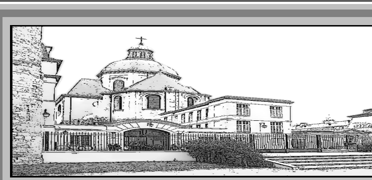
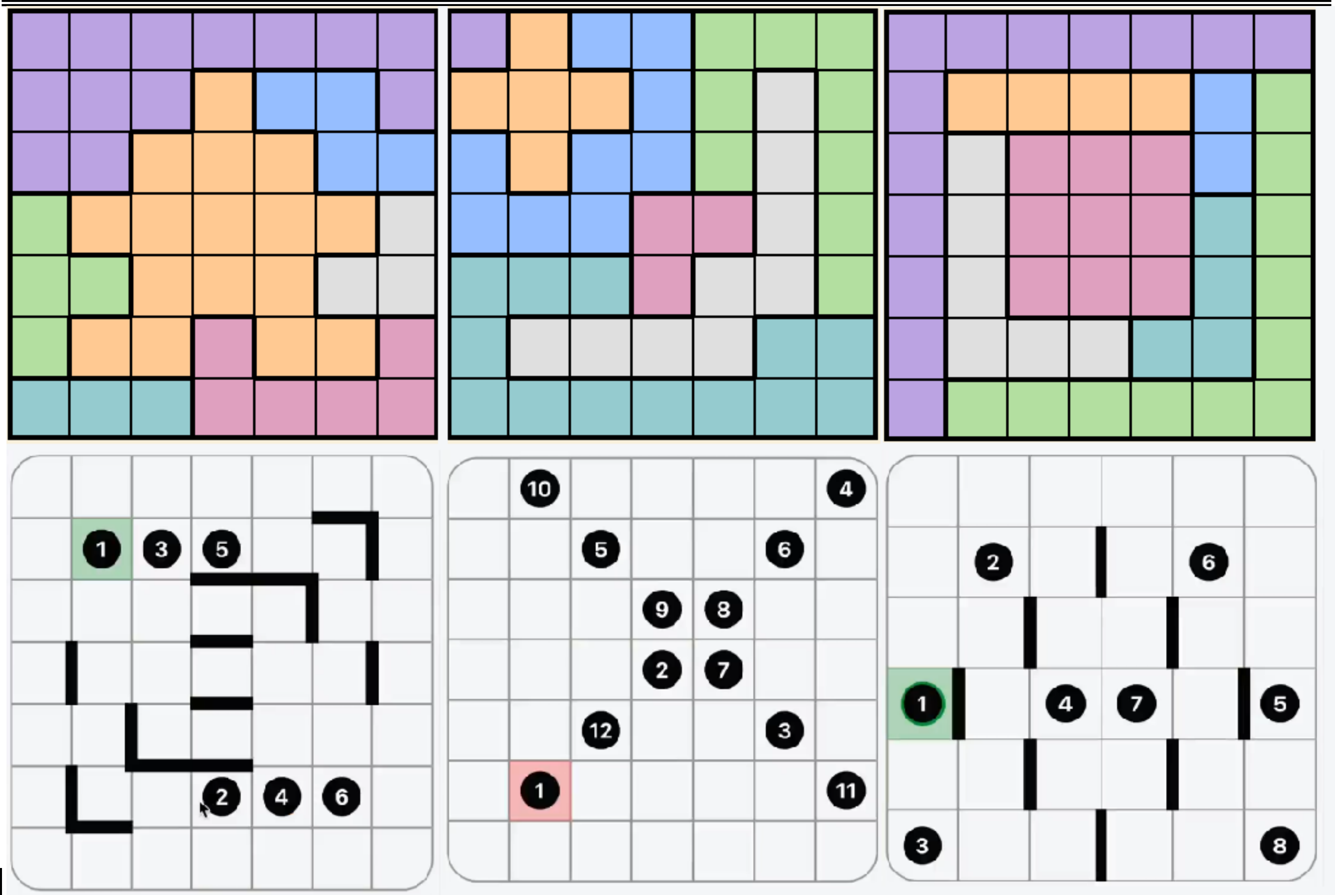
LYCEE CHARLEMAGNE
Lundi 23 juin
M.P.S.I.2



2024 2025

TD33



◁0▷

◁1▷ On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (a est un réel fixé). Déterminez son rang. Pour quelles valeurs de a est elle diagonalisable ?

Il y a au moins un vecteur colonne non nul, le rang vaut au moins 1.
De par la dernière ligne, les deux derniers vecteurs sont indépendants. le rang vaut au moins 2.
Et de par le format, il ne peut dépasser 3.
On calcule un déterminant pour savoir si il vaut 2 ou 3 : $a^2 + a$.

$a = 0$	$a = -1$	autres
rang 2, une colonne nulle	rang 2 : noyau $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	rang 3

On cherche son polynôme caractéristique : $X^3 - X^2 - (a^2 + a + 1)$
Trois valeurs propres : -1, $-a$ et $a + 1$.

◁2▷ Soit f un endomorphisme de $(E, +, .)$. Montrez que f est injective si et seulement si on a $Ker(f \circ g) = Ker(g)$ pour tout autre endomorphisme g.
Pour un des sens c'est direct. Pour l'autre, bien choisir g.

Sens direct. On suppose f injective.
On a toujours $Ker(g) \subset Ker(f \circ g)$ (dès que $g(\overrightarrow{a})$ est nul, on peut composer par ce qu'on veut, on trouve $\overrightarrow{0}$).
Ensuite, soit $\overrightarrow{a}$ dans $Ker(f \circ g)$. On traduit $f(g(\overrightarrow{a})) = \overrightarrow{0}$. Par injectivité de f : $g(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$. On reconnaît que

$\overrightarrow{a}$ est dans $Ker(g)$.

Sens indirect. Si on a $Ker(f \circ g) = Ker(g)$ pour tout g, alors en particulier pour $g = Id_E$, on a $Ker(f) = Ker(Id) = \{\overrightarrow{0}\}$. Que demander de plus !

◁3▷

On se place dans $(\mathbb{R}^3, +, .)$ muni de la base canonique orthonormée $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Pour tout triplet de vecteurs $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$, on définit la matrice G (dite « matrice de Gram ») de terme général $g_i^k = \overrightarrow{v_i}.\overrightarrow{v_k}$ (produit scalaire des deux vecteurs) : $\begin{pmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_3} & \overrightarrow{u_2}.\overrightarrow{u_3} & ||\overrightarrow{u_3}||^2 \end{pmatrix}$
Montrez : $Tr(G) \geqslant 0$ et $Tr(Com(G)) \geqslant 0$.
Montrez aussi $Tr(Com(G))$ est nulle si et seulement si les trois vecteurs sont colinéaires.

La trace de la matrice de Gram G est la somme $||\overrightarrow{u_1}||^2 + ||\overrightarrow{u_2}||^2 + ||\overrightarrow{u_3}||^2$.
En tant que somme de carrés de normes, elle est positive.

Chaque coefficient de la diagonale de la comatrice est un déterminant de la forme $\begin{vmatrix} ||\overrightarrow{u_1}||^2 & \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2} & ||\overrightarrow{u_2}||^2 \end{vmatrix}$ (en variant les indices).
Un tel déterminant vaut $(||\overrightarrow{u_1}|| \times ||\overrightarrow{u_2}||)^2 - (\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2$.
Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous dit : $(\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2})^2 \leqslant ||\overrightarrow{u_1}||^2.||\overrightarrow{u_2}||^2$.
C'est l'inégalité de la forme $(x.x' + y.y' + z.z')^2 \leqslant (x^2 + y^2 + z^2).('^2 + y'^2 + z'^2)$.

On somme ces trois termes positifs ou nuls, on obtient un réel positif ou nul.
Sinon, il suffit d'écrire $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(angle)$ pour conclure aussi géométriquement.

◁4▷

♡ Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un produit scalaire sur $(\mathbb{R}^3, +, .)$. Donnez une base orthonormée pour ce produit scalaire.
Écrivez cette matrice sous la forme ${}^tT.T$.

On définit $(U, V) \longmapsto {}^t U.S.V$. On a une forme par compatibilité des formats.
Elle est symétrique car ${}^tU.S.V = {}^t({}^tU.S.V) = {}^tV.{}^tS.U = {}^tV.S.U$ par symétrie de la matrice.
On montre en quantifiant : ${}^tU.S.(\alpha.V + \beta.W) = \ldots = \alpha.{}^tU.S.V + \beta.{}^tU.S.W$.
Le plus intéressant est la positivité. On développe :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + 5.y^2 + 26.z^2 + 4.x.y - 6.x.z - 4.y.z$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 2.y - 3.z)^2 + y^2 + 17.z^2 + 6.y.z$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x + 2.y - 3.z)^2 + (y + 3.z)^2 + 8.z^2$$

C'est une somme de carrés de réels. Elle est positive.
Et elle n'est nulle que dans le cas suivant : $\begin{matrix} x & +2.y & -3.z & = 0 \\ & y & +3.z & = 0 \\ & & z & = 0 \end{matrix}$. On aboutit au vecteur nul.

Une base orthonormée ? On prend $\overrightarrow{i}$. Il est normé. Facile.

Second vecteur : $\overrightarrow{j} - 2.\overrightarrow{i}$. Il est bien orthogonal à $\overrightarrow{i}$.
On calcule sa norme : 1 ($x = -2$, $y = 1$ et $z = 0$ donne $(x + 2.y - 3.z)^2 + (y + 3.z)^2 + 8.z^2 = 0$.

Troisième vecteur : $\overrightarrow{k} - \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{i}) \times \overrightarrow{i} - \phi(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}) \times (\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k})$.
On trouve $11.\overrightarrow{i} - 4.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
On calcule sa norme : incroyable, c'est 1.

La base ($\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 11 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$).

On note P la matrice de passage $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (calcul à la main).
Quand on se donne deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on calcule leur produit scalaire.
Sur la base canonique : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^tU.S.V$.
Sur la base orthonormée : $\phi(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = {}^t(U').V'$ avec $U = P.U'$ et $V = P.V'$ (changement de base).
On a donc ${}^tU.S.V = {}^t(P^{-1}.U).(P^{-1}.V)$.
On obtient ${}^tU.S.V = {}^tU.{}^t(P^{-1}).(P^{-1}).V$.
on identifie (peut être un peu vite ?) : $S = {}^t(P^{-1}).P^{-1}$.
Et de toutes façons, on vérifie :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 26 \end{pmatrix}$$

Joli, non ?

◃5▹ Montrez que $(P,\ Q) \longmapsto P(0).Q(0) + P'(1).Q'(1) + P''(2).Q''(2) + P^{(3)}(3).Q^{(3)}(3)$ est un produit scalaire sur $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$.
Transformez la base canonique $(1,\ X,\ X^2,\ X^3)$ en base orthonormée par méthode de Gram-Schmidt.

◃6▹ ♡ $G = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Vecteurs : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ -a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$
Ajustez a et b pour que la famille ait pour matrice de Gram G. Quel est l'angle que font deux à deux ces vecteurs ? Et en dimension n ? On considère la matrice U de taille $n+1$ dont tous les coefficients valent 1. Montrez que 0 en est valeur propre de multiplicité n avec un sous-espace propre de dimension n. Montrez que le vecteur formé de $n+1$ réels égaux à 1 est valeur propre de U. Déduisez que U est semblable à $Diag(n+1, 0, \ldots 0)$. A quelle matrice diagonale est semblable $\beta.U + (\alpha - \beta).I$? Quel est son déterminant ? Déduisez que si on peut trouver $n+1$ vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$ formant deux à deux le même angle θ, alors cet angle θ vaut $Arccos(-1/n)$.

A faire.

◃7▹ ♡ Montrez que $(x, y, z) \longmapsto \sqrt{x^2 + 5.y^2 + 11.z^2 + 4.x.y + 2.y.z + 5.y.z}$ est une norme issue d'un produit scalaire *(pour l'inégalité triangulaire qui fait bien partie de la question, passez par l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le produit scalaire).*
Complétez pour que $(\overrightarrow{i},\ a.\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j},\ a.\overrightarrow{i} + b.\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k})$ soit orthonormée.

A faire.

◃8▹ Soient $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ deux vecteurs d'un espace préhilbertien réel, tous deux de norme 1 (avec $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{b}$). Montrez que chacun des vecteurs $(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}$ (λ dans $]0,\ 1[$) est de norme strictement plus petite que 1.

On veut calculer la norme de $(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}$. On calcule même son carré de norme :
$\phi((1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b},\ (1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}) = (1-\lambda)^2.\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{a}) + 2.\lambda.(1-\lambda).\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \lambda^2.\phi(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{b})$
On exploite l'hypothèse "normés" : $|(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}|^2 = (1-\lambda)^2 + 2.\lambda.(1-\lambda).\phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) + \lambda^2$
On regroupe $(1-\lambda)^2 + \lambda^2 = 1 + 2.\lambda.(\lambda - 1)$.
On termine $|(1-\lambda).\overrightarrow{a} + \lambda.\overrightarrow{b}|^2 = 1 - 2.\lambda.(1-\lambda).(1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$
Le réel $1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ est positif (strictement, c'est $1 - 1.1.\cos(\ldots)$).
Le réel $\lambda.(1-\lambda)$ est positif.
Le réel $1 - 2.\lambda.(1-\lambda).(1 - \phi(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}))$ est strictement plus petit que 1.

◃9▹ On définit $f = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x & +y & +z \\ x & -2.y & +2.z \\ 2.x & -y & +3.z \end{pmatrix}$. Donnez son rang, son noyau *(base, équations cartésiennes)*, son image *(base, équation cartésienne)*.
Montrez que l'ensemble des endomorphismes h vérifiant $f \circ h = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1 (et comme toujours, il y a là deux questions...). Donnez une base de cet espace vectoriel.

Pour « espace vectoriel », on va montrer « sous-espace vectoriel de $(L(E), +, .)$.
L'application nulle vérifie la propriété.
Si g et h vérifient $f \circ g = f \circ h = O$,alors par linéarité de f, on a aussi $f \circ (g+h) = 0$ et $f \circ (\alpha.h) = 0$ endomorphisme nul).

Ce sont des endomorphismes h vérifiant $Im(h) \subset Ker(f)$.
Comme $Ker(f)$ est de dimension 1, $Im(h)$ est de dimension 0 ou 1.
Et le rang est la dimension de l'image...

La condition $Im(h) \subset Ker(f)$ est nécessaire et suffisante.
On cherche donc des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 4.a & 4.b & 4.c \\ -a & -b & -c \\ -3.a & -3.b & -3.c \end{pmatrix}$.
On a un espace vectoriel de dimension 3 (dans $L(\mathbb{R}^3), +, .)$ qui est de dimension 9).
On peut en donner une base.

> Montrez que l'ensemble des endomorphismes g vérifiant $g \circ f = 0_{\mathbb{R}^3}$ est un espace vectoriel dont les éléments sont de rang 0 ou 1. Donnez une base de cet espace vectoriel.

Cette fois, on a encore un sous-espace vectoriel de $(L(\mathbb{R}^3), +, .)$. Le morphisme nul vérifie la propriété.
Si on part de $g \circ f = 0$ et $h \circ f = 0$, on a sans même avoir besoin de linéarité : $(g+h) \circ f = 0$ et $\alpha.h \circ f = 0$.
La condition nécessaire et suffisante est $Im(f \subset Ker(g)$.
$Ker(g)$ est donc au moins de dimension 2.
Par soustraction dans la formule du rang, $rg(g)$ est au plus de dimension 1.

La condition sur notre matrice est $M.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M.\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
En nommant C_1, C_2et C_3 les trois colonnes de M, on a à la fois $C_1 + C_2 + 2.C_3 = 0$ et $C_1 = 2.C_2 + C_3$.
On exprime C_2 et C_3 à l'aide de C_1.
Toute matrice est déterminée par le choix des trois coefficients de C_1. On a un espace de dimension 3.
Les matrices sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & -\alpha \\ \beta & \beta & -\beta \\ \gamma & \gamma & -\gamma \end{pmatrix}$ si vous y tenez et si vous voulez construire une base.

◃10▹

> ♡ Déterminez le rang de l'application $P \longmapsto 4.P(X) - 3.X.P'(X)$ après en avoir prouvé la linéarité de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ dans lui même et en avoir cherché le noyau.
> Déduisez que pour tout polynôme Q il existe P vérifiant $Q = 4.P - 3.X.P'$.
> Est il vrai que pour tout Q il existe P vérifiant $Q = 4.P - X.P'$?

On l'appelle φet on dit que
- $\varphi(P)$ existe
- $\varphi(P)$ est un polynôme
- $\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q)$ pour tout couple $(P,\ Q)$ [a]
- $\varphi(\lambda.P) = \lambda.\varphi(P)$ pour tout couple $(P,\ \lambda)$

a. évitez de les appeler P et P' !

On détermine son noyau en résolvant $4.P(X) = 3.X.P'(X)$ d'inconnue P.
On peut poser $P = \sum_{k=0}^{d} a_k.X^k$ et identifier rien que sur le terme de plus haut degré : $4.a_k = 3.k.a_k$.C'est impossible.
On peut aussi résoudre l'équation différentielle : $P \in Vect(x \longmapsto x^{\frac{4}{3}}) \cap \mathbb{R}[X]$.
Le noyau est réduit à 0.

Par formule du rang, l'image est de dimension $n+1$.
Qui a oublié que $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est de dimension $n+1$? Qui n'a envie de n'intégrer que des écoles à 10.000 *euros de frais de scolarité par an ?*

L'endomorphisme est donc bijectif. Tout élément Q admet un unique antécédent.
On ne le calcule pas ici... Ce n'est pas demandé.

En revanche, avec $P \longmapsto 4.P(X) - X.P'(X)$, le noyau est $Vect(X^4)$.
Et l'image n'est que de dimension n.
Il y aura donc une condition [1] sur Q pour qu'il existe P vérifiant $Q = 4.P - X.P'$.

1. et une seule

Et les solutions ne seront définies qu'à un multiple de X^4 près.
On le sait d'avance, avant même d'écrire le système. Avantage des maths sur l'approche brutale et calculatoire.

◃11▹ Soit f un endomorphisme de $(E,+,.)$, montrez : $Im(f^2)=Im(f^4)\Leftrightarrow Im(f^2)=Im(f^3)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $Im(f^2)=Im(f^4)$.
On doit prouver $Im(f^2)\subset Im(f^3)$ et aussi $Im(f^2)\supset Im(f^3)$.
• L'inclusion $Im(f^3)\subset Im(f^2)$ n'a pas besoin de l'hypothèse. C'est le résultat général $Im(g\circ f)\subset Im(g)$, avec les $g(f(\overrightarrow{a}))$ qui sont des $g(\overrightarrow{b})$ particuliers.
• Prenons $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f^2)$. On l'écrit $\overrightarrow{b}=f^2(\overrightarrow{a})$ pour un $\overrightarrow{a}$ bien choisi.
Mais alors $f(\overrightarrow{a})$ est dans $Im(f)$. par l'hypothèse initiale, il est dans $Im(f^2)$. On peut l'écrire $f^2(\overrightarrow{c})$ pour un $\overrightarrow{c}$ bien choisi.
On a alors $\overrightarrow{b}=f(f(\overrightarrow{a}))=f(f^2(\overrightarrow{c}))$ et le voilà dans $Im(f^3)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose $Im(f^2)=Im(f^3)$.
On doit prouver $Im(f^2)\subset Im(f^4)$ et aussi $Im(f^2)\supset Im(f^4)$.
• On a déjà $Im(f^4)\subset Im(f^2)$. Sans utiliser l'hypothèse.
• Prenons $\overrightarrow{b}$ dans $Im(f^2)$. Il est donc dans $Im(f^3)$ par hypothèse.
On l'écrit donc $\overrightarrow{b}=f^3(\overrightarrow{c})$ pour un $\overrightarrow{c}$ bien choisi. Mais $f^2(\overrightarrow{c})$ est dans $Im(f^2)$ donc dans $Im(f^3)$ par hypothèse.
Il s'écrit donc $f(\overrightarrow{d})$ pour un $\overrightarrow{d}$ bien choisi.
On a finalement $\overrightarrow{b}=f^3(\overrightarrow{c})=f(f^2(\overrightarrow{c}))=f(f^3(\overrightarrow{d}))$. Il est das $Im(f^4)$.

Un raisonnement sans effort. mais un raisonnement.
Ce qui gêne certains : en DS de physique et SII on a besoin surtout de la partie analyse des maths (intégrales, équations différentielles..)
C'est à dire du calcul.
pour faire des sciences on a besoin de la partie algébrique des maths
C'est à dire le raisonnement.

◃12▹ ♡ Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel $(E,+,.)$ de dimension finie. On suppose : $g\circ f=0$ et $f+g$ bijective.
Montrez : $Im(f)\subset Ker(g)$, $Ker(f)\cap Ker(g)=\{\overrightarrow{0}\}$.
Déduisez : $\dim(Ker(f))+\dim(Ker(g))\leqslant\dim(E)$ et enfin $\dim(Im(f))+\dim(Im(g))=\dim(E)$.
(on utilisera la formule du rang : $dim(Ker(f)+dim(Im(f))=dim(E)$)

◃13▹ f et g sont deux endomorphismes de $(\mathbb{R}^n,+,.)$. Montrez :
$\big(rg(f+g)=rg(f)+rg(g)\big)\Leftrightarrow\big(Im(f)\cap Im(f)=\{\overrightarrow{0}\}\text{ et }Ker(f)+Ker(g)=\mathbb{R}^n\big)$

A faire.

◃14▹ On note $(E,+,.)$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 2. Montrez que $(A,\ B)\longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire sur E.
Soit S une matrice réelle symétrique à spectre strictement positif *($\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ avec a et c strictement positifs ainsi que $a.c-b^2$)*. Montrez que $(A,\ B)\longmapsto Tr({}^tA.S.B)$ *(noté ϕ_S)* est aussi un produit scalaire sur E.

La première question est du cours, je ne vais pas la faire six fois...
Quoique.

Aparté
Non, je profite de la place ici pour montrer que la matrice réelle $\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ se diagonalise toujours.
On cherche son polynôme caractéristique $X^2-(a+c).X+(a.c-b^2)$.
Le discriminant de celui ci vaut $(a-c)^2+4.b^2$ [2]
Il est positif ou nul. On a donc deux valeurs propres.
Plus précisément : si on part de $\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}$, elle est déjà diagonale, donc diagonalisable en elle même, via $P=I_2$.

---

2. si si, faites le calcul, c'est pas à moi de tout faire

sinon, • on a deux valeurs propres réelles $\dfrac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$ et $\dfrac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4.b^2}}{2}$
• chaque valeur propre apporte un vecteur propre
• deux vecteurs propres (indépendants car de valeurs propres distinctes), on a une base de vecteurs propres (ce qui permet de créer une matrice de passage P).

Si les deux valeurs propres sont positives, • la trace $a+c$ est positive (somme des valeurs propres)
• le déterminant est positif (somme des valeurs propres)
Réciproquement, si le déterminant est positif, les deux valeurs propres sont de même signe (produit de deux termes).
Maintenant qu'on les sait de même signe, c'est leur somme qui donne le signe.
On a donc bien équivalence « deux valeurs propres positives »
« déterminant et trace positif.ve.s »

Passons en à $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.S.B)$.

Forme	Les formats sont compatibles, on peut calculer cette trace de matrice 2 sur 2 qu'est ${}^tA.S.B$.
Symétrique	Partant de $Tr({}^tM) = Tr(M)$, on a $Tr({}^tA.S.B) = Tr({}^tB.{}^tS.A)$ (oui, on utilise aussi ${}^p.Q = {}^t\ Q.{}^tP$ et ${}^t({}^tP) = P$). Sachant ensuite que S est symétrique $Tr({}^tA.S.B) = Tr({}^tB.S.A)$.
(Bi)linéaire	Par symétrie, on ne teste que par rapport au second vecteur : $Tr({}^tA.S.(\beta.B+\gamma.C)) = \beta.Tr({}^tA.S.B) + \gamma.Tr({}^tA.S.C)$ (merci de quantifier $\forall \ldots$) On peut aussi dire qu'on a le produit scalaire usuel de A et $S.B$, et c'est linéaire par rapport à A.
Positive	On calcule $Tr({}^tA.S.A)$ et tous calculs faits avec $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ et $S = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2 + a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ On voit nettement la somme de deux termes tels que $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2$ dont on se dit que chacun doit être positif. a est positif, le trinôme en x a un coefficient dominant positif, et un discriminant négatif $((4.b^2 - 4.a.c).z^2$, relisez l'hypothèse sur la matrice S). Il est de signe constant positif. Ou nul, mais... L'autre terme $a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ est de la même forme, positif...
Défini p.	Si $Tr({}^tA.S.A)$ est nulle (féminin, c'est une trace), alors chaque terme positif ou nul $a.x^2 + 2.b.x.z + c.z^2$ et $a.y^2 + 2.b.t.y + c.t^2$ doit être nul, et d'après l'étude « trinôme du second degré », la seule possibilité est $\Delta = 0$, donc $z = t = 0$ puis $x = y = 0$.

Pour quelle(s) matrice(s) S la base canonique est elle orthonormée pour ϕ_S ?

Une réponse possible est $S = I_2$ puisqu'alors on retrouve le produit scalaire usuel sur $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ pour lequel les matrices de la base canonique sont orthogonales entre elles, et de norme 1.
Mais après tout, il y a peut être d'autres solutions.
Calculons quand même quelques normes et produits scalaires :

$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = a$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = a$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = c$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
	$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = b$	et autres	

On aboutit à $a = c = 1$ et $b = 0$.
Seule la matrice I_2 convient.

Pour quelle(s) matrice(s) S la base $(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$ est elle orthogonale ? Même question avec orthonormée.

Cette fois, on recommence les calculs :

$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a + 2.b + 2.c$	$Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = a + 2.b + 2.c$	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
	$Tr(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) = 2.b + 2.c$	et autres

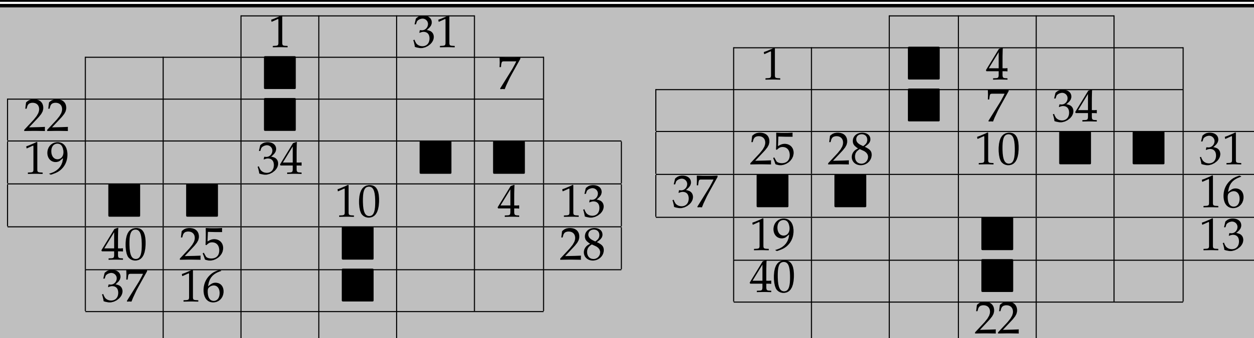
On exige à la fois $a + 2.b + 2.c = 1$, $2.a + 2.b + c = 1$ donc $a = c$ et $b = (1 - 3.a)/2$
et $2.b + 2.c = 0$ puis $a + 3.b + c = 0$ et $2.b + 2.a = 0$.
Et là, ça ne colle plus...
Il n'y a pas de matrice S possible.

◃15▹ ♠ **Théorème spectral en dimension 3 pour comprendre.**

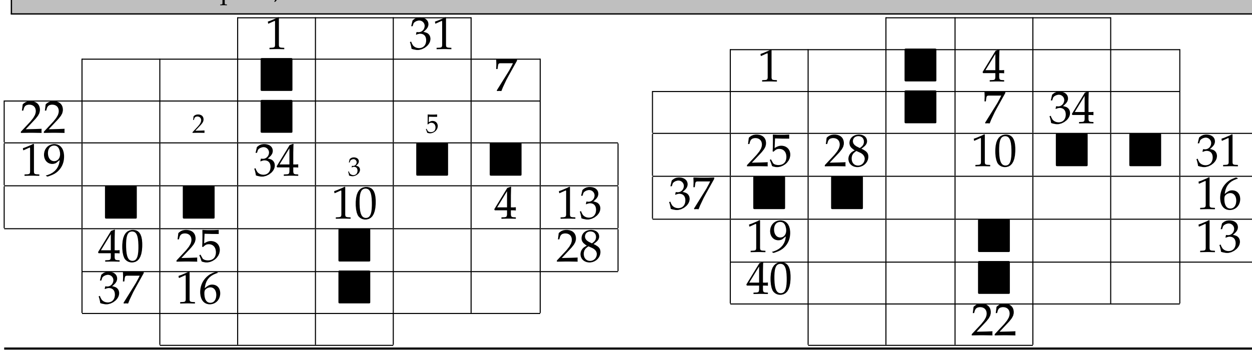
Soit φ un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^3$ (c'est à dire $\forall(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}),\ f(\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.f(\overrightarrow{v})$).
-1- On définit l'application $\overrightarrow{u} \longmapsto \overrightarrow{u}.f(\overrightarrow{u})$ (notée φ). Justifiez que cette application admet un maximum (noté α) sur l'ensemble S des vecteurs de norme 1 et montrez que ce maximum est atteint pour au moins un vecteur $\overrightarrow{m}$ (cette étape, c'est une histoire d'application continue sur une partie bornée et fermée).
-2- Montrez : $\overrightarrow{u}.f(\overrightarrow{u}) \leqslant \alpha|\overrightarrow{u}|^2$ pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^3$.
-3- On note alors $D = Vect(\overrightarrow{m})$. Montrez $(t \times \overrightarrow{m} + \overrightarrow{v}).f(t \times \overrightarrow{m} + \overrightarrow{v}) \leqslant \alpha.(1 + t^2)$ pour tout réel t et tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $S \cap D^{\perp}$.
-4- Montrez : $(t \times \overrightarrow{m} + \overrightarrow{v}).f(t \times \overrightarrow{m} + \overrightarrow{v}) = t^2 \times \alpha + 2 \times t \times f(\overrightarrow{m}).\overrightarrow{v} + \varphi(\overrightarrow{v})$ pour tout t réel et tout $\overrightarrow{v}$ orthogonal à $\overrightarrow{m}$ de norme 1. Déduisez : $f(\overrightarrow{m}).\overrightarrow{v} = \overrightarrow{m}.f(\overrightarrow{v}) = 0$.
-5- Déduisez que $f(\overrightarrow{m})$ est orthogonal à $D^{\perp}$.
-6- Déduisez que $\overrightarrow{m}$ est vecteur propre de f.
-7- Montrez que D est stable par f. Montrez que $D^{\perp}$ est stable par f.
-8- Montrez que toute matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ se diagonalise.
-9- Montrez que f admet une base de vecteurs propres.
-10- Déduisez : tout endomorphisme autoadjoint de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ est diagonalisable.
-11- Montrez que toute matrice réelle symétrique de taille 3 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

◁16▷ On note P le plan de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ d'équation $x + y - 2.z = 0$, D la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{i} + \overrightarrow{k}$ et D' la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$.
Montrez : $\mathbb{R}^3 = P \oplus D = P \oplus D'$ (et ne simplifiez pas en $D = D'$).
On note p le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D. Déterminez $p(\overrightarrow{i})$, $p(\overrightarrow{j})$ et $p(\overrightarrow{k})$.
On note p' le projecteur sur P en effaçant la composante suivant D'. Déterminez $p'(\overrightarrow{i})$, $p'(\overrightarrow{j})$ et $p'(\overrightarrow{k})$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) = p'(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p(\overrightarrow{u}) + p'(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.
Résolvez $p \circ p'(\overrightarrow{u}) = p' \circ p(\overrightarrow{u})$ d'inconnue vectorielle $\overrightarrow{u}$.

◁17▷



Saute saute mon petit, comme un cavalier d'échecs.



◁18▷ Représentez la matrice carrée de taille n sur n dont le terme général (ligne i, colonne k) est int(abs(i-k)==1).
Représentez la matrice carrée de taille n sur n dont le terme général (ligne i, colonne k) est int(i%2==0 or k%2==0).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et ainsi de suite.}$$

◁19▷ Pour tout n, on pose $g_n = x \longmapsto x^{n+1} - x^n$ de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $G_n = \sum_{k=0}^{n} g_k$. Montrez que chaque G_k est continue.

Montrez que pour tout x, la somme $G_n(x)$ converge vers un réel qu'on notera $G(x)$. Montrez que l'application G n'est pas continue.

Chaque g_n est continue.
La somme (finie, pléonasmes) de fonctions continues est continue.

D'ailleurs elle télescope en $x \longmapsto x^{n+1} - x^0$.

On se fixe x dans $[0,\ 1]$ et on doit envisager deux cas.

$x \in [0,\ 1[$	$x = 1$
$x^{n+1} - x^0 \longrightarrow_{n\to+\infty} -x^0$	$1^{n+1} - 1^0 \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$
$G_\infty(x) = -1$	$G_\infty(1) = 0$

L'application n'est pas continue. Sa valeur en 1 ne coïncide pas avec sa limite en 1^-.

Comme quoi une somme d'applications continues est continue.
Mais une somme (de série) d'applications continues peut devenir discontinue.
Le passage à l'infini produit un problème.

Et c'est une histoire de double limite :

continué de chaque G_n en 1	$\lim_{x\to 1} G_n(x) = G_n(1)$
définition de G_∞	$G_\infty(x) = \lim_{n\to+\infty} G_n(x)$
continuité de G_∞ en 1	$\lim_{x\to 1} G_\infty(x) = G_\infty(1)$ $\lim_{x\to 1}\left(\lim_{n\to+\infty} G_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} G_n(1)$
mais ce n'est pas	$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to 1} G_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty} G_n(1)$

◁20▷ ♡ Montrez que la série de terme général $\dfrac{1}{n.\ln(n)^2}$ converge.

Le terme général est positif, la suite des sommes partielles croit.
Majorer par $\dfrac{1}{n}$ n'apporte rien, la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ diverge et peut regarder notre série rester sur place.

On peut chercher à comparer à une série comme celle de terme général $\left(\dfrac{1}{n^2}\right)_{n\geqslant 1}$, mais cette fois, ça n'apporte rien.

A notre niveau, ce doit être une comparaison série intégrale.
$\dfrac{1}{n.(\ln(n))^2} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \dfrac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ par décroissance de l'application $t \longmapsto \dfrac{1}{t.(\ln(t))^2}$.
On somme de 3 à n. On se retrouve avec $\displaystyle\int_{2}^{n} \dfrac{dt}{t.(\ln(t))^2}$ qui s'intègre en $\dfrac{-1}{\ln(t)}$.
On a donc $\displaystyle\int_{2}^{n} \dfrac{dt}{t.(\ln(t))^2} = \dfrac{1}{\ln(2)} - \dfrac{1}{\ln(n)} \leqslant \dfrac{1}{\ln(2)}$ (il import de majorer, pas encore de passer à la limite, on n'en a pas encore prouvé l'existence).
La série de terme général $\left(\dfrac{1}{n.(ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 3}$ est majorée, elle converge.

Par addition des premiers termes, la série de terme général $\left(\dfrac{1}{n.(ln(n))^2}\right)_{n\geqslant 2}$ converge aussi.

◁21▷ Par comparaison avec une intégrale, montrez que la suite $\left(\sum_{k=3}^{n} \dfrac{1}{k.\ln(k).\ln(\ln(k))}\right)_n$ diverge.

On sent venir la comparaison avec $\displaystyle\int_{a}^{n} \dfrac{dt}{t.\ln(t).\ln(\ln(t))}$.
Et disons le tout de suite, cette intégrale est simple une fois qu'on a compris.
Il suffit de dériver $t \longmapsto \ln(\ln(\ln(t)))$ comme une composée...
Ou de changer de variable :

$$\int_{a}^{n} \frac{dt}{t.\ln(t).\ln(\ln(t))} \underset{x=\ln(t)}{=} \int_{\ln(a)}^{\ln(n)} \frac{e^x.dx}{e^x.x.\ln(x)} = \int_{\ln(a)}^{\ln(n)} \frac{dx}{x.\ln(x)} \underset{u=\ln(x)}{=} \int_{\ln(\ln(a))}^{\ln(\ln(n))} \frac{e^u.du}{e^u.u}$$

◁ 22 ▷

L'élève A.Katair (enCDD) est un crétin. Il prétend que l'on a dans le cours la formule $(u.v)' = u'.v'$ pour u et v dérivables. Rappelez la vraie formule et sa démonstration.
Néanmoins, montrez qu'il a raison dans les cas suivants *(et pour les cases vides, complétez avec une fonction non nulle)* :

$u(t)$	t	t^2	$e^{t/2}$	$\dfrac{1}{(t-4)^4}$	$t.e^t$	$\dfrac{t+6}{t+2}$
$v(t)$	$\dfrac{1}{1-t}$	$\dfrac{1}{(t-2)^2}$	e^{-t}			$e^{(-4/(t+4))}$

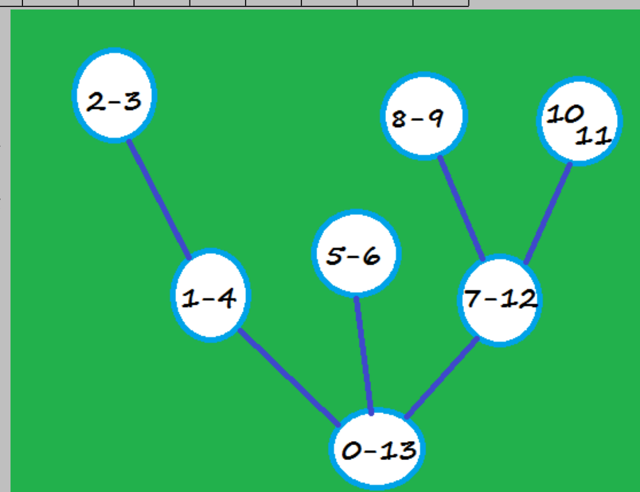
Bel exercice d'équations différentielles...

◁ 23 ▷

Je vous donne l'arbre généalogique de la famille *(codé comme l'arborescence des dossiers/répertoires d'un disque dur)*. Complétez ce qui manque :

nom	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
indice montant	8	6	5	21	19	25	0	1	18	14	2	3	27	29	26		10
indice descendant	9	7	12	22	20	32		24	23		13	4	28	30	31	16	11

Un exemple pour comprendre : voici un arbre, et son codage :
pour chaque nœud, vous avez son indice ascendant et son indice descendant.



Et maintenant les question :
1- Qui est l'ancètre commun à tout le monde ?
2- Combien a-t-il de descendants directs et indirects ? Combien a-t-il d'enfants ?
3- Qui sont les individus sans descendants ?
4- Combien `10` a-t-il d'enfants, et combien de descendants ?

5- Donnez le père, le grand-père, et les aïeux successifs de `3`.
6- Si `8` a un nouvel enfant, pouvez vous indiquer le script qui va modifier les deux listes "indices montants" et "indices descendants".

◁ 24 ▷

Que va faire ce script :

```
from random import randrange
def leurdeschamps(L) :
....if len(L) == 1 :
........return L[0]
....else :
........demi = len(L)//2
........a = leurdeschamps(L[0 :demi])
........b = leurdeschamps(L[demi, len(L)])
........if a > b :
............return a
........else :
............return b
LL = [randrange(1000) for k in range(10000)]
print(leurdeschamps(LL))
```

On analyse diverses parties du script qui est formé d'une importation, de la définition d'une procédure visiblement récursive *(elle se rappelle elle même)*, de la création d'une liste et de la sollicitation de la procédure.

`from random import randrange`
On importe la fonction qui engendre des nombres "aléatoires".

`LL = [randrange(1000) for k in range(10000)]`
On crée justement une liste aléatoire de 10.000 termes entre 0 inclus et 1000 exclu.

`print(leurdeschamps(LL))`
On sollicite la procédure sur la liste qu'on vient de créer. On aurait pû compacter en
`print(leurdeschamps([randrange(1000) for k in range(10000)]))`

On définit donc une procédure qui prendra en variable un certain objet `L` qui sera une liste si l'on en croit la suite du programme mais aussi le test `len(L) == 1`.

```
def leurdeschamps(L) :
....if len(L) == 1 :
........return L[0]
```

Si la liste est de longueur 1, on renvoie son élément d'indice 0 c'est à dire son unique élément.
Sinon, on se lance dans une suite d'instructions.

```
........demi = len(L)//2
........a = leurdeschamps(L[0 :demi])
........b = leurdeschamps(L[demi, len(L)])
```

On sollicite la procédure sur les deux demi-listes `L[0 :demi]` et `L[demi, len(L)]`, et on stocke les résultats dans deux variables `a` et `b`.

```
........if a > b :
............return a
........else :
............return b
```

On retourne le maximum de `a` et de `b` par simple test.
On comprend qu'on commence donc à parler de maximum.
Si la liste a deux éléments `[x, y]`, on coupe en deux et on sollicite la procédure pour les deux listes `[x]` et `[y]`. Elle renvoie les deux nombres `x` et `y`, qu'elle compare et elle renvoie alors le plus grand des deux.
Si la liste a quatre éléments `[x, y, z, t]`, elle coupe en deux et calcule `leurdeschamps([x, y])` ainsi que `leurdeschamps([z, t])`. Elle retourne donc $Max(x,y)$ et $Max(z,t)$ en vertu de l'étude précédente. Elle les compare et retourne finalement $Max(Max(x,y), Max(z,t))$, c'est à dire $Max(x,y,z,t)$.
On comprend qu'elle détermine donc le maximum des éléments d'une liste.
Si il convient de vraiment démontrer ce résultat, on le fait par récurrence forte sur les nombre d'éléments de la liste.
C'est initialisé. Supposons ensuite que la propriété soit vraie pour toute liste de longueur inférieure ou égale à `n`. On donne une liste de longueur `n+1`. Elle se coupe en deux listes `L[0 :demi]` et `L[demi,n+1]`. Comme chacune est de longueur inférieure ou égale à `n`, les deux nombres `a=leurdeschamps(L[0 :demi])` et `b=leurdeschamps(L[demi,n+1])` sont les deux maxima `Max(L[0],...L[demi-1])` et `Max(L[demi],...L[n])`. Le test if `a>b` va donc retourner au final le plus grand des deux, c'est à dire `Max(L[0],...L[n])`.
Ceci achève la récurrence.
C'est ce type de démonstration qu'on vous demandera en option informatique.
Et le principe de cette démarche qui coupe le tas en deux et recommence s'appelle "*diviser pour régner*".
Bref, on tire une liste aléatoire et on en cherche le maximum.

◃25▹ ♡ Simplifiez $5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)$.

Du classique. On calcule par étapes la tangente de cette chose.

$\tan\left(2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)\right)=\frac{7}{24}$.

$$\tan\left(2.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+Arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right)=\frac{\frac{7}{24}+\frac{3}{79}}{1-\frac{7}{24}.\frac{3}{79}}=\frac{7.79+3.24}{24.79-1}=\frac{1}{3}$$

$$\tan\left(4.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right)=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

$$\tan\left(5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)\right)=\frac{\frac{1}{7}+\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{7}.\frac{3}{4}}=\frac{4+3.7}{7.4-1}=1.$$

Il suffit ensuite d'encadrer l'angle entre 0 et π (ou un petit peu plus) pour que la seule solution soit $\boxed{5.Arctan\left(\frac{1}{7}\right)+2.Arctan\left(\frac{3}{79}\right)}$

On a juste besoin de majorer $Arctan\left(\dfrac{1}{7}\right)$ et $Arctan\left(\dfrac{3}{79}\right)$ par $Arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ égal à $\dfrac{\pi}{6}$.

◁26▷

Un dé non équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 vérifie :

tirage	pair	premier	$\leqslant 3$
probabilité	1/2	1/3	3/5

Calculez la probabilité de tirer 1. Calculez l'espérance et la variance de ce dé *(ne pas achever l'application numérique)*.
Question subsidiaire : c'est un exercice de probabilités ou d'algèbre linéaire ?

◁27▷

Un événement a une probabilité de vingt pour cent. Si on dit que cette probabilité augmente de dix pour cent, ceci signifie-t-il que sa nouvelle probabilité est de trente pour cent, ou de vingt deux pour cent ?

◁28▷

```
def initif(n) :
....k = 0
....while True :
........k +=1
........M = k*n
........while M%10==0 :
............M=M//10
........while M%10 == 1 :
............M=M//10
........if M==0 :
............return k
```

Voici quelques réponses de ce programme

entrée	2	3	4	5	6	7	12	14	140	?
sortie	5	37	?	2	185	15 873	125	79 365	?	925

Retrouvez les cases qui manquent. Expliquez ce qu'il fait, et comment il le fait.
Un théorème amusant dit que le programme ci dessus s'arrête toujours.
Démontrons le ! n est un entier donné, on définit $a_k = ((10^k - 1)/9) \quad mod \quad n$.
Montrez que (a_k) est une suite d'entiers à valeurs dans $\{0, 1, \dots n-1\}$.
Déduisez qu'il existe p et q avec $p < q$ et $a_p = a_q$. Concluez.

Le script ci dessus est il le meilleur script ? Alors, à vous !

◁29▷

Pour a dans $]-\pi,\ 0[\cup]0,\ \pi[$, on définit : $f_a = x \longmapsto Arctan\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right) - a + \dfrac{\pi}{2}$. Donnez son domaine de définition, ses limites aux bornes.
Indiquez suivant a son sens de variations, et ses éventuels points d'inflexion.

Donnez le développement limité d'ordre n en 0 de f_a.

Cette application est définie sur tout $\mathbb{R}$.
Malproprement : « pour tout x réel » (mais ça permet de bien dire que la variable c'est x).

Quand x tend vers l'infini, $\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$ tend aussi vers l'infini et son arctangente tend vers $\pi/2$. ou $-\pi/2$.
En effet, le signe de $\sin(a)$ a son importance.

position de a	signe de $\sin(a)$	limite quand x tend vers $-\infty$	limite quand x tend vers $+\infty$
$]-\pi,\ 0[$	$\ominus$	$\pi - a$	$-a$
$]0,\ \pi[$	$\oplus$	$-a$	$\pi - a$

Pour le sens de variation[3], pas besoin de dériver. $x \longmapsto \dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$ est monotone, on compose avec $Arctan$ (croissante) et on ajoute et soustrait des constantes.
L'application f_a est croissante pour $\sin(a)$ positif, décroissante sinon.

On a quand même besoin de dériver cette composée

x	$\longrightarrow$	$\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}$	$\longrightarrow$	$Arctan\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)$	$\longrightarrow$	$Arctan\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right) - a + \dfrac{\pi}{2}$
	affine		$Arctan$		affine	
	$\dfrac{1}{\sin(a)}$		$\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-\cos(a)}{\sin(a)}\right)^2}$		1	

On simplifie et il reste $x \longmapsto \dfrac{\sin(a)}{x^2 - 2.x.\cos(a) + 1}$.
Sous cette forme, on sent qu'il va être facile de donner le développement limité de f'_a en 0 (mal dit mais compris « en $x = 0$ »).

3. pour une fois sans *s* à « variations »

Il suffira ensuite d'intégrer.

On décompose :

$$\frac{\sin(a)}{x^2-2.x.\cos(a)+1} = \frac{1}{2.i}.\Big(\frac{-1}{x-e^{-i.\theta}}+\frac{1}{x-e^{i.\theta}}\Big) = \frac{1}{2.i}.\Big(\frac{e^{i.\theta}}{1-x.e^{i.\theta}}-\frac{e^{-i.\theta}}{1-x.e^{-i.\theta}}\Big)$$

On peut développer à tout ordre (série géométrique) :

$$\frac{\sin(a)}{x^2-2.x.\cos(a)+1} = \frac{1}{2.i}.\Big(e^{i.\theta}.\sum_{k=0}^{n}(x.e^{i.\theta})^k - e^{-i.\theta}.\sum_{k=0}^{n}(x.e^{-i.\theta})^k + o(x^n)\Big)$$

On regroupe :

$$\frac{\sin(a)}{x^2-2.x.\cos(a)+1} = \sum_{k=0}^{n} x^k.\frac{e^{i..(k+1).\theta}-e^{-i.(k+1).\theta}}{2.i}+o(x^n)$$

On remercie de Moivre et Euler : $\boxed{\frac{\sin(a)}{x^2-2.x.\cos(a)+1} = \sum_{k=0}^{n}\sin((k+1).\theta).x^k+o(x^n)}$

Pouvait on rêver plus simple comme développement limité ? Les coefficients sont les sinus successifs $\sin(\theta)$, $\sin(2.\theta)$, $\sin(3.\theta)$ *et ainsi de suite.*

On intègre alors de 0 à t avec t qui va tendre vers 0 :

$$f_a(t)-f_a(0) = \sum_{k=0}^{n}\sin((k+1).\theta).\frac{t^{k+1}}{k+1}+o(t^{n+1})_{t\to 0}$$

Or, en 0, on a

$$f_a(0) = Arctan\Big(\frac{-\cos(a)}{\sin(a)}\Big)-a+\frac{\pi}{2} = Arctan\Big(\frac{-1}{\tan(a)}\Big)-a+\frac{\pi}{2} = Arctan\Big(\tan\Big(a+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)-a+\frac{\pi}{2}$$

On est tenté de simplifier avec ardeur : $f_a(0)=0$ ou un truc comme ça.
Mais il reste des congruences à surveiller : $Arctan(\tan(\alpha))$ ne vaut α que « modulo π ». Tout dépend ensuite de l'intervalle où α se trouve.
En fait, $Arctan(\tan(\alpha))$ramène entre $-\pi/2$ et $\pi/2$.

a	$a+\frac{\pi}{2}$	$Arctan\Big(\tan\Big(a+\frac{\pi}{2}\Big)\Big)$	$f_a(0)$	$f_a(x)$
$]-\pi,\ 0[$	$]-\pi/2,\ \pi/2[$	$a+\frac{\pi}{2}$	π	$\pi+\sum_{p=1}^{n+1}\frac{\sin(p.\theta)}{p}.x^p+o(x^{n+1})$
$]0,\ \pi[$	$]\pi/2,\ 3.\pi/2[$	$a+\frac{\pi}{2}-\pi$	0	$\sum_{p=1}^{n+1}\frac{\sin(p.\theta)}{p}.x^p+o(x^{n+1})$

◁30▷ Montrez que $\Big(\frac{(-1)^p.q^2}{(p+q)!}\Big)_{\substack{0\leqslant p\\ 0\leqslant q}}$ est sommable, de somme $3.e/2$.

On va raisonner sans prendre garde à la sommabilité pour l'instant.

Et même à horizon infini : $S=\sum_{p,q}\frac{(-1)^p.q^2}{(p+q)!}$ *(tant mieux si ça existe, sinon, tant pis !)*. On regarde le tableau à double entrée :

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$p=4$	$p=5$
$q=0$	$\frac{0^2}{0!}$	$-\frac{0^2}{1!}$	$\frac{0^2}{2!}$	$-\frac{0^2}{3!}$	$\frac{0^2}{4!}$	$-\frac{0^2}{5!}$
$q=1$	$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{2!}$	$\frac{1^2}{3!}$	$-\frac{1^2}{4!}$	$\frac{1^2}{5!}$	$-\frac{1^2}{6!}$
$q=2$	$\frac{2^2}{2!}$	$-\frac{2^2}{3!}$	$\frac{2^2}{4!}$	$-\frac{2^2}{5!}$	$\frac{2^2}{6!}$	$-\frac{2^2}{7!}$
$q=3$	$\frac{3^2}{3!}$	$-\frac{3^2}{4!}$	$\frac{3^2}{5!}$	$-\frac{3^2}{6!}$	$\frac{3^2}{7!}$	$-\frac{3^2}{8!}$
$q=4$	$\frac{4^2}{4!}$	$-\frac{4^2}{6!}$	$\frac{4^2}{6!}$	$-\frac{4^2}{7!}$	$\frac{4^2}{8!}$	$-\frac{4^2}{9!}$
$q=5$	$\frac{5^2}{5!}$	$-\frac{5^2}{6!}$	$\frac{5^2}{7!}$	$-\frac{5^2}{8!}$	$\frac{5^2}{9!}$	$-\frac{5^2}{10!}$
$q=6$	$\frac{6^2}{6!}$	$-\frac{6^2}{7!}$	$\frac{6^2}{8!}$	$-\frac{6^2}{9!}$	$\frac{6^2}{10!}$	$-\frac{6^2}{11!}$

On va regrouper en fonction du dénominateur.
Chaque dénominateur $n!$ est atteint à chaque fois qu'on a $p+q=n$. Et p peut aller de 0 à n.

$$\boxed{\begin{array}{c} \frac{0^2}{0!} \\ \frac{1^2-0!}{1!} \\ \frac{0^2-1^2+2^2}{2!} \\ \frac{-0^2+1^2-2^2+3^2}{3!} \\ \frac{0^2-1^2+2^2-3^2+4^2}{4!} \\ \frac{-0^2+1^2-2^2+3^2-4^2+5^2}{5!} \end{array}}$$

$\frac{0^2}{0!}$	$-\frac{0^2}{1!}$	$\frac{0^2}{2!}$	$-\frac{0^2}{3!}$	$\frac{0^2}{4!}$	$-\frac{0^2}{5!}$	$\frac{0^2}{6!}$
$\frac{1^2}{1!}$	$-\frac{1^2}{2!}$	$\frac{1^2}{3!}$	$-\frac{1^2}{4!}$	$\frac{1^2}{5!}$	$-\frac{1^2}{6!}$	$\dots$
$\frac{2^2}{2!}$	$-\frac{2^2}{3!}$	$\frac{2^2}{4!}$	$-\frac{2^2}{5!}$	$\frac{2^2}{6!}$	$\dots$	$\dots$
$\frac{3^2}{3!}$	$-\frac{3^2}{4!}$	$\frac{3^2}{5!}$	$-\frac{3^2}{6!}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{4^2}{4!}$	$-\frac{4^2}{6!}$	$\frac{4^2}{6!}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{5^2}{5!}$	$-\frac{5^2}{6!}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\frac{6^2}{6!}$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Ce regroupement donne

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{q=0}^{n} \frac{(-1)^{n-q}.q^2}{n!} \Big)$$

On simplifie en $S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n.(n+1)}{n!.2}$ grâce à la question précédente. Oui, c'est pour ça qu'elle était là.

On simplifie encore en $S = \frac{1}{2}.\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)}{(n-1)!}$ sachant que le terme $n=0$ ne sert à rien.

On décale : $S = \frac{1}{2}.\sum_{N=0}^{+\infty} \frac{(N+2)}{N!}$ (l'infini et l'infini moins 1, c'est pareil).

On sépare :

$$S = \frac{1}{2}.\sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N}{N!} + \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N}{N!}$$

On efface un terme et on décale encore :

$$S = \frac{1}{2}.\sum_{N=0}^{+\infty} \frac{N}{N!} + \sum_{M=0}^{+\infty} \frac{1}{M!}$$

Or, la formule de Taylor donne

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Classique : *Oui, c'est la formule de Taylor avec reste intégrale* $e^x = \sum_{k=0}^{K} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}.x^k + \frac{x^{K+1}}{K!}.\int_0^1 (1-t)^K.\exp^{(K+1)}(t.x).dt$, *quand on fait tendre K vers l'infini, il reste* $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1.x^k}{k!}$. *Et c'est bien Taylor et JAMAIS au grand jamais un développement limité.*
Les mots ont un sens précis en mathématiques.
Le développement limité c'est « nombre de termes fixé et x tend vers 0 *».*
La formule de Taylor, c'est ici « x fixé et K tend vers l'infini ».

Avait on le droit de regrouper ainsi les termes ?
Oui, si la famille était sommable.

Sommable, c'est sommable en valeur absolue. On va donc étudier les sommes $\sum_{(p,q)\in D} \frac{q^2}{(p+q)!}$ où D est une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et tenter de les majorer par une quantité ne dépendant pas de D.

Et on va reprendre la même idée de regrouper par « diagonales », celles où $p+q$ est constant (et vaut n).
On inclus notre partie D dans une partie triangulaire $p+q \leqslant N$ avec N assez grand.
Par positivité des termes :

$$\sum_{(p,q)\in D} \frac{q^2}{(p+q)!} \leqslant \sum_{p+q\leqslant N} \frac{q^2}{(p+q)!}$$

Sous cette forme, on regroupe en

$$\sum_{(p,q)\in D} \frac{q^2}{(p+q)!} \leqslant \sum_{p+q\leqslant N} \frac{q^2}{(p+q)!} = \sum_{n=0}^{N} \Big(\sum_{p+q=n} \frac{q^2}{(p+q)!} \Big)$$

Le majorant devient $\sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{1}{n!}.\sum_{p+q=n} q^2 \Big)$.
La condition $p+q=n$ impose juste à q de n'aller que de 0 à n.
Le majorant est à présent $\sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{1}{n!}.\sum_{q=0}^{n} q^2 \Big)$ et même $\frac{1}{6}.\sum_{n=0}^{N} \Big(\frac{n.(n+1).(2.n+1)}{n!} \Big)$.

Si on avait $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$, on majorerait par e^1 *(Taylor toujours)*.

Mais les n, $n+1$ et $2.n+1$ ne changent pas grand chose. Ils ne font que décaler les termes, mais la factorielle faut tout le travail.
Tenez, je simplifie $\frac{1}{6}.\sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{(n+1).(2.n+1)}{(n-1)!} \Big)$.
Je décale et distribue : $\frac{1}{6}.\sum_{m=0}^{N-1} \Big(\frac{(m+2).(2.m+3)}{m!} \Big)$ puis $\frac{1}{6}.\sum_{m=0}^{N-1} \Big(\frac{2.m^2+7.m+6}{m!} \Big)$.
J'isole $\frac{1}{6}.\sum_{m=0}^{N-1} \frac{6}{m!}$ que je majore par e et je recommence avec

$$\frac{1}{6}.\sum_{m=0}^{N-1} \frac{7.m}{m!} = \frac{7}{6}\sum_{p=0}^{N-2} \frac{1}{p!}$$

puis le dernier de la même façon.

L'ensemble est majoré par un multiple de e.

La famille était bien sommable.
Le groupement de termes était légitime.

◁31▷ Donnez un équivalent en $a.n^\alpha$ de $(n+1)^p - (p+n).n^{p-1}$ quand n tend vers l'infini.

Pour $(n+1)^p - (p+n).n^{p-1}$, on développe par formule de Newton :

$$(n+1)^p = n^p + p.n^{p-1} + \frac{p.(p-1)}{2}.n^{p-2} + \sum_{k=3}^{p} \binom{p}{k}.n^{p-k}$$

On soustrait : $(n+1)^p-(p+n).n^{p-1}=\dfrac{p.(p-1)}{2}.n^{p-2}+\displaystyle\sum_{k=3}^{p}\binom{p}{k}.n^{p-k}$. Les termes de la somme sont tous d'un exposant moins élevé que n^{p-2} qui est donc « celui qui l'emporte en $+\infty$" :

$\boxed{(n+1)^p-(p+n).n^{p-1}\sim_{n\to+\infty}\dfrac{p.(p-1)}{2}.n^{p-2}}$ a vaut $\dfrac{p.(p-1)}{2}$ et α vaut $p-2$.

◁32▷ Prolongez par continuité en 0 $t\longmapsto\dfrac{t}{e^t-1}$ et donnez alors sa dérivée en 0 (notée b) puis la position du graphe par rapport à sa tangente. Vérifiez que $f-b.Id$ est paire. Donnez le coefficient de t^9 dans le développement limité de f en 0.

L'application $t\longmapsto\dfrac{t}{e^t-1}$ n'est pas définie en 0 mais s'y prolonge par la valeur $\boxed{1}$ *(inverse d'un taux d'accroissement de l'exponentielle en 0, c'est si con !).*
Pour la dérivabilité, on peut étudier

$$\frac{\dfrac{t}{e^t-1}-1}{t}=\frac{t-e^t+1}{t.(e^t-1)}=\frac{t-\Big(1+t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\Big)+1}{t.\Big(1+t+o(t)-1\Big)}$$

Le numérateur est équivalent à $-\dfrac{t^2}{2}$ et le dénominateur à t^2. Le quotient tend vers $-\dfrac{1}{2}$. Les taux d'accroissement ont une limite, l'application est dérivable.

Qui est passé par une recherche de la limite de $t\longmapsto\dfrac{e^t-1-t.e^t}{(e^t-1)^2}$ en allant ensuite chercher le théorème de la limite de la dérivée ?

On cherche ensuite le signe de $\dfrac{t}{e^t-1}-1+\dfrac{t}{2}$ pour connaître la position du graphe par rapport à sa tangente.

On réduit au dénominateur commun : $\dfrac{2.t-2.e^t+2+t.e^t-t}{2.(e^t-1)}$. On cherche le signe du numérateur grâce à un développement limité :

$$2-2.e^t+t+t.e^t=2-2-2.t-t^2-\frac{t^3}{3}+t+\Big(t+t^2+\frac{t^3}{2}\Big)+o(t^3)=\frac{t^3}{6}+o(t^3)_{t\to0}$$

Le numérateur sera du signe de t, et le dénominateur aussi (e^t-1). Le quotient est toujours positif. Le graphe est au dessus de sa tangente.

On aurait pu aussi écrire a priori $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+c.t^2+o(t^2)$, effectuer un produit en croix $t=\Big(t+\dfrac{t^2}{2}+o(t^2)\Big).\Big(1-\dfrac{t}{2}+c.t^2+o(t^2)\Big)$ et identifier. On trouvait alors $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{12}+o(t^2)_{t\to0}$ et conclure « graphe localement convexe).

On doit étudier $t\longmapsto\dfrac{t}{e^t-1}+\dfrac{t}{2}$ et prouver sa parité *(domaine de définition symétrique)*.

On compare donc $\dfrac{t}{e^t-1}+\dfrac{t}{2}$ et $\dfrac{-t}{e^{-t}-1}-\dfrac{t}{2}$ en calculant leur différence :

$$\frac{t}{e^t-1}+\frac{t}{2}+\frac{t}{e^{-t}-1}+\frac{t}{2}=t.\Big(1+\frac{1}{e^t-1}+\frac{1}{e^{-t}-1}\Big)$$

En réduisant au dénominateur commun, on trouve $t.\dfrac{(e^t-1).(e^{-t}-1)+(e^{-t}-1)+(e^t-1)}{(e^t-1).(e^{-t}-1)}$ ce qui fait bien 0.
Comme $f-a.Id$ est paire, le coefficient en t^9 du développement limité en 0 est nul.
On ajoute $a.t$ qui ne change en rien le coefficient de t^9 : il reste nul.
Dans $\dfrac{t}{e^t-1}$ il y un terme constant, un terme en t et ensuite que des termes d'exposant pair.

Pour information : $\dfrac{t}{e^t-1}=1-\dfrac{t}{2}+\dfrac{t^2}{12}-\dfrac{t^4}{720}+\dfrac{t^6}{30\,240}-\dfrac{t^8}{1\,209\,600}+\dfrac{t^{10}}{47\,900\,160}-691.\dfrac{t^{12}}{1\,307\,674\,368\,000}+o(t^{13})$ *avec des coefficients qui sont des célébrités des mathématiques :les nombres de Bernoulli.*

On prolonge en 0 par la valeur 1 (inverse d'un taux d'accroissement de l'exponentielle, ou développement limité$f(x)=\dfrac{x}{1+x+o(x)-x}$).

Pour la dérivée en 0, on écrit

$$f(x)=\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+o(x)}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+o(x)\right)}=1-\frac{x}{2}+o(x)$$

Disposant d'un développement limité d'ordre 1, la fonction est dérivable de dérivée $\frac{-1}{2}$.

On écrit même un terme de plus avec

$$f(x)=\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)-1}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+o(x^2)\right)}=1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^2+o(x^2)$$

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)$$

La fonction est localement convexe.

On étudie $\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}$ dont on va chercher la parité en calculant la valeur en x et en $-x$:

$$\left(\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}\right)-\left(\frac{-x}{e^{-x}-1}-\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{e^x-1}+x-\frac{x}{e^{-x}-1}=\frac{x}{e^x-1}+x-\frac{x.e^x}{1-e^x}=x.\left(\frac{1+(e^x-1)-e^x}{(e^x-1)}\right)=0$$

Un terme sur deux du développement limité sera nul.

Pour des raisons de parité justement, le terme en x^9 dans le développement de $f(x)+\frac{x}{2}$ est nul.

On ajoute $-\frac{x}{2}$, le terme en x^9 reste nul.

Pour information : en écrivant

$$\frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{10}}{10!}-1+o(x^{10})}=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^9}{10!}+o(x^9)\right)}$$

et en développant

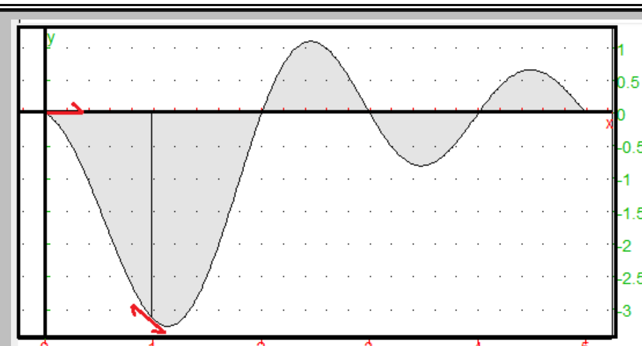
$$1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^9}{10!}\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^8}{9!}\right)^2+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\ldots+\frac{x^7}{8!}\right)^3+\ldots+\left(\frac{x}{2}\right)^9$$

on peut finir par arriver à

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}+\frac{x^6}{30240}+\frac{x^8}{1209600}+o(x^9)$$

et à moins d'être Euler, on ne devine rien.

◁ 33 ▷ ♡ J'ai l'impression que $x\longmapsto\frac{\sin(\pi.x)}{\ln(x)}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. Prouvez le. Et donne moi l'équation de la tangente en 0 puis en 1.



quand x tend vers 0, le numérateur reste borné, et le dénominateur tend vers l'infini. Le quotient tend vers 0 (on irait jusqu'à le qualifier de forme surdéterminée, du type « zéro sur l'infini »).

En 1, numérateur et dénominateur tendent vers 0. Forme indéterminée.

Mais on va poser $x=1+h$ et effectuer des développements limites : $\frac{\sin(\pi+\pi.h)}{\ln(1+h)}=\frac{-\sin(\pi.h)}{\ln(1+h)}$ par simple calcul déjà.

Ensuite, on développe vraiment ou on passe aux équivalents : $\dfrac{\sin(\pi+\pi.h)}{\ln(1+h)} \sim \dfrac{-\pi.h}{h}$. Le quotient tend vers $-\pi$.

On veut un développement limite d'ordre 1 du quotient.
On veut la dérivée en 1 par limite des taux d'accroissement :

$$\frac{\dfrac{\sin(\pi.(1+h))}{\ln(1+h)}+\pi}{h} = \frac{\sin(\pi+\pi.h)+\pi.\ln(1+h)}{h.\ln(1+h)}$$

Numérateur et dénominateur tendent vers 0, mais à quelle vitesse ? Le dénominateur est équivalent à h^2.
Pour le numérateur, on développe :

$$\sin(\pi+\pi.h) = -\sin(\pi.h) = -\pi.h + \frac{\pi^3.h^3}{6} + o(h^3)$$

et $\pi.\ln(1+h) = \pi.\Big(h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)\Big)$.

Le quotient est équivalent à $\dfrac{-\dfrac{\pi.h^2}{2}+o(h^2)}{h^2+o(h^2)}$ et il tend vers $\dfrac{-\pi}{2}$.

On pourra poser $f'(1) = -\pi/2$.

L'équation de la tangente en 1 est $\boxed{y = -\pi - \dfrac{\pi}{2}.(x-1)}$

◃34▹ On définit $f = \theta \longmapsto \tan(\theta) + \dfrac{2}{2.\theta-\pi}$. Prolongez f par continuité en $\pi/2$ [a] *(on notre $\overline{f}$ l'application prolongée, juste pour avoir la rigueur emmerdante des concours)*. Montrez que $\overline{f}$ est dérivable en $\pi/2$. Montrez que $\overline{f}$ est C^1 sur $[0,\ \pi/2]$.
Calculez $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \overline{f}(\theta).d\theta$.
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \overline{f}(\theta).\sin(n.\theta).d\theta$, Montrez que I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini *(by parts)*.

a. pensez à écrire $x = \dfrac{\pi}{2}+h$ quand x doit tendre vers $\pi/2$, car c'est en 0 que vous maitrisez vos développements limités

Ayant posé $f(\theta) = \tan(\theta) + \dfrac{2}{2.\theta-\pi}$, on a l'existence en tout point de $[0,\pi/2[$ et de $]\pi/2,\ \pi]$ par exemple. Pour montrer que f se prolonge par continuité en $\pi/2$, on va regarder la limite de $f(x)$ quand x tend vers $\pi/2$.

Et surtout, on ne va pas séparer "à droite/à gauche". On n'est plus en Terminale avec des réflexes idiots. On ne sépare ainsi que quand la formule est différente à droite et à gauche...

On change de variable car c'est en 0 qu'on connaît tout : $x = \dfrac{\pi}{2}+h$ avec h qui va tendre vers 0 *(par valeur supérieure ou inférieure)* :

$$f\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big) = \tan\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big) + \frac{2}{\pi+2.h-\pi} = \frac{\sin(h+\pi/2)}{\cos(h+\pi/2)} + \frac{1}{h} = \frac{-\cos(h)}{\sin(h)} + \frac{1}{h} = \frac{\sin(h)-h.\cos(h)}{h.\sin(h)}$$

On floute par développement limité connu :

$$f\Big(\frac{\pi}{2}+h\Big) = \frac{\Big(h-\dfrac{h^3}{6}+o(h^3)\Big) - h.\Big(1-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)}{h.\sin(h)} = \frac{h^3/3+o(h^4)}{h.\sin(h)}$$

(quand h tend vers 0).

On ne regarde que ce qui domine *(équivalents)* : $f\Big(\dfrac{\pi}{2}+h\Big) \sim_{h\to 0} \dfrac{h^3/3}{h.h} = \dfrac{h}{3}$.

L'équivalent tend vers 0, la quantité tend aussi vers 0 : on pose $\boxed{f(\pi/2)=0}$

Maintenant, on regarde la dérivabilité par taux d'accroissement : $\tau = \dfrac{f(x)-\overline{f}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)}{x-\dfrac{\pi}{2}}$.

On change de variable :

$$\tau = \frac{f\Big(\dfrac{\pi}{2}+h\Big) - \overline{f}\Big(\dfrac{\pi}{2}\Big)}{h} = \frac{f\Big(\dfrac{\pi}{2}+h\Big)}{h}$$

On profite de ce qui a été fait avant : $\tau \sim_{h\to 0} = \dfrac{\frac{h}{3}}{h} = \dfrac{1}{3}$.
Équivalent à un réel non nul, ce taux d'accroissement tend vers ce réel. Les taux d'accroissement ont une limite, la fonction est dérivable : $\boxed{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{3}}$

Mais on peut aussi utiliser le théorème de la limite C^1 en dérivant d'abord :

$$f' = \theta \longmapsto \frac{1}{\cos^2(\theta)} - \frac{4}{(2.x-\pi)^2}$$

Il reste à voir si f' admet une limite en $\pi/2$ et si cette limite vaut $1/2$.
On notera que si on prouve que f' admet une limite, le théorème nous donne directement que $\overline{f}$ est dérivable en $\pi/2$ de dérivée égale à ce qu'on a trouvé.
On change de variable :

$$f'\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = \frac{1}{\sin^2(h)} - \frac{4}{(2.h)^2} = \frac{h^2-\sin^2(h)}{h^2.\sin^2(h)} = \frac{(h-\sin(h)).(h+\sin(h))}{h^2.\sin^2(h)}$$

On passe aux développements limités là où il faut :

$$h - \sin(h) = h - \left(h - \frac{h^3}{6} + o(h^3)_{h\to 0}\right) = \frac{h^3}{6} + o(h^3)_{h\to 0}$$

On passe aux équivalents $f'\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right) \sim_{h\to 0} \dfrac{\frac{h^3}{6}.2.h}{h^2.h^2} = \dfrac{1}{3}$. L'équivalent devient une limite.
$\overline{f}$ est dérivable, même en $\dfrac{\pi}{2}$ et $\overline{f}'$ est C^1 *(tiens, c'est $\overline{f}'$ ou $\overline{f'}$?)*.

Pour l'intégration, on ne sépare pas. La linéarité c'est bien quand tout existe.
Mais ici, ni $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan(\theta).d\theta$ ni $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2}{2.\theta-\pi}.d\theta$. En revanche, on peut intégrer sur un segment $\displaystyle\int_0^a \left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} + \frac{2}{2.\theta-\pi}\right).d\theta = \Big[\ln(2.\theta-\pi) - \ln(\cos(\theta))\Big]_{\theta=0}^{\theta=a}$.
Plus proprement, on a une primitive : $\theta \longmapsto \ln\left(\dfrac{\pi-2.\theta}{\cos(\theta)}\right)$. On prend sa valeur en 0 : $\ln(\pi)$.
On prend sa limite en $\pi/2$ en posant encore $\theta = \dfrac{\pi}{2} - h$ *(on est à gauche de 0, on va prendre h positif)* : $\ln\left(\dfrac{2.h}{\sin(h)}\right)$. Le quotient tend vers 2.1. Le logarithme tend vers 0 par continuité.
Au final, il reste $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \overline{f}(\theta).d\theta = \ln(2/\pi)$ *(négatif, ce qui est normal)*.

$I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \overline{f}(\theta).\sin(n.\theta).d\theta$ existe pour tout n. On intègre par parties en sachant que $\overline{f}$ est dérivable

$\overline{f}$	$\hookrightarrow$	$\overline{f}'$
$\sin(n.\theta)$	$\hookleftarrow$	$-\dfrac{\cos(n.\theta)}{n}$

$$I_n = \left[\frac{\overline{f}(\theta).\cos(n.\theta)}{n}\right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi/2} \overline{f}'(\theta).\cos(n.\theta).d\theta$$

Le crochet est fait de termes comme $\dfrac{\overline{f(0)}}{n}$ ou $\pm\dfrac{\overline{f(\pi/2)}}{n}$. Ils tendent vers 0 quand n tend vers l'infini.
L'intégrale se majore $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \overline{f}'(\theta).\cos(n.\theta).d\theta\right| \leqslant \dfrac{1}{n}.Max\{|f'(t)| \mid t \in [0,\pi/2]\}$: on majore le cosinus en valeur absolue par 1 et les $\overline{f}'(\theta)$ par $||\overline{f}'||_\infty$ *($\overline{f}'$ est continue sur un segment, donc majorés)*.
Par encadrement, l'intégrale tend vers 0. La somme I_n tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

◁35▷ Limites en 0^+ et en l'infini de $\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Cette application est bien définie au voisinage de 0.
Mais elle y présente une forme indéterminée du type $1^{+\infty}$.
Passons au logarithme : $\dfrac{1}{x}.\ln\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right)$. On écrit même $3^x = e^{x.\ln(3)} = 1 + x.\ln(3) + o(x)_{x\to 0}$.

On ajoute 1 et on divise par 2 : $\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right) = 1 + \dfrac{x.\ln(3)}{2} + o(x)$.
On passe au logarithme $\ln\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{x.\ln(3)}{2} + o(x)\right) = \dfrac{x.\ln(3)}{2} + o(x)$.
On divise par x : $\dfrac{1}{x}.\ln\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right) = \dfrac{1}{x}.\ln\left(1 + \dfrac{x.\ln(3)}{2} + o(x)\right) = \dfrac{\ln(3)}{2} + o(1)$.
On passe à la limite qui existe à présent : $\dfrac{\ln(3)}{2}$.

On passe à l'exponentielle (continue) : $\boxed{\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow_{x\to 0} \sqrt{3}}$

La calculatrice confirme cette convergence, l'intuition ne confirmait rien.

En $+\infty$, la forme est en $+\infty^0$, toujours indéterminé.
Le même logarithme donne $\dfrac{1}{x}.\ln\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right)$ mais cette fois, c'est 3^x qui l'emporte nettement dans le logarithme.
On factorise : $\dfrac{1}{x}.\left(\ln(3^x) + \ln\left(\dfrac{3^{-x}+1}{2}\right)\right)$.
On simplifie $\ln(3) + \dfrac{1}{x}.\ln\left(\dfrac{3^{-x}+1}{2}\right)\Big)$.
Le second terme n'est plus une forme indéterminée, il tend vers 0.

On compose avec l'exponentielle : $\boxed{\left(\dfrac{1+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \longrightarrow_{x\to +\infty} 3}$

◁ 36 ▷ On travaille avec les entiers de 0 à 4 pour les opérations modulo 5. Montrez que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ est nilpotente.
Combien y a-t-il de matrices de taille 2 sur 2 nilpotentes.
Combien y a-t-l de matrices 2 sur 2 de rang 2 ?
Combien y a-t-il de couples de matrices $(A,\ B)$ avec A, B et $A+B$ nilpotentes ?
Le rang est le nombre de colonnes linéairement indépendantes.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. pas besoin d'aller chercher loin.

Il y a 5^4 matrices (quatre coefficients à choisir, avec cinq choix pour chacun). C'est le cardinal de notre univers.
Comment y reconnaître les matrices nilpotentes ?
Elles ont un déterminant nul et une trace nulle.

Les matrices de rang 2 sont les matrices inversibles.
Elles sont formées de deux vecteurs colonnes indépendants.
Le premier vecteur colonne ne doit pas être nul, mais c'est la seule contrainte. On remplit comme on veut la première colonne $\begin{pmatrix} a & + \\ c & + \end{pmatrix}$. On a cinq choix pour a et autant pour b. Mais un couple est interdit : $\begin{pmatrix} 0 & + \\ 0 & + \end{pmatrix}$.
On a donc $25-1$ choix du premier vecteur.
Et le second ? Tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$...
Sauf $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 2.a \\ c & 2.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 3.a \\ c & 3.c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 4.a \\ c & 4.c \end{pmatrix}$. On a cette fois $25-5$ choix.

Et en mettant bout à bout les choix : $(25-1).(25-5)$ matrices inversibles.

◁ 37 ▷ Auguste, Baptiste et Clara sortent de colle (d'anglais ou de physique) et indiquent leur note :

Auguste		j'ai 6	j'ai 2 de moins que Baptiste	j'ai 1 de plus que Clara
Baptiste		Clara a 9	je n'ai pas la plus mauvaise note	la différence entre Clara et moi est 3
Clara		Auguste a 7	j'ai moins qu'Auguste	Baptiste a 3 de plus qu'Auguste

Ce n'est pas cohérent tout ça. En effet, chacun a menti une fois et dit la vérité deux fois. Quelle est la note de chacun ?

Les prénoms correspondent à d'anciens élèves. Auguste venait de Lavoisier et termine ses études à SupAero (plus météo et Polytechnico Turin.
Clara venait de Maurice Ravel, a fini l'ENSTA et est développesue fullstack dans le domaine de la santé (comprend qui peut).
Baptiste venait de Marcq-en-Barœul (mais son père habitait à Gambetta !) et est à IMT Atlantique je crois.

On regarde les informations

	1	2	3
Auguste	A=6	A=B-2	A=C+1
Baptiste	C=9	non(Min(A,B,C)=B)	∣C-B∣=3
Clara	A=7	C<A	B=A+3

On marquera en tout petit sous une barre les assertions fausses. On marquera en grand les affirmations qui sont assurément vraies.
Comme $A1$ et $C1$ sont contradictoire, un des deux est faux (au moins). Ce qui signifie que les autres affirmations de la ligne sont vraies.
• Si Auguste ment en disant “A=6” et Clara sincère en disant “A=7” :

	1	2	3
Auguste	$\overline{A=6}$	A=B-2 donc B=9	A=C+1 donc C=6
Baptiste	C=9	non(Min(A,B,C)=B)	∣C-B∣=3
Clara	A=7	C<A	$\overline{B=A+3}$

On a trouve $(A,\ B,\ C) = (7,\ 9,\ 6)$. Il faut alors que Baptiste mente une fois sur ses trois affirmations. Il ment en disant C=9 et dit la vérité des ses autres phrases. On peut accepter cette situation.
• Si Auguste est sincère en disant “A=6” et Clara menteuse en disant “A=7” :

	1	2	3
Auguste	A=6	A=B-2	A=C+1
Baptiste	C=9	non(Min(A,B,C)=B)	∣C-B∣=3
Clara	$\overline{A=7}$	C<A	B=A+3 donc B=9

Comme l’affirmation C2 dit que la plus sale note est C, on déduit que B ment avec B1. Il dit donc vrai avec “B n’est pas le minimum” et avec ∣C-B∣=3 qui force C=6. On a alors $(A,\ B,\ C) = (6,\ 9,\ 6)$. Mais alors A ment deux fois dans ses deux dernière affirmations. On refuse.
• Si Auguste ment avec “A=6” et Clara aussi avec “A=7” ; leurs autres phrases sont sincères :

	1	2	3
Auguste	$\overline{A=6}$	A=B-2	A=C+1
Baptiste	C=9	non(Min(A,B,C)=B)	∣C-B∣=3
Clara	$\overline{A=7}$	C<A	B=A+3

et la contradiction $A+B-2$ et $B = A+3$ sont en contradiction.
On ne peut donc garder que

Auguste	Baptiste	Clara
7	9	6

◁38▷ ♡ Déterminez $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-4^3}{x^5-4^5}$.

On n’écrit pas $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^3-4^3}{x^5-4^5}$ *tant qu’on n’a pas prouvé l’existence de la limite. C’est à de tels comportements qu’on détectera chez vous l’élève de Prépas, face à l’élève qui a fait une Terminale destinée aussi à des non-scientifiques (en Terminale, vous étiez avec des élèves se destinant à Médecine, Science-Po et autres... que devait on leur leur enseigner en maths ? A faire des calculs ou à raisonner juste ?* [4]*).*

Un américain passera par la formmule de l’Hopital, même sans avoir compris et remplace la forme indéterminée $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ par la forme sans doutes moins indéterminée $\lim\limits_{c\to a} \dfrac{f'(c)-0}{fg'(c)-0}$.

Un étudiant français reconnaît un taux d’accroissements

$$\frac{x^3-4^3}{x^5-4^5} = \frac{x^3-4^3}{x-4}.\frac{1}{\dfrac{x^5-4^5}{x-4}} \longrightarrow_{x\to 4} \frac{3.4^2}{5.4^4}$$

◁39▷ ♡ Comparez les probabilités de “*avoir au moins un 6 avec six dés*” et “*avoir au moins deux 6 avec douze dés*” (et pourquoi pas “*avoir au moins un 12 avec douze dés*” ?).

Comment accéder à la probabilité d’avoir au moins un 6 ? C’est un, ou deux, ou trois... c’est long.

Passons par le complémentaire (idée classique en probabilités).
Le complémentaire, c’est aucun 6. C’est donc que chacun des six dés (indépendants) n’a fait aucun 6 (probabilité $\dfrac{5}{6}$ pour chacun).

4. *le programme dit « à faire des calculs », c’est en ça qu’il y a tromperie sur les maths, et sur la formation, mais ça c’est une autre histoire*

$P(aucun\ 6\ avec\ six\ des) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$ (soit 31031/46656, et environ 0,66 (ou 66pour cent).

De la même façon, le complémentaire de au moins deux 6 avec 12 dés, c'est aucun ou un seul.
On additionne les probabilités de deux événements incompatibles :

$*$ aucun 6 : $\left(\frac{5}{6}\right)^{12}$

$*$ un seul 6 : $12.\left(\frac{1}{6}\right)^1.\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$ (choix du dé, tirage d'un 6 pour lui, et tirage de « tout sauf 6 » pour les onze autres).

On passe au complémentaire : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{11} - 12.\left(\frac{1}{6}\right)^1.\left(\frac{5}{6}\right)^{11}$.

Application numérique : 1346704211/2176782336, valeur approchée : 0,62.

Bilan : | au moins un 6 avec six dés | > | au moins deux 6 avec douze dés |

Mais de peu !

◁40▷ ♡ Soit f de classe C^3 sur un voisinage de a. Calculez $lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}.\begin{vmatrix} f(a-h) & f(a) \\ f(a) & f(a+h)\end{vmatrix}$ (indication : DL d'ordre 2).

On va utiliser la formule de Taylor Young puisqu'on nous dit que f est C^3 en a :

$$\begin{array}{llllll} f(a+h) & = f(a) & +h.f'(a) & +\frac{h^2.f''(a)}{2} & +\frac{h^3.f^{(3)}(a)}{6} & +o(h^3) \\ f(a-h) & = f(a) & -h.f'(a) & +\frac{h^2.f''(a)}{2} & -\frac{h^3.f^{(3)}(a)}{6} & +o(h^3) \end{array}$$

Le produit $f(a+h).f(a-h)$ contient beaucoup de termes. On se dit que c'est lourd.
On les ramène alors à l'ordre 2, d'autant qu'on va diviser par h^2 :

$$f(a+h).f(a-h) = \left(f(a) + \frac{h^2.f''(a)}{2} + o(h)^2 + \frac{h.f'(a)}{1}\right).\left(f(a) + \frac{h^2.f''(a)}{2} + o(h)^2 - \frac{h.f'(a)}{1}\right)$$

On développe et on trouve $(f(a))^2 + (f(a).f''(a) - (f'(a))^2).h^2 + o(h^2)$ en jetant à la poubelle tous les termes inutiles.

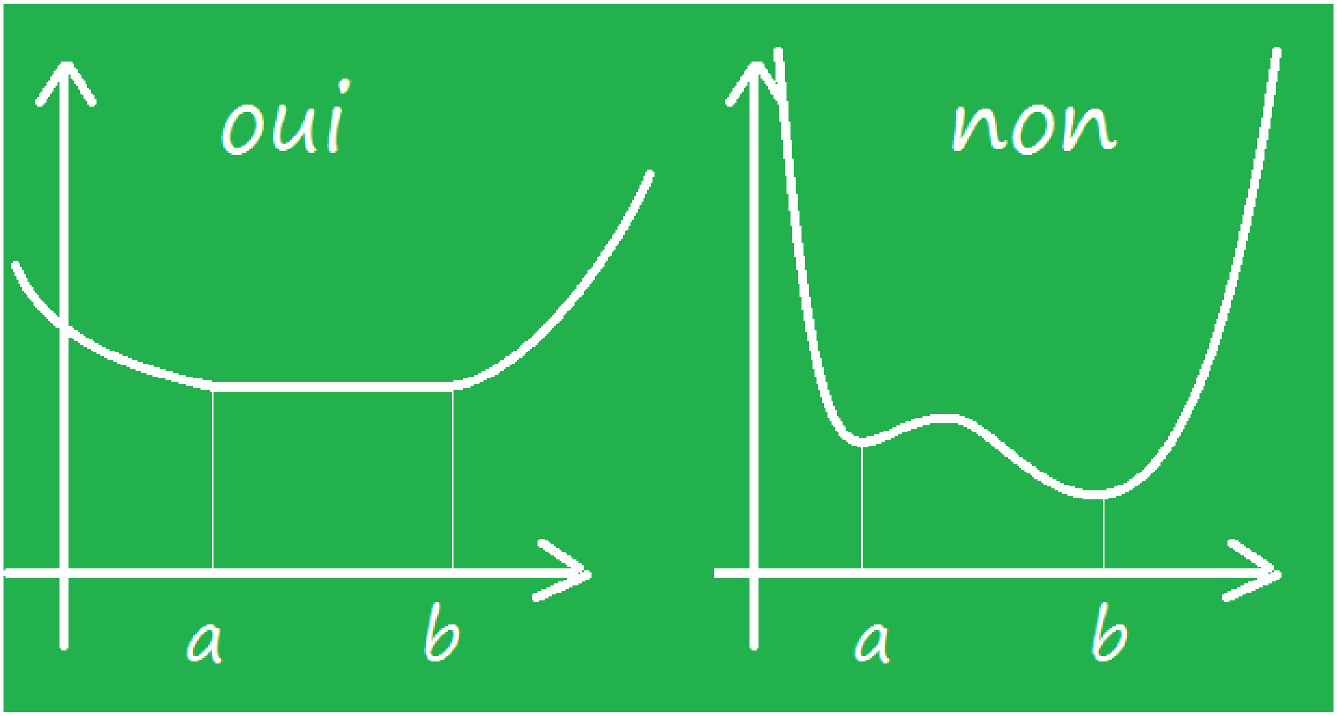
C'est du simple bon sens de ne pas garder des h^3 face à un $o(h^2)$!
C'est la base même des raisonnements que vous devrez mener.
Tout le reste ne sera que calcul. Et donc surtout bon sens.

On soustrait $(f(a))^2$, on divise par h^2 : $lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}.\begin{vmatrix} f(a-h) & f(a) \\ f(a) & f(a+h)\end{vmatrix} = f(a).f''(a) - (f'(a))^2 + o(1)_{h\to 0}$.

La limite vaut $\boxed{f(a).f''(a) - (f'(a))^2}$

◁41▷ On suppose que f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ admet un minimum local en a et aussi en b. Montrez alors $f(a) = f(b)$ et montrez que f est constante sur $[a,\ b]$.

On va montrer que f est de la forme suivante et ne peut pas pour cause de convexité être des formes indiquées à côté.



Première version : f est dérivable (simpliste mais c'est déjà ça).
Comme f admet un minimum local en a, sa dérivée est nulle en a.
Comme f admet un minimum local en f, sa dérivée s'annule en b.
Comme f est convexe, sa dérivée est croissante.
Ayant $f'(a) = f'(b) = 0$ et f' croissante, pour tout x entre a et b, on a $0 = f'(a) = f'(x) = f'(b) = 0$.
Comme f' est nulle sur tout l'intervalle $[a,\ b]$, $f$est constante sur $[a,\ b]$ (et ceci nous donne $f(a) = f(b)$ qu'on n'avait pas forcément dès le départ).

De plus, le graphe est au dessus de ses tangentes. Or, la tangente en $\dfrac{a+b}{2}$ est horizontale. La fonction est donc toujours plus grande que ce minimum qui passe du statut de minimum local à celui de minimum global.

Preuve en n'utilisant que la définition « brute » et aucune hypothèse supplémentaire de dérivabilité.
On a quand même des dérivabilités latérales.
Si l'on a un minimum en a, f est dérivable à droite et à gauche en a car convexe.
Comme on a un minimum en a, les taux d'accroissement ont un signe connu à droite (localement) et à gauche.
On obtient donc $f'_d(a) \geqslant 0$.
De même, à gauche de b, on a $\dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} \leqslant 0$ à cause du minimum, puis en passant à la limite monotone : $f'_g(b) \leqslant 0$.

Mais on a aussi

$$f'_d(a) \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant f'_g(b)$$

par convexité.
En tenant compte des signes de chacun, la seule possibilité est « tous nuls ».
On en déduit déjà $f'_d(a) = f'_g(b) = 0$ mais aussi $f(a) = f(b)$. C'est le même minimum local pour les deux.

Mais de plus, pour tout x entre a et b, on a $f_d(a) \leqslant f'_g(x) \leqslant f'_d(x) \leqslant f'_g(b)$ (c'est dans le cours, croissance de la dérivée).
On en déduit $f'_g(x) = f'_d(x) = 0$ et f est constante sur l'intervalle $[a,\ b]$ (dérivée identiquement nulle).

Vous cernez dans cet exercice la distinction entre « la dérivée s'annule (en un point) » et « la dérivée est nulle (sur un intervalle) ».

Peut être l'avez vous eue par les taux d'accroissements uniquement.

◁42▷ Montrez que $x \longmapsto \ln(1+e^x)$ est convexe.
Déduisez pour a et b positifs : $1+\sqrt{a.b} \leqslant \sqrt{(1+a).(1+b)}$ et plus généralement
Déduisez : $1+\Big(\prod_{k=1}^{n} x_k\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \Big(\prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\Big)^{\frac{1}{n}}$ pour des x_k strictement positifs.
Déduisez $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1\dots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}$ pour des réels strictement positifs a_j et b_i.
$1+\sqrt[n]{a_1\dots a_n} \leqslant \sqrt[n]{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$.

Il suffit de dériver une fois : $x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^x+1}$ est la composée de deux applications croissantes : $x \longmapsto e^x$ et $t \longmapsto \dfrac{t}{t+1}$.
Si vous y tenez, dérivez deux fois, mais je serai déçu.

On sent la petit inégalité de convexité à deux termes dans le cas particulier $t=\dfrac{1}{2}$: $f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.
On a donc
$$\ln\Big(1+e^{\frac{x+y}{2}}\Big) \leqslant \frac{\ln(1+e^x)+\ln(1+e^y)}{2} = \ln\Big(\sqrt{(1+e^x).(1+e^y)}$$
Si l'on compose avec le logarithme (croissant) :
$$1+\sqrt{e^x.e^y} \leqslant \sqrt{(1+e^x).(1+e^y)}$$
0n a compris. On l'applique à $x=\ln(a)$ et $\ln(b)$ puisque a et b sont donnés strictement positifs.
$$1+\sqrt{a.b} \leqslant \sqrt{(1+a).(1+b)}$$

On note que si on avait essayé de mettre bout à bout des inégalités de convexité, on échouait car exp *est convexe mais* ln*concave.*

On le rédige mieux pour n points.
Les données sont les x_k, c'est donc d'eux qu'on part.
On pose alors $y_k=\ln(x_k)$. On a alors n réels.
On écrit pour eux la grande inégalité de convexité pour un isobarycentre [5] :
$$f\Big(\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}\Big) \leqslant \frac{f(y_1)+\ldots f(y_n)}{n} = \frac{\ln(1+x_1)+\ldots+\ln(1+x_n)}{n} = \ln\Big(\sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}\Big)$$
On passe à l'exponentielle *(croissante)* : $1+e^{\frac{y_1+\ldots+y_n}{n}} \leqslant \sqrt[n]{(1+x_1)\ldots(1+x_n)}$
On simplifie le premier membre et on a la formule.

Une question sans grande difficulté. Mais qui fera le tri le jour du concours.
Si vous vous contentez de formules et oubliez oubliez de préciser que vous composez par l'exponentielle en précisant qu'elle est croissante, vous allez perdre un tiers des points.
Si vous partez des $y_i$au lieu de partir des x_i, vous perdez un sixième des points (qui est donné ?).

Une fois donnés les a_i et les $b_j$strictement positifs, il suffit ensuite de voir que l'inégalité
$$\sqrt[n]{a_1\dots a_n}+\sqrt[n]{b_1\dots b_n} \leqslant \sqrt[n]{(a_1+b_1)\dots(a_n+b_n)}$$
est équivalente à
$$1+\sqrt[n]{\frac{b_1}{a_1}.\frac{b_2}{a_2}\dots\frac{b_n}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{\frac{(a_1+b_1)}{a_1}\dots\frac{(a_n+b_n)}{a_n}}$$
en divisant tout par $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}$.
Il suffit donc d'appliquer le résultat précédent aux $\dfrac{b_k}{a_k}$.

---

5. « isobarycentre » est le grand mot pour dire « moyenne avec tous les coefficients égaux » ou même « moyenne » quand on est prof d'histoire géo et qu'on a du mal avec ces histoires de coefficients

◁ 43 ▷ Montrez que si f est convexe, alors pour tout a positif, $t \longmapsto e^{a.f(t)}$ est convexe.
Réciproquement, on suppose que pour tout a positif, $t \longmapsto e^{a.f(t)}$ est convexe. Montrez alors que $t \longmapsto \dfrac{e^{a.f(t)}-1}{a}$ est convexe. Déduisez que f est convexe.

Pour le sens classique, c'est de la composition « convexe avec convexe croissante ».
On travaille avec la petite inégalité de convexité.
Pour x et y donnés, et pour t entre 0 et 1 : $f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.
On multiplie par a *(positif)* et on passe à l'exponentielle *(croissante)* : $e^{f((1-t).x+t.y)} \leqslant e^{(1-t).a.f(x)+t.a.f(y)}$.
On exploite la convexité de l'exponentielle :

$$e^{f((1-t).x+t.y)} \leqslant e^{(1-t).a.f(x)+t.a.f(y)} \leqslant (1-t).e^{a.f(x)}+t.e^{a.f(y)}$$

On a obtenu la convexité de $x \longmapsto e^{a.f(x)}$.

Ce que guettera le correcteur aux concours, c'est ce qui est dans les parenthèses : croissante, positif, convexe.

La réciproque demande plus de prudence.
C'est le « pour tout a qui va nous servir ». rappelons en effet que $x \longmapsto \ln(x)$ n'est pas convexe alors que $x \longmapsto e^{\ln(x)}$ est convexe (mais pas chaque $x \longmapsto e^{a.\ln(x)}$).
On ne peut pas dériver des inégalités, ça ne nous apporte rien.

Alors que faire ? Supposons que pour tout a, $e^{a.f}$ soit convexe.
On fait une transformation affine, qui ne modifie pas la convexité : $x \longmapsto \dfrac{e^{a.f(x)}-1}{a}$ est convexe pour tout a.
On passe à la limite quand a tend vers 0 : $x \longmapsto f(x)$ est convexe.
Toc toc bada boum, c'est fini.

Un détail qui manque : $\dfrac{e^{a.f(x)}-1}{a}$ *tend vers* $f(x)$ *quand* a *tend vers* 0.
Oui, il suffit d'écrire un développement limité : $e^{a.f(x))} = 1+a.f(x)+o(a.f(x))_{a\to 0}$ *donc* $\dfrac{e^{a.f(x))}-1}{a} = f(x)+o(1)_{a\to 0}$.
On pouvait aussi l'avoir en retrouvant un taux d'accroissement $\dfrac{e^{a.f(x)}-1}{a.f(x)}.f(x)$.

L'autre détail : *une limite de fonctions convexes est convexe.*
On se donne x, y et t (t est entre 0 et 1).
On écrit pour tout n : $f_n((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f_n(x)+t.f_n(y)$
On fait tendre n vers l'infini, les inégalités strictes deviennent larges, les inégalités larges le restent : $f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$

◁ 44 ▷ f est de classe C^2 et convexe. Montrez que $x \longmapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t).dt$ est aussi convexe.

Une hypothèse nous est soufflée qui nous met sur une piste simple : « f est C^2 ».
Le critère est donc double : f' est croissante
f'' est positive
et on n'a pas besoin d'écrire les inégalités de trois cordes.
L'application $x \longmapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t).dt$ est à son tour dérivable par continuité des f.

$$\Big(x \longmapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t).dt\Big)' = \Big(x \longmapsto f(x+1)-f(x-1)\Big)$$

$$\Big(x \longmapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t).dt\Big)'' = \Big(x \longmapsto f'(x+1)-f'(x-1)\Big)$$

Ça y est, vous y voyez clair ? f' est croissante, donc $\forall x,\ f'(x+1)-f'(x-1) \geqslant 0$.
La dérivée seconde est positive, l'application $\Big(x \longmapsto \int_{t=x-1}^{x+1} f(t).dt\Big)$ est convexe.

Autre approche : une intégrale est une somme « infinie ». Et en écrivant $\Big(x \longmapsto \int_{u=-1}^{1} f(x+u).dt\Big)$ *on a une somme d'applications convexes* $x \longmapsto f(x+u)$.

◁ 45 ▷ On définit $f = t \longmapsto (t^2+1).e^{-t}$. Donnez l'intervalle le plus grand possible sur lequel f est croissante et convexe.
Même question avec décroissante et convexe.
Même question avec décroissante ou convexe.

Il s'agit d'étudier le signe de f' (monotonie) et de f'' (convexité).
On dérive donc, et plutôt deux fois qu'une.

	valeur	du signe de	positive sur
$f(x)$	$(1+x^2).e^{-x}$	$1+x^2$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	$-(x^2-1)^2.e^{-x}$	$(-x^2-1)$	rien
$f''(x)$	$(x^2-4.x+3).e^{-x}$	$(x-1).(x-3)$	$]-\infty,\ 1]$ et $[3,\ +\infty[$
décroissante et convexe			$]-\infty,\ 1]$ et $[3,\ +\infty[$
décroissante ou convexe			partout

Attention, on ne dit pas convexe sur $]-\infty,\ 2] \cup [3,\ +\infty[$.
Ca n'a pas de sens. la convexité (la croissance aussi) ne se définit que sur un intervalle à la fois.
Prenez cette habitude...

◁ 46 ▷ ♡ Sur quel(s) intervalle(s) $t \longmapsto (1-t^2).e^t$ est elle convexe ?

Il suffit d'étudier le signe de sa dérivée seconde : $t \longmapsto (1-t^2).e^t$
$t \longmapsto (1-t^2-2.t).e^t$
$t \longmapsto (-t^2-4.t-1).e^t$

On demande donc $t^2+4.t+1 \leqslant 0$.
On trouve $\boxed{[2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}]}$

Alors pourquoi ce pluriel ? Il n'y a qu'un intervalle, non ?

Non. Par exemple $[-2,\ -1]$ convient aussi. Puisque $[-2,\ -1] \subset [2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}]$.
En fait, la réponse est « tout intervalle inclus dans $[2-\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3}]$.

◁ 47 ▷ ♡ Calculez ces sommes multiples pour n donné

$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$	$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$	$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$

Si vous n'avez pas confiance, écrivez un script Python qui prend en entrée n et les calcule.

$$A_n = \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} \frac{j}{i}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\sum_{j=0}^{i-1} j$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.\frac{i.(i-1)}{2}$$

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{2}$$

$$\boxed{A_n = \frac{n.(n-1)}{4}}$$

$$B_n = \sum_{i+j=n} i.j$$

$$B_n = \sum_{i=0}^{n} i.(n-i)$$

$$B_n = n.\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{i=0}^{n} i^2$$

$$\boxed{B_n = \frac{n^3-n}{6}}$$

$$C_n = \sum_{\substack{0\leqslant i\leqslant n \\ 0\leqslant j\leqslant n}} Max(i,\ j)$$

$$C_n = \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant j<i\leqslant n} Max(i,\ j)$$

$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} Max(i,\ j) + \sum_{0\leqslant i=j\leqslant n} i$
$C_n = 2.\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{i=0}^{n} i$
$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j \sum_{i=0}^{j-1} 1 + \frac{n.(n+1)}{2}$
$C_n = 2.\sum_{j=0}^{n} j^2 + \frac{n.(n+1)}{2}$

$$\boxed{C_n = \frac{n.(n+1).(4.n+5)}{6}}$$

◃48▹ Soit f deux fois dérivable avec f'' positive. Montrez que si $f'(a)$ est nul, alors f admet un minimum en a.

f' est donc croissante.
Comme elle est nulle en a, elle est donc négative (ou nulle) avant, puis positive après.
f est doonc décroissante, puis croissante.
Bref, c'est un tableau de variations qui nous dit que f admet un minimum en a.

Rappelons qu'avec l'annulation de f' ont n'a pas forcément un minimum.
Oui, je sais, ça peut être un maximum.
Mais ce peut être aussi ni l'un ni l'autre, comme avec $x \longmapsto x^3$ e 0.
Le critère est « annulation et changement de signe de la dérivée ».

Mais ici, on peut aussi écrire $f(x) = f(a) + 0.(x-a) + \dfrac{(x-a)^2}{1}\displaystyle\int_0^1 (1-t).f''(t.x+(1-t).a).dt$.
l'intégrale est positive par positivité de f''. Le carré devant l'intégrale l'est aussi.
La différence $f(x) - f(a)$ est donc positive.
On a bien un minimul en a.

◃49▹ Montrez par théorème C^1 que $g = x \longmapsto \dfrac{x-1}{\ln(x)}$ est C^1 sur $]0,\ +\infty[$ après l'avoir prolongée par continuité en 0 et en 1.

Déjà, elle n'est pas définie en 0 ni en 1.
En 0, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers l'infini. On prolonge avec la valeur 0.
En 1, c'est l'inverse d'un taux d'accroissement du logarithme $\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}$. On prolonge par la valeur 1.

Ensuite, sur $]0,\ 1[$ et sur $]1,\ +\infty[$ l'application est dérivable, de dérivée $x \longmapsto \dfrac{x.\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2}$.
Si la dérivée a une limite en 0, on saura que f est dérivable en 0. Hélas, le numérateur tend vers -1 et le dénominateur vers 0. On a une limite infinie. Et pas abus de langage une demi-tangente verticale.

On recommence en 1 avec plus d'espoir. Comme c'est en 1, on va poser $x = 1+h$ puis habitué à trier les puissances de h.

$$\frac{x.\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2} = \frac{(1+h).\ln(1+h)-h}{(1+h).\ln(1+h)^2}$$

Le dénominateur est équivalent à h^2 car $\ln(1+h) \sim h$ quand h tend vers 0.
Il faut donc un développement d'ordre 2 du numérateur, en utilisant $\ln(1+h) = h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)$:

$$(1+h).\Big(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\Big) - h = \Big(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\Big) + \Big(h^2-\frac{h^3}{2}+o(h^3)\Big) - h = \frac{h^2}{2}+o(h^2)$$

Il est inutile de préciser le terme en h^3, il n'est plus visible à côté de $o(h^2)$, il en fait partie.
Le numérateur est équivalent à $\dfrac{h^2}{2}$ (premier terme non nul du développement limité).

Le quotient est équivalent à $\dfrac{1}{2}$. Il tend vers $\dfrac{1}{2}$.
L'application avoue être dérivable en 1 de dérivée $\dfrac{1}{2}$.

C'est bien « on déduit $f'(1) = \dfrac{1}{2}$. Et non pas : « je pose $f'(1) = \dfrac{1}{2}$.
On peut imposer une valeur à $f(1)$. Mais alors f est dérivable en 1 ou ne l'est pas, et ce n'est pas nous qui pouvons décider

de placer sa tangente comme ci ou comme ça...

On définit par $f = x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Donnez son domaine de définition.

En notant φune primitive de $t \longmapsto \frac{1}{\ln(t)}$ (qu'on ne sait pas exprimer à l'aide des fonctions usuelles), exprimez f à l'aide de φ et dérivez f .
Montrez que f est convexe sur chaque intervalle de son domaine.
Montrez que, pour tout x de $]1, +\infty[$: $\int_x^{x^2} \frac{x.dt}{t.\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2.dt}{t.\ln(t)}$.
Donnez la limite de f en 1 (réponse : $\ln(2)$), et donnez la limite de f' en 1. Même question pour f''.
Déduisez que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y est convexe.

Montrez que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0.

Retrouvez : $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}.dx = \ln(2)$.

◁ 50 ▷ On définit par $f = x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$. Donnez son domaine de définition.
Montrez que f est convexe sur chaque intervalle de son domaine.
Montrez que, pour tout x de $]1, +\infty[$: $\int_x^{x^2} \frac{x.dt}{t.\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{x^2.dt}{t.\ln(t)}$.
Donnez la limite de f en 1, et donnez la imite de f' en 1. Même question pour f''.
Déduisez que f est C^2 sur $]0, +\infty[$ et qu'elle y est convexe.

$\frac{1}{\ln(t)}$n'existe que pour t plus grand que 0 , et différent de 1.
On va intégrer de x à x^2. On ne peut pas prendre x négatif, sinon 0 est dans l'intervalle $[x, x^2]$.
Si x est positif, il faut quand même éviter que x et x^2 soient de part et d'autre de 1.

$x \in]0, 1[$	$x = 1$	$x \in]1, +\infty[$
alors $x^2 \in]0, 1[$	$x^2 = 1$	alors $x^2 \in]1, +\infty[$
$[x, x^2] \subset]0, 1[$ et $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ existe	bof	$[x, x^2] \subset]1, +\infty[$ et $\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)}$ existe
$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \geqslant 0$ (fonction négative mais $x > x^2$)		$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln(t)} \geqslant 0$

Pour dériver (sur chaque intervalle), on définit $G = x \longmapsto \int_{1/2}^x \frac{dt}{\ln(t)}$ dans le premier cas, et on dérive $x \longmapsto G(x^2 - G(x)$ en $x \longmapsto 2.x.G'(x^2) - G'(x)$ et on trouve $x \longmapsto \frac{x-1}{\ln(x)}$.
Sur l'autre intervalle, on fait de même, mais avec $G = x \longmapsto \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$.

Oui, $\frac{1}{2}$ et 2 c'est arbitraire. Mais ne tombez pas dans le piège de poser $G = x \longmapsto \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)}$ qui pose quand même problème pour son existence.

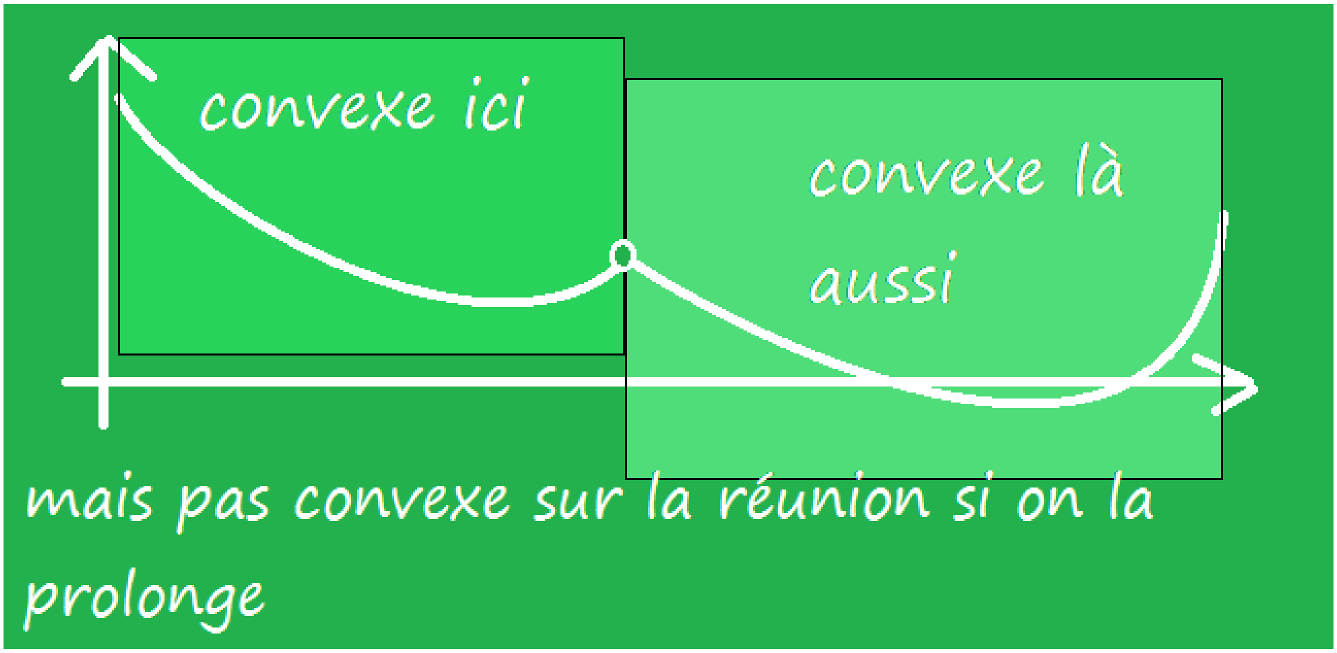
.

On redérive pour la convexité : $x \longmapsto \frac{x.\ln(x) - x + 1}{x.(\ln(x))^2}$.
Le signe est celui de $x.\ln(x) - x + 1$. Pas évident ?
Si ! La tangente est une application concave. Son graphe est sous ses tangentes. En particulier sous sa tangente en 1 : $\ln(x) \leqslant \frac{1}{1}.(x-1) + \ln(1)$.

Et alors ? Je l'écris pour $\frac{1}{x}$: $-\ln(x) \leqslant \frac{1}{x} - 1$ puis je multiplie par x positif : $-x.\ln(x) \leqslant 1 - x$ et donc $0 \leqslant x.\ln(x) + 1 - x$.

Oui, c'est un peu trop joli pour que vous y pensiez spontanément.
Mais vous pouviez étudier $x \longmapsto x.\ln(x) - x + 1$, la dériver deux fois et étudier ses variations (minimum nul en 1).

La dérivée seconde est positive, l'application est convexe sur chaque intervalle de son domaine.
Attention, ça ne veut pas dire convexe partout, même si on la prolonge.



L'encadrement
$$\int_x^{x^2}\frac{x.dt}{t.\ln(t)}\leqslant\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\leqslant\int_x^{x^2}\frac{x^2.dt}{t.\ln(t)}$$
s'obtient en écrivant que pour t entre x et x^2 (dans l'ordre puisque $x>1$), on a $\frac{x}{t}\leqslant 1\leqslant\frac{x^2}{t}$. On multiplie par le logarithme positif, on intègre sur un intervalle pris dans le sens croissant et c'est joué, plié.

Avantage : le terme du milieu n'a pas de primitive simple, mais les encadrants si !
$$x.\Big[\ln(\ln(t))\Big]_x^{x^2}=\int_x^{x^2}\frac{x.dt}{t.\ln(t)}\leqslant\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}\leqslant\int_x^{x^2}\frac{x^2.dt}{t.\ln(t)}=x^2.\Big[\ln(\ln(t))\Big]_x^{x^2}$$
On récupère du $\ln(\ln(x^2))-\ln(\ln(x))$ soit $\ln(2)$ (si si !).
On encadre donc la fonction par du $x.\ln(2)$ et $x^2.\ln(2)$.

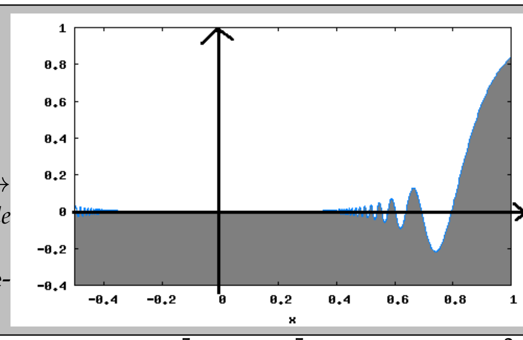
Par encadrement : $\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln(t)}$ tend vers $\ln(2)$ quand x tend vers 1 (à droite).

Peut on faire de même à gauche ? Cette fois, on aura des encadrements dans l'autre sens (attention au sens d'intégration...), mais le final sera le même.

On peut prolonger par continuité : $\boxed{f(1)=\ln(2)}$

La dérivée est en $x\longmapsto\frac{x-1}{\ln(x)}$.
Elle admet une limite en 1.
Le théorème de la limite de la dérivée nous informe : l'application est dérivable en 1, de dérivée 1.
Et f est C^1 sur $]0,\ +\infty[$.

On fait de même avec la dérivée seconde, elle admet une limite en 1.
Le théorème de la limite de la dérivée donne f' dérivable même en 1 et C^1.
f est C^2 à dérivée seconde positive ou nulle, elle est convexe.



◁51▷ Montrez le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $x \longmapsto x^5.\sin(1/x^5)$ est $0+0.x+0.x^2+0.x^3+o(x^3)$ *(pas par une formule de Taylor Young, ne soyez pas juste des bêtes de calcul, ayez un cerveau)*.
Montrez que la dérivée de cette application n'a même pas de développement limité en 0.

Pour le développement d'ordre 3, comme on nous le propose, il suffit de vérifier $x^5.\sin(1/x^5) = 0+0.x+0.x^2+0.x^3+o(x^3)_{x\to 0}$, c'est à dire
$\dfrac{x^5.\sin(1/x^5)}{x^3}$ tend vers 0 quand x tend vers 0. C'est le produit d'un $o(1)$ par un $O(1)$.

La dérivation va en revanche poser problème en 0.

L'application a un développement d'ordre 3, sa dérivée n'en a pas.

◁52▷ ♠ 1- On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe si $x \longmapsto \ln(f(x))$ est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.
2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.
3- Montrez que si f est logarithmiquement convexe, alors on a $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$ pour tout couple $(x,\ y)$.
4- Soit f continue On suppose $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$ pour tout couple $(x,\ y)$. Montrez qu'on a alors $\ln(f((1-t).a+t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a))+t.\ln(f(b))$ pour tout couple $(a,\ b)$ et tout t de la forme $k/2^n$ avec n entier naturel et k entier de 0 à 2^n. Déduisez $\ln(f((1-t).a+t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a))+t.\ln(f(b))$ pour tout t de $[0,\ 1]$.
5- Déduisez que f est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple $(x,\ y)$: $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big)$.
6- Montrez que $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \Big(\ln(1/t)\Big)^x.dt$ (notée g) est logarithmiquement convexe sur $[0,\ +\infty[$. Calculez par récurrence $g(n)$ pour tout entier naturel n.
7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

♠ 1- On dit que f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ est logarithmiquement convexe si $x \longmapsto \ln(f(x))$ est convexe. Montrez que toute application logarithmiquement convexe est convexe. Donnez une application convexe qui ne soit pas logarithmiquement convexe.

La notion de convexité logarithmique est une notion plus forte que la convexité, plus exigeante.
Et utile.
C'est elle qui nous permettrait de dire « on connaît la factorielle pour des abscisses entières, peut on la définir pour des abscisses réelles ».
Évidemment, on peut le faire, par exemple affine par morceaux, en reliant les points (0,1), (1,1), (2,2), (3, 6), (4, 24) et ainsi e suite, les uns après les autres. mais il y a des points anguleux c'est moche. Alors on veut une courbe plutôt lisse passant par tous nos points.
Et l'exigence sera « convexe » et même « logarithmiquement convexe ».
Et sous cette exigence, il vient qu'il n'y a qu'une fonction qui étende la factorielle à tout $\mathbb{R}^+$ et c'est forcément celle en $x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \Big(\ln(1/t)\Big)^x.dt$.

L'idée rapide : si $\ln(f)$ est convexe, alors en composant par l'exponentielle (convexe croissante), alors f est convexe.
Proprement, on se donne x, y et t entre 0 et 1.
On écrit l'hypothèse de convexité de $\ln\circ f$ (vraie notation, à la place de $\ln(f)$ qui mélange les étages) :
$\ln\big(f((1-t).x+t.y)\big) \leqslant (1-t).\ln\big(f(x)\big)+t.\ln\big(f(y)\big)$
on passe à l'exponentielle (croissant) : $f((1-t).x+t.y) \leqslant e^{(1-t).\ln\big(f(x)\big)+t.\ln\big(f(y)\big)}$
On exploite la convexité de l'exponentielle : $f((1-t).x+t.y) \leqslant e^{(1-t).\ln\big(f(x)\big)+t.\ln\big(f(y)\big)} \leqslant (1-t).e^{\ln(f(t))}+$

$t.e^{\ln(f(y))}$ et c'est fini.

On a envie de dire que $x \longmapsto x$ est convexe alors qu'elle n'est pas logarithmiquement convexe ($x \longmapsto \ln(x)$ n'est pas convexe). Mais on la veut de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}^+$.
On veut la forcer à être positive : $x \longmapsto x^2$.
Et même strictement positive : $x \longmapsto x^2 + 1$. Elle est convexe.
Et son logarithme est $x \longmapsto {}' \ln(1 + x^2)$ qui n'est pas convexe.
sa dérivée seconde est en effet $x \longmapsto \dfrac{2.(1 - x^{é})}{(1 + x^2)^2}$ dont le signe change.

Remarque : Un argument erroné trop souvent utilisé : l'application g n'est pas convexe, car elle est concave.
Ce n'est pourtant pas contradictoire... On peut être les deux à la fois.
Le vrai argument serait g n'est pas convexe car concave et non affine.

Conseil pour ne pas s'embrouiller dans ce type d'exercice : donnez un nom à $x \longmapsto \ln(f(x))$, histoire de bien savoir ce que vous devez démontrer :
par exemple écrivez déjà $g\Big(\dfrac{3.x + y}{4}\Big) \leqslant \dfrac{3.g(x) + g(y)}{4}$ et seulement ensuite $\ln\Big(f\Big(\dfrac{3.x + b}{4}\Big)\Big) \leqslant \dfrac{3.\ln(f(x)) + \ln(f(y))}{4}$.
En mathématiques, il n'est vraiment pas inutile de définir les objets en leur donnant des noms avant d'écrire des formules trop compliquées.

2- Montrez que toute puissance positive d'une application logarithmiquement convexe l'est aussi.

Si f associe $\ln(f(x))$ est convexe, alors pour tout exposant αstrictement positif, $x \longmapsto \ln\Big((f(x))^\alpha\Big)$ est convexe (multiplie positif d'une application convexe).

On notera qu'il faut vérifier que f^αexiste bien (oui, $f^{1,73}$ c'est quoi ?). En effet, f est positive (on rappelle que $(f(x))^{1;73}$ c'est $e^{1,73\times\ln(f(x))}$).

J'en profite pour citer une autre stabilité : le produit de deux applications logarithmiquement convexes est logarithmiquement convexe. En fait, c'est cadeau.

3- Montrez que si f est logarithmiquement convexe, alors on a $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big)$ pour tout couple $(x,\ y)$.

On écrit la petite inégalité de convexité et même le cas particulier $t = \dfrac{1}{2}$.
On a donc $\ln\Big(f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big)\Big) \leqslant \dfrac{\ln(f(x)) + \ln(f(y))}{2}$.
On passe à l'exponentielle (croissante) : $f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big) \leqslant e^{\frac{\ln(f(x))+\ln(f(y))}{2}} = \sqrt{e^{\ln(f(x))+\ln(f(y))}} = \sqrt{f(x).f(y)}$.

Pour avoir les points aux concours : ne vous contentez pas d'écrire des formules, citez les argument « on passe à l'exponentielle ».
Et citez les en entier « on passe à l'exponentielle (croissante) ».

4- Soit f continue On suppose $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big)$ pour tout couple $(x,\ y)$. Montrez qu'on a alors $\ln(f((1 - t).a + t.b)) \leqslant (1 - t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$ pour tout couple $(a,\ b)$ et tout t de la forme $k/2^n$ avec n entier naturel et k entier de 0 à 2^n. Déduisez $\ln(f((1 - t).a + t.b)) \leqslant (1 - t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$ pour tout t de $[0,\ 1]$.

Un lemme qui va passer de « c'est vrai pour le milieu,
donc pour le milieu du milieu et ainsi de suite
à c'est vrai pour plein de monde
puis à c'est vrai pour tout.

Je vous donne le début : $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big)$ et $\sqrt{f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big).f(y)} \geqslant f\Big(\dfrac{x + 3.y}{4}\Big)$ et aussi $\sqrt{f(x).f\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big)} \geqslant f\Big(\dfrac{3.x + y}{4}\Big)$.
On assemble :

$$\sqrt[4]{f(x)^3.f(y)} \geqslant f\Big(\frac{3.x + y}{4}\Big)$$

et

$$\sqrt[4]{f(x).f(y)^3} \geqslant f\Big(\frac{x+3.y}{4}\Big)$$

et toujours

$$\sqrt[4]{f(x)^2.f(y)^2} \geqslant f\Big(\frac{2.x+2.y}{4}\Big)$$

Si on assemble ceci avec les informations du type $\sqrt{f(a).f(b)} \geqslant f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)$ en des points convenables (comme $\sqrt{f\Big(\frac{3.a+b}{4}\Big).f\Big(\frac{2.a+2.b}{4}\Big)} \geqslant f\Big(\frac{5.a+3.b}{8}\Big)$),
on arrive à des choses comme

$$\sqrt[8]{f(a)^5.f(b)^3} \geqslant f\Big(\frac{5.a+3.b}{8}\Big)$$

Par récurrence sur n on montre des choses comme « pour tout k de 0 à 2^n :

$$\sqrt[2^n]{f(a)^k.f(b)^{2^n-k}} \geqslant f\Big(\frac{k.a+(2^n-k).b}{2^n}\Big)$$

Quitte à passer au logarithme, on a obtenu des

$$\ln(f((1-t).a+t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$$

pour des t de la forme $\frac{k}{2^n}$avec n quelconque et k entre 0 et 2^n.

Et si on se donne un t quelconque ? On l'écrit comme une suite de $\frac{k_n}{2^n}$ (explicitables avec une partie entière de $2^n.t$ si vous y tenez).

Pour chaque n, on a donc

$$\ln(f((1-t_n).a+t_n.b)) \leqslant (1-t_n).\ln(f(a)) + t_n.\ln(f(b))$$

En faisant tendre n vers l'infini, avec la continuité de f on obtient

$$\ln(f((1-t).a+t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$$

En gros, on est passé de $t = \frac{1}{2}$ à tous les t d'écriture binaire finie, puis à tous les t par densité.

5- Déduisez que f est logarithmiquement si et seulement si elle est continue et vérifie pour tout couple $(x,\ y)$: $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$.

Le 3 a montré logarithmiquement convexe implique $\sqrt{f(x).f(y)} \geqslant f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)$ pour tout couple.

Ensuite, si elle est continue et vérifie la propriété pour tout couple, alors le 4 nous dit qu'elle vérifie $\ln(f((1-t).a+t.b)) \leqslant (1-t).\ln(f(a)) + t.\ln(f(b))$ pour tout couple et tout t de $[0,\ 1]$.
C'est la définition même de f est logarithmiquement convexe.

6- Montrez que $x \longmapsto \int_0^1 \Big(\ln(1/t)\Big)^x.dt$ (notée g) est logarithmiquement convexe sur $[0,\ +\infty[$. Calculez par récurrence $g(n)$ pour tout entier naturel n.

C'est là l'histoire de « la factorielle est logarithmiquement convexe ».
Déjà, l'existence de cette fonction pose un peu problème quand même, à cause de ce logarithme qu'on va intégrer près de 0.
Mais on va mettre ça de côté pour l'instant. En constatant que $\ln(1/t)$ est positif et peut être élevé à une puissance réelle sans problème.

On doit prouver la convexité logarithmique. On se donne x et y il faut établir

$$\int_0^1 \Big(\ln(1/u)\Big)^{(1-t).x+t.y}.du \leqslant \Big(\int_0^1 \Big(\ln(1/u)\Big)^x.du\Big)^{(1-t)}.\Big(\int_0^1 \Big(\ln(1/u)\Big)^y.du\Big)^t$$

pour tout t entre 0 et 1.

C'est assez indigeste.
Et si on se contentait de la version « $t=\dfrac{1}{2}$ » ?
On doit juste établir

$$\Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)^{\frac{x+y}{2}}.du\Big) \leqslant \sqrt{\Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)^{x}.du\Big).\Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)^{y}.du\Big)}$$

Ça ne vous inspire pas ? Et si je vous disais

$$\Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)^{\frac{x+y}{2}}.du\Big)^2 \leqslant \Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big)^{x}.du\Big).\Big(\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{y}.dt\Big)$$

Et si je vous rappelais

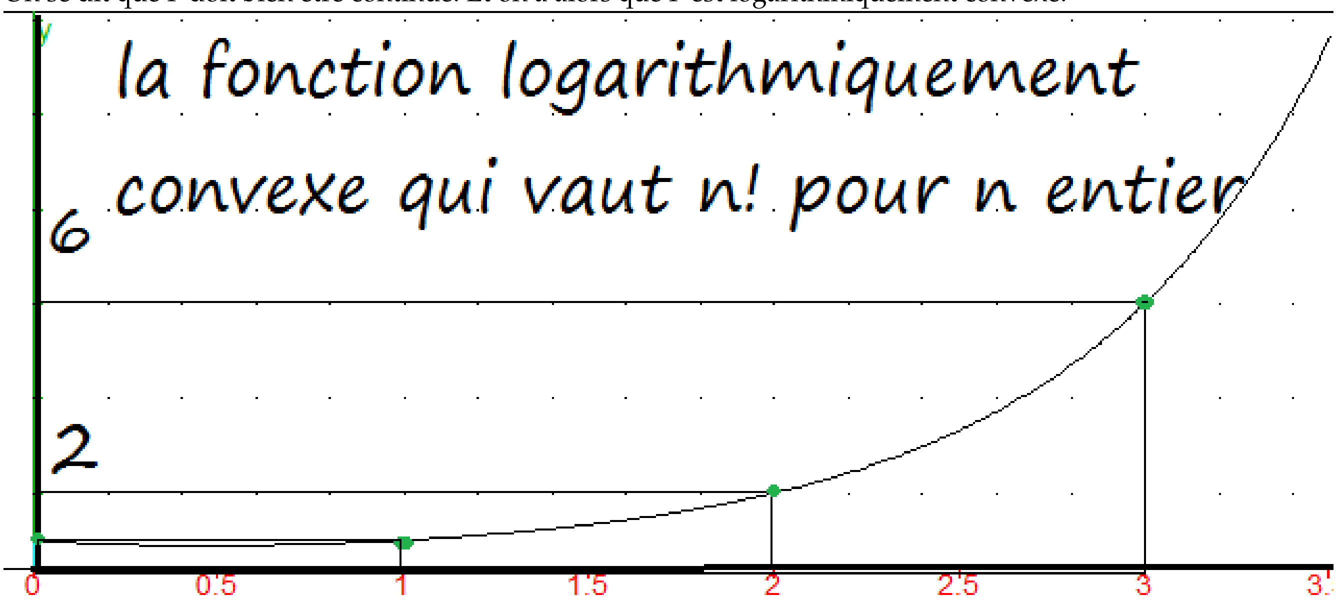
$$\int_0^1 (f(u).g(u)).dt\Big)^2 \leqslant \int_0^1 \big(f(u)\big)^2.du.\int_0^1 \big(g(u)\big)^2.du$$

Oui, Cauchy-Schwarz...

En posant $\Gamma = x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{x}.dt$, on a bien

$$\Gamma\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leqslant \sqrt{\Gamma(x).\Gamma(y)}$$

On se dit que Γ doit bien être continue. Et on a alors que Γ est logarithmiquement convexe.



On calcule ensuite $\Gamma(n)$ pour n entier, et au départ pas trop gros.
$\Gamma(0)=\displaystyle\int_0^1 1.dt = 1$ (en se disant que a^0 donne bien toujours 1).
$\Gamma(1)=\displaystyle\int_0^1 \ln(1/t).dt = \Big[t.\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big]_0^1 + \int_0^1 \frac{t}{t}.dt = 1$. Oui, on a intégré par parties.

Je vous le fais même pour n :

$$\Gamma(n)=\int_0^1 \big(\ln(1/t)\big)^n.dt = \Big[t.\Big(\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^n\Big]_0^1 + n.\int_0^1 \frac{\Big(\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^{n-1}}{t}.t.dt$$

Le terme en $t.(\ln(t))^n$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (croissances comparées, posez $t=\dfrac{1}{X}$ si nécessaire, mais il est temps de savoir qu'en 0, t écrase le logarithme et ses puissances).
Il reste $\Gamma(n)=n.\Gamma(n-1)$ et $\Gamma(0)=1$.
Par récurrence immédiate : $\boxed{\Gamma(n)=n!}$

7- Montrez que la somme de deux applications logarithmiquement convexes l'est encore.

On l'avait pour le produit. c'est moins évident pour la somme.
On prend f et g logarithmiquement convexes. Il s'agit de prouver que $f+g$ l'est aussi
La formule générale avec des logarithmes, des t et des $f(x)+g(x)$ est à peu près impossible à gérer.
Si on se contentait de prouver

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\sqrt{\Big(f(x)+g(x)\Big).\Big(f(y)+g(y)\Big)}$$

Sachant qu'on a $f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\sqrt{f(x).f(y)}$ et $g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\sqrt{g(x).g(y)}$ par convexité logarithmique de f et g.
On somme

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\sqrt{f(x).f(y)}+\sqrt{g(x).g(y)}$$

Or, $\sqrt{f(x).f(y)}+\sqrt{g(x).g(y)}\leqslant\sqrt{\Big(f(x)+g(x)\Big).\Big(.f(y)+g(y)\Big)}$ *(si si, ça doit marcher, sinon comment on y arriverait).*
On met bout à bout :

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big)+g\Big(\frac{x+y}{2}\Big)\leqslant\sqrt{f(x).f(y)}+\sqrt{g(x).g(y)}\leqslant\sqrt{\Big(f(x)+g(x)\Big).\Big(.f(y)+g(y)\Big)}$$

Il faut encore dire que $f+g$ est continue comme somme d'applications continues.
Et on obtient que $f+g$ est logarithmiquement convexe.

Ah oui, je vous ai un peu arnaqué pour $\sqrt{f(x).f(y)}+\sqrt{g(x).g(y)}\leqslant\sqrt{\Big(f(x)+g(x)\Big).\Big(.f(y)+g(y)\Big)}$.
J'ai dit que c'était évident.
Disons plutôt que c'est de la forme $\sqrt{a.b}+\sqrt{c.d}\leqslant\sqrt{(a+c).(b+d)}$.
Et il suffit de comparer les carrés : $a.b+c.d+2.\sqrt{a.b.c.d}$ face à $a.b+a.d+b.c+c.d$.
Il suffit de dire $\sqrt{a.b.c.d}\leqslant\frac{a.d+b.c}{2}$. Et ça, on connaît c'est $\sqrt{\alpha.\beta}\leqslant\frac{\alpha+\beta}{2}$. Les moyennes, encore.

Maintenant, on a bien tous les éléments.
L'espace des applications logarithmiquement convexes est stable par addition et multiplication.
ce que n'était pas l'espace des applications convexes...

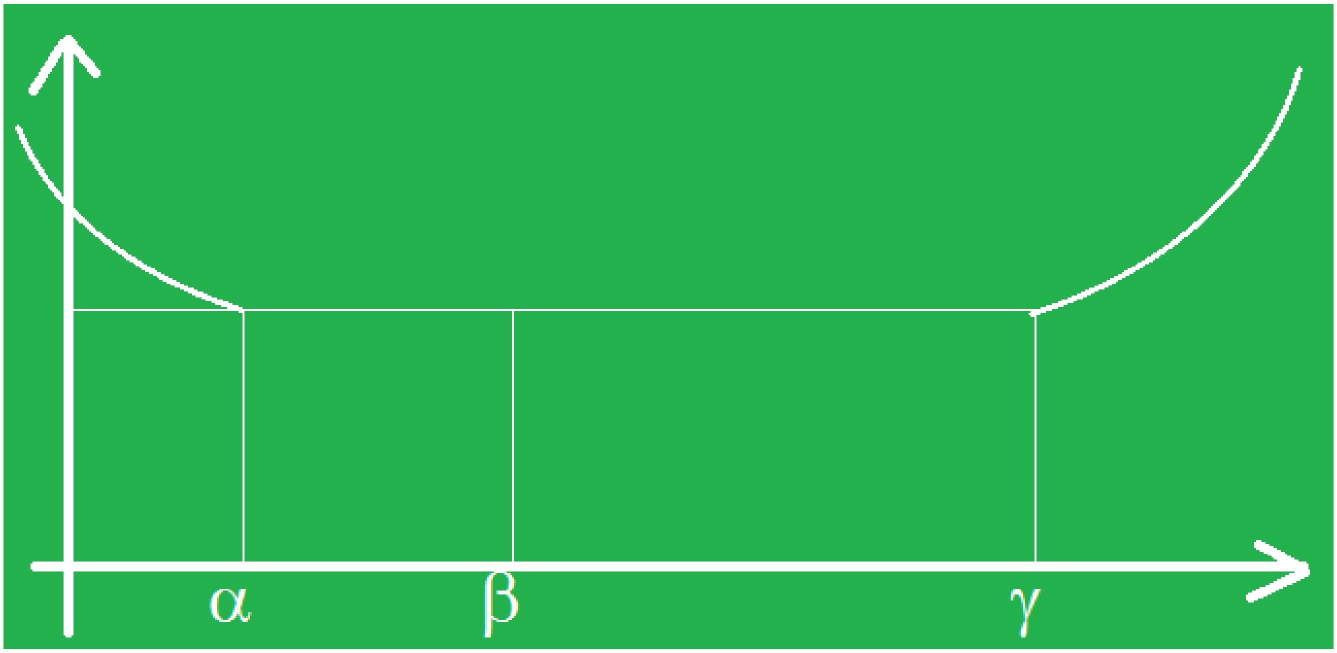
◁53▷ **Montrez que si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout a, $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini.**

Que peut signifier la question « $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini » ?
Qu'une valeur a sur l'axe des ordonnées peut :

• ne pas être atteinte	-1 pour exp
• être atteinte une fois	1 pour exp
• être atteinte deux fois	3 pour ch
• être atteinte une infinité de fois	fonction convexe constante sur un segment

Ce que dit alors cette propriété : si une fonction convexe atteint la même valeur trois fois, alors elle l'atteint une infinité de fois.

Et c'est vrai. Si la fonction convexe f atteinte la même valeur a en α, β et γ, alors elle est constante sur $[\alpha,\ \gamma]$.
On l'obtient par l'inégalité des trois cordes pour tout réel x entre α et β (puis pour tout réel x entre β et γ).
Pour tout x entre αet β, on a $f(x)\leqslant a$ (sous la corde entre les deux pinces à linge $[\alpha,\ \beta]$)
Pour tout x entre α et β, on a $f(x)\geqslant a$ (au dessus de la corde hors du segment $[\beta,\ \gamma]$)
Par antisymétrie, $f(x)=\alpha$ pour tout x de $\alpha,\ \beta]$.



◁54▷ Les A_k sont des événements mutuellement indépendants. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majorée par $\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)$.
On utilisera une inégalité de convexité sur l'exponentielle.

Avec la notation « barre » pour le complémentaire [6], on nous demande d'estimer $P(\bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k})$.

Par indépendance des A_k entre eux *(et donc de leurs complémentaires)*, c'est $\prod_{k=1}^{n} P(\overline{A_k})$.

On estime donc le produit de termes positifs $\prod_{k=1}^{n}(1-p_k)$.

On majore $1-p_k$ par e^{-p_k} (inégalité de convexité $1-x \leqslant e^{-x}$ pour x réel). Tout est positif *(j'insiste)* et on multiplie membre à membre. Il reste à mettre en boucle la propriété de morphisme de l'exponentielle $e^a.e^b = e^{a+b}$ pour arriver à la majoration par $\exp\left(-\prod_k p_k\right)$ *(qui est utile car le majorant est plus petit que 1)*.

◁55▷ ♡ Montrez, pour x et a positifs : $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{a} - \frac{x-a}{a^2}$ (cas d'égalité ?).

Quoi de plus simple que de calculer la différence : $\frac{1}{x} - \frac{1}{a} + \frac{x-a}{a^2} = \frac{a^2 - x.a + (x-a).x}{x.a^2} = \frac{(x-a)^2}{x.a^2}$

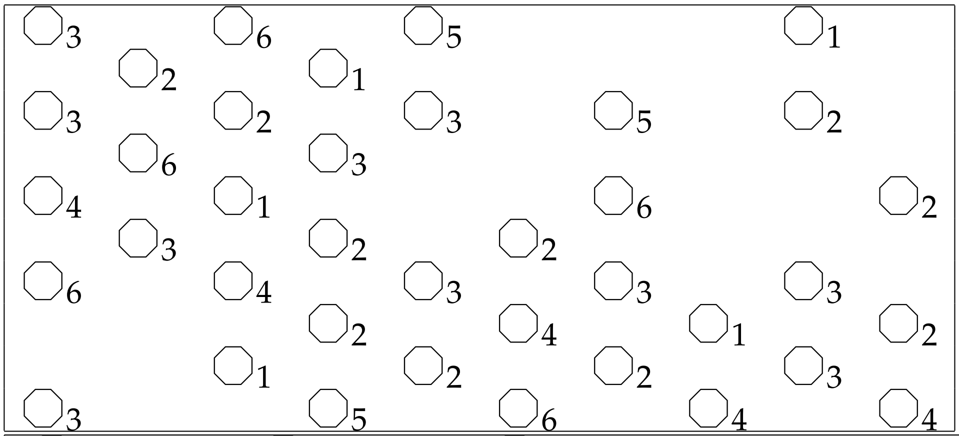
Mais je le trouve plus joli par convexité.
L'application $x \longmapsto \frac{1}{x}$ a pour dérivée seconde $x \longmapsto \frac{2}{x^3}$, positive.
La formule de Taylor avec reste intégrale entre a et x donne

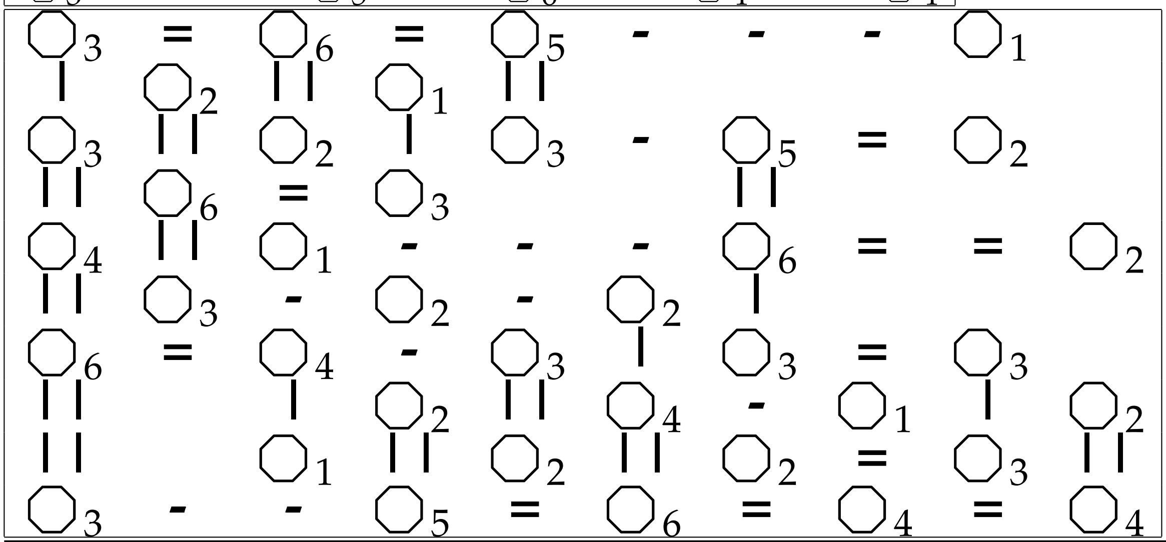
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + (x-a).\frac{-1}{a^2} + \frac{(x-a)^2}{1}.\int_0^1 (1-t).\frac{2}{(a+t.(x-a))^3}.dt$$

Le terme $\frac{(x-a)^2}{1}.\int_0^1 (1-t).\frac{2}{(a+t.(x-a))^3}.dt$ est positif, c'est ce qu'on voulait.

◁56▷ **Rappel des règles :** Les iles sont reliées les unes aux autres par des traits « horizontaux » ou « verticaux » (pas de diagonale, pas plus de deux ponts entre deux iles). Les traits ne peuvent pas se croiser. On vous a indiqué combien de ponts partent de chaque ile.

6. pas de risque de confusion avec la barre de l'adhérence en topologie à ce stade





◁ 57 ▷ Montrez : $\sqrt[n]{n} - \sqrt[n+1]{n+1} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ *(indication : non, pas de quantité conjuguées mais $x \longmapsto \sqrt[x]{x}$).*

Définissons comme suggéré l'application $x \longmapsto \sqrt[x]{x}$. Enfin, non, écrivons la proprement $x \longmapsto x^{1/x}$ et même $x \longmapsto e^{\ln(x)/x}$.
Elle est C^1 sur $]0,\ +\infty[$ (et se prolonge même en 0 par la valeur 0).
On la dérive, afin de prouver qu'on avait raison de la qualifier de C^1 : $x \longmapsto \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}.e^{\ln(x)/x}$.
On applique le théorème des accroissements finis entre n et $n+1$ (tout est C^1) :

$$\exists c_n \in]n,\ n+1[,\ \ \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} = (n+1-n).\frac{1-\ln(c_n)}{(c_n)^2}.e^{\ln(c_n)/c_n}$$

Ira-t-on jusqu'à dire qu'on a obtenu ce qu'on voulait ? Pas vraiment.
Mais comme n tend vers l'infini, c_n compris entre n et $n+1$ est équivalent à n.
On a donc par passage au logarithme (légitimé de multiples fois, même si ce n'est pas évident) : $\ln(c_n) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$, et plus simplement $\dfrac{1}{(c_n)^2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2}$. Comme le logarithme tend vers l'infini, $\dfrac{\ln(c_n)-1}{(c_n)^2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(c_n)}{(c_n)^2} \sim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2}$.
Il reste le problème de $e^{\ln(c_n)/c_n}$. Mais par croissances comparées $\dfrac{\ln(c_n)}{c_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$. Par continuité de l'exponentielle en 0 : $e^{\ln(c_n)/c_n} \longrightarrow_{n\to+\infty} 1$ et même $e^{\ln(c_n)/c_n} \sim_{n\to+\infty} 1$.
Il n'y a plus qu'à multiplier les équivalents, et on a la formule attendue.

Un exercice sans grande difficulté, mais dans lequel sera notée la rigueur de rédaction (on ne passe pas à la limite avant d'avoir prouvé qu'il y en a une, on ne confond pas limites et équivalents, on justifie $\ln(n) \sim \ln(c_n)$...).
J'irai jusqu'à dire que sur ces exercices, celles et ceux qui ont la fibre plus physicienne que matheuse rattrapent leur retard.

◁58▷ Un élève me dit « monsieur, si le développement limité de f en 0 est nul à tout ordre, c'est que $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout n et f doit être la fonction nulle ».
Je lui réponds : $t \longmapsto e^{-\frac{1}{t^2}}$ et lui dis « prolonge la en 0 et donne moi son développement limité d'ordre $2.n$ ».
Il n'a pas le temps de faire les calculs, faites les pour lui.

Cette fonction se prolonge par continuité en 0 par la valeur 0 (dit rapidement : exponentielle de mins l'infini).

Elle n'est pas facile à dériver. Et ses dérivées successives sont des horreurs... non définies en 0.

Mais son développement limité en 0 est toujours facile à calculer : $f(x) = 0 + 0.x + \ldots + 0.x^n + o(x^n)_{x\to 0}$.
Le développement est toujours nul. Quel que soit l'ordre chosi.
Mais on n'a pas $f(x) = 0 + 0.x + \ldots + 0.x^n$.
On a $f(x) = 0 + 0.x + \ldots + 0.x^n + o(x^n)_{x\to 0}$. Et à chaque ordre, $f(x)$ va se cacher dans le $o(x^n)$.

Ah, mais au fait, je dois prouver $f(x) = 0 + 0.x + \ldots + 0.x^{2.n} + o(x^{2.n})_{x\to 0}$.
Oui, je prouve donc $f(x) = o(x^{2n})_{x\to 0}$, c'est à dire $\dfrac{f(x)}{x^{2.n}} \longrightarrow_{x\to 0} 0$.
En effet, la limite de $\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{2.n}}$ quand x tend vers 0 est celle de $X^n.e^{-X}$ quand X tend vers $+\infty$. Et c'est 0.

> Cette fonction fout en l'air le rêve de « si je connais toutes les dérivées en 0, je connais la fonction partout », qui est pourtant un joli rêve.
> Mais c'est cette fonctio qui le fait exprès.
> L'an prochain, vous croiserez les fonctions développables en série entière (la grosse majorité), qui échappent à ce problème.
> Elles vérifieront $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n$.

◁59▷ Montrez pour tout a de $]-1, 1[$:
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 - a.\cos(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}}.Arctan\Big(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\Big) = \frac{Arcsin(a)}{\sqrt{1-a^2}} + \frac{\pi}{2.\sqrt{1-a^2}}$ *(changement de variable classique et vous pourrez poser aussi $a = \cos(\alpha)$).*

L'existence est assurée, $a.\cos(\theta)$ reste entre -1 et 1, le dénominateur ne s'annule pas, l'application est continue.
On change de variable avec $t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ (C^1 difféomorphisme).
L'intégrale devient

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - a.\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{2}{1+t^2-a+a.t^2}.dt = \frac{1}{1-a}.\int_0^1 \frac{2}{1+\Big(\dfrac{1+a}{1-a}\Big).t^2}.dt$$

tiens, on va le jouer changement de variable encore : $u = \sqrt{\dfrac{1+a}{1-a}}.t$ soit $t = \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}.u$ et donc $dt = \sqrt{\dfrac{1-a}{1+a}}.du$.
L'intégrale devient

$$\frac{1}{1-a}.\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\int_0^{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}} \frac{2}{1+u^2}.dt$$

On intègre en arctangente :

$$\frac{2}{1-a}.\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}Arctan\Big(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}}\Big)$$

On simplifie des racines et on a la première.

Pour la seconde, on pose un instant $a = \cos(\alpha)$ (avec α entre 0 et π). En bref, $\alpha = Arccos(a)$. On a alors

$$\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} = \sqrt{\frac{2.\cos^2(a/2)}{2.\sin^2(a/2)}} = \frac{\cos(a/2)}{\sin(a/2)}$$

avec $\dfrac{\alpha}{2}$ entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$.
On reconnait $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$ avec $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$ dans le bon intervalle...

On a donc à présent $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}.Arctan\Big(\tan\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\Big)\Big)$ qui devient $\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}.\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{Arccos(a)}{2}\Big)$.
Et après, vous vous souvenez de $Arcsin(a)+Arccos(a)=\frac{\pi}{2}$?
Ne me dites pas que vous avez osé oublier... Et tout se termine comme prévu.

◃60▹ Donnez la limite en π de $\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}$ (posez $x=\pi+h$ et utilisez des développements limités).

Même si l'énoncé semble nous dire que la limite existe, on va juste travailler sur la fonction, en surveillant d'ailleurs que tout existe.
Comme x va tendre vers π (et en π on a bien une forme indéterminée), on va pose $x=\pi+h$ avec h qui va tendre vers 0.

$$\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}=\frac{\cos(h/2)-cos(h)}{1+\sin^2(h)-\cos(h)}$$

S'il vous plait, ne perdez pas de temps à rédiger $\cos(\pi+h)=-\cos(h)$.
Même si pour vous (à cause d'une pratique sclérosée dans le secondaire) ce n'est pas évident, pour le correcteur, c'est du cours.
Si vous passez par $\cos(\pi+h)=\cos(\pi).\cos(h)-\sin(\pi).\sin(h)$ écrit noir sur blanc sur votre copie, vous dites au correcteur « je suis encore en première, ne m'en veuillez pas, mais je veux quand même entrer à Centrale ».
Et d'ailleurs, si vous passez par de telles formules au lieu de passer par un dessin sur le cercle trigonométrique, vous lui répétez « en plus, je n'ai aucun sens pratique, mais ne m'en veuillez pas, je veux quand même entrer à Télécom ».

On développe et on garde le premier terme non nul : $\begin{array}{lcll}\cos(\frac{h}{2}) & = & 1 & -\frac{h^2}{8} & +o(h^2)\\ \cos(h) & = & 1 & -\frac{h^2}{2} & +o(h^2)\end{array}$ donc $\cos\Big(\frac{h}{2}\Big)-\cos(h)\sim_{h\to 0}\frac{3.h^2}{8}$ (là, l'équivalent exprime des choses correctes, mais si vous avez écrit $\cos(h)\sim 1-\frac{h^2}{2}$, retournez moisir en amphi 21).

$$1+\sin^2(h)-\cos(h)=1-\cos(h)+\frac{1-\cos(2.h)}{2}=\frac{h^2}{2}+o(h^2)+h^2+o(h^2)\sim_{h\to 0}\frac{3.h^2}{2}$$

Le quotient est équivalent à un réel, il tend vers ce réel : $\boxed{\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}\longrightarrow_{h\to\pi}\frac{1}{4}}$ ou $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x/2)+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}=\frac{1}{4}$

◃61▹ Calculez $\int_0^1\ln\Big(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\Big).dt$ (pas de problème, elle existe).

Par parties pour éliminer le logarithme.

1	$\hookleftarrow$	t
$\ln\Big(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\Big)$	$\hookrightarrow$	$\frac{-1}{t+1}-\frac{1}{t+2}$

Pardon, c'est si facile à dériver ? Oui :

$$\ln\Big(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\Big)=\ln\Big(\frac{1}{(t+1).(t+2)}\Big)=-\ln\big((t+1).(t+2)\big)=-\ln(t+1)-\ln(t+2)$$

On a donc un crochet : $\Big[t.\ln\Big(\frac{1}{t+1}-\frac{1}{t+2}\Big)\Big]_0^1$ et une intégrale $\int_0^1\Big(\frac{t}{t+1}+\frac{t}{t+2}\Big).dt$.
On l'écrit $\int_0^1\Big(\frac{t+1-1}{t+1}+\frac{t+2-2}{t+2}\Big).dt=\int_0^1\Big(2-\frac{1}{t+1}-\frac{2}{t+2}\Big).dt$.
On trouve alors $\Big[2.t-\ln(1+t)-2.\ln(2+t)\Big]_0^1$.

Valeur finale : $2-\ln(27)$. Négatif, mais c'est normal, l'application l'est.

◃62▹ Pour f dérivable en a, déterminez la limite quand ε tend vers 0 de $\frac{3}{2.\varepsilon^3}.\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}t.f(a+t).dt$ (Lanczos).

Comme ε va tendre vers 0, t va le faire aussi, et on va pouvoir utiliser un développement limite pour $f(a+t)$:

$f(a+t) = f(a) + t.f'(a) + o(t)$.
On remplace dans l'intégrale $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t.f(a+t).dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t.f(a).dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t^2.f'(a).dt + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} o(t^2).dt$ par linéarité.

Le premier terme est nul (fonction impaire sur un intervalle symétrique, ou calcul $f(a).\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$.

Le second donne $f'(a).\frac{2.\varepsilon^3}{3}$.
Le dernier donne $o(\varepsilon^3)$.

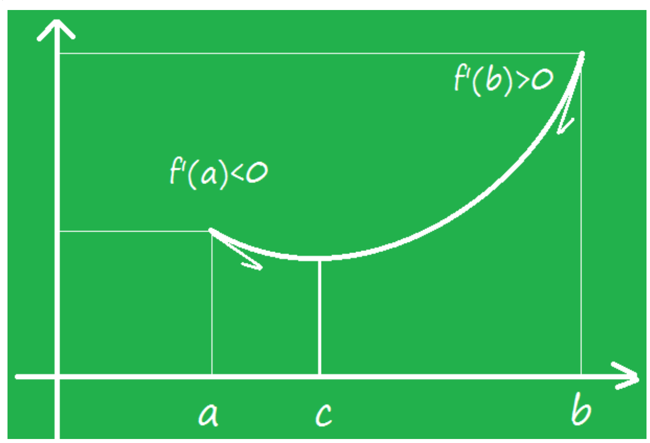
On multiplie par 3, on divise par $2.\varepsilon^3$: $\frac{3}{2.\varepsilon^3}.\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} t.f(a+t).dt = f'(a) + o(1)$.
Et quand εtend vers 0, il ne reste que $f'(a)$.

C'est une astuce utilisée pour calculer la dérivée d'une fonction en passant par des intégrales.
Et les calculs d'intégrales sont moins sensibles aux erreurs d'arrondis.
C'est utile en physique quand votre fonction est en fait un graphe issu d'un très grand tableau de mesures.

◃63▹ Le théorème de Darboux dit qu'une dérivée f' d'une application f de classe D_1 sur un intervalle I n'est pas forcément continue mais vérifie au moins le théorème des valeurs intermédiaires.
On prend donc f de classe D_1 *(pas forcément C_1)* sur un intervalle I. On se donne a et c dans I, on pose $f'(a) = \alpha$ et $f'(c) = \gamma$. On prend β entre α et γ, et on doit montrer qu'il existe un c vérifiant $f'(b) = \beta$.
Méthode 1. Montrez que $f - \beta.Id$ admet un maximum et un minimum sur $[a,\ c]$ (atteints en μ et ν). Montrez qu'il n'est pas possible que μ et ν soient en a et c (c'est à *dire qu'au moins μ ou ν est dans* $]a,\ c[$). Déduisez que $(f - \beta.Id)'$ est nulle en μ ou en ν. Concluez.

Posons $g = f - \beta.Id$.
On va montrer que g' s'annule en au moins un point c, et ce point c sera le point où g atteint son minimum.
Visuellement, on part de a avec dérivée négative, on part donc vers le bas, on arrive en b en « montant », donc le minimum était entre les deux.
Mais cette vision est trop naïve ($g'(a) < 0$ n'implique pas « g est décroissante sur un voisinage de a » si on n'a pas d'hypothèse de continuité sur f', ne soyez pas trop naïfs).

On y va : g est continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, elle admet un minimum, atteint en un point c.
c pourrait il être en a ? Si le minimum est en a, pour tout x plus grand que a on a $\frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \frac{\oplus}{\oplus}$, et par passage à la limite $g'(a) \geqslant 0$. C'est contraire à l'hypothèse.
c pourrait il être en b ? Si le minimum est en b, pour tout x plus petit que b on a $\frac{g(x)-g(b)}{x-b} = \frac{\oplus}{\ominus}$, et par passage à la limite $g'(b) \leqslant 0$. C'est contraire à l'hypothèse.
Le minimum est atteint en un point c de l'ouvert $]a,\ b[$.
En bougeant à droite et à gauche de c, on a $0 \geqslant g'(c) \geqslant 0$ et donc $g'(c) = 0$.



La démonstration n'a jamais essayé d'appliquer le principe des valeurs intermédiaires à f'.

Et n'a jamais cherché non plus à dire « plaçons nous sur un intervalle sur lequel f est croissante ». Ces intervalles d'existence peut être pas forcement, à cause des applications un peu tordues qui ne manquent pas d'exister et ne sont pas de gentils polynômes, fractions ou fonctions simplistes.
Tout raisonnement du type « on commence par le cas f croissante
on continue par le cas f décroissante
et par intervalle, on est toujours dans un de ces cas »
est voué à l'échec en mathématiques.

Méthode 2. On suppose qu'il n'existe aucun point b de $[a,\ c]$ vérifiant $f(b) = \beta$. Montrez alors que $f - \beta.Id$ est injective sur $[a,\ c]$. Déduisez qu'elle est monotone. Déduisez que $f' - \beta$ est de signe constant. Concluez.

g est injective. Sinon, il existerait x et y (distincts) vérifiant $g(x) = g(y)$.
En effet, si tel était le cas, par théorème de Rolle, il existerait c vérifiant $g'(c) = 0$ c'est à dire $f'(c) = \beta$.

Un théorème du cours utilisant les mots clefs continuité, valeurs intermédiaires et intervalle dit alors : « g est monotone sur $[a,\ b]$ ».

Le cas « g est croissante » conduit à g' est positive (croissante et dérivable implique dérivée positive). Mais ceci donne en b : $g'(b) \geqslant 0$, ce qui contredit l'hypothèse sur la position de β par rapport à $f'(b)$.
De même, le cas g décroissante conduit à une absurdité en a. les deux cas sont contradictoires.

C'est donc qu'il y a une contradiction dès le début.

Méthode 3. On pose $\varphi = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ et $\phi = x \longmapsto \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Prolongez φ par continuité en a. Prolongez ϕ par continuité en c. Montrez que l'image de $[a,\ b]$ par φ est un intervalle contenant $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et α, puis que l'image de $[a,\ b]$ par ϕ est un intervalle contenant $\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$ et γ. Déduisez que β est dans $\varphi([a,\ c])$ ou dans $\phi([a,\ c])$. Déduisez qu'il existe c vérifiant $f'(b) = \beta$.

Cette preuve ci, est assez jolie, il y a des profs qui l'adorent, moi je la trouve artificielle.

Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = [.]$ *(partie entière)*.
Montrez qu'il n'existe aucune application g vérifiant $g' = 1_{\mathbb{Z}}$ *(indicatrice de $\mathbb{Z}$)*.
Montrez qu'il existe une infinité d'applications g vérifiant $g' = |.|$ *(valeur absolue)*.
Montrez que $x \longmapsto x^2.\sin(1/x)$ *(notée h)* se prolonge par continuité en 0, est alors dérivable sur $\mathbb{R}$, mais que sa dérivée h' n'est pas continue sur $\mathbb{R}$. Montrez que h' vérifie le principe des valeurs intermédiaires.
Montrez que si une application φ vérifie le principe des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}$ alors $|\varphi|$ le vérifie aussi.
Montrez qu'il existe S vérifiant $S' = |\sin'|$ et $S(0) = 0$. Calculez $S(\pi) - S(-\pi)$.

La partie entière fait des sauts, elle ne peut être la dérivée de qui que ce soit.
On aurait $g'(0) = 1$ et $g'(1) = 1$ mais aucun point vérifiant $g'(c) = 1/2$.

Même type d'argument pour $1_{\mathbb{Z}}$ qui vaut 0 en $\dfrac{1}{2}$ et 1 en 1 mais ne vaut jamais 1 entre temps.

L'application $t \longmapsto \left\{\begin{array}{ll} \frac{t^2}{2} & si \quad t > 0 \\ -\frac{t^2}{2} & si \quad t \leqslant 0 \end{array}\right|$ est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est continue, même en 0.

On la dérive en $t \longmapsto \left\{\begin{array}{ll} t & si \quad t > 0 \\ -t & si \quad t < 0 \end{array}\right|$. Et en 0, sa dérivée est nulle (les deux formules donnent la même valeur de dérivée en 0, on a bien deux demi tangentes horizontales).

On a une primitive de la valeur absolue (qu'on peut écrire $x \longmapsto \dfrac{x.|x|}{2}$). On a a autant qu'on veut en ajoutant n'importe quel réel arbitraire (le même sur $]-\infty,\ 0]$ et $]0,\ +\infty[$).

$x \longmapsto x^2.\sin(1/x)$ se prolonge par la valeur 0 en 0, quoi que s'acharne à faire le sinus (bornée fois infiniment petite).

On la dérive $x \longmapsto 2.x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ sur $\mathbb{R}^*$.

En 0, il faut en revenir aux taux d'accroissement : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Ils tendent vers 0. On a donc $f'(0) = 0$.

Pour la non continuité de f' en 0, on constate que la suite $\left(\dfrac{1}{2.n.\pi}\right)$ tandis que la suite $\left(f'\left(\dfrac{1}{2.n.\pi}\right)\right)$ converge vers -1, qui n'est pas $f'(0)$.

On note aussi que $f'(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 0.

Néanmoins, cette application vérifie bien le théorème des valeurs intermédiaires.
Toute valeur comprise entre $f'(a)$ et $f'(b)$ est atteinte au moins une fois entre a et b.

Il y a plusieurs possibilités pour a et b.
$0 < a \leqslant b$: Ici, f' est continue sur $[a,\ b]$ inclus dans $]0,\ +\infty[$. Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique par continuité.

$0 = a < b$: Plus original.
On se donne une valeur γ entre 0 et $f'(b) = 2.b.\sin(1/b) - \cos(1/b)$.
Mais il existe un point d entre 0 et b où f' s'annule (et même une infinité).
Le réel γ est alors entre $f'(d)$ et $f(b)$.
Sachant que f' est continue sur $[d, b]$ (inclus dans $]0, +\infty[$, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f'.

$a \leqslant b < 0$: Similaire au premier cas.

$a \leqslant b = 0$: Similaire au second cas.

$a < 0 < b$: On se donne γ entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Mais la valeur $f'(a)$ est atteinte en $-a$.
γ est donc entre $f'(-a)$ et $f'(b)$.
Il est donc atteint une fois entre $-a$ et $-b$ par continuité de f'.
Et comme on a $[-a, b] \subset [a, b]$, il est atteint une fois entre a et b.

Avec un dessins, tout ça passe mieux.

On suppose que φ vérifie le principe des valeurs intermédiaires : pour tout couple (a, b), toute valeur entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ est atteinte au moins une fois entre a et b.

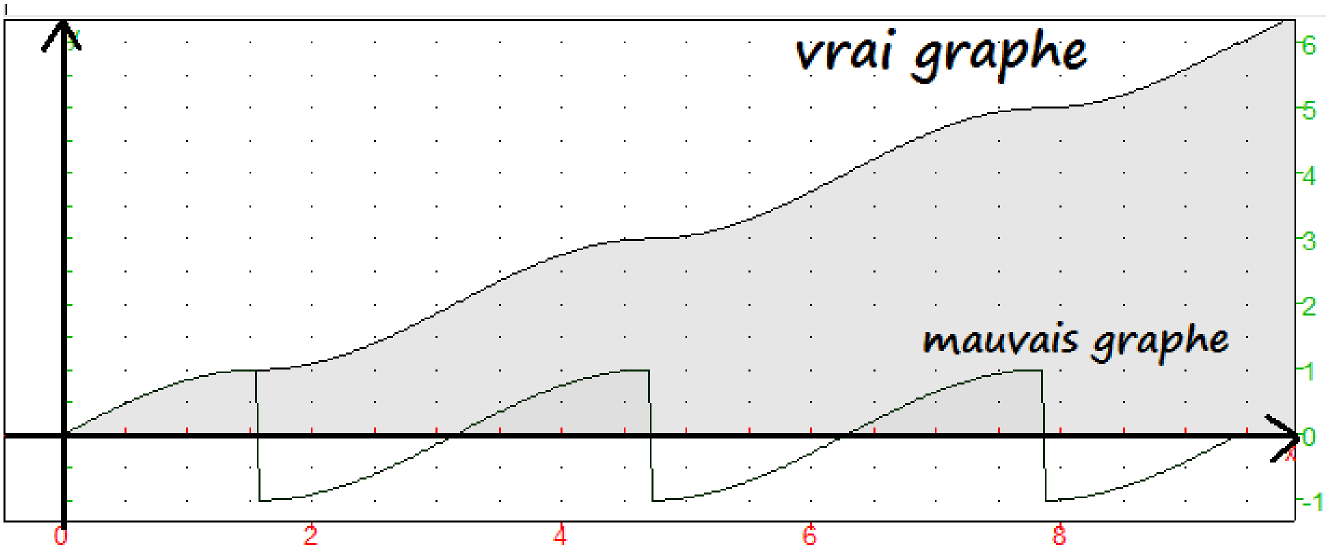
Regardons ce qu'il est est pour $|\varphi|$. On se donne a et b quelconques, et un certain γ entre $|\varphi(a)|$ et $|\varphi(a)|$.
Raisonnons par disjonction de cas.

$\varphi(a) \geqslant 0$	$\varphi(b) \geqslant 0$	γ est donc entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et il est positif. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b. $\exists c \in [a, b], \ |\varphi(c)| = \varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \leqslant 0$	$\varphi(b) \geqslant 0$	γ est donc entre $-\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ et il est positif. Il est donc a fortiori entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Pour vous situer, prenez $\varphi(a) = -2$, $\gamma = 3$ et$\varphi(b) = 5$. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b. $\exists c \in [a, b], \ |\varphi(c)| = \varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \leqslant 0$	$\varphi(a) \leqslant 0$	γ est donc entre $-\varphi(a)$ et $-\varphi(b)$ et il est positif. $-\gamma$ est donc entre $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Il est donc atteint au moins une fois entre a et b. $\exists c \in [a, b], \ |\varphi(c)| = -\varphi(c) = \gamma$.
$\varphi(a) \geqslant 0$	$\varphi(b) \leqslant 0$	Reprendre les idées du deuxième cas.

On veut cette fois $S' = |\sin'|$ et $S(0) = 0$.
C'est à dire $S' = |\cos|$. Facile : $x \longmapsto \int_0^x |\cos(t)|.dt$. Elle se dérive bien en $x \longmapsto |\cos(x)|$.
Je vous la « trace » si vous voulez :

sur $[0, \pi/2]$	$\int_0^x \cos(t).dt$	$= \sin(x)$
sur $[\pi/2, 3.\pi/2]$	$\int_0^{\pi/2} \cos(t).dt + \int_{\pi/2}^x (-\cos(t)).dt$	$= 2 - \sin(x)$
sur $[3.\pi/2, 5.\pi/2]$	$\int_0^{\pi/2} \cos(t).dt + \int_{\pi/2}^{3.\pi/2} (-\cos(t)).dt + \int_{3.\pi/2}^x \cos(t).dt$	$= 4 + \sin(x)$
sur $[5.\pi/2, 7.\pi/2]$	$\int_0^{5.\pi/2} |\cos(t)|.dt + \int_{5.\pi/2}^x (-\cos(t)).dt$	$= 6 - \sin(x)$

et ainsi de suite. Certes, ce n'est pas encore un dessin, mais ça aide. Et on doit voir si elle se raccorde.



Par relation de Chasles bien exploitée, $S(\pi) - S(-\pi)$ vaut 4.

◁ 64 ▷

D'accord, la division suivant les puissances croissantes est interdite aux concours. Mais si on écrivait un script qui prend en entrée deux polynômes Numer et Denom (sous forme de listes de coefficients, dans l'ordre de leurs puissances) plus un entier naturel (ordre auquel on écrit la division) et retourne le quotient.

Exemple :

entrée	[2, 1, 1]	[1, 1, 0, 1]	4
sortie	[2, -1, 2, -4, 5]		

Et si vous êtes fou, gérez des coefficients rationnels et pas flottants et l'affichage de la division.

$$
\begin{array}{cccccc||ccccc}
2 & +X & +X^2 & & & & 1 & +X & & +X^3 & \\
\cline{7-11}
-\big(2 & +2.X & & +2.X^3\big) & & & 2 & -X & +2.X^2 & -4.X^3 & +5.X^4 \\
\cline{1-4}
 & -X & +X^2 & -2.X^3 & & & & & & & \\
 & -\big(-X & -X^2 & & -X^4\big) & & & & & & \\
\cline{2-5}
 & & 2.X^2 & -2.X^3 & +X^4 & & & & & & \\
 & & -\big(2.X^2 & +2.X^3 & & +o(X^4)\big) & & & & & \\
\cline{3-6}
 & & & -4.X^3 & +X^4 & +o(X^4) & & & & & \\
 & & & -\big(-4.X^3 & -4.X^4 & +o(X^4)\big) & & & & & \\
\cline{4-6}
 & & & & 5.X^4 & +o(X^4) & & & & & \\
 & & & & -\big(5.X^4 & +o(X^4)\big) & & & & & \\
\cline{5-6}
 & & & & & o(X^4) & & & & &
\end{array}
$$

#division suivant les puissances croissantes

```
def Divi(Num, Den, Ordre) : #list, list, int -> list
....LenNum, LenDen = len(Num), len(Den)
....while len(Num) < Ordre+1 : #on ajuste la taille du numerateur
........Num.append(0)
....Quotient = [0]*(Ordre+1) #a priori rien pour l'instant dans le quotient
....Degre = 0 #le degré va augmenter
....while Degre < Ordre+1 : #tant qu'on n'a pas atteint l'ordre
........Coeff = Num[Degre]/Den[0] #calcul du coefficient dominant
........for k in range(min(LenDen,Ordre-Degre+1)) : #soustraction
............Num[k+Degre] -= Coeff*Den[k]
........Quotient[Degre] = Coeff
........Degre += 1
....return Quotient #retour
```