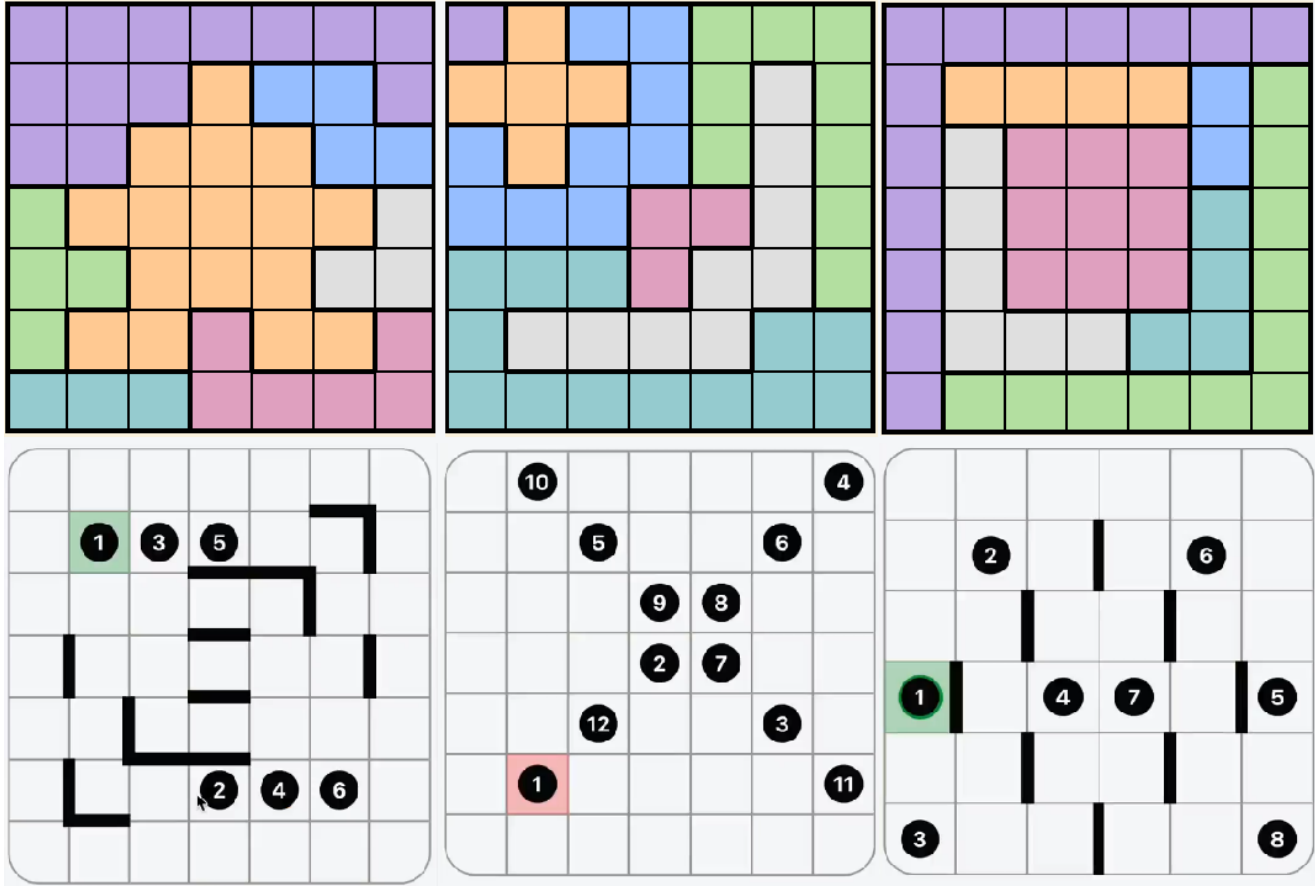




&lt;0&gt;

&lt;1&gt;

On pose  $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$  ( $a$  est un réel fixé). Déterminez son rang. Pour quelles valeurs de  $a$  est elle diagonalisable ?

&lt;2&gt;

Soit  $f$  un endomorphisme de  $(E, +, \cdot)$ . Montrez que  $f$  est injective si et seulement si on a  $\text{Ker}(f \circ g) = \text{Ker}(g)$  pour tout autre endomorphisme  $g$ .  
Pour un des sens c'est direct. Pour l'autre, bien choisir  $g$ .

&lt;3&gt;

On se place dans  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  muni de la base canonique orthonormée  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .  
Pour tout triplet de vecteurs  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ , on définit la matrice  $G$  (dite « matrice de Gram ») de terme général  $g_i^k = \vec{u}_i \cdot \vec{u}_k$  (produit scalaire des deux vecteurs) :

$$G = \begin{pmatrix} \|\vec{u}_1\|^2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 & \|\vec{u}_2\|^2 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 \\ \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 & \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 & \|\vec{u}_3\|^2 \end{pmatrix}$$

Montrez :  $\text{Tr}(G) \geq 0$  et  $\text{Tr}(\text{Com}(G)) \geq 0$ .

Montrez aussi  $\text{Tr}(\text{Com}(G))$  est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

&lt;4&gt;

♥ Montrez que  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$  est la matrice d'un produit scalaire sur  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ . Donnez une base orthonormée pour ce produit scalaire.  
Écrivez cette matrice sous la forme  ${}^t T \cdot T$ .

◁5▷ Montrez que  $(P, Q) \mapsto P(0).Q(0) + P'(1).Q'(1) + P''(2).Q''(2) + P^{(3)}(3).Q^{(3)}(3)$  est un produit scalaire sur  $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)$ .

Transformez la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  en base orthonormée par méthode de Gram-Schmidt.

◁6▷  $\heartsuit G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$ . Vecteurs :  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$

Ajustez  $a$  et  $b$  pour que la famille ait pour matrice de Gram  $G$ . Quel est l'angle que font deux à deux ces vecteurs ? Et en dimension  $n$  ? On considère la matrice  $U$  de taille  $n+1$  dont tous les coefficients valent 1. Montrez que 0 est valeur propre de multiplicité  $n$  avec un sous-espace propre de dimension  $n$ . Montrez que le vecteur formé de  $n+1$  réels égaux à 1 est valeur propre de  $U$ . Déduisez que  $U$  est semblable à  $\text{Diag}(n+1, 0, \dots, 0)$ . A quelle matrice diagonale est semblable  $\beta.U + (\alpha - \beta).I$  ? Quel est son déterminant ? Déduisez que si on peut trouver  $n+1$  vecteurs unitaires de  $\mathbb{R}^n$  formant deux à deux le même angle  $\theta$ , alors cet angle  $\theta$  vaut  $\arccos(-1/n)$ .

◁7▷  $\heartsuit$  Montrez que  $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 4xy + 2yz + 5yz}$  est une norme issue d'un produit scalaire (pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire).

Complétez pour que  $(\vec{i}, a.\vec{i} + \vec{j}, a.\vec{i} + b.\vec{j} + \vec{k})$  soit orthonormée.

◁8▷ Soient  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel, tous deux de norme 1 (avec  $\vec{a} \neq \vec{b}$ ). Montrez que chacun des vecteurs  $(1 - \lambda).\vec{a} + \lambda.\vec{b}$  ( $\lambda$  dans  $]0, 1[$ ) est de norme strictement plus petite que 1.

◁9▷ On définit  $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & -2.y & +2.z \\ 2.x & -y & +3.z \end{pmatrix}$ . Donnez son rang, son noyau (base, équations cartésiennes), son

image (base, équation cartésienne). Montrez que l'ensemble des endomorphismes  $h$  vérifiant  $f \circ h = 0_{\mathbb{R}^3}$  est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1 (et comme toujours, il y a là deux questions...). Donnez une base de cet espace vectoriel.

Montrez que l'ensemble des endomorphismes  $g$  vérifiant  $g \circ f = 0_{\mathbb{R}^3}$  est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1. Donnez une base de cet espace vectoriel.

◁10▷  $\heartsuit$  Déterminez le rang de l'application  $P \mapsto 4.P(X) - 3.X.P'(X)$  après en avoir prouvé la linéarité de  $(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$  dans lui-même et en avoir cherché le noyau.

Déduisez que pour tout polynôme  $Q$  il existe  $P$  vérifiant  $Q = 4.P - 3.X.P'$ .

Est-il vrai que pour tout  $Q$  il existe  $P$  vérifiant  $Q = 4.P - X.P'$  ?

◁11▷ Soit  $f$  un endomorphisme de  $(E, +, \cdot)$ , montrez :  $\text{Im}(f^2) = \text{Im}(f^4) \Leftrightarrow \text{Im}(f^2) = \text{Im}(f^3)$ .

◁12▷  $\heartsuit$  Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $(E, +, \cdot)$  de dimension finie. On suppose :  $g \circ f = 0$  et  $f + g$  bijective.

Montrez :  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ ,  $\text{Ker}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$ .

Déduisez :  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Ker}(g)) \leq \dim(E)$  et enfin  $\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{Im}(g)) = \dim(E)$ .

(on utilisera la formule du rang :  $\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(E)$ )

◁13▷  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ . Montrez :

$(\text{rg}(f + g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g)) \Leftrightarrow (\text{Im}(f) \cap \text{Im}(g) = \{\vec{0}\})$  et  $\text{Ker}(f) + \text{Ker}(g) = \mathbb{R}^n$

◁14▷ On note  $(E, +, \cdot)$  l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2. Montrez que  $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A.B)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Soit  $S$  une matrice réelle symétrique à spectre strictement positif  $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right)$  avec  $a$  et  $c$  strictement positifs ainsi que  $a.c - b^2$ . Montrez que  $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^t A.S.B)$  (noté  $\phi_S$ ) est aussi un produit scalaire sur  $E$ .

Pour quelle(s) matrice(s)  $S$  la base canonique est-elle orthonormée pour  $\phi_S$  ?

Pour quelle(s) matrice(s)  $S$  la base  $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$  est-elle orthogonale ? Même

question avec orthonormée.

◁15▷ ♠ **Théorème spectral en dimension 3 pour comprendre.**

Soit  $\varphi$  un endomorphisme autoadjoint de  $\mathbb{R}^3$  (c'est à dire  $\forall(\vec{u}, \vec{v}), f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot f(\vec{v})$ ).

-1- On définit l'application  $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot f(\vec{u})$  (notée  $\varphi$ ). Justifiez que cette application admet un maximum (noté  $\alpha$ ) sur l'ensemble  $S$  des vecteurs de norme 1 et montrez que ce maximum est atteint pour au moins un vecteur  $\vec{m}$  (cette étape, c'est une histoire d'application continue sur une partie bornée et fermée).

-2- Montrez :  $\vec{u} \cdot f(\vec{u}) \leq \alpha |\vec{u}|^2$  pour tout vecteur  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

-3- On note alors  $D = \text{Vect}(\vec{m})$ . Montrez  $(t \times \vec{m} + \vec{v}) \cdot f(t \times \vec{m} + \vec{v}) \leq \alpha \cdot (1 + t^2)$  pour tout réel  $t$  et tout vecteur  $\vec{v}$  de  $S \cap D^\perp$ .

-4- Montrez :  $(t \times \vec{m} + \vec{v}) \cdot f(t \times \vec{m} + \vec{v}) = t^2 \times \alpha + 2 \times t \times f(\vec{m}) \cdot \vec{v} + \varphi(\vec{v})$  pour tout  $t$  réel et tout  $\vec{v}$  orthogonal à  $\vec{m}$  de norme 1. Déduisez :  $f(\vec{m}) \cdot \vec{v} = \vec{m} \cdot f(\vec{v}) = 0$ .

-5- Déduisez que  $f(\vec{m})$  est orthogonal à  $D^\perp$ .

-6- Déduisez que  $\vec{m}$  est vecteur propre de  $f$ .

-7- Montrez que  $D$  est stable par  $f$ . Montrez que  $D^\perp$  est stable par  $f$ .

-8- Montrez que toute matrice réelle symétrique  $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  se diagonalise.

-9- Montrez que  $f$  admet une base de vecteurs propres.

-10- Déduisez : tout endomorphisme autoadjoint de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  est diagonalisable.

-11- Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 3 est diagonalisable sur  $\mathbb{R}$ .

◁16▷ On note  $P$  le plan de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  d'équation  $x + y - 2z = 0$ ,  $D$  la droite de vecteur directeur  $\vec{i} + \vec{k}$  et  $D'$  la droite de vecteur directeur  $\vec{j} + \vec{k}$ .

Montrez :  $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$  (et ne simplifiez pas en  $D = D'$ ).

On note  $p$  le projecteur sur  $P$  en effaçant la composante suivant  $D$ . Déterminez  $p(\vec{i})$ ,  $p(\vec{j})$  et  $p(\vec{k})$ .

On note  $p'$  le projecteur sur  $P$  en effaçant la composante suivant  $D'$ . Déterminez  $p'(\vec{i})$ ,  $p'(\vec{j})$  et  $p'(\vec{k})$ .

Résolvez  $p(\vec{u}) = p'(\vec{u})$  d'inconnue vectorielle  $\vec{u}$ .

Résolvez  $p(\vec{u}) + p'(\vec{u}) = \vec{0}$  d'inconnue vectorielle  $\vec{u}$ .

Résolvez  $p \circ p'(\vec{u}) = p' \circ p(\vec{u})$  d'inconnue vectorielle  $\vec{u}$ .

◁17▷

|    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|
|    |    |    | 1  |    | 31 |    |
|    |    |    | ■  |    |    | 7  |
| 22 |    |    | ■  |    |    |    |
| 19 |    |    | 34 |    | ■  | ■  |
|    | ■  | ■  |    | 10 |    | 4  |
|    | 40 | 25 |    | ■  |    | 28 |
|    | 37 | 16 |    | ■  |    |    |

|    |    |    |   |  |   |    |    |    |
|----|----|----|---|--|---|----|----|----|
|    |    |    | 1 |  | ■ | 4  |    |    |
|    |    |    | ■ |  |   | 7  | 34 |    |
|    | 25 | 28 |   |  |   | 10 | ■  | ■  |
| 37 | ■  | ■  |   |  |   |    |    | 31 |
|    | 19 |    |   |  |   | ■  |    | 16 |
|    | 40 |    |   |  |   | ■  |    | 13 |
|    |    |    |   |  |   | 22 |    |    |

Saute saute mon petit, comme un cavalier d'échecs.

◁18▷ Représentez la matrice carrée de taille  $n$  sur  $n$  dont le terme général (ligne  $i$ , colonne  $k$ ) est  $\text{int}(\text{abs}(i-k))=1$ .

Représentez la matrice carrée de taille  $n$  sur  $n$  dont le terme général (ligne  $i$ , colonne  $k$ ) est  $\text{int}(i\%2==0 \text{ or } k\%2==0)$ .

◁19▷ Pour tout  $n$ , on pose  $g_n = x \mapsto x^{n+1} - x^n$  de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et  $G_n = \sum_{k=0}^n g_k$ . Montrez que chaque  $G_k$  est continue.

Montrez que pour tout  $x$ , la somme  $G_n(x)$  converge vers un réel qu'on notera  $G(x)$ . Montrez que l'application  $G$  n'est pas continue.

◁20▷ ♥ Montrez que la série de terme général  $\frac{1}{n \cdot \ln(n)^2}$  converge.

◁21▷ Par comparaison avec une intégrale, montrez que la suite  $\left( \sum_{k=3}^n \frac{1}{k \cdot \ln(k) \cdot \ln(\ln(k))} \right)_n$  diverge.

◁22▷ L'élève A.Katair (enCDD) est un crétin. Il prétend que l'on a dans le cours la formule  $(u.v)' = u'.v'$  pour  $u$  et  $v$  dérivables. Rappelez la vraie formule et sa démonstration.

Néanmoins, montrez qu'il a raison dans les cas suivants (et pour les cases vides, complétez avec une fonction non nulle) :

|        |                 |                     |           |                     |         |                   |
|--------|-----------------|---------------------|-----------|---------------------|---------|-------------------|
| $u(t)$ | $t$             | $t^2$               | $e^{t/2}$ | $\frac{1}{(t-4)^4}$ | $t.e^t$ | $\frac{t+6}{t+2}$ |
| $v(t)$ | $\frac{1}{1-t}$ | $\frac{1}{(t-2)^2}$ | $e^{-t}$  |                     |         | $e^{(-4/(t+4))}$  |

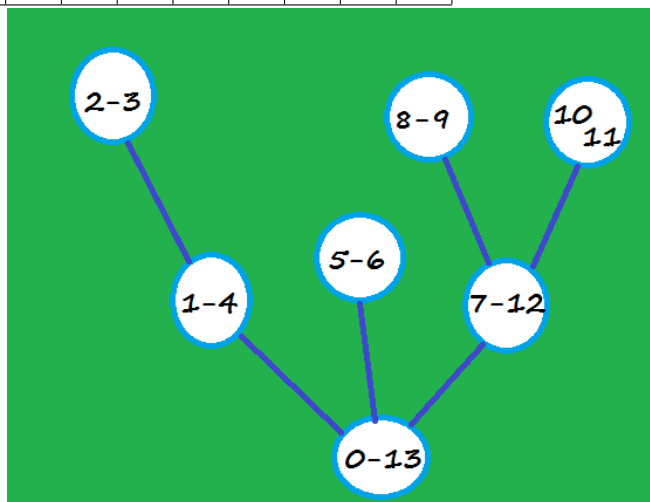
◀23▶ Je vous donne l'arbre généalogique de la famille (codé comme l'arborescence des dossiers/répertoires d'un disque dur). Complétez ce qui manque :

| nom               | 0 | 1 | 2  | 3  | 4  | 5  | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|-------------------|---|---|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| indice montant    | 8 | 6 | 5  | 21 | 19 | 25 | 0 | 1  | 18 | 14 | 2  | 3  | 27 | 29 | 26 |    | 10 |
| indice descendant | 9 | 7 | 12 | 22 | 20 | 32 |   | 24 | 23 |    | 13 | 4  | 28 | 30 | 31 | 16 | 11 |

Un exemple pour comprendre : voici un arbre, et son codage :  
pour chaque nœud, vous avez son indice ascendant et son indice descendant.

Et maintenant les question :

- 1- Qui est l'ancêtre commun à tout le monde ?
- 2- Combien a-t-il de descendants directs et indirects ?  
Combien a-t-il d'enfants ?
- 3- Qui sont les individus sans descendants ?
- 4- Combien 10 a-t-il d'enfants, et combien de descendants ?



5- Donnez le père, le grand-père, et les aïeux successifs de 3.

6- Si 8 a un nouvel enfant, pouvez vous indiquer le script qui va modifier les deux listes "indices montants" et "indices descendants".

◀24▶ Que va faire ce script :

```

from random import randrange
def leurdeschamps(L) :
    ....if len(L) == 1 :
    .....return L[0]
    ....else :
    .....demi = len(L)//2
    .....a = leurdeschamps(L[0:demi])
    .....b = leurdeschamps(L[demi, len(L)])
    .....if a > b :
    .....return a
    .....else :
    .....return b
LL = [randrange(1000) for k in range(10000)]
print(leurdeschamps(LL))

```

◀25▶ ♡ Simplifiez  $5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)$ .

◀26▶ Un dé non équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 vérifie :

|             |       |         |          |
|-------------|-------|---------|----------|
| tirage      | pair  | premier | $\leq 3$ |
| probabilité | $1/2$ | $1/3$   | $3/5$    |

Calculez la probabilité de tirer 1. Calculez l'espérance et la variance de ce dé (ne pas achever l'application numérique).

Question subsidiaire : c'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

◀27▶ Un événement a une probabilité de vingt pour cent. Si on dit que cette probabilité augmente de dix pour cent, ceci signifie-t-il que sa nouvelle probabilité est de trente pour cent, ou de vingt deux pour cent ?

◀28▶

```
def initif(n) :
...k = 0
...while True :
.....k +=1
.....M = k*n
.....while M%10==0 :
.....M=M//10
.....while M%10 == 1 :
.....M=M//10
.....if M==0 :
.....return k
```

Voici quelques réponses de ce programme

| entrée | 2 | 3  | 4 | 5 | 6   | 7      | 12  | 14     | 140 | ?   |
|--------|---|----|---|---|-----|--------|-----|--------|-----|-----|
| sortie | 5 | 37 | ? | 2 | 185 | 15 873 | 125 | 79 365 | ?   | 925 |

Retrouvez les cases qui manquent. Expliquez ce qu'il fait, et comment il le fait.

Un théorème amusant dit que le programme ci dessus s'arrête toujours.

Démontrons le !  $n$  est un entier donné, on définit  $a_k = ((10^k - 1)/9) \bmod n$ .

Montrez que  $(a_k)$  est une suite d'entiers à valeurs dans  $\{0, 1, \dots, n-1\}$ .

Déduisez qu'il existe  $p$  et  $q$  avec  $p < q$  et  $a_p = a_q$ . Concluez.

Le script ci dessus est il le meilleur script ? Alors, à vous !

◀29▶

Pour  $a$  dans  $] -\pi, 0[ \cup ]0, \pi[$ , on définit :  $f_a = x \mapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{x - \cos(a)}{\sin(a)}\right) - a + \frac{\pi}{2}$ . Donnez son domaine de définition, ses limites aux bornes.

Indiquez suivant  $a$  son sens de variations, et ses éventuels points d'inflexion.

Donnez le développement limité d'ordre  $n$  en 0 de  $f_a$ .

◀30▶

Montrez que  $\left(\frac{(-1)^p \cdot q^2}{(p+q)!}\right)_{\substack{0 \leq p \\ 0 \leq q}}$  est sommable, de somme  $3.e/2$ .

◀31▶

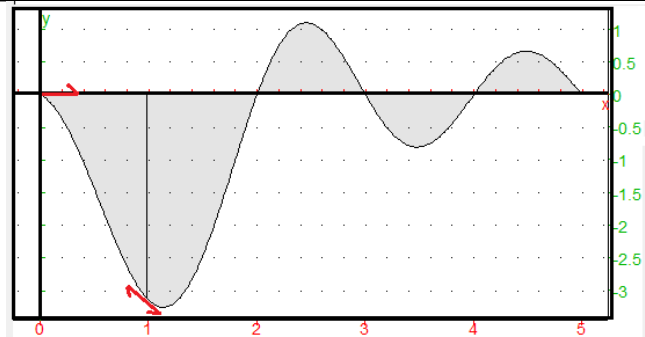
Donnez un équivalent en  $a.n^\alpha$  de  $(n+1)^p - (p+n).n^{p-1}$  quand  $n$  tend vers l'infini.

◀32▶

Prolongez par continuité en 0  $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$  et donnez alors sa dérivée en 0 (notée  $b$ ) puis la position du graphe par rapport à sa tangente. Vérifiez que  $f - b.Id$  est paire. Donnez le coefficient de  $t^9$  dans le développement limité de  $f$  en 0.

♥ J'ai l'impression que  $x \mapsto \frac{\sin(\pi.x)}{\ln(x)}$  se prolonge par continuité en 0 et en 1. Prouvez le. Et donne moi l'équation de la tangente en 0 puis en 1.

◀33▶



◀34▶

On définit  $f = \theta \mapsto \tan(\theta) + \frac{2}{2.\theta - \pi}$ . Prolongez  $f$  par continuité en  $\pi/2$ <sup>1</sup> (on note  $\bar{f}$  l'application prolongée, juste pour avoir la rigueur emmerdante des concours). Montrez que  $\bar{f}$  est dérivable en  $\pi/2$ . Montrez que  $\bar{f}$  est  $C^1$  sur  $[0, \pi/2]$ .

Calculez  $\int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta).d\theta$ .

On pose  $I_n = \int_0^{\pi/2} \bar{f}(\theta). \sin(n.\theta).d\theta$ , Montrez que  $I_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini (by parts).

◀35▶

Limites en  $0^+$  et en l'infini de  $\left(\frac{1+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

◀36▶

Auguste, Baptiste et Clara sortent de colle (d'anglais ou de physique) et indiquent leur note :

|          |  |             |                                   |                                        |
|----------|--|-------------|-----------------------------------|----------------------------------------|
| Auguste  |  | j'ai 6      | j'ai 2 de moins que Baptiste      | j'ai 1 de plus que Clara               |
| Baptiste |  | Clara a 9   | je n'ai pas la plus mauvaise note | la différence entre Clara et moi est 3 |
| Clara    |  | Auguste a 7 | j'ai moins qu'Auguste             | Baptiste a 3 de plus qu'Auguste        |

Ce n'est pas cohérent tout ça. En effet, chacun a menti une fois et dit la vérité deux fois. Quelle est la note de

1. pensez à écrire  $x = \frac{\pi}{2} + h$  quand  $x$  doit tendre vers  $\pi/2$ , car c'est en 0 que vous maîtrisez vos développements limités

chacun ?

◁37▷ ♥ Déterminez  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 4^3}{x^5 - 4^5}$ .

◁38▷ ♥ Comparez les probabilités de “avoir au moins un 6 avec six dés” et “avoir au moins deux 6 avec douze dés” (et pourquoi pas “avoir au moins un 12 avec douze dés” ?).

◁39▷ ♥ Soit  $f$  de classe  $C^3$  sur un voisinage de  $a$ . Calculez  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \begin{vmatrix} f(a-h) & f(a) \\ f(a) & f(a+h) \end{vmatrix}$  (indication : DL d'ordre 2).

◁40▷ On suppose que  $f$  convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  admet un minimum local en  $a$  et aussi en  $b$ . Montrez alors  $f(a) = f(b)$  et montrez que  $f$  est constante sur  $[a, b]$ .

◁41▷ Montrez que  $x \mapsto \ln(1 + e^x)$  est convexe.

Déduisez pour  $a$  et  $b$  positifs :  $1 + \sqrt{a \cdot b} \leq \sqrt{(1+a) \cdot (1+b)}$  et plus généralement

Déduisez :  $1 + \left( \prod_{k=1}^n x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \left( \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right)^{\frac{1}{n}}$  pour des  $x_k$  strictement positifs.

Déduisez  $\sqrt[n]{a_1 \dots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \dots b_n} \leq \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)}$  pour des réels strictement positifs  $a_j$  et  $b_j$ .

$1 + \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} \leq \sqrt[n]{(1 + a_1) \dots (1 + a_n)}$ .

◁42▷ Montrez que si  $f$  est convexe, alors pour tout  $a$  positif,  $t \mapsto e^{a \cdot f(t)}$  est convexe.

Réciproquement, on suppose que pour tout  $a$  positif,  $t \mapsto e^{a \cdot f(t)}$  est convexe. Montrez alors que  $t \mapsto \frac{e^{a \cdot f(t)} - 1}{a}$  est convexe. Déduisez que  $f$  est convexe.

◁43▷  $f$  est de classe  $C^2$  et convexe. Montrez que  $x \mapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t) \cdot dt$  est aussi convexe.

◁44▷ On définit  $f = t \mapsto (t^2 + 1) \cdot e^{-t}$ . Donnez l'intervalle le plus grand possible sur lequel  $f$  est croissante et convexe. Même question avec décroissante et convexe. Même question avec décroissante ou convexe.

◁45▷ ♥ Sur quel(s) intervalle(s)  $t \mapsto (1 - t^2) \cdot e^t$  est elle convexe ?

◁46▷ ♥ Calculez ces sommes multiples pour  $n$  donné

|                                                |                                |                                                                               |
|------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|
| $A_n = \sum_{0 \leq j < i \leq n} \frac{j}{i}$ | $B_n = \sum_{i+j=n} i \cdot j$ | $C_n = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} \text{Max}(i, j)$ |
|------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------|

Si vous n'avez pas confiance, écrivez un script Python qui prend en entrée  $n$  et les calcule.

◁47▷ Soit  $f$  deux fois dérivable avec  $f''$  positive. Montrez que si  $f'(a)$  est nul, alors  $f$  admet un minimum en  $a$ .

◁48▷ Montrez par théorème  $C^1$  que  $g = x \mapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$  est  $C^1$  sur  $]0, +\infty[$  après l'avoir prolongée par continuité en 0 et en 1.

On définit par  $f = x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ . Donnez son domaine de définition.

En notant  $\varphi$  une primitive de  $t \mapsto \frac{1}{\ln(t)}$  (qu'on ne sait pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles), exprimez  $f$  à l'aide de  $\varphi$  et dérivez  $f$ .

Montrez que  $f$  est convexe sur chaque intervalle de son domaine.

Montrez que, pour tout  $x$  de  $]1, +\infty[$  :  $\int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)}$ .

Donnez la limite de  $f$  en 1 (réponse :  $\ln(2)$ ), et donnez la limite de  $f'$  en 1. Même question pour  $f''$ .

Déduisez que  $f$  est  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et qu'elle y est convexe.

Montrez que  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0.

Retrouvez :  $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)} dx = \ln(2)$ .

◁49▷ On définit par  $f = x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ . Donnez son domaine de définition.

Montrez que  $f$  est convexe sur chaque intervalle de son domaine.

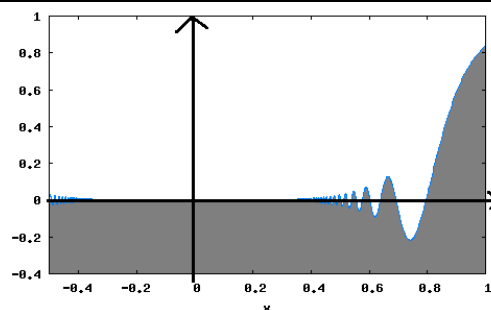
Montrez que, pour tout  $x$  de  $]1, +\infty[$  :  $\int_x^{x^2} \frac{x \cdot dt}{t \cdot \ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2 \cdot dt}{t \cdot \ln(t)}$ .

Donnez la limite de  $f$  en 1, et donnez la limite de  $f'$  en 1. Même question pour  $f''$ .

Déduisez que  $f$  est  $C^2$  sur  $]0, +\infty[$  et qu'elle y est convexe.

Montrez le développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $x \mapsto x^5 \cdot \sin(1/x^5)$  est  $0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + o(x^3)$  (pas par une formule de Taylor Young, ne soyez pas juste des bêtes de calcul, ayez un cerveau).

Montrez que la dérivée de cette application n'a même pas de développement limité en 0.



◁51▷ ♠ 1- On dit que  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  est logarithmiquement convexe si  $x \mapsto \ln(f(x))$  est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.

3- Montrez que si  $f$  est logarithmiquement convexe, alors on a  $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  pour tout couple  $(x, y)$ .

4- Soit  $f$  continue. On suppose  $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$  pour tout couple  $(x, y)$ . Montrez qu'on a alors  $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$  pour tout couple  $(a, b)$  et tout  $t$  de la forme  $k/2^n$  avec  $n$  entier naturel et  $k$  entier de 0 à  $2^n$ . Déduisez  $\ln(f((1-t)a + tb)) \leq (1-t) \cdot \ln(f(a)) + t \cdot \ln(f(b))$  pour tout  $t$  de  $[0, 1]$ .

5- Déduisez que  $f$  est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple  $(x, y)$  :  $\sqrt{f(x) \cdot f(y)} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)$ .

6- Montrez que  $x \mapsto \int_0^1 \left(\ln(1/t)\right)^x \cdot dt$  (notée  $g$ ) est logarithmiquement convexe sur  $[0, +\infty[$ . Calculez par récurrence  $g(n)$  pour tout entier naturel  $n$ .

7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

◁52▷ Montrez que si  $f$  est convexe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , alors pour tout  $a$ ,  $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$  est de cardinal 0, 1, 2 ou infini.

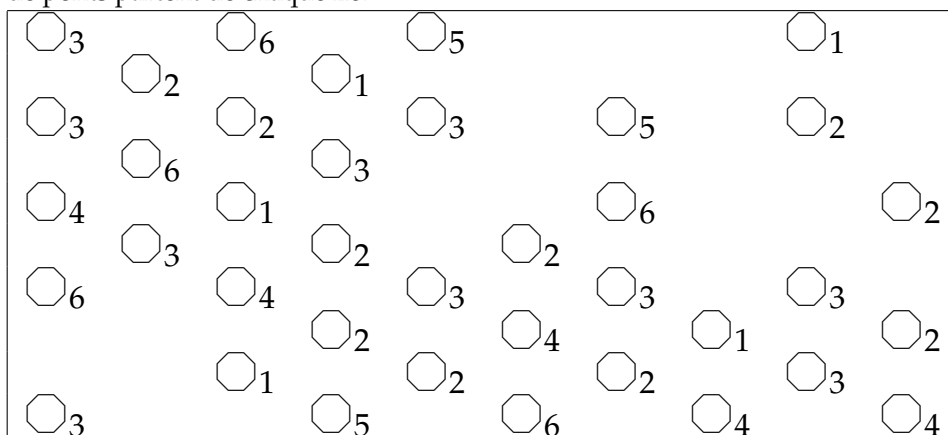
◁53▷ Les  $A_k$  sont des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majorée par  $\exp\left(-\sum_{k=1}^n P(A_k)\right)$ .

On utilisera une inégalité de convexité sur l'exponentielle.

◁54▷ ♥ Montrez, pour  $x$  et  $a$  positifs :  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$  (cas d'égalité ?).

◁55▷ **Rappel des règles** : Les îles sont reliées les unes aux autres par des traits « horizontaux » ou « verticaux » (pas de diagonale, pas plus de deux ponts entre deux îles). Les traits ne peuvent pas se croiser. On vous a indiqué combien

de ponts partent de chaque île.



◁56▷ Montrez :  $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$  (indication : non, pas de quantité conjuguées mais  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ ).

◁57▷ Un élève me dit « monsieur, si le développement limité de  $f$  en 0 est nul à tout ordre, c'est que  $f^{(n)}(0) = 0$  pour tout  $n$  et  $f$  doit être la fonction nulle ».

Je lui réponds :  $t \mapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$  et lui dis « prolonge la en 0 et donne moi son développement limité d'ordre  $2.n$  ». Il n'a pas le temps de faire les calculs, faites les pour lui.

◁58▷ Montrez pour tout  $a$  de  $] -1, 1[$  :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - a \cdot \cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \text{Arctan}\left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\right) = \frac{\text{Arcsin}(a)}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{1-a^2}} \text{ (changement de variable classique et vous pourrez poser aussi } a = \cos(\alpha) \text{)}.$$

◁59▷ Donnez la limite en  $\pi$  de  $\frac{\sin(x/2) + \cos(x)}{1 + \sin^2(x) + \cos(x)}$  (posez  $x = \pi + h$  et utilisez des développements limités).

◁60▷ Calculez  $\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+2}\right) \cdot dt$  (pas de problème, elle existe).

◁61▷ Pour  $f$  dérivable en  $a$ , déterminez la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0 de  $\frac{3}{2\varepsilon^3} \cdot \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t \cdot f(a+t) \cdot dt$  (Lanczos).

◁62▷ Le théorème de Darboux dit qu'une dérivée  $f'$  d'une application  $f$  de classe  $D_1$  sur un intervalle  $I$  n'est pas forcément continue mais vérifie au moins le théorème des valeurs intermédiaires.

On prend donc  $f$  de classe  $D_1$  (pas forcément  $C_1$ ) sur un intervalle  $I$ . On se donne  $a$  et  $c$  dans  $I$ , on pose  $f'(a) = \alpha$  et  $f'(c) = \gamma$ . On prend  $\beta$  entre  $\alpha$  et  $\gamma$ , et on doit montrer qu'il existe un  $c$  vérifiant  $f'(b) = \beta$ .

**Méthode 1.** Montrez que  $f - \beta \cdot \text{Id}$  admet un maximum et un minimum sur  $[a, c]$  (atteints en  $\mu$  et  $\nu$ ). Montrez qu'il n'est pas possible que  $\mu$  et  $\nu$  soient en  $a$  et  $c$  (c'est à dire qu'au moins  $\mu$  ou  $\nu$  est dans  $]a, c[$ ). Déduisez que  $(f - \beta \cdot \text{Id})'$  est nulle en  $\mu$  ou en  $\nu$ . Concluez.

**Méthode 2.** On suppose qu'il n'existe aucun point  $b$  de  $[a, c]$  vérifiant  $f(b) = \beta$ . Montrez alors que  $f - \beta \cdot \text{Id}$  est injective sur  $[a, c]$ . Déduisez qu'elle est monotone. Déduisez que  $f' - \beta$  est de signe constant. Concluez.

**Méthode 3.** On pose  $\varphi = x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  et  $\phi = x \mapsto \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ . Prolongez  $\varphi$  par continuité en  $a$ . Prolongez

$\phi$  par continuité en  $c$ . Montrez que l'image de  $[a, b]$  par  $\varphi$  est un intervalle contenant  $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$  et  $\alpha$ , puis que

l'image de  $[a, b]$  par  $\phi$  est un intervalle contenant  $\frac{f(c) - f(a)}{c - a}$  et  $\gamma$ . Déduisez que  $\beta$  est dans  $\varphi([a, c])$  ou dans  $\phi([a, c])$ . Déduisez qu'il existe  $c$  vérifiant  $f'(b) = \beta$ .

Montrez qu'il n'existe aucune application  $g$  vérifiant  $g' = \lfloor \cdot \rfloor$  (partie entière).

Montrez qu'il n'existe aucune application  $g$  vérifiant  $g' = 1_{\mathbb{Z}}$  (indicatrice de  $\mathbb{Z}$ ).

Montrez qu'il existe une infinité d'applications  $g$  vérifiant  $g' = \lfloor \cdot \rfloor$  (valeur absolue).

Montrez que  $x \mapsto x^2 \cdot \sin(1/x)$  (notée  $h$ ) se prolonge par continuité en 0, est alors dérivable sur  $\mathbb{R}$ , mais que sa dérivée  $h'$  n'est pas continue sur  $\mathbb{R}$ . Montrez que  $h'$  vérifie le principe des valeurs intermédiaires.

Montrez que si une application  $\varphi$  vérifie le principe des valeurs intermédiaires sur  $\mathbb{R}$  alors  $|\varphi|$  le vérifie aussi.

Montrez qu'il existe  $S$  vérifiant  $S' = |\sin'|$  et  $S(0) = 0$ . Calculez  $S(\pi) - S(-\pi)$ .

◁63▷ D'accord, la division suivant les puissances croissantes est interdite aux concours. Mais si on écrivait un script qui prend en entrée deux polynômes Numer et Denom (sous forme de listes de coefficients, dans l'ordre de leurs puissances) plus un entier naturel (ordre auquel on écrit la division) et retourne le quotient.

Exemple :

|        |                   |              |   |
|--------|-------------------|--------------|---|
| entrée | [2, 1, 1]         | [1, 1, 0, 1] | 4 |
| sortie | [2, -1, 2, -4, 5] |              |   |

Et si vous êtes fou, gérez des coefficients rationnels et pas flottants et l'affichage de la division.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |                   |                   |                   |  |  |   |    |                   |                   |                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|--|--|---|----|-------------------|-------------------|-------------------|
| $  \begin{array}{r}  \begin{array}{r}  2 \quad +X \quad +X^2 \\  - (2 \quad +2.X \quad +2.X^3) \\  \hline  \quad -X \quad +X^2 \quad -2.X^3 \\  - (-X \quad -X^2 \quad -X^4) \\  \hline  \quad \quad 2.X^2 \quad -2.X^3 \quad +X^4 \\  - (2.X^2 \quad +2.X^3 \quad +o(X^4)) \\  \hline  \quad \quad \quad -4.X^3 \quad +X^4 \quad +o(X^4) \\  - (-4.X^3 \quad -4.X^4 \quad +o(X^4)) \\  \hline  \quad \quad \quad \quad 5.X^4 \quad +o(X^4) \\  - (5.X^4 \quad +o(X^4)) \\  \hline  \quad \quad \quad \quad \quad o(X^4)  \end{array}  \end{array}  $ | <table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">1</td> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">+X</td> <td style="text-align: right; padding-right: 10px;">+X<sup>3</sup></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right; padding-top: 5px; padding-right: 10px;">2</td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right; padding-top: 5px; padding-right: 10px;">-X</td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right; padding-top: 5px; padding-right: 10px;">+2.X<sup>2</sup></td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right; padding-top: 5px; padding-right: 10px;">-4.X<sup>3</sup></td> <td style="border-top: 1px solid black; text-align: right; padding-top: 5px; padding-right: 10px;">+5.X<sup>4</sup></td> </tr> </table> | 1                 | +X                | +X <sup>3</sup>   |  |  | 2 | -X | +2.X <sup>2</sup> | -4.X <sup>3</sup> | +5.X <sup>4</sup> |
| 1                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | +X                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | +X <sup>3</sup>   |                   |                   |  |  |   |    |                   |                   |                   |
| 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | -X                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | +2.X <sup>2</sup> | -4.X <sup>3</sup> | +5.X <sup>4</sup> |  |  |   |    |                   |                   |                   |

◁64▷ La superficie de la lune (à explorer), c'est l'Australie, la Chine, l'Afrique, l'océan Indien, l'océan Pacifique ?  
Si la lune était un fromage, il faudrait combien de litres de lait ? La production des vaches pendant combien de siècles ?