g >=< f,\ V^*(g) >$.
-d- On pose $T = V^* \circ V$. Représentez graphiquement $T(1)$ et $T(Id)$.
-e- Calculez $T(f)(\pi/2)$ et $T(f)'(0)$ pour f dans E.
-f- Montrez $< T(f),\ g >=< f,\ T(g) >$ pour tout couple $(f,\ g)$. Montrez $< T(f),\ f >> 0$ pour tout f de $E - \{0\}$.
-g- Déduisez que les valeurs propres de T sont strictement positives.
-h- Soit λ une valeur propre de T et f_λ un vecteur propre associé. Montrez que f_λ est C^2 et est solution de l'équation différentielle $\lambda.\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. Montrez : $f_\lambda(\pi/2) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 0$.
-i- Déduisez que λ est de la forme $\dfrac{1}{(2.n+1)^2}$ pour un entier naturel n. Donnez la dimension des sous-espaces propres.

Extrait du sujet Mines-Ponts 2015

◁61▷ ♡ a, b et c sont trois réels. On définit : $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de R. Montrez que si R est une matrice de rotation de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ espace vectoriel euclidien canonique alors a, b et c sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + p$ *(vérifiez qu'il ne sert à rien de calculer* $\det(A)$*)*.

On pose alors $\gamma = \dfrac{3.a-1}{2}$ *(justifiez pourquoi on pose cela)*. Montrez que $4.\gamma^3 - 3.\gamma$ est entre -1 et 1. Déduisez que p est entre 0 et $4/27$.

Que pouvez vous dire dans chacun des deux cas $p = 0$ et $p = 4/27$.
Réciproquement, montrez que si a, b et c sont racines d'une équation $X^3 - X^2 + p$ avec p positif plus petit que $4/27$ alors A est une matrice de rotation *(axe ? angle ?)*.
Exercice classique de l'écrit des concours CCP et E3A, classique de l'oral des concours Centrale et Mines-Ponts.

Rappel : les isométries directes de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ sont des rotations, et sur une base adaptée, la matrice d'une rotation c'est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.