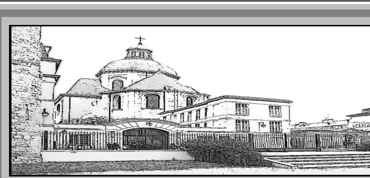
LYCEE CHARLEMAGNE

Lundi 16 juin

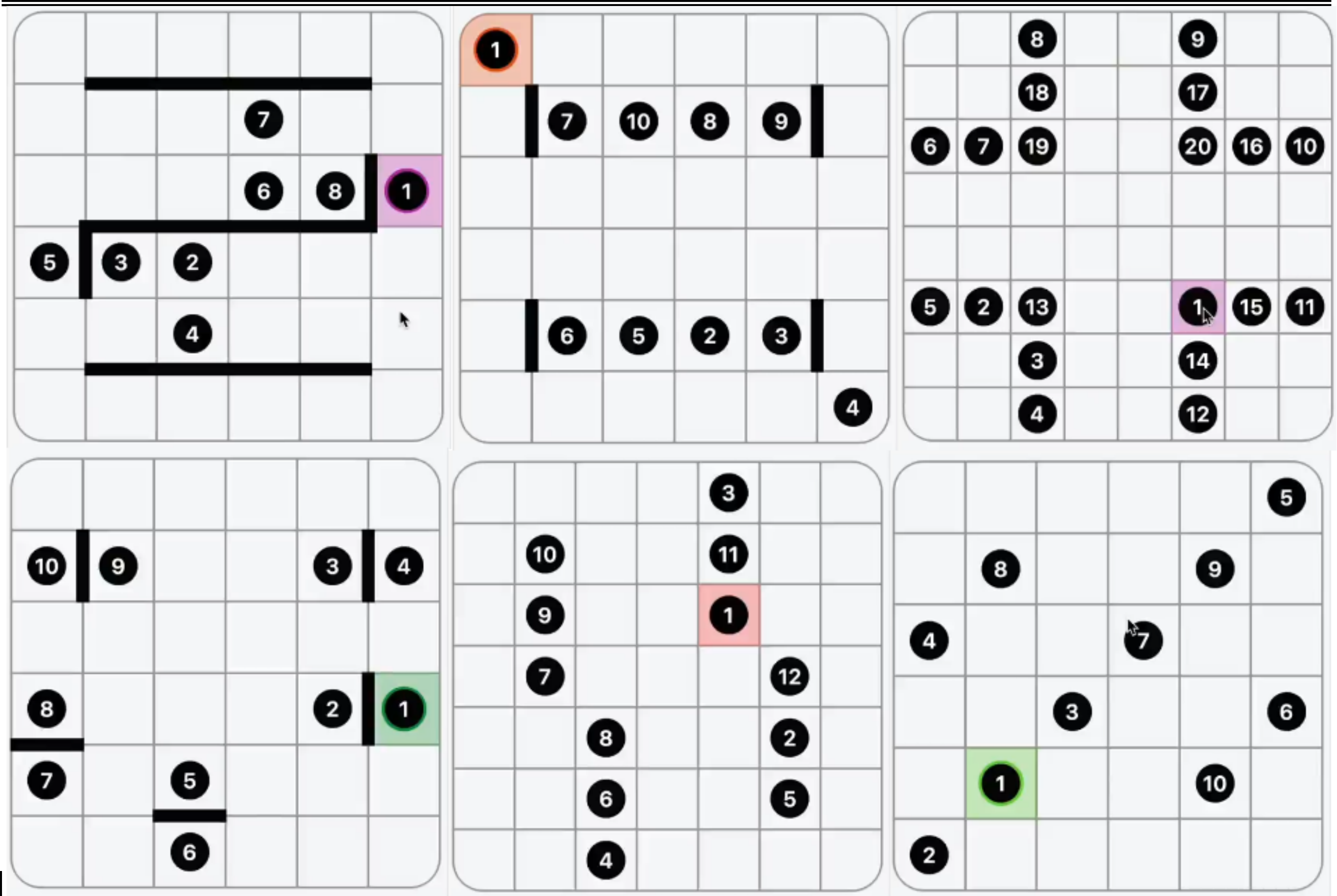
M.P.S.I.2



2024 2025

TD32

◁0▷



◁1▷

♡ On rappelle que $(A,B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$. L'application $M \longmapsto (M+{}^tM)/2$ est elle un projecteur orthogonal ? L'application $M \longmapsto {}^tM$ est elle une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$?
Pour quelles matrices A l'application $M \longmapsto A.M$ est elle un endomorphisme de E, un automorphisme de E, une isométrie de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$?
Qui est le projeté orthogonal d'une matrice M sur l'ensemble des matrices diagonales ?
Rappel : une isométrie est une application linéaire qui préserve les normes et produits scalaires : $\phi(f(\overrightarrow{u}),\ f(\overrightarrow{v})) = \phi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$.

On doit déjà vérifier que $M \longmapsto \dfrac{{}^tM+M}{2}$ va de $(M_n(\mathbb{R}),+,.)$ dans lui même

est linéaire

est un projecteur $\dfrac{{}^t\left(\dfrac{{}^tM+M}{2}\right)+\dfrac{{}^tM+M}{2}}{2} = \dfrac{{}^tM+M}{2}$

son noyau est $A_n(\mathbb{R})$, ensemble des matrices antisymétriques

son image est $S_n(\mathbb{R})$ ensemble des matrices symétriques.

Reste à prouver $Tr({}^tS.A) = 0$ pour tout couple avec a antisymétrique et S symétrique.
C'est du cours : $Tr({}^tS.A) = Tr(S.A)$ car S symétrique
$Tr({}^tS.A) = Tr({}^t({}^tS.A)) = Tr({}^tA.S) = Tr(-A.S)$
ce réel est son propre opposé, il est nul.

On veut projeter $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$ sur l'ensemble des matrices diagonales, perpendiculairement.

On propose $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$. C'est bien une matrice diagonale.

Et la partie effacée, qui est donc dans le noyau est $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}$.

Il reste juste à prouver que tout vecteur $\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}$ est orthogonal à tout vecteur $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}$ de l'image.

On calcule le produit scalaire : $Tr(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b' & 0 \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a' & 0 & c' \\ a'' & b'' & 0 \end{pmatrix}) = Tr\begin{pmatrix} 0 & ? & ? \\ ? & 0 & ? \\ ? & ? & 0 \end{pmatrix} = 0$.

◃2▹ Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}^+$?
Pour quelles valeurs de a les solutions de $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ sont elles toutes bornées sur $\mathbb{R}$?

L'équation $(1+t^2).y'_t + a.t.y_t = 0$ n'est pas sous forme de Cauchy-Lipschitz, mais on la met sous forme de Cauchy-Lipschitz sur tout $\mathbb{R}$ en divisant par un terme dominant qui ne s'annule jamais : $y'_t + \dfrac{a.t}{1+t^2}.y_t = 0$

On intègre $t \longmapsto \dfrac{a.t}{1+t^2}$ en $t \longmapsto \dfrac{a}{2}.\ln(1+t^2)$.

Les solutions sont de la forme $t \longmapsto y_0.e^{-a.\ln(1+t^2)/2}$ (on a choisi la primitive nulle en 0).
On les écrit $t \longmapsto y_0.(1+t^2)^{-a/2}$.

Vient à présent la question « bornées sur $\mathbb{R}^+$ (ou sur $\mathbb{R}$) ».

$a<0$	$a=0$	$a>0$
non bornées sur $\mathbb{R}^+$	bornées sur $\mathbb{R}^+$	bornées sur $\mathbb{R}^+$
non bornées sur $\mathbb{R}$	bornées sur $\mathbb{R}$	bornées sur $\mathbb{R}$

◃3▹ Complétez $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que ce soit la matrice d'un projecteur de $(\mathbb{R}^2, +, .)$. Diagonalisez la.
Déterminez une base de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ *(après avoir vérifié que cet ensemble noté $Com(A)$ est bien un espace vectoriel Com comme commutant).*
Montrez que ce projecteur n'est pas orthogonal pour le produit scalaire usuel *(pour un projecteur, être orthogonal, c'est "noyau orthogonal à image").*
♣ Soit un produit scalaire ϕ pour lequel c'est un projecteur orthogonal. Déterminez alors $|\overrightarrow{i}|_\phi / |\overrightarrow{j}|_\phi$ et $\widehat{(\overrightarrow{i}\ \overrightarrow{j})}_\phi$.

$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ \clubsuit & \diamondsuit \end{pmatrix}$ donne $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Autre approche : la matrice doit être semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc avoir même trace et même déterminant.

Pour la diagonaliser, on cherche image : $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix})$ et noyau $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$ (image de $Id - P$).

On a alors des vecteurs propres de valeurs propres respectives 1 et 0.

On en fait une matrice de passage : $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

et on vérifie $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$Com(A)$ est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$ (morphisme).
Le plus simple est de résoudre directement.

On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix})$.

On peut d'ailleurs l'avoir ainsi : dans $Com(A)$, il y a I_2 et il y a A (évident).
$Com(A)$ est au moins de dimension 2.
Mais c'est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$, dont l'ensemble image est au moins de dimension 2
(on y trouve $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$, qui sont indépendantes).

Par encadrement, le noyau est de dimension 2 et l'image est de dimension 2, et (I_2, A) est une base du noyau.

$Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ n'est pas orthogonal à $Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, ce projecteur n'est pas orthogonal.
D'ailleurs, sa matrice sur la base canonique (orthonormée) n'est pas symétrique.

On veut un produit scalaire pour lequel $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Pourquoi ne pas dire chacun est normé et ils sont orthogonaux entre eux ?
On écrit simplement $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
La matrice de Gram est alors $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix}$.
On vérifie $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

◁4▷ Le prof Hitzan-Pourdèce-Hendrelap-Houbell est nul. Il a écrit dans son cours que $u.v$ avait pour dérivée $u'.v'$.
Pour se justifier, il donne un exemple : $u = x \longmapsto e^{-x}$ et $v = x \longmapsto e^{x/2}$. Vérifiez.
Il propose aussi : $u = x \longmapsto e^{(x^2)}$ et $v = x \longmapsto e^x.\sqrt{1-2.x}$.
Devinez ce qu'il a proposé pour $u = x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.
Et pour $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^3}$?

$u(x)$	$v(x)$	$u'(x)$	$v'(x)$	$u'(x).v'(x)$	$(u.v)(x)$	$(u.v)'(x)$
e^{-x}	$e^{x/2}$	$-e^{-x}$	$\dfrac{e^{x/2}}{2}$	$\dfrac{-e^{-x}.e^{x/2}}{2}$	$e^{-x/2}$	$\dfrac{-e^{-x/2}}{2}$
e^{x^2}	$e^x.\sqrt{1-2.x}$	$2.x.e^{x^2}$	$\dfrac{2.x.e^x}{\sqrt{1-2.x}}$	$\dfrac{-4.x^2.e^x.e^{x^2}}{\sqrt{1-2.x}}$	$e^{x+x^2}.\sqrt{1-2.x}$	$\dfrac{-4.x^2.e^x.e^{x^2}}{\sqrt{1-2.x}}$
$\dfrac{1}{x-1}$	x	$\dfrac{-1}{(x-1)^2}$	1	$\dfrac{-1}{(x-1)^2}$	$\dfrac{x}{x-1}$	$\dfrac{-1}{(x-1)^2}$
$\dfrac{1}{(x-3)^3}$	x^3	$\dfrac{-3}{(x-3)^4}$	$3.x^2$	$\dfrac{-9.x^2}{(x-3)^4}$	$\dfrac{x}{(x-3)^3}$	$\dfrac{-9.x^2}{(x-3)^4}$

Dans cet exercice il faut/il suffit de savoir dériver proprement.
Par exemple, pour dériver $x \longmapsto e^x.\sqrt{1-2.x}$, on l'écrit $x \longmapsto e^x.(1-2.x)^{1/2}$ et on dérive un produit.
De même, pour dériver $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^3}$ on l'écrit $x \longmapsto (x-3)^{-3}$ et on n'écrit JAMAIS $-\dfrac{3.(x-3)^2}{((x-3)^3)^2}$ qui n'est certes pas faux, mais montre que vous essayez de faire Paris Brest à vélo avec un vélib... sur lequel vous avez laissé l'antivol. Vous avez appris à pédaler étant petit et vous pensez que c'est suffisant pour faire des compétitions. Mais vous devez vous adapter, voir le meilleur matériel...

Pour trouver v une fois u donné, on résout une équation différentielle $u'.v' = u.v' + u'.v$ d'inconnue v.

◁5▷ On donne $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = A.U_n$ pour tout n. On a trouvé $U_1 = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 17/9 \\ -13/18 \end{pmatrix}$.
Déterminez A, U_3 et U_n pour tout n de $\mathbb{N}$. Déterminez aussi A_{-1}.
Placez les points de coordonnées U_n pour n de -1 à 5.
Donnez leurs coordonnées dans le repère $(O, \overline{I}, \overline{J})$.

A faire.

◁6▷ Un élève prétend que les valeurs propres de la somme de deux projecteurs du plan ne peuvent valoir que 0, 1 et 2. Il explique : quand on additionne $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on voit ce qu'on peut obtenir".
En quoi a-t-il tort ?
Donnez suivant a le spectre de $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ puis de $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1+2.a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (voyez vous la somme de deux projecteurs ?).

La forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est acquise que sur une base adaptée : $Ker(Id-p)$ suivi de $Ker(p)$.
Mais sinon, la matrice est semblable à cette forme.
Et quand on somme $Q.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.Q^{-1}$ et $R.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.R^{-1}$, on n'a rien de bien spécial.
Au mieux, la somme des deux a pour trace 2.
Dans le plan, la trace de la somme de deux projecteurs vaut 0, 1, 2, 3 ou 4 (mais les cas 0 et 4 sont quand même simplistes).

$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a pour spectre $\{0,\ 1\}$.
Bonus : $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a un projecteur.
Son image est $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et son noyau est $Vect(\begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$.
$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1+2.a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de projecteur. Et je ne vois pas son intérêt ici.
Son spectre est $\left\{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}-\sqrt{a+1}}{\sqrt{2}}\right\}$.

◁7▷ Pouvez vous compléter la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & \heartsuit \end{pmatrix}$ pour que ses deux valeurs propres soient entières ? *(les valeurs propres sont les coefficients diagonaux d'une matrice D diagonale semblable à M)*
Quel est alors le plus grand terme de A^{100} ?

On veut qu'il existe a et b entiers vérifiant $4+\heartsuit = a+b$ et $4.\heartsuit - 2 = a.b$.
L'équation $x^2-(4+\heartsuit).c+(4.\heartsuit-2)$ doit avoir des racines réelles et même entières.
$\heartsuit$ doit être entier, et le discriminant $\heartsuit^2-8.\heartsuit+24$ doit être un carré parfait d'entier.
On, il vaut $(\heartsuit-4)^2+8$, et c'est déjà presque un carré d'entier.
Il faut donc que $(\heartsuit-4)^2+8$ et $(\heartsuit-4)^2$ soient deux carrés alors qu'ils sont proches...
La seule solution est $1+8$ et 1.

On est sur la piste de deux possibilités : $\heartsuit = 5$ ou $\heartsuit = 3$.
Il reste à voir si les deux conviennent (on a juste raisonné par implications) :

$\heartsuit = 3$	$\heartsuit = 5$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
$x^2-7.x+10=0$	$x^2-9.x+18=0$
5 et 2	5 et 2
$D=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
$P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	$P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
$P.D.P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{2.5^n+2^n}{3} & \frac{2.5^n-2^{n+1}}{3} \\ \frac{5^n-2^n}{3} & \frac{5^n+2^{n+1}}{3} \end{pmatrix}$	$P.D.P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{6^n+2.3^n}{3} & \frac{2.6^n-2.3^n}{3} \\ \frac{6^n-3^n}{3} & \frac{2.6^n+3^n}{3} \end{pmatrix}$

◁8▷ $\heartsuit$ On définit : $P \longmapsto P(X)-(X+1).P'(X)$. Montrez que c'est un endomorphisme de $(\mathbb{R}_3[X],+,.)$. Déterminez son noyau, puis son image.
Même question avec $P \longmapsto 3.P(X)-(X+1).P'(X)$.

A faire.

◁9▷ ♡ f et g sont linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$, α et β sont deux réels. Montrez : $Ker(f)\cap Kar(g)\subset Ker(\alpha.f+\beta.g)$ et $Im(\alpha.f+\beta.g)\subset Im(f)+Im(g)$.

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f)\cap Ker(g)$. On traduit : $f(\overrightarrow{a})=\overrightarrow{0_F}$ et $f(\overrightarrow{b})=\overrightarrow{0_F}$.
On calcule $(\alpha.f+\beta.g)(\overrightarrow{a})=\alpha.f(\overrightarrow{a})+\beta.f(\overrightarrow{a})$ par définition de la somme d'applications.
On remplace : $(\alpha.f+\beta.g)(\overrightarrow{a})=\alpha.\overrightarrow{0_F}+\beta.\overrightarrow{0_F}=\overrightarrow{0_F}$.
On reconnaît : $\overrightarrow{a}\in Ker(\alpha.f+\beta.g)$.

On prend $\overrightarrow{b}$ dans $Im(\alpha.f+\beta.g)$. par définition, il s'écrit $(\alpha.f+\beta.g)(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de $(E,+,.)$.
On le développe en $\overrightarrow{b}=\alpha.f(\overrightarrow{a})+\beta.g(\overrightarrow{a})$ et même $\overrightarrow{b}=f(\alpha.\overrightarrow{a})+g(\beta.\overrightarrow{a})$.
Le vecteur $f(\alpha.\overrightarrow{a})$ est dans $Im(f)$ et le vecteur $g(\beta.\overrightarrow{a})$ est dans $Im(g)$.
Leur somme $\overrightarrow{b}$ est dans $Im(f)+Im(g)$.

Remarque : on prouve ainsi $Im(f+g)\subset Im(f)+Im(g)$.
Qu'est ce qui empêche d'écrire $Im(f)+Im(g)\subset Im(f+g)$?
Que pensez vous de on prend $f(\overrightarrow{a})+g(\overrightarrow{a})$ dans $Im(f)+Im(g)$. On l'écrit $(f+g)(\overrightarrow{a})$ et il est dans $Im(f+g)$.

◁10▷ ♡² Un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}$ sur la base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$. Quelle est sa matrice sur la base $(\overrightarrow{j}, 2.\overrightarrow{i}, 3.\overrightarrow{k})$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} b' & -a' & c'\\ -b & a & -c\\ b'' & -a'' & c''\end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} b' & c' & a'\\ b'' & c'' & a''\\ b & c & a\end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} a & -b & c\\ 2.a' & b' & 2.c'\\ a'' & -b'' & c''\end{pmatrix}$? Sur quelles bases sa matrice est elle $\begin{pmatrix} a & c' & b''\\ a'' & c & b\\ a' & c'' & b'\end{pmatrix}$?

Le genre d'exercice que j'adore, car il permet de tester vraiment les élèves.
Comme on parle d'endomorphisme, on change de base au départ et à l'arrivée. On étudie des $Mat_C^C(f)$ et $Mat_B^B(f)$.

Les données nous disent $f(\overrightarrow{i})=\begin{array}{l} a.\overrightarrow{i}\\ +a'.\overrightarrow{j}\\ +a''.\overrightarrow{k}\end{array}$, $f(\overrightarrow{j})=\begin{array}{l} b.\overrightarrow{i}\\ +b'.\overrightarrow{j}\\ +b''.\overrightarrow{k}\end{array}$ et $f(\overrightarrow{k})=\begin{array}{l} c.\overrightarrow{i}\\ +c'.\overrightarrow{j}\\ +c''.\overrightarrow{k}\end{array}$.

On calcule les nouvelles images :

$$f(\overrightarrow{i})=\begin{array}{l} a.\overrightarrow{i}\\ +a'.\overrightarrow{j}\\ +a''.\overrightarrow{k}\end{array},\quad f(2.\overrightarrow{j})=\begin{array}{l} 2.b.\overrightarrow{i}\\ +2.b'.\overrightarrow{j}\\ +2.b''.\overrightarrow{k}\end{array}\quad\text{et}\quad f(3.\overrightarrow{k})=\begin{array}{l} 3.c.\overrightarrow{i}\\ +3.c'.\overrightarrow{j}\\ +3.c''.\overrightarrow{k}\end{array}$$

Mais il faut les exprimer à l'aide des nouveaux vecteurs :

$$f(\overrightarrow{i})=\begin{array}{l} a.\overrightarrow{i}\\ +\frac{1}{2}.a'.(2.\overrightarrow{j})\\ +\frac{1}{3}.a''.(3.\overrightarrow{k})\end{array},\quad f(2.\overrightarrow{j})=\begin{array}{l} 2.b.\overrightarrow{i}\\ +b'.(2.\overrightarrow{j})\\ +\frac{2}{3}.b''.(3.\overrightarrow{k})\end{array}\quad\text{et}\quad f(3.\overrightarrow{k})=\begin{array}{l} 3.c.\overrightarrow{i}\\ +\frac{3}{2}.c'.(2.\overrightarrow{j})\\ +c''.(3.\overrightarrow{k})\end{array}$$

La matrice cherchée est $\begin{pmatrix} a & 2.b & c\\ \frac{a'}{2} & b' & \frac{c'}{2}\\ \frac{a''}{3} & \frac{2.b''}{3} & c''\end{pmatrix}$ Les colonnes ont été multipliées par 1, 2 et ″ (images de vecteurs), mais il a fallu aussi diviser les lignes à cause des « vecteurs par rapport à qui on exprime).

Et certains préfèrent la retrouver avec $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b & c\\ a' & b' & c'\\ a'' & b'' & c''\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et comprendre les actions sur les colonnes et/ou les lignes en termes de changements de base.
On retrouve bien $P^{-1}.M.P$.

Oubliez une des deux opérations (lignes ou colonnes), et la trace a changé, ce qui est en total désaccord avec le cours.

La même approche, mais à rebours, vous donne les solutions suivantes

$\begin{pmatrix} b' & -a' & c' \\ -b & a & -c \\ b'' & -a'' & c'' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} b' & c' & a' \\ b'' & c'' & a'' \\ b & c & a \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & -b & c \\ 2.a' & b' & 2.c' \\ a'' & -b'' & c'' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a & c' & b'' \\ a'' & c & b \\ a' & c'' & b' \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{j}, -\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$	$(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}, \overrightarrow{i})$	$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$	impossible

Pour la première, on a changé des signes (nouveaux vecteurs $-\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.
Le terme a n'a pas changé de signe. Deux signes moins.
Mais on a aussi permuté des colonnes (et permuté des lignes).

L'avant dernière est impossible. Non pas parce qu'on ne trouve pas (à moins que de prouver que certaines conditions sont nécessaires, puis incompatibles).
Mais tout simplement, le nouvelle matrice n'a pas le même déterminant que la première...

La dernière est impossible, car la trace n'est pas conservée.

J'aurais ensuite gardé pour l'I.S. le coup de $(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, où il faut additionner des colonnes, mais soustraire des lignes.

◁11▷ ♡ Soient $(E,+,.)$,$(F,+,.)$ et $(G,+,.)$ trois espaces vectoriels de dimension finie. On prend f linéaire de E dans F et g de F dans G. En comparant $Im(g\circ f)$ et $Im(g)$ puis en comparant $Ker(g\circ f)$ et $Ker(f)$, montrez : $dim(Im(g\circ f)) \leqslant dim(Im(f))$ et $dim(Im(g\circ f)) \leqslant dim(Im(g))$.

Mais c'est du cours ! $Im(g\circ f) \subset Im(g)$ les éléments de $Im(g\circ f)$ sont des $g(f(\overrightarrow{a}))$ donc des $g(\overrightarrow{b})$ particuliers.
On passe aux dimension : $rg(g\circ f) \leqslant rg(g)$.

Quand un vecteur vérifie $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{O_F}$ alors par linéarité il vérifie aussi $g(f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{O_G}$.On a donc $Ker(f) \subset Ker(g\circ f)$.
E, passant aux dimensions : $\dim(Ker(f)) \leqslant \dim(Ker(g\circ f))$.
E, passant aux codimensions [1] : $\dim(E) - \dim(Ker(f)) \geqslant \dim(E) - \dim(Ker(g\circ f))$.
On a donc cette fois : $rg(g\circ f) \leqslant rg(f)$.

◁12▷ Montrez pour f et g linéaires de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$: $Ker(f)\cap Ker(g) \subset Ker(f+g)$ (montrez qu'en général l'inclusion est stricte).
Montrez $Im(f+g) \subset Im(f) + Im(g)$ (et montrez qu'en général il n'y a pas égalité).

On prend $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f\cap Ker(g))$. Il vérifie $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$ et $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$. On somme : $(f+g)(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît que $\overrightarrow{a}$ est dans $Ker(f+g)$, d'où l'inclusion.

On se convainc qu'on peut avoir $f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0_F}$ pour d'autres raisons (vecteurs opposés sans être nuls).
On donne même un contre-exemple. le plus simple est de prendre carrément $f = Id$ et $g = -Id$.
Chaque somme $(f+g)(\overrightarrow{a})$ est nulle. Alors que $Ker(f)\cap Ker(g)$ est réduit à $\overrightarrow{0}$.

Un élément $\overrightarrow{u}$ de $Im(f+g)$ s'écrit $(f+g)(\overrightarrow{a})$. Il est la somme d'un élément $f(\overrightarrow{a})$ de $Im(f)$ et d'un élément $g(\overrightarrow{a})$ de $Im(g)$. Il est dans $Im(f) + Im(g)$.

Mais dans $Im(f) + Im(g)$, on a les éléments de la forme $f(\overrightarrow{a}) + g(\overrightarrow{c})$ sans rapport imposé entre $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{c}$.
L'élève sans expérience prend les définitions $Im(f) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in E\}$ et $Im(g) = \{g(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in E\}$ et peut écrire de grosses bêtises en ne surveillant pas ses variables et en appliquant des définitions au pied de la lettre sans chercher à comprendre.

◁13▷ P est le plan d'équation $x+y+z=0$. D est la droite d'équation $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Donnez la matrice sur la base canonique de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ de la projection sur P parallèlement à D. Donnez une base sur laquelle cette matrice est diagonale.

D a pour vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, c'est cadeau. Ce vecteur n'est pas dans P.
Le seul multiple de ce vecteur qui doit dans P est donc le vecteur nul.
L'intersection est réduite à $\overrightarrow{0}$, la formule de Grassmann fait le reste.

---

1. si si, c'est bien le mot : $codim(K) = \dim(E) - \dim(K)$

On décompose $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u}$ dans le plan.
On fait passer justement l'équation du plan (forme linéaire de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$) : $x+y+z = \lambda.(1+2+3)+0$.
On connaît λ, c'est $\dfrac{x+y+z}{6}$.

On décompose donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{x+y+z}{6}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x+y+z}{6}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\Big)$$

On projette en effaçant ce qui est sur d et en gardant ce qui est sur P :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{x+y+z}{6}.\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\Big)$$

On rassemble $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{5.x-y-z}{6} \\ \frac{-x+2.y-z}{3} \\ \frac{-x-y+z}{2} \end{pmatrix}$.

On extrait une matrice : $\boxed{\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$ dont on vérifie qu'elle projette $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur $\overrightarrow{0}$ et que les images vérifient $x+y+z=0$ [2].
On regarde aussi si la trace vaut bien 2. Et on élève la matrice au carré, on retrouve la même.

Ce qui est déprimant après pour le professeur, c'est de voir des élèves dire « bon pour diagonaliser la matrice, je calcule le polynôme caractéristique, je trouve les valeurs propres, je regarde la dimension de chaque sous-espace propre »...
Que faire de tels élèves ? Leur dire retourne passer le bac, le brevet, je ne sais quel examen de recrutement de trucs obéissants, et on reviendra dans trois ans pour « ingénieur », quand tu auras pris un peu de recul...

C'est très facile :
$\boxed{\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ se diagonalise en } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec pour matrice de passage } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.}$
Et comme c'est mon jour de gentillesse, j'explique.

La valeur propre 1 correspond aux vecteurs $\overrightarrow{a}$ vérifiant $p(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{a}$.C'est P. Dimension 2, base $\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\Big)$.

La valeur propre 0 correspond aux vecteurs $\overrightarrow{k}$ vérifiant $p(\overrightarrow{k}) = \overrightarrow{0}$.C'est D, dont une base est connue.

D'ailleurs, certains élèves ont peut être justement trouvé la matrice $\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en disant que p s'exprimait mieux sur la base adaptée

$$\Big(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\Big)$$

◃ 14 ▹ ♡ Complétez $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$ *(notée A)* en matrice de projecteur. Déterminez alors noyau et image.
Montrez que $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez en une base et la dimension.

On veut $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & \end{pmatrix}$. La seule réponse est $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

---

2. facile $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$

Pour le noyau, on résout $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.On trouve $Ker(p) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x+y=0\} = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$, de dimension 1.

Les deux vecteurs colonne $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ engendrent l'image $Im(p) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + 2.y = 0\}$. On confirme : dimension 1.

Inutile de perdre du temps avec les stabilités de $\{M \in M_2(\mathbb{R}) \mid A.M = M.A\}$, c'est le noyau de $M \longmapsto A.M - M.A$.
On pose quatre coefficients et résout

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On s'attend à quatre équations et on les a : $\begin{array}{rrrrcrr} 2.x & & +2.z & & = & 2.x & -y \\ & 2.y & & +2.t & = & 2.x & -y \\ -x & & -z & & = & 2.z & -t \\ & -y & & -t & = & 2.z & -t \end{array}$

Mais deux ne servent plus à rien : $y = -2.z$ et $t = x + 3.z$, c'est tout ce qu'il reste.
Les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} x & -2.z \\ z & x+3.z \end{pmatrix}$. On trouve $Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix})$. Dimension 2.

Remarque : Il est normal d'y trouver I_2 (puisque $A.I_2 = I_2.A$) et A elle même $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (puisque $A.A = A.A$).

◁15▷ ♣ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur. Retrouvez son rang, son noyau.
Pardon ? la question semble absurde ? Alors j'ajoute « surtout, l'entier modulo lequel on travaille $(\{0, 1, \ldots p-1\}, +, \times)$ ».
Déterminez dimension et cardinal de l'ensemble des matrices permutables avec M.

Si on élève cette matrice au carré, sans congruence, on trouve $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 16 & 17 & 18 & 14 \\ 8 & 8 & 15 & 12 \\ 11 & 11 & 3 & 10 \end{pmatrix}$.

Ce n'est pas M. Sauf si tout est réduit modulo 5.
On travaille donc avec les entiers modulo 5 *(c'est un corps)*.

La trace vaut 2, ce projecteur est de rang 3. Son image et son noyau sont tous deux de dimension 2.

Il est évident que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs indépendants, et $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ l'est aussi, sinon comment obtenir ses deux 0 ?

En revanche, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4.\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ (obtenu par tâtonnements).

On trouve que donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est dans le noyau. Pardon, $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Ou même $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Ensuite, on doit trouver les matrices permutables avec M.
Si on attaque de front, on a seize équations et seize inconnues : $M.N = N.M$... Non, pitié.

Mais si on commence par diagonaliser M en $P.D.P^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisque on a un projecteur de rang 3 (et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, la base adaptée).

L'équation $M.N = N.M$ est équivalente à $P.D.P^{-1}.N = N.P.D.P^{-1}$ et même $D.P^{-1}.N.P = P^{-1}.N.P.D$.
En posant $A = P^{-1}.N.P$, l'équation se ramène à $A.D = D.A$.

Remarque | En fait, c'est tout bête. La relation $M.N = N.M$ dit qu'on a deux morphismes qui commutent « sur la base canonique ». On demande ensuite qu'ils commutent sur la base adaptée, en transformant M en D et dans le même temps eN en $P^{-1}.N.P$.

Et là, c'est facile :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a' & a'' & a''' \\ b & b' & b'' & b''' \\ c & c' & c'' & c''' \\ d & d' & d'' & d''' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

annule quelques coefficients et il reste la forme nécessaire et suffisante

$$\begin{pmatrix} a & a' & a'' & 0 \\ b & b' & b'' & 0 \\ c & c' & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d''' \end{pmatrix}$$

On sent l'espace de dimension 10.

Et les matrices cherchées sont de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & a' & a'' & 0 \\ b & b' & b'' & 0 \\ c & c' & c'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d''' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$.

Remaarque | La dimension de l'espace des solutions est 9.
Et son cardinal est 5^9.

Oui, il ne faut pas confondre dimension *(nombre d'éléments d'une base)* et cardinal *(nombre d'élément, infini dès qu'on travaille sur $\mathbb{R}$)*.

◃16▹ $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel. f et g sont deux endomorphismes vérifiant $f \circ g = Id_E$. Montrez $Ker(g \circ f) = Ker(f)$. Montrez : $Im(g \circ f) = Im(g)$. Déduisez $E = Ker(f) \oplus Im(g)$. *Attention, on ne pourra pas utiliser la formule du rang. Il n'est indiqué nulle part que l'on soit en dimension finie.*

Comme ce sont des endomorphismes, on peut les composer comme on veut.
On sait $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$, c'est du cours.
On sait aussi $Ker(g \circ f) \subset Ker(g \circ f \circ g) = Ker(g)$. Et hop, zéro effort.

On sait aussi $Im(g \circ f) \subset Im(g)$.
Mais de même $Im(g \circ f \circ g) \subset Im(g \circ f)$. Double inclusion. Fini !

On regarde ensuite $g \circ f$ car on a nous a orienté sur lui.
On l'appelle p. Vous me voyez venir ?

$$p \circ p = (g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$$

p est un projecteur.

On a donc $E = Ker(Id - p) \oplus Ker(p) = Im(p) \oplus Ker(p)$. Avec les double inclusions précédentes :

$$E = Im(g \circ f) \oplus Ker(g \circ f) = Im(g) \oplus Ker(f)$$

Remarque | Exercice de pure algèbre linéaire. Quelques résultats tout simples du cours à emboiter. Quelques idées toutes simples à utiliser...
Zéro calcul de bourrin. Presque rien à apprendre par cœur.
Juste des initiatives à prendre car il n'y a pas de feuille de route toute prête.

◃17▹ Montrez que $\frac{1}{29}.\begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 \\ 8 & 16 & 12 \\ 6 & 12 & 9 \end{pmatrix}$ est un projecteur orthogonal (projecteur dont le noyau est orthogonal à l'image).

Le plus passionnant : vérifier $M^2 = M$ (projecteur).

Le plus rapide : ${}^tM = M$. Le projecteur est donc orthogonal.

Par acquit de conscience : $Im(p) = Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix})$ puisque les trois vecteurs colonne sont des multiples de celui ci.

$Ker(p)$ doit donc être le plan d'équation $2.x + 4.y + 3.z = 0$ (vecteur normal $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$). Et justement, c'est bon.

On projette sur une droite, parallèlement à un plan.

On reconstruit avec l'aide de $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 4/\sqrt{29} \\ 3/\sqrt{29} \end{pmatrix}$ qui est normé : $\overrightarrow{a} \longmapsto (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{n}) \times \overrightarrow{n}$.

Et la matrice est bien $\begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} \\ 4/\sqrt{29} \\ 3/\sqrt{29} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2/\sqrt{29} & 4/\sqrt{29} & 3/\sqrt{29} \end{pmatrix}$.La matrice en ligne pour calculer $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{a}$ et la matrice colonne pour faire $\times\overrightarrow{n}$.

◁18▷ Calculez $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & x^2 \end{vmatrix}$. plus généralement, soit $(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_k})$ une famille orthonormée d'un espace vectoriel euclidien $(E, +, ., \phi)$ et $\overrightarrow{v}$ un vecteur *(pas forcément dans $Vect(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_k})$)*. Calculez le déterminant de Gram $|G(\overrightarrow{u_1}, \ldots \overrightarrow{u_k}, \overrightarrow{v})|$.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ a & b & c & x^2 \end{vmatrix}$ se calcule en soustrayant chaque ligne sur la dernière, avec le bon coefficient.

$L_4 \leftarrow L_4 - a.L_1 - b.L_2 - c.L_3$On a alors $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & x^2 - a^2 - b^2 - c^2 \end{vmatrix}$.

La matrice est triangulaire, le déterminant vaut $x^2 - a^2 - b^2 - c^2$ et plus généralement $x^2 - \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2$.

On va travailler avec deux vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ pour ne pas trainer de points de suspension.

La matrice de Gram de la famille $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{a})$ est alors $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1} \\ 0 & 1 & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1} \\ \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{a}||^2 \end{pmatrix}$.

Le déterminant vaut $||\overrightarrow{a}||^2 - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1})^2 - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2})^2$.
Ça commence à ressembler une formule de Parseval.
Si on complète $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$ en base orthonormée de $(E, +, .)$ $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}, \ldots \overrightarrow{u_n})$, alors on décompose
$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1}) \times \overrightarrow{u_1} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2}) \times \overrightarrow{u_2} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_3}) \times \overrightarrow{u_3} + \ldots + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_n}) \times \overrightarrow{u_n}$
avec $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1}) \times \overrightarrow{u_1} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2}) \times \overrightarrow{e_2}$ dans $Vect(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ et $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_3}) \times \overrightarrow{u_3} + \ldots + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_n}) \times \overrightarrow{u_n}$ dans son orthogonal.
La quantité $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1})^2 + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2})^2$ est le carré de la norme du projeté.
et la différence $||\overrightarrow{a}||^2 - (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_1})^2 + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_2})^2$ coïncide avec $(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_3})^2 + \ldots + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{u_n})^2$.
C'est le carré de la norme de $\overrightarrow{a} - p(\overrightarrow{a})$.

C'est le carré de la distance de $\overrightarrow{a}$ au plan $Vect(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

◁19▷ ♡ Combien des 120 permutations de la liste $[a, b, c, d, e]$ laissent invariant le produit $b.c.d$?

◁20▷ Montrez que la dérivation est un endomorphisme de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y^{(3)} + 6.y = 2.y'' + 5.y'$. Donnez son déterminant et sa trace.

La dérivation est linéaire, elle l'a toujours été et le restera.
Et si y est solution de l'équation, alors en dérivant on a aussi $y^{(4)} + 6.y' = 2.y^{(3)} + 5.y''$, ce qui nous dit que y' (image de y) est encore dans l'ensemble. le caractère « endo » est établi.

Pour sa trace et son déterminant, il faudrait l'écrire sur une base.
Laquelle ? Par exemple $(t \longmapsto e^t,\ t \longmapsto e^{3.t},\ t \longmapsto e^{-2.t})$ qui forme bien une base de notre ensemble des solutions.

Sur cette base, la matrice de la dérivation est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ puisque les exponentielles sont des vecteurs propres de la dérivation.
La trace vaut 2 et le déterminant -6.

On aurait pû aussi se dire que faute de chance, on avait une application y que l'on ne savait pas si bien décomposer sur une base d'exponentielle.
On peut même se dire que la famille $(y,\ y',\ y'')$ est libre (mais pas $(y,\ y',\ y'',\ y^{(3)})$ puisque le dernier est combinaison des autres : $y^{(3)} = 2.y'' + 5.y' - 6.y$).
C'est alors une base de l'espace des solutions.
La matrice de la dérivation est alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (comprenez vous pourquoi ?).
On trouve la même trace et le même déterminant.

◁21▷ ♡² Complétez $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ & 5 & \\ -1 & & 4 \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que le noyau de $X \longmapsto A.X$ soit $Vect(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et son ensemble image le plan d'équation $y = x + z$. Calculez $\det(A)$. Donnez alors le rang de A, A^2 et plus généralement A^n pour tout n.
Indiquez suivant la valeur de c le nombre de solutions de l'équation $A.U = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$.
On pose : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -1 & 2 & \end{pmatrix}$ *(en complétant R pour qu'elle soit inversible)*. Calculez sans effort $R^{-1}.A.S$.
Résolvez l'équation $A.M = 0_3$ d'inconnue M dans $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$.
Quel est le rang de $M \longmapsto A.M$, de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même.

◁22▷ ♡ Calculez $Tr(M \longmapsto {}^t M)$. Attention, il ne s'agit pas de comparer $Tr(M)$ et $Tr({}^tM)$, il s'agit d'un endomorphisme de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
Calculez aussi son déterminant.

Choisissons une base adaptée à notre endomorphisme pour déterminer sa matrice.
On prend une base de $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$, une base de $(A_n(\mathbb{R}), +, .)$ et on les colle bout à bout. On a une base de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$.
On note φl'application $M \longmapsto^t M$.
• Pour chaque élément de $(S_n(\mathbb{R}), +, .)$, on a $\varphi(S) = S$, d'où des 1 sur la diagonale.
• Pour chaque élément de $(A_n(\mathbb{R}), +, .)$, on a $\varphi(A) = -A$, d'où des -1 sur la diagonale.

La matrice de φ sur notre base adaptée est faite de

$\frac{n.(n+1)}{2}$	nombres 1
$\frac{n.(n-1)}{2}$	nombres -1

La trace vaut $\frac{n.(n+1)}{2}.1 + \frac{n.(n-1)}{2}.(-1)$ d'où n.
Le déterminant vaut $1^{\frac{n.(n+1)}{2}}.(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$ d'où $(-1)^{\frac{n.(n-1)}{2}}$.

◁23▷ On travaille avec le corps des entiers de 0 à $11-1$ (11 est un nombre premier) pour l'addition et la multiplication modulo 11. Déterminez dimension de l'image et du noyau de $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ 2.x & +3.y & +z \\ x & +3.y & 6.z \end{pmatrix}$.

Sait on jamais ! Et si c'était un isomorphisme ? Ce serait réglé.
Sarrus dit : $18 + 6 + 1 - (3 + 3 + 12) = 7$.
Bon, voilà, le noyau est réduit à $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et l'image est $\{0,\ 10\}^3$.

◁24▷ ♡ Soient $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux espaces vectoriel ; soit f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$; soient A et B deux sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$. Montrez l'équivalence entre $f(A) = f(B)$ et $A + Ker(f) = B + Ker(f)$.

Premier sens : On suppose $f(A) = f(B)$.
On doit prouver une double inclusion.
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $A + Ker(f)$. Il s'écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{k}$ avec des notations évidentes.
On calcule comme par hasard $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{0}$.
$f(\overrightarrow{a})$ est dans $f(A)$. Il est donc dans $f(B)$ et s'écrit $f(\overrightarrow{b})$ pour un $\overrightarrow{b}$ bien choisi de B.
On a donc $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{b})$ puis $f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$.
On reconnait que $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{b}$ est dans $Ker(f)$. On l'écrit $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{b} = \overrightarrow{c}$ et on obtient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$, il est dans $B + Ker(f)$.

L'inclusion $B + Ker(f) \subset A + Ker(f)$ repose sur la symétrie des rôles de A et B.

Deuxième sens. On suppose $A + Ker(f) = B + Ker(f)$.
On doit prouver $f(A) = f(B)$. Contentons nous de $f(A) \subset f(B)$.
On prend un vecteur $\overrightarrow{v}$ dans $f(A)$. Il s'écrit $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{a})$ pour un $\overrightarrow{a}$ de A.
$\overrightarrow{a}$ est dans A, on l'écrit $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{0}$ et le voilà dans $A + Ker(f)$.
Il est donc dans $B + Ker(f)$ et s'écrit $\overrightarrow{b} + \overrightarrow{k}$ pour un $\overrightarrow{b}$ de B et un $\overrightarrow{k}$ de $Ker(f)$.
Ayant $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{k}$, on applique f : $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{a}) = f(\overrightarrow{b}) + \overrightarrow{0}$.
Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est dans $f(B)$. Gagné.

◃25▹ $(E, +, .)$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. Est il possible de construire f et g endomorphismes de $(E, +, .)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(1 + X,\ 1 + 2.X^2 + X^3)$ et $Ker(g \circ f) = \{P(X) \in E \mid P(1) = 0\}$? Est il possible de construire f et g endomorphismes de $(E, +, .)$ vérifiant $Ker(f) = Vect(1 + X,\ 1 + 2.X^2 + X^3)$ et $Ker(g \circ f) = Vect(2 + X + 2.X^2 + X^3,\ X^3 + 2.X^2 - X)$?

L'espace vectoriel $(E, +, .)$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est $Vect(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$, et est de dimension 4. On veut $Ker(f) = Vect(1 + X,\ 1 + 2.X^2 + X^3)$ *(de dimension 2, donc f de rang 2)* et $Ker(g \circ f) = \{P(X) \in E \mid P(1) = 0\}$ *(de dimension 3, donc $g \circ f$ de rang 1)*.
Rappelons que $\{P(X) \in E \mid P(1) = 0\}$ est $Vect((X - 1),\ (X - 1)^2,\ (X - 1)^3)$ ou est le noyau d'une forme linéaire.
Un résultat connu : $Ker(f) \subset Ker(g \circ f)$ puisque $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0} \Rightarrow g(f(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$.
Or, ici, les vecteurs de base de $Ker(f)$ ne sont pas dans $Ker(g \circ f)$. C'est donc impossible.

On recommence avec $Ker(f) = Vect(1 + X,\ 1 + 2.X^2 + X^3)$ *(dimension 2)* et $Ker(g \circ f) = Vect(2 + X + 2.X^2 + X^3,\ X^3 + 2.X^2 - X)$ *(dimension 2 aussi)*.
Pour avoir la condition d'inclusion, il faut donc avoir égalité des deux ensembles. Il faut donc pouvoir passer de vecteurs de base de $Ker(f)$ aux vecteurs de base de $Ker(g \circ f)$.
On constate $2 + X + 2.X^2 + X^3 = (1 + X) + (1 + 2.X^2 + X^3)$ et $X^3 + 2.X^2 - X = -(1 + X) + (1 + 2.X^2 + X^3)$.
On a égalité ici dans ce que l'on exige : $Ker(f) = Ker(g \circ f)$. Il suffit donc de prendre f de noyau approprié et g bijectif.

◃26▹ Ajustez pour qu'elle soit de rang 2 : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & & 5 & 0 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix}$. Donnez alors le rang de A^2 et A^3.

On demande à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & & 5 & 0 \\ 1 & & 1 & \end{pmatrix}$ d'être de rang 2. C'est à dire qu'elle doit être formée de colonnes n'engendrant qu'un espace vectoriel de dimension 2 *(a priori on s'attend à la dimension 4 vu le format)*.
Or, les colonnes 1 et 3 sont déjà linéairement indépendantes et engendrent un plan. C'est donc que les colonnes 2 et 4 sont combinaisons de ces deux colonnes.

On résout donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ ? \\ ? \end{pmatrix} = a.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} ? \\ 1 \\ 0 \\ ? \end{pmatrix} = c.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On résout des petits systèmes 2 sur 2 et on peut compléter la matrice

$: \boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}}$

On commence à calculer A^2 et si on va au bout, on trouve $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 6 \\ 10 & 13 & 23 & -4 \\ 15 & 21 & 36 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Elle est de rang 2. En effet, on peut trouver des combinaisons entre ces colonnes.
Mais il suffit de réfléchir. par composition *(et donc par multiplication matricielle)*, le rang ne peut que diminuer. Celui de A^2 vaut donc 0, 1 ou 2. Mais la matrice n'est pas nulle : il ne vaut pas 0. La matrice n'est pas faite de colonnes toutes proportionnelles. Le rang ne vaut pas 1. Par élimination, il vaut 2.

On l'a sans effort ; il suffit d'être matheux ou matheuse. On réfléchit, et si nécessaire, on calcule. Comme à chaque fois...
Si vous avez calculé A^2 puis appliqué des formules pour trouver le rang (plus grand format de déterminant non nul...), alors, vous réussirez de bons concours... mais pas grâce aux maths.

Le rang n'a pas diminué de A à A^2, il ne diminuera plus : $\boxed{rg(A) = rg(A^2) = rg(A^3) = 2}$

◃27▹ A est une matrice donnée dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrez que $M \to Tr(A.M)$ est une forme linéaire de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$. Donnez son rang.
Montrez que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to a + b - c + 2.d$ est une forme linéaire de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ et trouvez A telle qu'elle se mette sous la forme $M \to Tr(A.M)$.
Montrez que $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \to a + b - c + 2.a' + b' - 4.c' + a''$ est une forme linéaire de $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$ et trouvez A telle qu'elle se mette sous la forme $M \to Tr(A.M)$.
On veut montrer que toute forme linéaire de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ se met sous la forme $A \to Tr(A.M)$.
Pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{R})$, on définit $\varphi_A = (M \to Tr(A.M))$. Comparez $\varphi_{\alpha.A+\beta.B}$ et $\alpha.\varphi_A + \beta.\varphi_B$.
Déterminez $\varphi_A({}^tA)$. Déduisez que φ_A est la forme nulle si et seulement si A est la matrice nulle.
Concluez en étudiant $\dim(L(M_n(\mathbb{R}), R))$ et $rg(A \to \varphi_A)$.

A faire.

◃28▹ ♡ Soit f linéaire de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ et A (respectivement B) un sous espace vectoriel de $(E, +, .)$ (respectivement de $(F, +, .)$).
Montrez celle des deux qui est vraie : $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$ ou bien $f^{-1}(f(A)) = A \cap Ker(f)$.

Celle qui est vraie : $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$.
$\boxed{f^{-1}(f(A)) \subset A + Ker(f)}$
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $f^{-1}(f(A))$.
On traduit : $f(\overrightarrow{u}) \in f(A)$.
$f(\overrightarrow{u})$ est donc de la forme $f(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de A.
Mais alors $f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ par linéarité.
On en déduit $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a} \in Ker(f)$.
On écrit alors $\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{a}$.
Il est la somme d'un élément de $Ker(f)$ et d'un élément de A, il est dans $Ker(f) + A$.

$\boxed{A + Ker(f) \subset f^{-1}(f(A))}$
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $A + Ker(f)$.
On l'écrit donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{k}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{k}$ dans $Ker(f)$.
On calcule, comme par hasard : $f(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{a}) + \overrightarrow{0}$.
On reconnait que $f(\overrightarrow{u})$ est dans $f(A)$ puisqu'il s'écrit $f(\overrightarrow{a})$ pour $\overrightarrow{a}$ dans A.
C'est la définition de $\overrightarrow{u} \in f^{-1}(f(A))$.

Montrez celle des deux qui est vraie : $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$ ou bien $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$.
On rappelle, pour éviter les âneries : $f(A) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in A\}$ et $\overrightarrow{b} \in f(A) \Leftrightarrow (\exists \overrightarrow{a} \in A,\ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\}$ et $f^{-1}(B) = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) \in B\}$. Et on conseille que si ce type de définition vous dépasse, allez relire les coefficients des maths aux concours suivant la filière...

Cette fois, $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$, puisqu'on n'a pas le choix !

$\boxed{f(f^{-1}(B)) \subset B \cap Im(f)}$
On prend $\overrightarrow{u}$ dans $f(f^{-1}(B))$. Il s'écrit donc $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{v})$ pour au moins un $\overrightarrow{v}$ de $f^{-1}(B)$.
Déjà, comme il s'écrit $f(\overrightarrow{v})$ il est dans $Im(f)$.
Mais de plus, par définition de $\overrightarrow{v} \in f^{-1}(B)$, on a $f(\overrightarrow{v}) \in B$ et donc $\overrightarrow{u} \in B$.
Étant à la fois dans $Im(f)$ et dans b, $\overrightarrow{u}$ est dans $Im(f) \cap B$.

$\boxed{B \cap Im(f) \subset f(f^{-1}(B))}$
On prend b dans $Im(f) \cap B$.
Il est dans B et il s'écrit $f(\overrightarrow{u})$ pour au moins un vecteur $\overrightarrow{u}$ de E.
Mais ce vecteur $\overrightarrow{u}$ vérifie $f(\overrightarrow{u}) \in B$, puisque $f(\overrightarrow{u})$ c'est $\overrightarrow{b}$.
$\overrightarrow{u}$ est donc dans $f^{-1}(B)$.
$\overrightarrow{b}$ est l'image d'un $\overrightarrow{u}$ de $f^{-1}(B)$. Il est dans $f(f^{-1}(B))$.

Et nulle part je n'ai inventé des $f^{-1}(f(\overrightarrow{a}))$ puisque f^{-1} n'existe pas forcément.

Prenez des exemples avec $f = P \longmapsto P'$ de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même.

◃29▹ On pose $E = (\mathbb{R}_3[X], +, .)$. Montrez que $P \longmapsto (X^2+1).P(1) + (X+1).P'(X)$ est un endomorphisme de E. Donnez sa matrice sur la base canonique. Est elle inversible ? Donnez le noyau et l'image de cet endomorphisme.

L'image d'un polynôme est un polynôme.
L'opérateur est linéaire : $P+Q \longmapsto (X^2+1).(P+Q)(1) + (X+1).(P+Q)'(X)$
$P+Q \longmapsto (X^2+1).P(1) + (X+1).P'(X) + (X^2+1).Q(1) + (X+1).Q'(X)$
$\lambda.P \longmapsto (X^2+1).(\lambda.P)(1) + (X+1).(\lambda.P)'(X)$
$\lambda.P \longmapsto \lambda.((X^2+1).P(1) + (X+1).P'(X))$
Le degré n'augmente pas. Il suffit de l'observer sur une base :

1	X	X^2	X^3
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
X^2+1	X^2+X+2	$3.X^2+2.X+1$	$3.X^3+4.X^2+1$

Avec ces calculs fort utiles, on trouve la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
L'erreur à ne surtout pas commettre : mettre des X dans la matrice.
Les x sont des vecteurs (éléments de l'espace des polynômes). Dans la matrice, on ne met que des coefficients.

Elle est inversible.

Le noyau est donc réduit à 0 *(polynôme nul)*.
Et l'image est $\mathbb{R}_3[X]$ tout entier.

◃30▹ Donnez un endomorphisme de $(\mathbb{R}^2, +, .)$ de noyau $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})$ et d'image $Vect(\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})$. Y a-t-il plusieurs solutions ? Et si on impose que son déterminant soir nul ? Et si on impose que sa trace vaille 4 ?

Le plus simple pour le définir est de donner sa matrice sur la base canonique.
Ce sera une matrice de taille 2 sur 2.
Les colonnes seront des multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, donc la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$.
Mais on veut aussi $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où une relation entre a et b.
Finalement, on trouve les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$.
Nécessaire. Et suffisant.
On a une infinité de solutions.

Imposer $\det(M) = 0$ n'apporte rien. De toutes façons, comme on a un noyau non réduit à $\overrightarrow{0}$, le déterminant est nul.

Avec une trace égale à 4, on n'a qu'une solution : $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

◁31▷ Soit f linéaire de $(E,+,.)$ dans $(F,+,.)$ et A (respectivement B) un sous espace vectoriel de $(E,+,.)$ (respectivement de $(F,+,.)$).
Montrez celle des deux qui est vraie : $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$ ou bien $f^{-1}(f(A)) = A \cap Ker(f)$.
Montrez celle des deux qui est vraie : $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$ ou bien $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$.
On rappelle, pour éviter les âneries : $f(A) = \{f(\overrightarrow{a}) \mid \overrightarrow{a} \in A\}$ et $\overrightarrow{b} \in f(A) \Leftrightarrow (\exists \overrightarrow{a} \in A,\ f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\}$ et $f^{-1}(B) = \{\overrightarrow{u} \in E \mid f(\overrightarrow{u}) \in B\}$.

Commençons par $f^{-1}(f(A))$.
Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est dedans si et seulement si $f(\overrightarrow{u})$ est dans $f(A)$ (définition de $\overrightarrow{u} \in f^{-1}(B)$).
Ceci équivaut à $f(\overrightarrow{u})$ est de la forme $f(\overrightarrow{a})$ pour au moins un $\overrightarrow{a}$ de E (défnition de $f(A)$).
Mais la relation $f(\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{a})$ donne $f(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$ par linéarité puis $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a} \in Ker(f)$.
On a donc obtenu que $\overrightarrow{u}$ est la somme $\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{a})$ d'un élément de A et d'un élément de $Ker(f)$.
On a prouvé $(\overrightarrow{u} \in f^{-1}(f(A))) \Rightarrow (\overrightarrow{u} \in A + Ker(f))$.
De fait, c'est m)eme une équivalence.
Pour une application linéaire, on a donc $f^{-1}(f(A)) = A + Ker(f)$.

Pourrait on avoir quand même $f^{-1}(f(A)) = A \cap Ker(f)$?
Il faudrait avoir $A + Ker(f) = A \cap Ker(f)$ et donc $A = Ker(f)$!

Prenons B inclus dans F ensemble d'arrivée. $f^{-1}(B)$ est une partie de E.
Et $f(f^{-1}(B))$ est une partie de F. On peut comparer avec B et $Im(f)$.

Prenons $\overrightarrow{v}$ dans $f(f^{-1}(B))$. C'est donc l'image d'un élément $\overrightarrow{a}$ de $f^{-1}(B)$.
Mais que signifie $\overrightarrow{a} \in f^{-1}(B)$? Tout simplement $f(\overrightarrow{a}) \in B$.
On a donc à la fois $\overrightarrow{v} = f(\overrightarrow{a})$ et $f(\overrightarrow{a}) \in B$.
Mettons bout à bout : $\overrightarrow{v}$ est dans B mais aussi dans $Im(f)$.

On a donc $f(f^{-1}(B)) = B \cap Im(f)$.

Là encore, il faut s'assurer qu'on a raisonné par équivalences.
Prenons $\overrightarrow{b}$ dans $B \cap Im(f)$.
Il est dans B et s'écrit $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{a})$ pour un $\overrightarrow{a}$ de E.
Mais comme $f(\overrightarrow{a})$ est dans B, on a $\overrightarrow{a} \in f^{-1}(B)$.
$\overrightarrow{b}$ est l'image d'un élément de $f^{-1}(B)$. Il est danc dans $f(f^{-1}(B))$.

◁32▷ Promenons nous dans les bois pendant que le loup n'y est pas ; si le loup y était il nous mangerait. Mais comme il n'y est pas il ne nous mangera pas.
Quantifiez (c'est à dire mettez des implications).

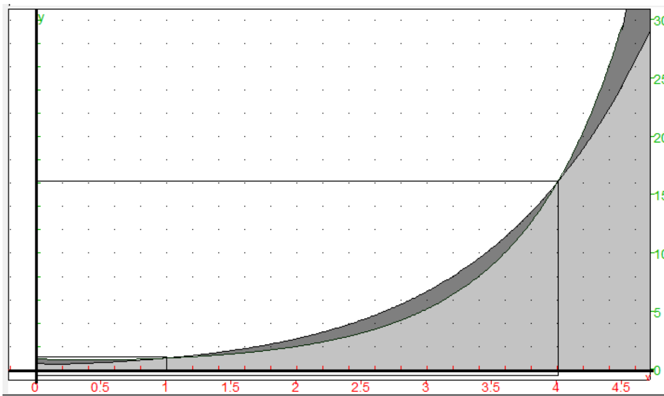
$loup \Rightarrow il\ mange$ et aussi $\overline{loup} \Rightarrow \overline{(il\ mange)}$.
On résume en $loup \Leftrightarrow (il\ mange)$ par contraposée.
Et la chanson n'est pas très logique.

◁33▷ Résolvez $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ d'inconnue réelle x *(peut on considérer que 0 est solution ?)*

x est forcément positif.
Et 0 est solution (on rappelle $0^0 = 1$ et c'est $o(1)^{o(1)}$ qui est indéterminé (avec des petits o)...
Et 1 est solution aussi.
Ensuite, pour résoudre, on passe au logarithme : $\sqrt{x}.\ln(x) = x.\ln(\sqrt{x})$.
L'équation devient $\left(\sqrt{x} - \dfrac{x}{2}\right).\ln(x) = 0$

$$\sqrt{x}.\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right).\ln(x) = 0$$

On a donc nos trois solutions (et elles seules) : $\boxed{0, 4 \text{ et } 1}$



◁ 34 ▷ Montrez que si f est paire et dérivable, alors f' est impaire.
Donnez un contre-exemple à "f impaire implique f' paire".

On suppose $\forall x,\ f(x) = f(-x)$ et on dérive : $\forall x,\ f'(x) = -f'(-x)$ (il sort un signe moins à droite à cause de la dérivation composée).
On reconnaît que f' est impaire.

Blague (véridique) : | Le prof demande à l'élève « montrez que f est impaire ». L'élève écrit « on calcule $f(2.n+1)$ ».

La preuve ci dessus semble donner « f impaire implique f' paire ».
Mais qui dit que f est dérivable.
Prenons $Signe = x \longmapsto \left\{\begin{array}{rcl} 1 & si & x > 0 \\ 0 & si & x = 0 \\ -1 & si & x < 0 \end{array}\right|$. Elle est impaire. Mais pas dérivable. En tout cas, pas dérivable en 0 car elle n'y est même pas continue...

◁ 35 ▷ A l'École Nationale de Robotique / Université de Technologie, cent cinquante élèves suivent les cours d'anglais, cent suivent les cours de chinois, trente sont bilingues (anglais/chinois) et quatre vingt dix ne suivent aucune de ces deux langues. Combien y a-t-il d'élèves ?

Bon, il n'y a pas de piège

	Anglais	pas Anglais	
Chinois	30		100
pas Chinois		90	
	150		

On complète pour les sommes en ligne et colonne

	Anglais	pas Anglais	
Chinois	30	70	100
pas Chinois	120	90	
	150		

Et on a le total : 310.

◁ 36 ▷ ♡ Étudiez $u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3+1}{3}$ *(discutez en fonction de u_0, en nommant les racines de l'équation $x^3+1 = 3.x$, sans chercher à les calculer).*

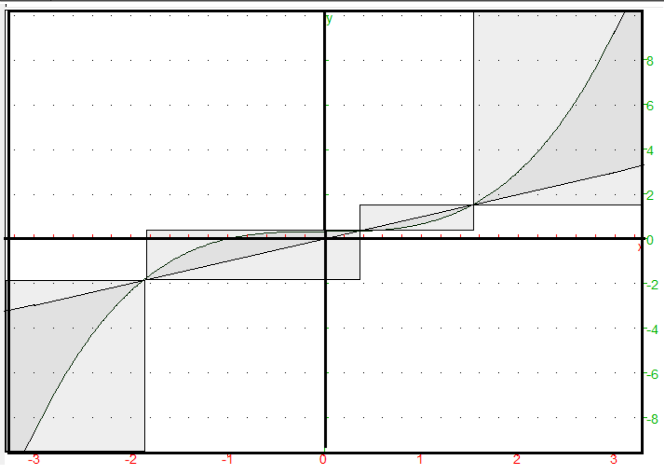
On décide de noter f l'application $x \longmapsto \dfrac{x^3+1}{3}$ (strictement croissante, ça pourra servir).

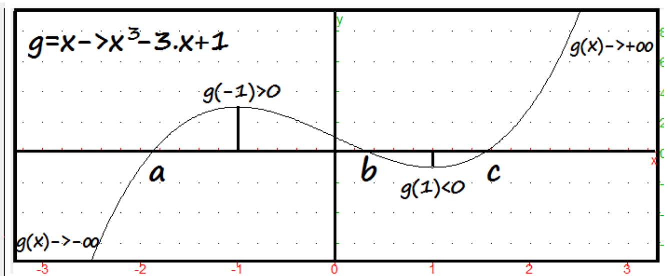
On en cherche les points fixes. On résout $x^3 - 3.x + 1 = 0$.
On montre qu'elle a trois solutions, en étudiant les variations de $x \longmapsto x^3 - 3.x + 1$ (notée g même si c'est juste $f - Id$).
g est croissante, décroissante, croissante.
Un maximum local est atteint en -1 et il vaut 3.
Un minimum local est atteint en 1 et il vaut -1.
Le théorème des valeurs intermédiaires lui donne trois solutions :
- une entre $-\infty$ et -1, notée a
- une entre -1 et 1, notée b (te même entre 0 et 1)
- une entre 1 et $+\infty$, notée c

On a dès lors quatre intervalles stables : $]-\infty,\ a[$, $]a,\ b[$, $]b,\ c[$ et $]c,\ +\infty[$.
A titre d'exemple, si x est entre a et b, on a $a < x < b$ puis $f(a) < f(x) < f(b)$ et donc $a = f(a) < f(x) < b = f(b)$.
Par récurrence immédiate : $u_0 \in]a,\ b[\Rightarrow (\forall n,\ u_n \in]a,\ b[)$.

Sur chacun des intervalles stables, la position du graphe par rapport à la bissectrice vient de l'étude de signe de g.

	$u_0 \in]-\infty,\ a[$	$u_0 = a$	$u_0 \in]a,\ b[$	$u_0 = b$	$u_0 \in]b,\ c[$	$u_0 = c$	$u_0 \in]c,\ +\infty[$
R	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]-\infty,\ a[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]a,\ b[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = b$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]b,\ c[$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = c$	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]c,\ +\infty[$
B	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$	C^{te}	$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$
C	converge ou file vers $-\infty$	converge	converge	converge	converge	converge	converge ou file vers $+\infty$
E	file vers $-\infty$						file vers $+\infty$
L	$-\infty$	a	b	b	b	c	$+\infty$
	cinq						

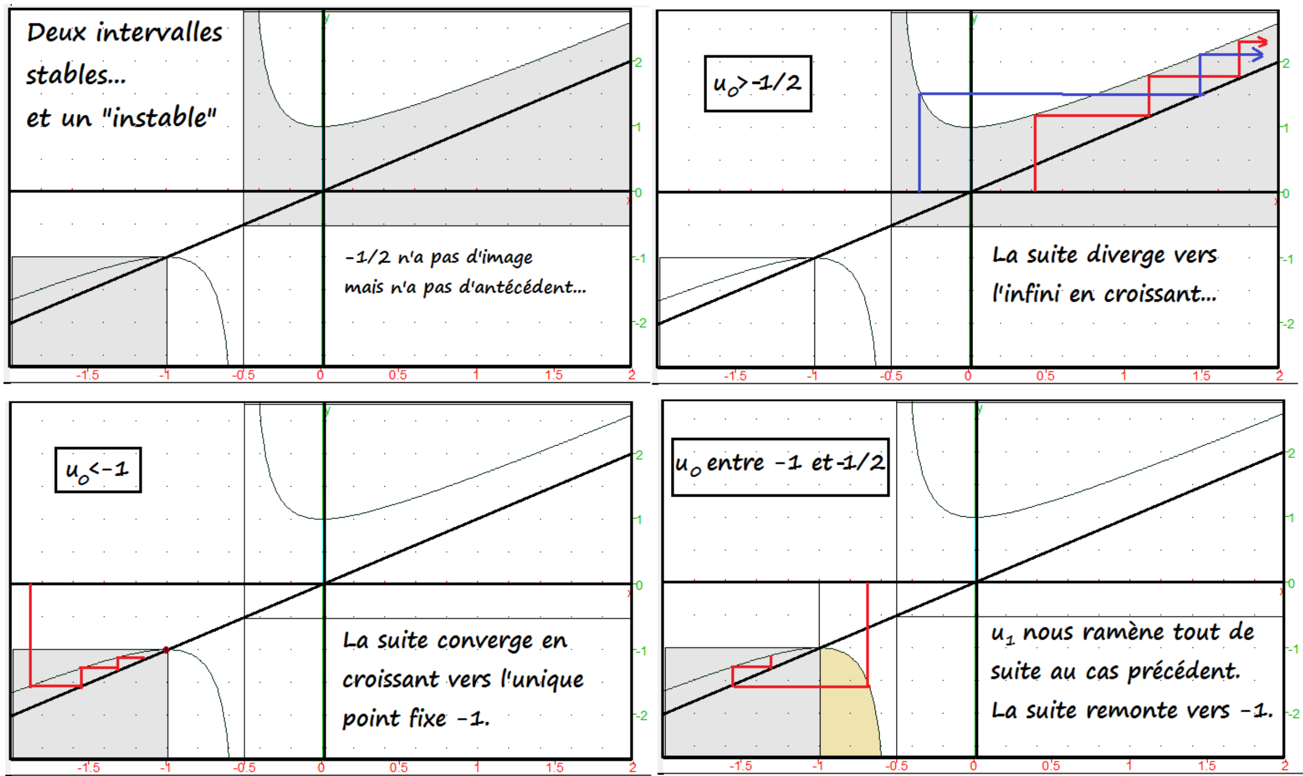




R c'est récurrence
B c'est position par rapport à la bissectrice
C c'est converge (croissante majorée)
ou « converge ou diverge vers un infini »
E c'est élimination pour refuser des limites inaccessibles (par exemple $u_n \leqslant u_0 < a$ pour tout n
donc si la limite existe : $\lim_{n\to+'\infty} u_n \leqslant u_0 < a$
elle ne peut valoir ni a ni b ni c
finalement, la suite ne peut pas converger
par élimination, la suite tend vers $-\infty$
L c'est pour limite

◁37▷ $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2.u_n}$. Vous savez ce qu'il vous reste à faire.[a]

a. t si vous ne savez pas : indiquez suivant la valeur de u_0 la croissance / décroissance, convergence de la suite



◁38▷ Petits exercices du cours :
a- La réciproque d'une application convexe est elle convexe ? concave ?
Qu'allez vous utiliser ? Déterminant ? Trois cordes ? Petite inégalité ? Grande inégalité ?
Et d'ailleurs, la réciproque existe-t-elle ?

Ce qui passe : •si f est convexe et strictement croissante alors f^{-1} est concave.
(pensez à $x \longmapsto e^x$ et sa réciproque le logarithme).
•si f est convexe et strictement croissante alors f^{-1} est concave.
(pensez à $x \longmapsto e^x$ et sa réciproque le logarithme).
• si f est à la fois convexe et concave (affine), sa réciproque est affine (convexe et concave).

Méthode : trois cordes.

rapide : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ a & b & c \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f(a) & f(b) & f(c) \\ f^{-1}(f(a)) & f^{-1}(f(b)) & f^{-1}(f(c)) \end{vmatrix}$ pour f croissante.

Et pour f décroissante, il faut intervertir les deux colonnes.

b- Si f est convexe et g convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Pour démontrer ça, qu'allez vous utiliser ? déterminant ? Trois cordes ? Petit inégalité ? grande inégalité ?

Petite inégalité.
On se donne x et y puis t entre 0 et 1 et on écrit successivement

$f((1-t).x + t.y) \leqslant (1-t).f(x) + t.f(y)$ — f convexe

$g(f((1-t).x + t.y)) \leqslant g((1-t).f(x) + t.f(y))$ — g croissante

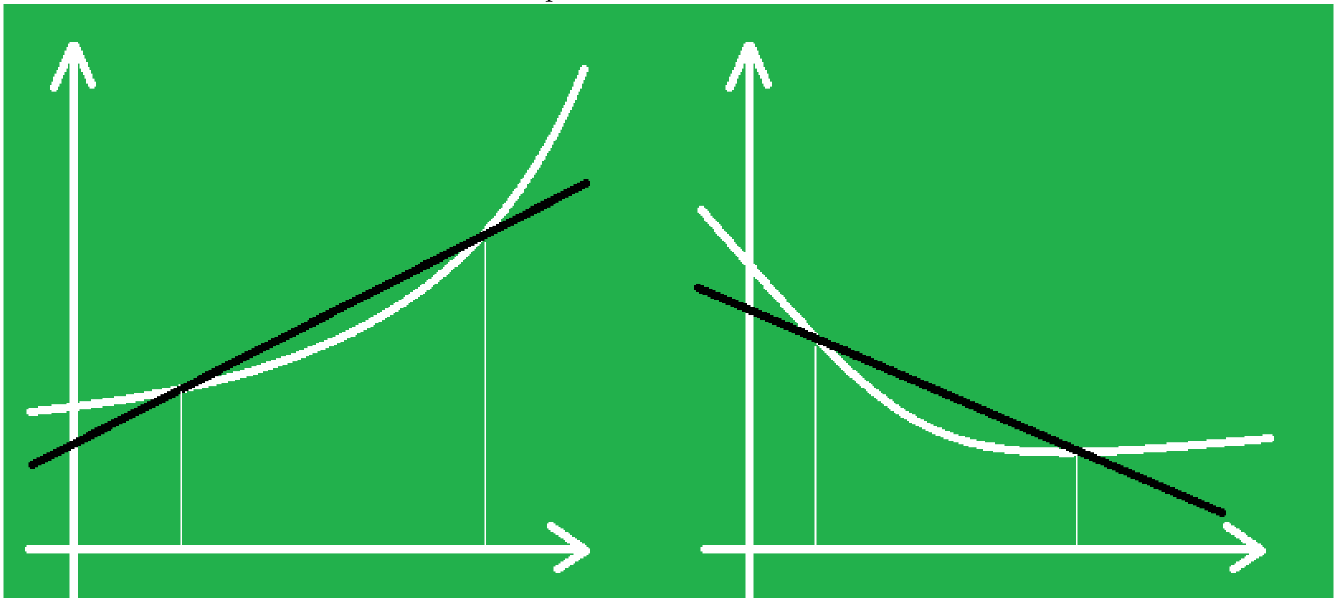
$g(f((1-t).x + t.y)) \leqslant g((1-t).f(x) + t.f(y)) \leqslant (1-t).g(f(x)) + t.g(f(y))$ — g convexe

Combien d'élèves tombent dans le piège et se contentent d'affirmer « f et g convexes donc $g \circ f$ convexe ».
Alors qu'il suffirait de les convaincre par f convexe et $g = x \longmapsto -x$...

c- Une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut elle être majorée ?

Oui si elle est constante...
Mais sinon, non. Et ça sert dans des exercices.
Pourquoi ? C'est très rapide, juste avec des mots et sans formules de dérivation et tout et tout.
Si elle n'est pas constante, il y a au moins une corde non horizontale.

Et hors du segment, elle doit être au dessus de cette corde. Il y a donc un côté (suivant le signe du coefficient directeur de la corde) où elle tend vers l'infini positif.



d- Pouvez vous construire f convexe de minimum 1 atteint à la fois en 2 et en 3 ?

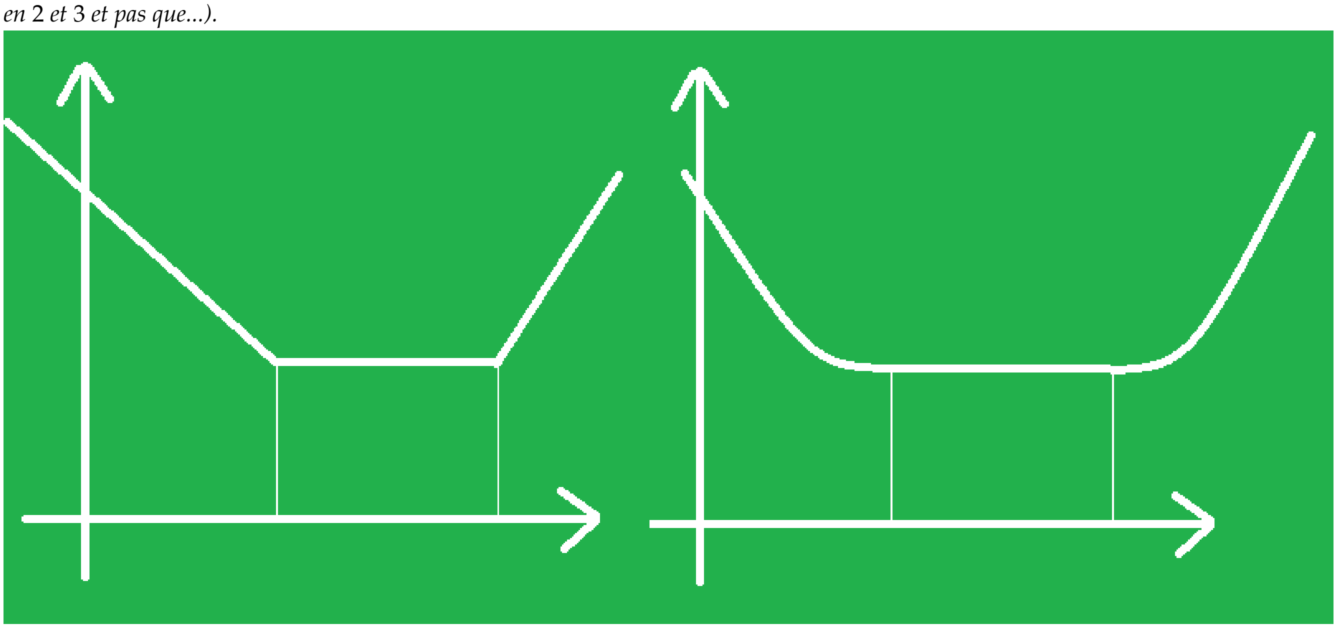
Oui. Il suffit qu'elle soit constante égale à 1 sur tout le segment entre 2 et 3.

On peut proposer $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x-1 & si & x \leqslant 2 \\ 1 & si & 2 < x < 3 \\ x-2 & si & x \geqslant 3 \end{array} \right|$. Elle est affine par morceaux et convexe.

On peut même demander à ce qu'elle soit dérivable. Même en 2 et 3 : $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} (x-2)^2+1 & si & x \leqslant 2 \\ 1 & si & 2 < x < 3 \\ (x-2)^2+1 & si & x \geqslant 3 \end{array} \right|$.

Le plus fort sera de réussir à construire des applications C^∞ avec un plateau sur tout un segment tel que $[2, 3]$ ici.

Et bien sûr il y avait la réponse (solution de facilité, donc pur matheux) : f est constante égale à 1. Elle a bien un minimum global 1 atteint en 2 et 3 et pas que...).



e- Si le graphe de f (dérivable) est toujours au dessus de ses tangentes, peut on déduire que f est convexe.

Déjà, si on parle de tangentes, f est dérivable, c'est un fait. Reste à savoir si sa dérivée est croissante.
Question finalement pas si évidente à prouver...
On va montrer l'inégalité des trois cordes pour tour triplet (a, b, c) avec $a < b < c$.

Le graphe est au dessus de la tangente en b. On a donc $\boxed{f(a) \geqslant f'(b).(a-b)+f(b)}$ $\boxed{f(c) \geqslant f'(b).(c-b)+f(b)}$

On tient compte des signes pour faire passer de l'autre coté ($c-b$ est positif mais $a-b$ est négatif) :

$\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)}$

$\boxed{\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} \geqslant f'(b)}$

On glisse $f'(b)$ au milieu : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b) \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ donc $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.

On replie en $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ et on développe en n'importe laquelle des trois inégalités sur les cordes.

On a établi la convexité de f.

Il y a donc équivalence entre « convexe » et « au dessus de ses tangentes », en tout cas dans le cas dérivable.

◃39▹ J'ai acheté deux hexaèdres réguliers (beh si : des dés à six faces) non équilibrés, mais tout deux du même modèle (mêmes probabilités pour chaque face). Je les ai lancés tant de fois que le tableau suivant me donne la probabilité d'obtenir les sommes de 2 à 12 :

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
$1/64$	$1/16$	$1/16$	$3/32$	$7/32$	$3/32$	$13/64$		$7/64$	$1/32$	$1/64$

Pouvez vous retrouver la case qui manque ?

Pouvez vous retrouver la loi de probabilité de chaque dé ?

$P(A=1)$	$P(A=2)$	$P(A=3)$	$P(A=4)$	$P(A=5)$	$P(A=6)$
$P(B=1)$	$P(B=2)$	$P(B=3)$	$P(B=4)$	$P(B=5)$	$P(B=6)$

Et l'exercice niveau bac si vraiment vous ne pouvez pas faire le mien : pour des dés équilibrés à six faces, retrouvez

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
									$1/16$	$1/36$

On nous donne le tableau

$P(A+B=2)$	$P(A+B=3)$	$P(A+B=4)$	$P(A+B=5)$	$P(A+B=6)$	$P(A+B=7)$	$P(A+B=8)$	$P(A+B=9)$	$P(A+B=10)$	$P(A+B=11)$	$P(A+B=12)$
$1/64$	$1/16$	$1/16$	$3/32$	$7/32$	$3/32$	$13/64$		$7/64$	$1/32$	$1/64$

Il manque une case ? pas grave, on sait que la somme des probabilités vaut 1.

Sinon, on note p_1 à p_6 les probabilités $P(A=k) = P(B=k) = p_k$. Et on dresse une table des trente six lancers possibles avec leur probabilité :

	$A=1$	$A=2$	$A=3$	$A=4$	$A=5$	$A=6$
$B=1$	$p_1\times p_1$	$p_1\times p_2$	$p_1\times p_3$	$p_1\times p_4$	$p_1\times p_5$	$p_1\times p_6$
$B=2$	$p_2\times p_1$	$p_2\times p_2$	$p_2\times p_3$	$p_2\times p_4$	$p_2\times p_5$	$p_2\times p_6$
$B=3$	$p_3\times p_1$	$p_3\times p_2$	$p_3\times p_3$	$p_3\times p_4$	$p_3\times p_5$	$p_3\times p_6$
$B=4$	$p_4\times p_1$	$p_4\times p_2$	$p_4\times p_3$	$p_4\times p_4$	$p_4\times p_5$	$p_4\times p_6$
$B=5$	$p_5\times p_1$	$p_5\times p_2$	$p_5\times p_3$	$p_5\times p_4$	$p_5\times p_5$	$p_5\times p_6$
$B=6$	$p_6\times p_1$	$p_6\times p_2$	$p_6\times p_3$	$p_6\times p_4$	$p_6\times p_5$	$p_6\times p_6$

et

	$A=1$	$A=2$	$A=3$	$A=4$	$A=5$	$A=6$
$B=1$				$p_1\times p_4$		
$B=2$			$p_2\times p_3$			
$B=3$		$p_3\times p_2$				
$B=4$	$p_4\times p_1$					
$B=5$						
$B=6$						

Sur le second tableau, j'ai mis en valeur l'événement $A+B=5$ avec ses quatre possibilités : $4+1$, $3+2$, $2+3$ et $1+4$.

C'est ainsi qu'on a $p_4\times p_1 + p_3\times p_2 + p_2\times p_3 + p_1\times p_4 = \dfrac{3}{32}$.

Mais encore mieux. La seule façon d'avoir un total de 2 est le double 1. On a donc $(p_1)^2 = \dfrac{1}{64}$ et donc $p_1 = \dfrac{1}{8}$.

On ne prend pas $p_\& = -\dfrac{1}{8}$ car c'est une probabilité. Et on voit déjà que le dé n'est pas équilibré, sinon on aurait $p_k = \dfrac{1}{6}$ pour tout k.

Mais on a ensuite $\dfrac{1}{16} = P(A+B=3) = p_1\times p_2 + p_2\times p_1$. Ayant déjà p_1, on déduit $p_2 = \dfrac{1}{4}$ (on tombe plus facilement sur 2 que sur 1 avec ces dés).

On poursuit : $\dfrac{1}{16} = P(A+B=4) = p_1\times p_3 + p_2\times p_2 + p_3\times p_1 = 2\times\dfrac{p_3}{8} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2$. On trouve cette fois $p_3 = 0$.

Oui, notre dé ne tombera jamais sur la face 3. C'est comme ça, il doit y avoir un aimant répulsif.

On a ensuite $2 \times \frac{1}{8}.p_4 + 2 \times 0 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$ donc $p_4 = \frac{3}{8}$.

On a presque fini : comment avoir 6 : $2 \times \frac{1}{8} \times p_5 + 2 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} + 0 \times 0 = \frac{7}{32}$: $p_5 = \frac{1}{8}$.

On trouve p_6 par « somme égale à 1 » ou par $P(A + B = 8) = \frac{13}{64}$.

On peut vérifier la cohérence sur les derniers.

On résume

	1/8	1/4	0	3/8	1/8	1/8
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64
1/4	2/64	4/64	0	6/64	2/64	2/64
0	0	0	0	0	0	0
3/8	3/64	6/64	0	9/64	3/64	3/64
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64
1/8	1/64	2/64	0	3/64	1/64	1/64

et on somme en diagonale pour retrouver les données de l'énoncé (toutes avec dénominateur 64 pour la lisibilité).

◃40▹ Associez à chaque résultat faux son contre-exemple, et montrez que c'en est bien un :

$a_n \sim b_n \Rightarrow e^{a_n} \sim e^{b_n}$	$a_n \sim b_n \Rightarrow \sin(a_n) \sim \sin(b_n)$	$a_n \sim b_n \Rightarrow \ln(a_n) \sim \ln(b_n)$	$a_n \sim b_n \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$	$a_n \sim b_n \Rightarrow (1 + a_n) \sim (1 + b_n)$
A	B	C	D	E
α	β	γ	δ	ε
$a_n = n$ et $b_n = n + \pi$	$a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $b_n = \frac{n+1}{n}$	$a_n = \frac{1-n}{n}$ et $b_n = \frac{2-n}{n}$	$a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$	$a_n = n^2$ et $b_n = n^2 - n$

On a bien sûr $n + \pi \sim n$ (le quotient $1 + \frac{\pi}{n}$ converge vers 1).

Le quotient $\frac{\sin(n+\pi)}{\sin(n)}$ existe toujours et vaut toujours -1. Il ne peut donc pas converger vers 1.

De même : $\frac{e^{n+\pi}}{e^n}$ converge vers e^πet pas vers 1.

Pire encore si j'ose dire : $\frac{e^{n^2-n}}{e^{n^2}}$ tend vers 0 alors que $\frac{n^2-n}{n^2}$ converge vers 1.

De même $(n^2 - n) - (n^2)$ ne tend pas vers 0. On n'a donc pas $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (a_n - b_n \to 0)$.

En fait $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (b_n - a_n = o(a_n))$ et c'est tout. Avec équivalence même.

Les deux suites $a_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ et $b_n = \frac{n+1}{n}$ tendent vers 1, leur quotient aussi.

Mais $\frac{\ln(b_n)}{\ln(a_n)} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} \sim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = n$. Ce quotient ne tend pas vers 1. Avec d'autres exemples, on le fait tendre vers ce qu'on veut.

On pourra quand même montrer : $(a_n \sim b_n) \Rightarrow (\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$ quand on aura des suites infiniment grandes.

◃41▹ E est un ensemble dénombrable (c'est à dire dont le cardinal ne dépasse pas celui de $\mathbb{N}$, ce peut être $\mathbb{Z}$ et même $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ rappelons le).
Une loi de probabilité est une application $p : E \longrightarrow [0, 1]$ telle que la somme $\sum_{x \in E} p(x)$ soit égale à 1.
La probabilité d'une partie A de E est alors $\sum_{x \in A} p(x)$ (existence ?).
Montrez qu'il y a une loi de probabilité constante (« uniforme ») sur range(N) (N fixe) mais qu'il n'y en a pas sur $\mathbb{N}$.

La probabilité uniforme sur range(N) est définie par $n \longmapsto \frac{1}{N}$ pour n de 0 (inclus) à N (exclu).

élément	0	1	2	...	N-1
proba	1/N	1/N	1/N		1/N

Si on voulait une loi de probabilité constante sur $\mathbb{N}$, chaque entier aurait une image α non nulle, et la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha$ serait infinie (divergence grossière).

Montrez que $n \longmapsto 2^{-n-1}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers pairs.
Calculez alors la probabilité de l'ensemble des entiers impairs.

Cette fois, chaque 2^{-n-1} est positif.
La somme $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}}$ est même la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$ et elle vaut $\frac{1}{1}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ ce qui fait 1.

Il suffit de sommer à horizon fini $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{N+2}}}{1-\frac{1}{2}}$ et de faire tendre N vers l'infini.

Pour les entiers pairs, on calcule

$$\sum_{n\ pair} \frac{1}{2^{n+1}} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2.p+1}} = \lim_{P\to+\infty} \sum_{p=0}^{P} \frac{1}{2^{2.p+1}} = \frac{1}{2}.\lim_{P\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{2.P+3}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

Et pour les entiers impairs, on trouve $\frac{1}{3}$.

	0	1	2	3	4	5	6	7	...
	1/2		1/8		1/32		1/128		
		1/4		1/16		1/64		1/256	

a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^n$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$.
a est un réel fixé dans $]0,\ 1[$, ajustez λ pour que $n \longmapsto \lambda.a^{|n|}$ soit une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

Chaque $\lambda.a^n$ existe, et la somme infinie $\lambda.\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ vaut $\frac{\lambda}{1-a}$. On va donc imposer $\lambda = 1-a$.

	0	1	2	3	4	5	6	
	$1-a$	$a-a^2$	a^2-a^3	a^3-a^4	a^4-a^5	a^5-a^6	a^6-a^7	

Sous la forme télescopique, le fait que la somme vaille 1 saute aux yeux.

On sépare ensuite la somme $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda.a^{|n|}$ en trois : $\lambda.a^0 + \lambda.\sum_{n=1}^{+\infty} a^n + \lambda.\sum_{n=1}^{+\infty} a^{|-n|}$ et on trouve

$$\lambda.\Big(1 + \frac{a}{1-a} + \frac{a}{1-a}\Big)$$

On va donc imposer $\lambda = \frac{1-a}{1+a}$.

	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	
	a^4	a^3	a^2	a	1	a	a^2	a^3	
$\frac{a}{1-a}$					1	$\frac{a}{1-a}$			

On notera que tout tombe à l'eau si a est plus grand que 1. Ou négatif.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$, alors $n \longmapsto \frac{p_{|n|}}{2}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$.

La somme $\sum_{-\infty}^{-1} \frac{p_{|n|}}{2} + 0 + \sum_{1}^{+\infty} \frac{p_{|n|}}{2}$ vaut bien 1.

Montrez que si $n \longmapsto p_n$est une loi de probabilité sur $\mathbb{Z}$ alors $n \longmapsto p_n + p_{-n}$ est (presque) une loi de probabilité sur $\mathbb{N}$(que fait il modifier dans cette définition ?).

On replie sur $\mathbb{N}$ce qu'on avait sur $\mathbb{Z}$.Mais avec cette formule, on a $0 \longmapsto p_0 + p_0$. C'est ce terme qu'il faut refuser de dédoubler.

Montrez que $\gamma = (a,\ b) \longmapsto 2^{-a-b}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.
Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.
r est un rationnel strictement positif fixé. Calculez la probabilité de $\left\{(a,\ b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \mid \dfrac{a}{b} = r\right\}$ qu'on va noter $\mu(r)$.
Ceci définit une loi de probabilité sur $\mathbb{Q}^{+*}$. Calculez $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3/4)$.
Montrez $\mu(r) = \mu(1/r)$.
Calculez $\mu(n)$ si n est un entier. Calculez $\mu(\mathbb{N})$ (« probabilité qu'un rationnel tiré au hasard selon la loi μ soit un entier) à 10^{-3} près.

On a cette fois une somme double :

$$\sum_{(a,b)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*} 2^{-a-b} = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(2^{-a}.\sum_{b=1}^{+\infty} 2^{-b}\right) = \sum_{a=1}^{+\infty}\left(2^{-a}.1\right) = 1$$

et les termes sont bien positifs.

Pour la diagonale, on somme

$$\sum_{a=1}^{+\infty} 2^{-2.a} = \frac{1}{4}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

	1	2	3	4	5	
1	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	
2	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	
4	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512	
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024	

On vient de sommer en diagonale, on peut sommer en colonne aussi.

On se donne un rationnel qu'on écrit $\dfrac{p}{q}$ (forme irréductible).
Il existe une infinité de couple $(a,\ b)$ vérifiant $\dfrac{p}{q} = \dfrac{a}{b}$.
Ce sont les écritures réductibles $\dfrac{k.p}{k.q}$ avec k décrivant $\mathbb{N}^*$.
On a donc une somme infinie :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{(p.k)(q.k)}} = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^{p+q}}\right)^k = \frac{1}{2^{p+q}}.\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{p+q}}} = \frac{1}{2^{p+q}-1}$$

On constate que pour $\dfrac{1}{r}$ il faut inverser les rôles de p et q. la probabilité ne change pas.

r = 1 / 1

	1	2	3	4	5
1	**1/4**	1/8	1/16	1/32	1/64
2	1/8	**1/16**	1/32	1/64	1/128
3	1/16	1/32	**1/64**	1/128	1/256
4	1/32	1/64	1/128	**1/256**	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	**1/1024**

proba = 1/3

r = 2

	1	2	3	4	5
1	1/4	**1/8**	1/16	1/32	1/64
2	1/8	1/16	1/32	**1/64**	1/128
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
4	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024

proba = 1 / (8-1)

	1	2	3	4	5
1	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64
2	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128
3	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256
4	1/32	1/64	**1/128**	1/256	1/512
5	1/64	1/128	1/256	1/512	1/1024

proba = 1 / (128-1)

Pour tout entier naturel n, l'écriture irréductible est $\dfrac{n}{1}$ et la proba est donc $\dfrac{1}{2^{n+1}-1}$
On n'a pas de formulé géniale pour calculer ceci.
Alors que fait on ?
On somme jusqu'à un rang N assez grand.
Si on le joue physicien, on prend $n = 10$ et on dit que ça doit suffire.

Si on est un peu plus matheux, on dit qu'en s'arrêtant au rang 10, on a oublié d'ajouter $\displaystyle\sum_{n=11}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}-1}$.

On veut que cette erreur soit plus petite que 10^{-3}. Et c'est à peu près $\sum_{n=11}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}$. Et ceci vaut $\frac{1}{2^{12}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2^{12}}}$. C'est bon, on a le résultat à 10^{-3} près.

calcul numérique : 0, 607. Mais c'est vrai que déjà $p(1) + p(2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{7}$.

> Montrez que $(a,\ b) \longmapsto \frac{1}{(a+b+1).2^{a+b+1}}$ est une loi de probabilité sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
> Calculez la probabilité de la diagonale $\{(a,\ a) \mid a \in \mathbb{N}\}$.

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)
1	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)
2	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)
3	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)
4	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)
5	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)	1/(11x2048)

Il faut vérifier que la grande somme $\sum_{a,b} \frac{1}{a+b+1} \cdot \frac{1}{2^{a+b+1}}$ vaut 1.

Avec le dessin au dessus, on comprend : il suffit de sommer « en diagonales ».

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)
1	1/(2x4)	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)
2	1/(3x8)	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)
3	1/(4x16)	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)
4	1/(5x32)	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)
5	1/(6x64)	1/(7x128)	1/(8x256)	1/(9x512)	1/(10x1024)	1/(11x2048)

	0	1	2	3	4	5
0	1/2					
1						
2						
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0		1/(2x4)				
1	1/(2x4)					
2						
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0			1/(3x8)			
1		1/(3x8)				
2	1/(3x8)					
3						
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0				1/(4x16)		
1			1/(4x16)			
2		1/(4x16)				
3	1/(4x16)					
4						
5						

	0	1	2	3	4	5
0					1/(5x32)	
1				1/(5x32)		
2			1/(5x32)			
3		1/(5x32)				
4	1/(5x32)					
5						

A quelle loi de probabilité correspond ce tableau ?

	0	1	2	3	4	5
0	1/2	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
1	1/(3x4)	1/(3x4)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
2	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(5x8)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
3	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(7x16)	1/(9x32)	1/(11x64)
4	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(9x32)	1/(11x64)
5	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)	1/(11x64)

◁ 42 ▷ Source : d'après un oral de Centrale. On considère $n \geqslant 2$ joueurs, numérotés de 1 à n, participant à un tournoi où chacun affronte tous les autres, sans égalité possible dans une rencontre. On définit la matrice $A = (a_i^k)_{i \leqslant n, k \leqslant n}$ de la manière suivante : $a_i^i = 0$, $a_i^k = 1$ si i a gagné contre k et $a_i^k = -1$ si k a gagné contre i. Ecrivez une procédure renvoyant pour n donné une matrice de tournoi aléatoire.

On doit créer des matrices telles que $\begin{pmatrix} 0 & -1- & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Comment les remplir ?

On a deux démarches. Comme dans le cours, je vais préférer la méthode dynamique où l'on fabrique les lignes une à une.

```
def Alea(n) :
....M = [] #initialisation vide
....for i in range(n) : #ligne par linge
........L = [] #on commence avec une ligne vide
........for k in range(n) : #on avance case à case
............hum hum #là, il y a du travail
........M += L #la ligne est finie, on la colle
....return M #la matrice est finie, on la retourne
```

Il reste à voir comment on complète les lignes, sachant que la matrice doit être antisymétique. On ne va donc créer que les termes au dessus de la diagonale ; ceux qui sont au dessous sont obtenus par passage à l'opposé.

Quand `k` est plus grand que `i` *(fin de ligne)*, on tire un nombre au hasard *(quitte à avoir créé déjà une fonction qui choisit `1` ou `-1`)*.

Quand `k` est égal à `i`, on met `0`.

Quand `k` est plus petit que `i` *(début de ligne)*, on recopie au signe près un terme déjà créé : `-M[k][i]`.

Donc déjà, le créateur de `-1` ou `1` :

```
def pm() : #comme plus ou moins 1
....return 2*randrange(2)-1
```

Pui la matrice elle même, suivant le schéma indiqué :

```
def Alea(n) :
....M = []
....for i in range(n) :
........L = []
........for k in range(n) :
............if k < i :
................L.append(-M[k][i])
............if k == i :
................L.append(0)
............if k > i :
................L.append(pm())
........M.append(L)
....return M
```

On peut aussi effectuer une création statique. On crée d'abord une matrice avec des `0`. On balaye ensuite la moitié supérieure, on y met des `1` ou `-1`, et on complète dans le même temps la moitié inférieure

```
def Alea(n) :
....M = [[0 for k in range(n)] for i in range(n)]
....for i in range(n) :
.......for k in range(i-1) :
...........M[i][k] = pm()
...........M[k][i] = -pm()
....return M
```

Evidemment, la ligne `M[k][i] = -pm()` est une erreur. Elle relance un nouveau tirage aléatoire. Il faut reprendre le précédent : `a = pm()`
`M[i][k], M[k][i] =a,`
`-a`

Voici une procédure *(lourde, de complexité $n!$)* de calcul de déterminant, mais il manque une sous-procédure ; écrivez la :

```
def det(M) :
....if len(M)==0 :
........return 1
....S, signe = 0, 1
....for i in range(len(M)) :
........S += signe*M[i][0]*det(delRowCol(M,i,0))
....signe = -signe
....return S
```

Que fait la procédure ?

Elle prend en entrée une matrice. Si la matrice est de taille nulle, son déterminant vaut 1, le programme retourne 1 *(et n'exécute pas la suite)*.
Si la matrice est de taille positive, on passe à la suite.

On initialise une somme `S` à `0` *(on l'incrémentera par* `S+=...`*)*, et un clignotant à `1` *(on le fera clignoter en* `sigme=-signe`*)*.

On parcourt la première colonne de la matrice avec des `M[i][0]`.

Chacun est multiplié par le déterminant d'une matrice à laquelle il manque la ligne `i` et la colonne `0`, ce sont les cofacteurs.

On reconstruit donc la formule
$$\det(M) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k.m_i^k.cof_i^k$$

L'énoncé indexait ses matrices de 1 à n tandis que Python le fait de 0 à $n-1$. Mais comme tout est visuel ou finalement calculatoire sur les déterminants, je ne pense pas que ce soit important qu'on décalle les indices.

Il manque donc la procédure `delRowCol`[3] qui prend trois arguments : une matrice `M` et deux indices. On doit effacer la ligne d'indice `i` et la colonne d'indice `k`.
On peut relire les lignes une à une avec un indice `ii` qui avance *(on sautera le cas ii==i)* et pour chaque ligne, on lira les termes un par un grâce à un indice `kk` *(qui évitera la valeur* `k`*)*.

```
def delRowCol(M, i, k) :
....MM = []
....for ii in range(len(M)) :
.......LL = []
.......if ii != i :
...........for kk in range(len(M[ii])) :
...............if kk != k :
...................LL.append(M[ii][kk])
...........MM.append(LL)
....return MM
```

On peut aussi utiliser la méthode `pop` qui enlève un terme sur une liste (`L.pop(k)` efface l'élément d'indice `k` de la liste `L`).

3. delete Row (=ligne) Column (=colonne)

```
def delRowCol(M,i,k) :
....MM = [L[:] for L in M] #crée une copie de M
....M.pop(i) #on efface une ligne
....for L in MM : #on prend les lignes une à une
........L.pop(k) #on pop chaque lignes
....return MM
```

Efficace, non ?

On constate pour n impair que ces déterminants sont toujours nuls. Prouvez le.

Ces matrices de tournois sont antisymétries par construction. Elles vérifient ${}^tM = -M$. On passe au déterminant : $\det({}^tM) = \det(-M)$. On simplifie avec ce qu'on sait : $\det(M) = \det({}^tM) = (-1)^n.\det(M)$.
Pour n impair, on obtient $\det(M) = -\det(M)$ d'où $\det(M) = 0$.

On retient : les matrices antisymétriques de format impair sont non inversibles (déterminant nul). Les mauvais élèves ignorent ce résultat et sont ébahis qu'on leur demande de le prouver. Les mauvais élèves oublient que ce n'est vrai qu'en format impair. Les bons élèves voient/retiennent la preuve et tiennent à la fois formule, cadre d'application et preuve...

$J_n = (1)_{i\leqslant n,k\leqslant n}$. Calculez $\det(J_n - I_n)$.

On écrit la forme de la matrice J_n : que des 1, puis de la matrice $J_n - I_n$: que des 1 sauf la diagonale nulle. On rédige la preuve avec la matrice de taille 5 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ on soustrait la première ligne à chacune des autres}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ on somme toutes les colonnes sur la première}$$

La matrice obtenue est triangulaire, son déterminant est le produit des termes diagonaux : $\boxed{(n-1).(-1)^{n-1}}$

Soient M et N deux matrices coefficients entiers telles que $M - N$ ait tous ses coefficients pairs. Montrez que $\det(M)$ et $\det(N)$ sont deux entiers de même parité.

On prend deux matrices à coefficients entiers de termes généraux m_i^k et n_i^k. On suppose que pour tout couple (i, k), m_i^k et n_i^k sont de même parité *(différence paire)*.

Pour tout i et tout σ on a $m_i^{\sigma(i)} = n_i^{\sigma(i)}$ mod 2. On multiplie $\prod_{i=1}^{n} m_i^{\sigma(i)} = \left(\prod_{i=1}^{n} n_i^{\sigma(i)}\right)$ mod 2 *(compatibilité des congruences et de la multiplication)*. On multiplie par la signature et on somme : $\left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} m_i^{\sigma(i)}\right) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} n_i^{\sigma(i)}\right)$ mod 2. Les deux déterminants ont la même parité.

Façon PSI : $\left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} m_i^{\sigma(i)}\right) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} (n_i^{\sigma(i)} + 2.k_i^{\sigma(i)})\right)$ et on développe.

Façon PC : $\left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} m_i^{\sigma(i)}\right) = \left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} (n_i^{\sigma(i)} + 2.k)\right)$ et on développe (mais on n'a pas compris que ce k dépendait de la position, confus comme vous dans les variables).

Façon MP : dans la formule $\left(\sum_{\sigma\in S_n} Sgn(\sigma).\prod_{i=1}^{n} m_i^{\sigma(i)}\right)$, il n'y a que des sommes et produits, elles sont compatibles avec les congruences modulo 2.

A vous de choisir la rédaction que vous préférez et estimez la plus claire.

Déduisez que les matrices de tournois aléatoires en taille paire sont inversibles.

On prend une matrice de tournoi aléatoire M de taille n. Les deux matrices $J_n - I_n$ et M sont à coefficients entiers, et ont terme à terme la même parité *(1 ou -1 hors de la diagonale, et 0 sur la diagonale)*.

Les deux matrices ont le même déterminant modulo 2.
On a donc $\det(M) = (n-1).(-1)^{n-1}\ mod\ 2$.
Si n est pair, $(n-1).(-1)^{n-1}$ est impair.
$\det(M)$ est donc impair. Il ne peut pas être nul. La matrice M est inversible.

◁43▷ On note E l'ensemble des suites réelles. Soit σ un endomorphisme de $(E,+,.)$; a et b sont deux réels distincts, montrez : $Ker(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E) = Ker(\sigma-a.Id_E)\oplus Ker(\sigma-b.Id_E)$.
On définit sur E l'application $\sigma = (u_n) \longmapsto (u_{n+1})$. Montrez que σ est un endomorphisme de E. Donnez pour tout λ la dimension et une base de $Ker(\sigma-\lambda.Id_E)$.
Retrouvez la forme générale de la suite de Fibonacci.

On définit : $\Gamma = x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{x^2-x-1}$. Ajustez a et b pour avoir $\Gamma(0)=\Gamma'(0)=1$.
Montrez que Γ admet pour tout n un développement limité en 0 à l'ordre n et montrez que les coefficients de Γ vérifient la relation de récurrence $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.
Décomposez Γ en éléments simples. Donnez alors son développement limité d'ordre n.
Retrouvez la forme générale de F_n.

Déjà, le fait que la somme de droite $Ker(\sigma-a.Id_E)\oplus Ker(\sigma-b.Id_E)$ soit directe.
Comme on n'a que deux sous-espaces, la caractérisation est « intersection réduite à $\overrightarrow{0}$ ».
Or, les vecteurs du premier sous-espace sont les solutions de $\sigma(\overrightarrow{u})-a.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$ et $\sigma(\overrightarrow{u})-b.\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
Et ceci entraîne $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.

Passons ensuite à la première inclusion. On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ dans $Ker(\sigma-a.Id_E)\oplus Ker(\sigma-b.Id_E)$.
Il s'écrit $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$avec $\sigma(\overrightarrow{v})=a.\overrightarrow{v}$ et $\sigma(\overrightarrow{w})=b.\overrightarrow{w}$. On calcule alors

$$(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = (\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)(\overrightarrow{v})+(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)(\overrightarrow{w})$$

$$(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = (a^2.\overrightarrow{v}-(a+b).a.\overrightarrow{v}+(a.b).\overrightarrow{v})+(b^2.\overrightarrow{w}-(a+b).b.\overrightarrow{w}+(a.b).\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}+\overrightarrow{0}$$

On reconnaît qu'il est dans $Ker(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)$.

Mais il y a plus simple : $\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E = (\sigma-b.Id_E)\circ(\sigma-a.Id_E)$.
On a donc $Ker(\sigma-a.Id_E)\subset Ker(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)$.
Avec la composition dans l'autre sens : $Ker(\sigma-b.Id_E)\subset Ker(\sigma^2-(a+b).\sigma+(a.b).Id_E)$.
Ayant un résultat de la forme $A\subset C$ et $B\subset C$ on a par définition même du « plus petit sous-espace contenant... » : $(A+B)\subset C$.

Passons à l'autre inclusion. On prend un vecteur $\overrightarrow{u}$ qui vérifie juste $\sigma^2(\overrightarrow{u})-(a+b).\sigma(\overrightarrow{u})+(a.b).\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$.
On veut trouver $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ vérifiant $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$, chacun dans le bon sous-espace.
Mais comment deviner ?

Facile finalement : il suffit de raisonner par analyse et synthèse, comme toujours pour les sommes.

On part de $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ et on applique σ : $\sigma(\overrightarrow{u})=\sigma(\overrightarrow{v})+\sigma(\overrightarrow{w})=a.\overrightarrow{v}+b.\overrightarrow{w}$ car chacun est dans un noya de la forme $Ker(\sigma-\lambda.Id)$.

On compare nos deux formules : $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$ et $\sigma(\overrightarrow{u})=a.\overrightarrow{v}+b.\overrightarrow{w}$.
On combine : $\overrightarrow{v}=\dfrac{b.\overrightarrow{u}-\sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$ et $\overrightarrow{w}=\dfrac{a.\overrightarrow{u}-\sigma(\overrightarrow{u})}{a-b}$.

> Qu'a-t-on prouvé à ce stade ? Rien.
> Enfin si : si ces deux vecteurs existent, ce ne peuvent être que ceux ci. C'est juste le petit rond autour du plus.

Mais passons maintenant à la synthèse.
On propose $\overrightarrow{v}=\dfrac{b.\overrightarrow{u}-\sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$ et $\overrightarrow{w}=\dfrac{a.\overrightarrow{u}-\sigma(\overrightarrow{u})}{a-b}$.
On vérifie : $\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}$ c'est bien parti.

Et $\overrightarrow{v}$ est il dans $Ker(\sigma - a.Id)$? (on traitera l'autre par symétrie des rôles).
On calcule $\sigma(\overrightarrow{v}) - a.\overrightarrow{v}$ et on trouve $\dfrac{b.\sigma(\overrightarrow{u}) - \sigma^2(\overrightarrow{u})}{b-a} - a.\dfrac{b.\overrightarrow{u} - \sigma(\overrightarrow{u})}{b-a}$.
Et l'hypothèse $\sigma^2(\overrightarrow{u}) - (a+b).\sigma(\overrightarrow{u}) + (a.b).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ donne $\sigma(\overrightarrow{v}) - a.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

En fait, il y a plus simple : $\overrightarrow{v} = \dfrac{1}{b-a}.(b.\sigma - Id)(\overrightarrow{u}) \in Im(b.\sigma - Id)$.
Or, $\overrightarrow{u} \in Ker((\sigma - a.Id) \circ (\sigma - b.Id))$ donc $(\sigma - a.Id) \circ (b.\sigma - Id)(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ et c'est fini.

♣ On considère que $(\mathbb{R}, +, .)$ est un espace vectoriel sur le corps $(\mathbb{Q}, +, .)$, dont une base sera formée de 1 (premier vecteur de base) suivi de vecteurs que l'on ne précisera pas, puisqu'on ne sait pas le faire, et qu'on se contentera de noter $\overrightarrow{r_i}$ pour i dans un ensemble I.
On construit f : l'image d'un réel a se décomposant sous la forme $\alpha_0.1 + \sum_{i\in I} \alpha_i.\overrightarrow{r_i}$ sera $\alpha_0.1$.
Montrez $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$ pour tout couple $(a,\ b)$, mais n'est pas convexe (elle n'est continue nulle part et n'est bornée sur aucun intervalle contenant plus d'un point).

◃44▹ ♡ Sur les quarante huit élèves, huit sont vraiment cons. Le colleur attend deux trinômes. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins un con dans le lot ?

L'univers n'est pas $range(48)$ (les quarante huit élèves).
C'est $(range(48))^6$ puisqu'on va prendre des sextuplets (deux trinômes ça fait six élèves).
Certes, certains événements sont impossibles, car dans un trinôme, il n'y a pas trois fois le même élève.
On pourrait restreindre l'univers aux éléments de la forme $\{a, b, c, d, e, f\}$ avec a, b, c, d et e entre 0 et 48, tous différents.
Justement, une fois cet univers défini, on calcule son cardinal.
Les parties à six éléments parmi 48 : $\dbinom{48}{6}$.

Passons par l'événement complémentaire : aucun n'est con.
C'est donc qu'on a choisi nos six élèves parmi les quarante pas cons.
On a donc $\dfrac{nombre\ de\ cas\ favorables}{nombre\ total\ de\ cas} = \dfrac{\binom{40}{6}}{\dbinom{48}{6}}$.

On peut simplifier en $\dfrac{40}{48}.\dfrac{39}{47}.\dfrac{38}{46}.\dfrac{37}{45}.\dfrac{36}{44}.\dfrac{35}{43}$ et l'expliquer ainsi :
choisis un premier élève, pas con (il y en a 40) parmi les 48 présents : $\dfrac{40}{48}$.
Maintenant, choisis le second élève, pas con (il en reste 39) parmi les 47 présents : $\dfrac{39}{47}$.
Puis, choisis le troisième élève, pas con (il en reste 38) parmi les 46 présents : $\dfrac{38}{46}$.
Et ainsi de suite.
C'est la formule $P(\overline{C_1}).P_{\overline{C_1}}(\overline{C_2}).P_{\overline{C_1}et\overline{C_2}}(\overline{C_3}).P_{\overline{C_1}et\overline{C_2}et\overline{C_3}}(\overline{C_3})$ et ainsi de suite du cours.

Et on passe au complémentaire : $1 - \dfrac{40}{48}.\dfrac{39}{47}.\dfrac{38}{46}.\dfrac{37}{45}.\dfrac{36}{44}.\dfrac{35}{43}$.
Application numérique : $0,69$ à 10^{-2} près ou si vous préférez : à peu près soixante neuf pour cent.

◃45▹ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Mettez la sous la forme ${}^tA.A$.
Donnez un vecteur *(non nul)* orthogonal au plan engendré par les deux premiers vecteurs de base. Construisez une base orthonormée de $(\mathbb{R}^3, +, .)$.
Le produit scalaire sous entendu dans la question, c'est
$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

L'application $\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ est une forme. Bilinéaire, symétrique.

Pour les deux derniers points, on doit calculer

$$x^2+2.x.y+2.x.z+2.y^2+4.y.z+3.z^2$$

et en prouver la positivité.
On factorise en $(x+y+z)^2+(y+z)^2+z^2$ et on devine une généralisation pour l'année prochaine.
cette somme de carrés de réels est positive.
Et elle n'est nulle que dans le cas $z=y+z=x+y+z=0$.

Avec un peu d'initiative :

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

On veut ensuite un vecteur vérifiant $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x&y&z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
On résout donc $x+y+z=0$ et $x+2.y+2.z=0$.[4]
On trouve $x=0$ et $y=-z$.
Le vecteur $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ convient.

Le vecteur $\overrightarrow{i}$ est normé, tant mieux pour lui.
On constate que $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i}$ est orthogonal à $\overrightarrow{i}$ (oui, pardon *orthϕgonal* ; pour ce produit scalaire).
Et $\overrightarrow{j}-\overrightarrow{k}$ est orthogonal aux deux premiers.

On les norme ?

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=1$$

$$\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&2\\1&2&3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=1$$

$(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}-\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}-\overrightarrow{j})$ est orthonormée pour ce produit scalaire.

Exercice : généralisez avec $T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. *calculez* ${}^tT.T$, *inversez* T *en* $\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, *comprenez le rapport...*

◃46▹ ♡ Complétez $\dfrac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix}15&&\\-20&12&\\0&-15&20\end{pmatrix}$ pour que ce soit la matrice d'une isométrie de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ pour le produit scalaire usuel. Montrez que 1 en est alors valeur propre et donnez le sous-espace propre associé.
Une isométrie est une application linéaire qui transforme une base orthonormée (comme la base canonique) en base orthonormée (vecteurs de norme 1*, deux à deux orthogonaux).*

Les trois colonnes de la matrice sont les images des trois vecteurs de la base canonique $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$, qui forme une base orthonormée.
On va donc demander que $\dfrac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix}15\\-20\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix}\\12\\-15\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{\sharp}.\begin{pmatrix}\\\\20\end{pmatrix}$ soient normés et deux à deux orthogonaux.
Le fait que le premier soit normé donne $\sqrt{15^2+20^2}=\sharp^2$: $\sharp$ vaut 25 ou -25.
On va choisir 25.
La deuxième colonne est de norme 1 : $\sqrt{?^2+12^2+(-15)^2}$,le nombre manquant vaut 16 ou -16. Mais pour que les colonnes soient orthogonales, c'est 16.
A ce stade $\dfrac{1}{25}.\begin{pmatrix}15\\-20\\0\end{pmatrix}$ et $\dfrac{1}{25}.\begin{pmatrix}16\\12\\-15\end{pmatrix}$ sont orthogonaux et normés. Qui est le troisième ? Leur produit vectoriel ! Ou son opposé. Le coefficient en bas égal à 20 dit : produit vectoriel.

4. vous le voyez comme un système : PSI ; vous le voyez comme l'intersection de deux plans : MP/PSI* ; vous le voyez comme à la fois un système et l'intersection de deux plans et passez de l'un à l'autre : MP*

$\boxed{\frac{1}{25}.\begin{pmatrix} 15 & 16 & 12 \\ -20 & 12 & 9 \\ 0 & -15 & 20 \end{pmatrix}}$ ou son opposé.

Pour que 1 soit valeur propre, je dois garder le premier, sinon il y a échec...
Pour prouver que 1 est valeur propre, soit que je calcule le polynôme caractéristique en n'oubliant pas le 25 [5] :

$$-X^3 + \frac{47}{25}.X^2 - \frac{47}{25}.X + 1$$

On vérifie que 1 est racine.

Sinon, on peut résoudre $M.U = U$ et détecter un vecteur propre, non nul : $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}$ (après calculs).

◃47▹

> On note E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.
> ♡ Montrez qu'il n'existe aucun produit scalaire sur E tel que $P \longmapsto P'$ soit une isométrie.
> ♣ Existe-t-il un produit scalaire sur E tel que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ soit une isométrie ?

$(E, +, .)$ est un espace vectoriel de dimension finie. la dérivation est un endomorphisme, mais pas un automorphisme (noyau de dimension 1).
Comment pourrait elle être une isométrie (une isométrie est injective, car le seul élément d'image nulle est le vecteur de norme nulle).

$P(X) \longmapsto P(X+1)$ est linéaire.

Sa matrice sur la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Un produit scalaire est défini par sa matrice de Gram sur la base canonique $\begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$.

La condition « isométrie » est ${}^tM.G.M = G$.
On veut donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,X) & \phi(1,X^2) \\ \phi(X,1) & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$$

Pas facile...

On va raisonner par analyse [6] et synthèse. On veut que $\phi(P,Q) = \phi(P(X+1), Q(X+1))$ pour tous les polynômes.

En particulier pour ceux de la base canonique :

1	X	X^2
1	$X+1$	$X^2+2.X+1$

On exige donc $\phi(1,1) = \phi(1,1)$ facile
$\phi(1,X) = \phi(1,X+1)$ donc $\phi(1,X) = 0$: $\begin{pmatrix} \phi(1,1) & 0 & \phi(1,X^2) \\ 0 & \phi(X,X) & \phi(X,X^2) \\ \phi(X^2,1) & \phi(X^2,X) & \phi(X^2,X^2) \end{pmatrix}$
$\phi(1,X^2) = \phi(1, 1+2.X+X^2)$ donc $\phi(1,1) = 0$. Et ça, ce n'est pas autorisé.
Bilan : il n'y a pas de produit scalaire qui fasse de $P(X) \longmapsto P(X+1)$ une isométrie.

> On prend le produit scalaire $(P,Q) \longmapsto P(0).Q(0) + P(1).Q(1) + P(2).Q(2)$. Complétez $(1/\sqrt{3})$ en base orthonormée.
> Faites tourner X d'un angle $\pi/2$ autour de 1.

C'est bon, c'est un produit scalaire positivité : somme de carrés
défini positif : le polynôme devrait être nul en 0, 1 et 2. Il sera nul.

Le polynôme constant $\frac{1}{\sqrt{3}}$ a pour norme 1 : $(P(0))^2 + (P(1))^2 + (P(2))^2 = 1$.

---

5. dans le détermina,t c'est 25^3 qu'on retrouve, mais le déterminant vaut 1, car la famille est orthonormée directe !
6. les premières vont passer, les suivantes vont poser problème

Le polynôme X ne lui est pas orthogonal : '$\phi\Big(\frac{1}{\sqrt{3}},\ X\Big) = \frac{0+1+2}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.
Mais par « orthonormalisation », $X - \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}$ va l'être.
Le second vecteur, à normalisation près est $X-1$ (normal si l'observation est en 0, 1 et *é*.
Son carré de norme vaut $(0-1)^2 + (1-1)^2 + (2-1)^2$.
On garde donc $\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$.
On construit donc ensuite $X^2 - \phi\Big(X^2, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}\Big).\dfrac{X-1}{\sqrt{2}} - \phi\Big(X^2, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big).\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
tous calculs faits : $X^2 - 2.X + \dfrac{1}{3}$.On calcule sa norme : $\sqrt{\Big(\frac{1}{3}\Big)^2 + \Big(-\frac{2}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{1}{3}\Big)^2}$.
La base orthonormée est donc $\boxed{\Big(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{6}}\Big)}$

---

la question de faire tourner un polynôme autour d'un autre est étrange.
Mais elle a du sens.
Déjà, les deux polynômes X et 1 ne sont pas orthogonaux entre eux.
Ce serait bien de décomposer X en une partie colinéaire à 1 et une partie orthogonale à 1.
La partie colinéaire à 1, c'est $\phi(X,1).1$ par les formules de Parseval.
Ah non, pardon. 1 n'est pas normé.
La partie de X colinéaire à 1, c'est $\phi\Big(X, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big).\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

On décompose donc :

X	$=$	1	$+(X-1)$
		sur l'axe	dans le plan

On fait tourner

X	$=$	1	$+(X-1)$
$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$
		1	?
		sur l'axe	dans le plan

Il faut, dans le plan orthogonal à 1 faire tourner $X-1$ d'un angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On va donc arriver sur un vecteur à la fois orthogonal à 1 et à $X-1$.
je n'en connais qu'un : $X^2 - 2.X + \frac{1}{3}$! (et ses multiples).
Mais il doit avoir la même norme que $X-1$, puisque une rotation ne modifie pas les normes.
Or, $X-1$ a pour norme $\sqrt{2}$ et $3.X^2 - 6.X + 1$ a pour norme $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

On complète :

1	$+(X-1)$	$=$	X
$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$
1	$\frac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{3}}$		$1 + \dfrac{3.X^2-6.X+1}{\sqrt{3}}$
sur l'axe	dans le plan		

Résultat pas évident, très abstrait.
Si ceci vous semble vraiment étrange, vous avez bien fait de choisir PSI.
Si ceci vous semble étrange mais génial, vous avez bien fait de choisir une étoile.

◃48▹ **Ajustez a_t et b_t pour que $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto \sqrt{t}$ soient solutions de $t^2.y''_t + a_t.y'_t + b_t.y_t = 0_{\forall t>0}$.**

On demande $\begin{array}{l} 2.t^2 + 2.a.t + b.t^2 = 0 \\ -\dfrac{t^2}{4.t^{3/2}} + \dfrac{a}{2.\sqrt{t}} + b.\sqrt{t} = 0 \end{array}$

En simplifiant la première par t^2 et la seconde par $\sqrt{t}$ on trouve $\begin{array}{l} 2 + 2.\frac{a}{t} + b = 0 \\ -\dfrac{1}{4} + \dfrac{a}{2.t} + b = 0 \end{array}$

On trouve $b = 1$ et $a = \dfrac{-3.t}{2}$.
L'équation est $2.t^2.y''_t - 3.t.y'_t + 2.y_t = 0_{\forall t}$ et ses solutions sont $t \longmapsto A.t^2 + B.\sqrt{t}$ avec A et B dépendant des conditions initiales puisqu'on connaît deux solutions.

Sinon, il y a aussi $\begin{vmatrix} y_t & t^2 & t^{1/2} \\ y'_t & 2.t & t^{-1/2}/2 \\ y''_t & 2 & -t^{-3/2}/4 \end{vmatrix} = 0$. *Si vous comprenez, vous êtes purement matheux !*

◃49▹ Ajustez a et b pour que $t \longmapsto t.\cos(\ln(t))$ soit solution de $t^2.y''_t + a.y'_t + b.y_t = 0_{\forall t>0}$.

$t \longmapsto t.\cos(\ln(t))$ et $t \longmapsto t.\sin(\ln(t))$ sont solutions de $t^2.y''_t - t.y'_t + 2.y_t = 0_{\forall t}$.

◃50▹ ♡ Montrez que $x \longmapsto (1-x).\int_0^x t.f(t).dt + x.\int_x^1 (1-t).f(t).dt$ est nulle en 0 et en 1 et est deux fois dérivable. Et quelle est sa dérivée seconde ?

On note F cette application dont l'existence n'embêtera personne.
On la dérive car on a tous les théorèmes pour ça :

$$\forall x,\ F'(x) = \Big(-\int_0^x t.f(t).dt + (1-x).x.f(x)\Big) + \Big(1.\int_x^1 (1-t).f(t).dt - x.(1-x).f(x)\Big)$$

Attention, pour dériver $x \longmapsto \int_x^1 \varphi(t).dt$, on l'écrit déjà $x \longmapsto -\int_1^x \varphi(t).dt$ ce qui explique le signe moins.

Les $x.(1-x).f(x)$ se simplifient : $\forall x,\ F'(x) = -\int_0^x t.f(t).dt + \int_x^1 (1-t).f(t).dt$.
Et on peut recommencer, sauf qu'il n'y a même plus de produit : $\forall x,\ F''(x) = -x.f(x) - (1-x).f(x)$.

Attention, ne vous faites pas avoir comme des bleus : $x \longmapsto \int_0^x \varphi(t).dt$ se dérive bien en $x \longmapsto \varphi(x)$ et pas $x \longmapsto \varphi(t)$. Il y a des variables, elles ont un rôle...

On simplifie : $F''(x) = -f(x)$ pour tout x : $\boxed{F'' = -f}$

On est remonté de deux crans dans les primitives avec des intégrales simples...

Ensuite, on peut calculer : $F(0) = F(1) = 0$ car tant en 0 qu'en 1 et y a dans chaque produit un terme qui s'annule.
Bref, on a la primitive d'ordre 2 de f qui s'annule aux bornes de l'intervalle.
Comme une solution d'équation différentielle avec deux conditions (pas initiales mais aux bornes).

◃51▹ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \int_{-1}^1 P(t).Q(t).dt$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}[X], +, .)$. On suppose que la famille (Q_n) est une famille de polynômes deux à deux orthogonaux vérifiant $deg(Q_n) = n$. Montrez que Q_n a la même parité que n ($Q_n(-x) = (-1)^n.Q_n(x)$). Montrez que Q_n admet n racines distinctes, toutes entre -1 et 1 (on pourra raisonner par l'absurde, donner la liste de ses racines dans $]-1,\ 1[$ et étudier $\prod_a (X-a)$).

Il faut montrer que Q_n est pair si n est pair et impsair sinon.
Rappelons qu'il y a des polynômes ni pairs ni impairs (c'est la règle générale).

Comme Q_n est de degré n, il a au plus n racines réelles.
Parmi ces racines, certaines sont entre -1 et 1, d'autres non.
Supposons qu'il a d racines entre -1 et 1 avec $d < n$ (d a même le droit d'être nul), et une racine peut être comptée plusieurs fois si elle est multiple).

On a alors $Q_n(X) = \prod_{k=1}^d (X - a_k)$.

◃52▹ ♡ Montrez que la famille des $X^k.(1-X)^{6-k}$ *(pour k de 0 à 6)* est une base de $(\mathbb{R}_6[X], +, .)$. Calculez le déterminant de cette famille par rapport à la base canonique.

On change l'ordre des questions. Si le déterminant est bien non nul, on aura gagné...

L'espace vectoriel est de dimension 7, la matrice exprimant les vacteurs est de format 7 sur 7. Courage.
Les vecteurs sont dans l'ordre $(1-X)^6 = 1 - 6.X + 15.X^2 - 20.X^3 + 15.X^4 - 6.X^5 + X^6$ d'où la première colonne
$X.(1-X)^5 = X - 5.X^2 + 10.X^3 - 10.X^4 + 5.X^5 - X^6$ d'où la seconde
$X^2.(1-X)^4 = X^2 - 4.X^3 + 6.X^4 - 4.X^5 + X^6$ d'où la troisième
jusqu'à X^6 qui donne un seul coefficient non nul sur la dernière

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 10 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 6 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & 5 & -4 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Il est bien égal à 1 ce déterminant !

◁53▷ Simplifiez $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} \end{vmatrix}$. Montrez : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix} = \dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$ en supposant que a, b, $c$et d sont quatre nombres strictement positifs.

Inventez la formule pour le déterminant de la matrice de taille n sur n de terme général $\dfrac{1}{a_k + a_i}$. Est elle cohérente pour n égal à 1.

Écrivez un script Python qui pour une liste $[a_1, \dots a_n]$ donnée calcule le déterminant en question.

Calculez aussi celui de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{pmatrix}$ et enfin de $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$ Exprimez le dernier en supposant que a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$.

Le plus simple est le second : $\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{a.b}.\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d^2} \end{vmatrix} = 0$ car il y a deux colonnes égales.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b.a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c.a} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d.a} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a.b} & \frac{1}{a.c} & \frac{1}{a.d} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b} & \frac{1}{b.c} & \frac{1}{b.d} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c.b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c.d} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d.b} & \frac{1}{d.c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix} = \frac{1}{a.b.c.d}.\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{a^2.b.c.d}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & 1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & 1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & 1 \end{vmatrix}$$

On est ramené à $\dfrac{1}{(a.b.c.d)^2}.\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & d \end{vmatrix}$.

On calcule le déterminant par combinaisons en lignes $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-b & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & d-1 \end{vmatrix}$ $(L_3 < L_3 - L_2$ et $L_4 < L_4 - L_3)$

puis en colonnes $(C_3 < C_3 - C_2$ et $C_4 < C_4 - C_3)$:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b & 1-b & 0 \\ 0 & 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne

$a.\begin{vmatrix} b & 1-b & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$ et $-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-b & b+c-2 & 0 \\ 0 & 1-c & c+d-2 \end{vmatrix}$

On trouve au final

$$a.b.c.d - (a.b + a.c + a.d + b.c + b.d + c.d) + 2.(a + b + c + d) - 3$$

Vous pouvez avoir une erreur de calcul, je ne vous en voudrai pas. Mais si vous obtenez une formule non symétrique dans les racines sans indiquer qu'il doit y avoir une erreur, c'est là que je vous en veux...

Si a, b, c et d sont les racines de $X^4 - S.X^3 + D.X^2 - T.X + P$, on a $P - D + 2.S - 3$, qu'on pouvait retrouver en développant $\sum_{\sigma \in S_4} Sgn(\sigma).a_1^{\sigma(1)}.a_2^{\sigma(2)}.a_3^{\sigma(3)}.a_4^{\sigma(4)}$.

Pour $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{b+a} & \frac{1}{2.b} & \frac{1}{b+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$ on fait des combinaisons en lignes :

$L_2 < -L_2 - L_1 \ : \begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a)} - \frac{1}{2.a} & \frac{1}{2.b} - \frac{1}{a+b} & \frac{1}{b+c} - \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

On réduit au dénominateur commun : $\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{a-b}{(b+a).(2.a)} & \frac{a-b}{(2.b).(a+b)} & \frac{a-b}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$

et on sort $a-b$: $(a-b).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{c+a} & \frac{1}{c+b} & \frac{1}{2.c} \end{vmatrix}$.

On fait de même avec $L_3 - L_1$:

$$(a-b).(a-c).\begin{vmatrix} \frac{1}{2.a} & \frac{1}{a+b} & \frac{1}{a+c} \\ \frac{1}{(b+a).(2.a)} & \frac{1}{(2.b).(a+b)} & \frac{1}{(a+c).(b+c)} \\ \frac{1}{(2.a).(c+a)} & \frac{1}{(a+b).(c+b)} & \frac{1}{(2.c).(a+c)} \end{vmatrix}$$

On factorise en colonne : $\dfrac{(a-b).(a-c)}{(2.a).(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(a+c)} \end{vmatrix}$.

On travaille cette fois en colonne

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(2.b)} - \frac{1}{(b+a)} & \frac{1}{(b+c)} - \frac{1}{(b+a)} \\ \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(c+b)} - \frac{1}{(c+a)} & \frac{1}{(2.c)} - \frac{1}{(c+a)} \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$\frac{(a-b).(a-c)}{2.a.(a+b).(a+c)}.\begin{vmatrix} \frac{a-b}{(2.b).(b+a)} & \frac{a-c}{(b+c).(b+a)} \\ \frac{a-b}{(c+b).(c+a)} & \frac{a-c}{(2.c).(c+a)} \end{vmatrix}$$

On sort tout ce qu'on peut : $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2}{(2.a.(a+b)^2.(a+c)^2}.\begin{vmatrix} \frac{1}{(2.b)} & \frac{1}{(b+c)} \\ \frac{1}{(c+b)} & \frac{1}{(2.c)} \end{vmatrix}$.

On termine, par développement simple ou par $\dfrac{1}{4.b.c} - \dfrac{1}{(b+c)^2}$.

On trouve bien $\dfrac{(a-b)^2.(a-c)^2.(a-d)^2}{8.a.b.c.(a+b)^2.(a+c)^2.(b+c)^2}$.

On conjecture une formule générale :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+a_1} & \frac{1}{a_1+a_1} & \dots & \frac{1}{a_1+a_n} \\ \frac{1}{a_1+a_2} & \frac{1}{a_2+a_2} & & \frac{1}{a_2+a_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{1}{a_1+a_n} & \frac{1}{a_2+a_n} & & \frac{1}{a_n+a_n} \end{vmatrix} = \frac{(produit\ des\ differences)^2}{produit\ des\ sommes}$$

On peut y mettre des points de suspension : $\boxed{\dfrac{(a_1-a_2)^2.(a_1-a_3)^2\dots(a_{n-1}-a_n)^2}{2^n.a_1\dots a_n.(a_1+a_2)^2\dots(a_{n-1}+a_n)^2}}$

Proprement, le numérateur est $\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2$ ou $\prod_{i\neq j}|a_j-a_i|$ pour que chaque terme y soit deux fois.

Le dénominateur n'a pas à mettre à part les termes $i=j$:

$$\prod_{\substack{i\leqslant n\\ j\leqslant n}}(a_i+a_j)$$

Chaque terme pour i différent de j est présent deux fois. Chaque terme pour i égal à j n'y est qu'une fois, avec son coefficient 2.

On résume $\boxed{\dfrac{\prod_{i<j}(a_j-a_i)^2}{\prod_{i,j}(a_i+a_j)}}$; il y a $\dfrac{n.(n-1)}{2}$ carrés au numérateur, soit un degré $n.(n-1)$; il y a n^2 termes au

dénominateur.
Pour n égal à 1, on a un produit vide au numérateur, et le seul terme (a_1+a_1) au dénominateur. La formule coïncide avec $\left|\frac{1}{a_1+a_1}\right|$. Comme toujours tout est logique en maths.

On écrit un script qui calcule numérateur et dénominateur par des boucles :

```
def Hilbert(L) : #ce sont des déterminants de Hilbert
....n = len(L) #pour ne pas resolliciter len(L) à chaque fois
....Num, Den = 1 , 1 #et pas 0, évidemment
....for ai in L :
.......for aj in L :
..........Den *= (ai+aj)
....for j in range(n) :
.......for i in range(i) : #on impose i<j
...........Num *= L[j]-L[i]
....Num = Num*Num #on veut des carrés
....return (Num, Den) #ou return(Num/Den)
```

◃54▹ ♣ On sait : $A.B=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&\\2&&1\end{pmatrix}$. Complétez les termes qui manquent *(indication : pensez aussi aux carrés)*. Si vous trouvez deux solutions, choisissez celle avec des entiers.
Diagonalisez $A.B$ *(matrice de passage P, matrice diagonale D pour laquelle l'idée des carrés sera aussi utile)* et aussi $B.A$ *(matrice de passage Q)*.
Si je propose $A=P.D.Q^{-1}$, vous la calculez puis vous complétez pour trouver B ?

On peut avoir à la fois $A.B=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&a&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}$ et $B.A=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}$, puisque le produit matriciel n'est pas commutatif. Mais il y a quand même des conditions nécessaires.
On doit déjà avoir $Tr(A.B)=Tr(B.A)$ suivant une formule célèbre du cours.
On trouve immédiatement : $\boxed{a=3}$
On a aussi $\det(A.B)=\det(B.A)$ en transitant par $\det(A).\det(B)$.
On calcule $\det(A.B)=-4$ en développant par rapport à la colonne qu'on veut.
On a donc après calcul : $\boxed{4.b.c+4.b-18.c-28=-4}$
Il nous faut d'autres relations.
L'énoncé parle des carrés. On a d'une part $A.B.A.B$ et d'autre part $B.A.B.A$ *(et pas A.B.B.A, c'est pas l'Eurovision 1974)*.
On passe de l'une à l'autre en faisant sauter A au dessus : $Tr(A.(B.A.B))=Tr((B.A.B).A)$.
On déduit que $(A.B)^2$ et $(B.A)^2$ ont la même trace *(vous avez omis de citer cet argument ? vous avez perdu car par exemple, $(A.B)^2$ n'a pas forcément la même trace que A.B.B.A)*.
On calcule les deux, ou juste leurs termes diagonaux car on est efficace[7].

$$(A.B)^2=\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&-3\\5&1&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&&\\&7&\\&&7\end{pmatrix}$$

et

$$(B.A)^2=\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-4&2&3\\-6&4&b\\2&c&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&&\\&b.c+4&\\&&b.c+7\end{pmatrix}$$

On a une nouvelle relation : $10+2.b.c+11=9$
On trouve la valeur de $b.c$: $b.c=-6$
On reporte dans l'autre équation : $2.b-9.c=24$
On résout le système : $\left\{\begin{array}{ccccc}b&\times&c&=&-6\\2.b&-&9.c&=&24\end{array}\right|$. On peut faire appel aux formules de Viète sur $2.b$ et $-9.c$ de somme 24 et de produit 108. On peut aussi résoudre pour une fois en remplaçant le résultat d'une équation dans l'autre : b vérifie $b^2-12.b+27=0$.
On extrait deux couples solutions : $\boxed{b=6 \text{ et } c=-2}$ $\boxed{b=9 \text{ et } c=-\frac{2}{3}}$

7. je ne me moquerai pas de Laurine qui traite des questions non demandées, ce serait méchant, je cacherai donc son prénom

Notre paresse naturelle nous incite à prendre comme proposé $b = 6$ et $c = -2$.

$A.B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$	$B.A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
Trace 1	Trace 1
Déterminant -4	Déterminant -4

Il faut trouver une matrice diagonale D semblable à $A.B$.

Cette fois encore, la trace et le déterminant ne suffiront pas. La matrice D est formée de trois coefficients : $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.

On doit avoir $Tr(A.B) = Tr(D)$, $\det(A.B) = \det(D)$. Bon début dit le père François *(oui, Viète)* : $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ et } \alpha.\beta.\gamma = -4}$

Mais il nous manque une équation. Et on repense aux carrés : $(A.B)^2 = P.D^2.P^{-1}$, donc $Tr((A.B)^2) = Tr(D^2)$. On ajoute la relation $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9}$

On identifie classiquement : $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2.(\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma)$: $\boxed{\alpha.\beta + \alpha.\gamma + \beta.\gamma = -4}$

A présent on a tout : α, β et γ sont les trois racines de $X^3 - X^2 - 4.X + 4$.

On a une racine évidente : -1. On factorise $(X - 1).(X^2 - 4)$. On a trois racines tout aussi évidentes : 1, -2 et 2 :

$\boxed{D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$ il y a cinq autres matrices diagonales possibles par permutations.

On a trouvé la matrice diagonale (utilisable pour $A.B$ et $B.A$), il faut trouver les matrices de passage P et Q. On les cherche sous la forme simplifiée $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$:

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(P) = 1$
$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$	$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(Q) = 1$

Les matrices de passage trouvées sont inversibles.

Suivant l'ordre dans lequel vous aurez mis les coefficients diagonaux de D, vous obtiendrez des matrices dont les colonnes seront mélangées. Dans le même ordre que les valeurs propres.

Comme la suite le demande, on les inverse par les cofacteurs : $\boxed{Q^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$ *(on vérifie si nécessaire)* : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ On calcule alors :

$$\boxed{A = P.D.Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 \\ -8 & 4 & 5 \end{pmatrix}}$$

On cherche B de produit $A.B$ imposé. On peut extraire B par $A^{-1}.(A.B)$.

Mais on peut aussi se dire qu'on veut :

$(P.D.Q^{-1}).B = A.B = P.D.P^{-1}$ et $B.(P.D.Q^{-1}) = B.A = Q.D.Q^{-1}$.

L'illumination vient : $B = Q.P^{-1}$.

Ah tiens, il faut aussi inverser P, par la méthode des cofacteurs $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On effectue le calcul : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

On vérifie en calculant alors $A.B$ et $B.A$.
Remarque : il y a bien d'autres solutions. Une infinité même.

◁55▷ Montrez que $(3.\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k},\ \vec{i} + 4.\vec{j} + 2.\vec{k},\ -2.\vec{i} - 4.\vec{j} - 2.\vec{k})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$. Décomposez $\vec{j}$ sur cette base. Donnez un vecteur non nul qui garde les mêmes composantes sur cette base que sur la base canonique.

On calcule juste : $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 4.$

Ensuite, on inverse : $\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 & 2 \\ -1 & -1 & 5/2 \end{pmatrix}$. Et on interprête :
$\vec{j} = -\frac{1}{2}.(3.\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k}) - \frac{1}{2}.(\vec{i} + 4.\vec{j} + 2.\vec{k}) - 1.(-2.\vec{i} - 4.\vec{j} - 2.\vec{k})$.
On peut aussi l'obtenir « à la main », en effecutant des combinaisons telles que

$$(\vec{i} + 4.\vec{j} + 2.\vec{k}) + (-2.\vec{i} - 4.\vec{j} - 2.\vec{k}) = -\vec{i}$$

(d'ailleurs la première colonne de la matrice inverse)

$$(3.\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k}) - (\vec{i} + 4.\vec{j} + 2.\vec{k}) = 2.\vec{i} - 2.\vec{j}$$

il ne reste qu'à enlever $\vec{i}$ et diviser par 2.

Le vecteur nul a les mêmes composantes sur les deux bases : trois 0. Mais est ce le seul ?
En général, tous les vecteurs changent de composantes quand ils changent de base.
Ici, on veut $x.(3.\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k}) + y.(\vec{i} + 4.\vec{j} + 2.\vec{k}) + z.(-2.\vec{i} - 4.\vec{j} - 2.\vec{k}) = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$
(le vecteur a pour composantes x, y et z sur les deux bases).
On résout $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et on des solutions : tous les multiples de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\vec{i} + 2.\vec{j} + 2.\vec{k}$ est bien aussi $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + 2.\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.
C'était prévisible qu'il y ait des solutions, car $\begin{pmatrix} 3-1 & 1 & -2 \\ 2 & 4-1 & -4 \\ 2 & 2 & -2-1 \end{pmatrix}$ *avait un déterminant nul.*

◁56▷ ♣ $(E, +, .)$ est l'ensemble des suites réelles bornées. F est l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Montrez que F est un sous-espace vectoriel strict de $(E, +, .)$.
Pour u et v dans E, on pose $\phi(u, v) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k}.u_k.v_k$. Montrez que cette série converge effectivement. Montrez que ϕ est un produit scalaire sur $(E, +, .)$.
Qui sont les suites orthogonales à la suite $(1, 0, 0, \ldots)$?
Montrez que seuls la suite nulle est orthogonale à toutes les suites de la forme $(0, 0 \ldots 0, 1, 0, \ldots)$.
Déduisez $(F^\perp)^\perp = E \neq F$. Est ce en contradiction avec le cours ?

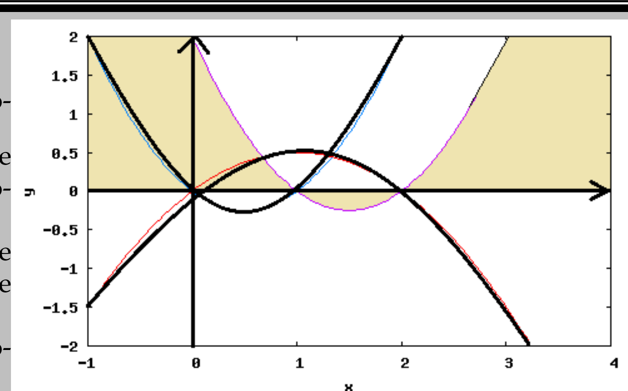
◁57▷ ♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas une matrice de Gram.

Pour les uns, une matrice de Gram c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \phi(\vec{i}, \vec{i}) & \phi(\vec{j}, \vec{i}) & \phi(\vec{k}, \vec{i}) \\ \phi(\vec{i}, \vec{j}) & \phi(\vec{j}, \vec{j}) & \phi(\vec{k}, \vec{j}) \\ \phi(\vec{i}, \vec{k}) & \phi(\vec{j}, \vec{k}) & \phi(\vec{k}, \vec{k}) \end{pmatrix}$ pour un produit scalaire ϕ.
Pour les autres, une matrice de Gram c'est une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \vec{u}.\vec{u} & \vec{v}.\vec{u} & \vec{w}.\vec{u} \\ \vec{u}.\vec{v} & \vec{v}.\vec{v} & \vec{w}.\vec{v} \\ \vec{u}.\vec{w} & \vec{v}.\vec{w} & \vec{w}.\vec{w} \end{pmatrix}$ pour le produit scalaire usuel.

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ est réelle symétrique. Elle pourraît s'écrire en fait $\begin{pmatrix} \phi(\vec{i},\vec{i}) & \phi(\vec{j},\vec{i}) & \phi(\vec{k},\vec{i}) \\ \phi(\vec{i},\vec{j}) & \phi(\vec{j},\vec{j}) & \phi(\vec{k},\vec{j}) \\ \phi(\vec{i},\vec{k}) & \phi(\vec{j},\vec{k}) & \phi(\vec{k},\vec{k}) \end{pmatrix}$.
D'ailleurs ses termes diagonaux sont positifs. Mais qu'en est il de ses petits déterminants de taille 2 :
$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 13 \end{vmatrix} = 14$, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 14$ et $\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} = 14$ (décidément !).
On s'attaque au grand déterminant : $3.\begin{vmatrix} 13 & 8 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} - 5.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = 3.14 - 5.14 + 2.14 = 0$.
Désolé, le déterminant est nul, ce n'est pas une matrice de Gram.

D'ailleurs, on peut constater : $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 13 & 8 \\ 2 & 8 & 6 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ est non nul, et se voudrait pourtant orthogonal à tout le monde !

◁ 58 ▷ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto \sum_{k=0}^{2} P(k).Q(k)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$. Montrez que la famille $(X.(X-1),\ X.(2-X),\ (X-1).(X-2))$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
Qui sont les polynômes orthogonaux au sous-espace vectoriel des polynômes constants ? Donnez une base de ce plan. Donnez même une base orthonormée.
Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X],+,.)$.



Forme, bilinéaire, symétrique. Tout ça c'est cadeau.
Positive car $\sum_{k=0}^{2} (P(k))^2$ est positif... ou nul.
Mais comment voulez vous que ceci soit nul ? En imposant $P(0) = P(1) = P(2) = 0$.
Alors que P est de degré inférieur ou égal à 2. Pauvre P, le voilà nul.
C'est bon, on a une forme bilinéaire symétrique positive défini-positive.

En nommant A, B et C les tris polynômes, quand on calcule quelquechose comme $A.B$, on a un polynôme factorisable par $X.(X-1).(X-2)$.
Il est nul en 0, 1 et 2. la somme $A(0).B(0) + A(1).B(1) + A(2).B(2)$ est nulle.
C'est bien pareil avec $A.C$ et $B.C$.

Pour être orthogonal à tous les polynômes constants, il suffit d'être orthogonal à 1.
La condition devient $P(0) + P(1) + P(2) = 0$.
pas grand chose à dire de plus.
On a le noyau d'une forme linéaire non nulle. C'est un sous-espace vectoriel e l'espace de départ, de dimension $3-1$. Ce qui fait 2.

Une base ? Il suffit de deux polynômes non colinéaires.
$X-1$ est parfait comme premier polynôme ($P(1)$ est nul, $P(0)$ et $P(2)$ sont opposés).
$X^2 + a$ avec a bien ajusté : $X^2 - \dfrac{5}{3}$ par exemple.

On la veut orthonormée ?
On renorme le premier : $\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$ car $\phi(X-1,\ X-1) = 2$.
On construit le second par méthode de Schmidt : $X^2 - \dfrac{5}{3} - \phi\Big(X^2 - \dfrac{5}{3}, \dfrac{X-1}{\sqrt{2}}\Big).\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}$ (oui, $\vec{\varepsilon_2} - \phi(\vec{\varepsilon_2}, \vec{e_1}).\vec{e_1}$.
On trouve $\dfrac{3.X^2 - 6.X + 1}{6}$. Autant prendre $3.X^2 - 6.X + 1$ qui est bien dans le sous-espace, et orthogonal au premier.
On le norme et on colle les deux $\boxed{\Big(\dfrac{X-1}{\sqrt{2}}, \dfrac{3.X^2 - 6.X + 1}{\sqrt{6}}\Big)}$

Montrez que $P(X) \longmapsto P(X+1)$ (notée T) est un automorphisme de $(\mathbb{R}_2[X], +, .)$.

Existence : pas de problème.
Image : $P(X+1)$ est un polynôme de même degré.
Linéarité : $P(X+1)+Q(X+1) = (P+Q)(X+1)$ et pour $\lambda.P$.
Bijectivité : on donne l'application réciproque : $Q(X) \longmapsto Q(X-1)$.

Montrez que ce n'est pas une isométrie (c'est à dire certains vecteurs P n'ont pas la même norme que leur image).
Existe-t-il des polynômes non constants qui ont la même norme que leur image.
Résolvez l'équation P est orthogonal à $T(P)$ pour le produit scalaire ϕ.

Le polynôme X a pour norme $\sqrt{0+1+4}$.
Son image $X+1$ pour norme $\sqrt{1+4+9}$.
La norme n'est pas conservée.

Le polynôme constant a a pour norme $\sqrt{3.a^2}$ et son image aussi.

On cherche ensuite P vérifiant $\sqrt{P^2(0)+P^2(1)+P^2(2)} = \sqrt{P^2(1)+P^2(2)+P^2(3)}$.
Prenons P non constant vérifiant $P(0) = P(3)$ ou $P(0) = -P(3)$.
On vérifie avec $P(X) = 2.X-3$. Lui et son image ont pour norme $\sqrt{11}$.

La seule difficulté de la dernière question est d'accepter la question.
On veut juste $P(0).P(1)+P(1).P(2)+P(2).P(3) = 0$.

◃59▹ **-a-** On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des applications continues de $[0,\ \pi/2]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que $(f,g) \longmapsto \int_0^{\pi/2} f(t).g(t).dt$ est un produit scalaire sur $(E,+,.)$ (notation : $<f,\ g>$).
-b- Pour f dans E, on définit $V(f) = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$ et $V^*(f) = x \longmapsto \int_x^{\pi/2} f(t).dt$. Pourquoi la notation $V(f(x))$ est elle absurde ? Montrez que V et V^* sont deux endomorphismes de $(E,+,.)$. Sont ils injectifs ? Sont ils surjectifs ? Pourquoi ne pouviez vous pas appliquer la formule du rang ?
-c- Montrez pour f et g dans E : $<V(f),\ g> = <f,\ V^*(g)>$.
-d- On pose $T = V^* \circ V$. Représentez graphiquement $T(1)$ et $T(Id)$.
-e- Calculez $T(f)(\pi/2)$ et $T(f)'(0)$ pour f dans E.
-f- Montrez $<T(f),\ g> = <f,\ T(g)>$ pour tout couple $(f,\ g)$. Montrez $<T(f),\ f> > 0$ pour tout f de $E-\{0\}$.
-g- Déduisez que les valeurs propres de T sont strictement positives.
-h- Soit λ une valeur propre de T et f_λ un vecteur propre associé. Montrez que f_λ est C^2 et est solution de l'équation différentielle $\lambda.\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$. Montrez : $f_\lambda(\pi/2) = 0$ et $f'_\lambda(0) = 0$.
-i- Déduisez que λ est de la forme $\frac{1}{(2.n+1)^2}$ pour un entier naturel n. Donnez la dimension des sous-espaces propres.

Extrait du sujet Mines-Ponts 2015

◃60▹ ♡ a, b et c sont trois réels. On définit : $R = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de R. Montrez que si R est une matrice de rotation de $(\mathbb{R}^3,+,.)$ espace vectoriel euclidien canonique alors a, b et c sont les racines d'un polynôme de la forme $X^3 - X^2 + p$ *(vérifiez qu'il ne sert à rien de calculer* $\det(A)$*)*.

On a bien $\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda. \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = a+b+c$. C'est un vecteur propre, et $a+b+c$ est sa valeur propre.
La condition nécessaire et suffisante est ${}^tR.R = I_3$ qui donne

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2+c^2 & a.b+a.c+b.c & a.b+a.c+b.c \\ a.b+a.c+b.c & a^2+b^2+c^2 & a.b+a.c+b.c \\ a.b+a.c+b.c & a.b+a.c+b.c & a^2+b^2+c^2 \end{pmatrix} = I_3.$$

Tout se réduit à $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $a.b+a.c+b.c = 0$.

Mais je préfère l'obtenir par « les vecteurs colonne sont normés : $a^2+b^2+c^2 = 1$
deux à deux orthogonaux : $a.b+a.c+b.c = 0$

On reporte dans ce que va nous dire Viète : $(a+b+c)^2 = 1+2.0$.
On déduit que $a+b+c$ vaut 1 ou -1.
On s'oriente vers deux formes possibles en fonction du choix de signe de $a+b+c$:
$X^3 - 1.X^2 + 0.X - p$ ou $X^3 + 1.X^2 + 0.X - p$

Mais j'ai un indice : $a+b+c$ est valeur propre de notre isométrie.
Et on veut une isométrie directe. C'est donc que cette valeur propre vaut 1 (spectre $[1,\ e^{i.\theta},\ e^{-i.\theta}]$).
C'est donc que $a+b+c$ vaut 1.

Sinon, si on a du courage, on calcule le déterminant : $a^3+b^3+c^3-3.a.b.c$.
On y retrouve $(a+b+c)^3 - 3.(a^2.b + a.b^2 + a^2.c + a.c^2 + b^2.c + b.c^2) - 6.a.b.c - 3.a.b.c$.
On arrange : $\det(R) = (a+b+c)^3 - 3.(a.b + a.c + b.c).(a+b+c) = (a+b+c)^3$.
Comme l'isométrie est directe, son déterminant vaut 1 : $a+b+c = 1$.

Viète ne garde donc que $X^3 - X^2 + 0.X - p$ et on ne sait rien de p (si ce n'est que c'est le produit des racines).

L'énoncé est mal fichu, il le note $-p$ et le polynôme devient $X^3 - X^2 + p$.

On pose alors $\gamma = \dfrac{3.a-1}{2}$ *(justifiez pourquoi on pose cela)*. Montrez que $4.\gamma^3 - 3.\gamma$ est entre -1 et 1. Déduisez que p est entre 0 et $4/27$.

Qui est ce γ ? Réfléchissez. Une matrice de rotation, c'est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$.En tout cas, sur une base bien choisie.

Une matrice de rotation est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{pmatrix}$.. Elle a donc la même trace que cette matrice : $1 + 2.\cos(\theta)$.

On égalise donc $3.a = 1 + 2.\cos(\theta)$.
On extrait $\gamma = \dfrac{3.a-1}{2} = \cos(\theta)$.

Et on comprend le truc : $4.\gamma^3 - 3.\gamma = \cos(3.\theta)$.
Il est entre -1 et 1.

On remplace : $4.\left(\frac{3.a-1}{2}\right)^3 - 3.\frac{3.a-1}{2}$ est entre -1 et 1.

On calcule : $-1 \leqslant \dfrac{27.a^3 - 27.a^2 + 2}{2} \leqslant 1$.

Or, comme par hasard, a est racine du polynôme de racines a, $b$et c.
a vérifie donc $a^3 - a^2 + p = 0$ et si on veut : $27.a^3 - 27.a^2 = -27.p$.
On reporte : $-1 \leqslant \dfrac{-27.p+2}{2} \leqslant 1$.
p est entre $\dfrac{4}{27}$ et 0.

Que pouvez vous dire dans chacun des deux cas $p = 0$ et $p = 4/27$. Réciproquement, montrez que si a, b et c sont racines d'une équation $X^3 - X^2 + p$ avec p positif plus petit que $4/27$ alors A est une matrice de rotation *(axe ? angle ?)*. *Exercice classique de l'écrit des concours CCP et E3A, classique de l'oral des concours Centrale et Mines-Ponts.*

Si p vaut 0, ceci signifie $\cos(3.\theta) = 1$. L'angle θ est soit nul, soit égal à $\dfrac{2.\pi}{3}$, soit égal à $\dfrac{-2.\pi}{3}$.
Et l'équation de racines a, b et c est simple et donne comme liste de racines 0, 0 et 1.
Les trois matrices sont classiques : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si p vaut $\dfrac{4}{27}$, c'est que $\cos(3.\theta)$ vaut -1. Et θvaut $\dfrac{\pi}{3}$, $\frac{-\pi}{3}$ ou π. On écrit les matrices obtenues.

Réciproquement, tout remonte très bien.
L'axe est $Vect(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ et l'angle est θ défini par $3.a = 1 + 2.\cos(\theta)$.