Lycée Charlemagne

.2018.– $\mathcal{MPSI}2$ –.2019.

Vendredi 22 février

DS 7

$\boxed{\heartsuit\ 0\ \heartsuit}$ Inversez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$. $\boxed{\text{4 pt.}}$ *Calculatrice mentales autorisées, recours à la technologie totalement hors de propos)*

$\boxed{\heartsuit\ 1\ \heartsuit}$ F et G sont deux sous espaces vectoriel d'un espace vectoriel $(E,+,.)$, vérifiant $F\cap G=\{\overrightarrow{0}\}$. $(\overrightarrow{f_1},\dots\overrightarrow{f_p})$ est une famille de vecteurs de F et $(\overrightarrow{g_1},\dots\overrightarrow{g_q})$. Montrez que $(\overrightarrow{f_1},\dots\overrightarrow{f_p},\overrightarrow{g_1},\dots\overrightarrow{g_q})$ est libre si et seulement si $(\overrightarrow{f_1},\dots\overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1},\dots\overrightarrow{g_q})$ le sont. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\diamond\ 0\ \diamond}$ Si f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et a un réel, on note f_a l'application $x\longmapsto f(x+a)$. On appelle profondeur de f la dimension de $Vect(f_a\mid a\in\mathbb{R})$.
Montrez que exp est de profondeur 1. Montrez que cos et sin sont de profondeur 2. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$\boxed{\diamond\ 1\ \diamond}$ Quelle est la profondeur de $x\longmapsto x^3$? $\boxed{\text{2 pt.}}$

$\boxed{\diamond\ 2\ \diamond}$ Montrez que `[[abs(i-k) for k in range(n)] for i in range(n)]` a pour déterminant $(-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\diamond\ 3\ \diamond}$ On note V l'application valeur absolue, montrez que $(V_0,\ V_1,\dots V_n)$ est libre. Quelle est la profondeur de V. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\diamond\ 4\ \diamond}$ Quelle est la profondeur de l'application $\cos^2$? $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 1\ \varpi}$ On pose $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$. Donnez le polynôme caractéristique de A et son spectre. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 2\ \varpi}$ Montrez que K, K' et N sont des sous-espaces vectoriels de $(\mathbb{R}^3,+,.)$

$K_A=\{U\in\mathbb{R}^3\mid A.U=0_3\}$
$K'_A=\{U\in\mathbb{R}^3\mid A^2.U=0_3\}$
$N_A=\{U\in\mathbb{R}^3\mid A.U=9.U\}$

. Donnez leurs dimensions. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 3\ \varpi}$ Lesquelles de ces propositions sont vraies

$\mathbb{R}^3=K'\oplus N$	$\mathbb{R}^3=K'+N$
$\mathbb{R}^3=K\oplus N$	$\mathbb{R}^3=K'+N$

? $\boxed{\text{2 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 4\ \varpi}$ Donnez un polynôme de degré le plus petit possible vérifiant $P(A)=0_{3,3}$. $\boxed{\text{1 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 5-8\ \varpi}$ Traitez les mêmes questions avec B à la place de A. $\boxed{\text{4 pt.}}$

$\boxed{\varpi\ 9\ \varpi}$ Placez les dans le tableau : A, B, I_3, $O_{3,3}$

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible		
non inversible		

$\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\heartsuit\ 2\ \heartsuit}$ Trouvez le réel a sachant $\left\{\begin{array}{rcl} 2^a\times 3^b\times 5^c & = & 235 \\ 3^a\times 5^b\times 2^c & = & 352 \\ 5^a\times 2^b\times 3^c & = & 523 \end{array}\right.$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\heartsuit\ 3\ \heartsuit}$ Montrez $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)}{7+\cos(2.t)}.dt=\frac{\ln(3)}{8}$ (on pourra poser $s=\sin(t)$). $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\$ 1 \$}$ a, b, c, d et e sont cinq complexes non nuls. Le polynôme $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e)$ est noté P, et sous forme développée, on l'écrit $X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$. Pour tout k, on pose aussi $S_k = a^k + b^k + c^k + d^k + e^k$. Exprimez S_2 à l'aide des σ_i. $\boxed{\text{1 pt.}}$ *Le but est d'écrire simplement les relations donnant les S_k à l'aide des σ_i et vice versa.*

$\boxed{\$ 2 \$}$ Montrez : $\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X-a} + \dfrac{1}{X-b} + \dfrac{1}{X-c} + \dfrac{1}{X-d} + \dfrac{1}{X-e}$ *(partez du côté qui vous semble le plus pratique).*

$\boxed{\$ 3 \$}$ Justifiez pour α non nul : $\dfrac{1}{t-\alpha} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini *(on rappelle : « $f(t) = o(g(t))$ quand t tend vers un truc » signifie « la forme surement indéterminée $\dfrac{f(t)}{g(t)}$ tend vers 0 quand t tend vers le truc en question »).*

$\boxed{\$ 4 \$}$ Déduisez $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{S_k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$, puis déduisez par produit en croix les formules de Newton (par exemple $S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$). $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\$ 5 \$}$ Déduisez et généralisez $S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\sharp 1 \sharp}$ KAPREKAR (1905-1986) a envisagé l'algorithme suivant : on prend un nombre `n`, on l'écrit en décimal *(en base 10, comme tout le monde)*, on crée le nombre où ses chiffres sont triés dans le sens croissant, et le nombre où ses chiffres sont dans l'ordre décroissant, et on note `Kap(n)` la différence des deux : `Kap(2019)=9210-0129=9081`. Écrivez la fonction qui prend en entrée `n` et retourne `Kap(n)` *(on autorise `str`, `list`, `sort()`,*[1] *`in`, `count()`, `int`).* $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\sharp 2 \sharp}$ La suite de Kaprekar d'un entier n consiste à mettre en boucle la fonction `Kap` jusqu'à tomber sur un nombre déjà croisé :

`Kaprekar(2019)` donne `[2019, 9081, 9621, 8352, 6174]` *(oui ! `Kap(6174)=7641-1467=6174`).*

`Kaprekar(20190)` donne `[20190, 91971, 87912, 85932, 74943, 62964, 71973, 83952]` *(qui boucle en cycle `Kap(83952)=74943`).*

Écrivez la fonction `Kaprekar` *(si possible, mettez une sécurité qui arrête tout si la longueur de la suite atteint `MaxIter` sans avoir trouvé de terme en double, avec `MaxIter` qui vaut par défaut 10 000 si l'utilisateur n'a pas saisi de valeur).* $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\aleph\ 1\ \aleph}$ Combien l'équation `Kap(n)=0` a-t-elle de solutions n entre 0 et 2019 ? $\boxed{\text{1 pt.}}$

$\boxed{\aleph\ 2\ \aleph}$ Donnez plusieurs solution de `Kap(n)=999`. $\boxed{\text{2 pt.}}$

$\boxed{\aleph\ 3\ \aleph}$ Donnez des solution de `Kap(n)=59994`. $\boxed{\text{3 pt.}}$

$\boxed{\aleph\ 4\ \aleph}$ Combien l'équation $Kap(n) = n$ a-t-elle de solutions entre 0 et 10000 ? $\boxed{\text{2 pt.}}$

Dattatreya Ramachandra Kaprekar (Dahanu (en), Maharashtra, 17 janvier 1905 – Deolali (en), Maharashtra, 1986) est un mathématicien indien connu pour ses recherches sur les nombres. Boudé par ses contemporains, ses travaux seraient passés inaperçus s'ils n'avaient pas été relayés par Martin Gardner, spécialiste de mathématiques récréatives. Kaprekar est né à Dahanu près de Bombay en 1905. Enfant, les graphiques, dessins et calculs de toutes sortes constituent son passe-temps préféré. Il passe des heures sans s'arrêter essayant de résoudre des énigmes et des problèmes de mathématiques. Il se passionne très tôt pour les nombres et entre en 1923 au collège Fergusson de Pune. En 1927, il remporte un prix mathématique (Wrangler R. P. Paranjpe Mathematical Prize) pour ses travaux mathématiques originaux. En 1929, il devient instituteur dans une école de Devlali. Il continue à travailler sur les nombres. Comme il le dira plus tard : « Un alcoolique souhaite continuer à boire pour retrouver un état de plaisir. Il en est de même pour moi concernant les nombres1. » En 1962, il quitte l'enseignement pour prendre sa retraite. Mais sa pension ne lui suffit pas pour vivre et il doit la compléter par de multiples petits métiers. Il continue néanmoins ses recherches sur les nombres qu'il publie dans plusieurs livres qui restent quasiment confidentiels jusqu'à ce que Gardner parle de lui en 1975. Il meurt en 1986 à Devlali.

1. *si vous avez une solution sans `.sort()` ni `sorted( )`, vous avez un bonus*

Questionnement courtois. DS 7

Pour inverser $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (dont il faut souhaiter qu'elle le soit :

$$\begin{pmatrix}
\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\
\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}
\end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par le déterminant qu'on trouve en effectuant le produit de vérification $M.^tCom(M)$.
Ici, le déterminant vaut -1.

Seize déterminants de taille 3 par règle de Sarrus ou autre : 16.6 multiplications de trois termes, et autant d'additions....

On peut aussi utiliser la méthode du pivot de Gaôsse, avec domino :

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 4 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2.L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 + .L_1,\ L_4 \leftarrow L_4 - 3.L_1$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L'_3 \leftarrow L'_3 - L'_2,\ L'_4 \leftarrow L'_4 - 2.L'_2$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \quad L"_4 \leftarrow L"_4 - L"_3$$

A ce stade, le déterminant vaut -1.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad L_4 \leftarrow -L_4 \text{ (on arrête les } L',\ L",\ L^{(3)} \text{ et autres.}$$

La dernière ligne ne sera plus modifiée, c'est la bonne.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & | & 3 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & | & -8 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_4,\ L_2 \leftarrow L_2 - 3.L_4,\ L_2 \leftarrow L_1 + L_4$$

Les deux dernières lignes sont validées.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & | & -2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -18 & -2 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2.L_3,\ L_1 \leftarrow L_1 - L_3$$

Et encore une ligne ! Allez, une dernière soustraction :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 16 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -18 & -2 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

On peut aussi dire qu'inverser une matrice, d'est résoudre un système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc|} 1.x & +1.y & +1.z & -1.t & = & a & & & \\ 2.x & +3.y & +4.z & +1.t & = & & b & & \\ -1.x & +0.y & +2.z & +3.t & = & & & c & \\ 3.x & +5.y & +8.z & +1.t & = & & & & d \end{array}\right.$$

Si on résout ce système intelligemment (c'est à dire par combinaisons, et pas par substitutions ! hors de mon champ, crétins des alpes, bourrins du calcul avec des divisions qui n'ont aucune utilité, laboureurs de sillons boueux, marcheurs au pas de l'oie, disciples de Baal et de Moloch...) on retrouve le même schéma :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc|} 1.x & +1.y & +1.z & -1.t & = & a & & & \\ & 1.y & +2.z & +3.t & = & -2.a & +b & & \\ & 1.y & +3.z & +2.t & = & 1.a & & +c & \\ & 2.y & +5.z & +4.t & = & -3.a & & & +d \end{array}\right. \text{jusqu'à} \begin{array}{cccccccc} x & & & & = & 16.a & +3.b & +6.c & -5.d \\ & y & & & = & -18.a & -2.b & -7.c & +5.d \\ & & z & & = & 5.a & +0.b & +2.c & -1.d \\ & & & t & = & 2.a & +1.b & +1.c & -1.d \end{array}$$

Il est évident que retenir par cœur le pivot de Gauss sans comprendre que ce sont justes les combinaisons sur n système est aussi stérile que de résoudre par substitutions.

On suppose donc que F et G sont deux sous-espaces vectoriels vérifiant $F \cap G = \{\overrightarrow{0}\}$.
On doit prouver une équivalence, on traite deux implications.

$\boxed{\mathbb{H}}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre. $\boxed{?}$ Les deux petites familles sont libres.

Par résultat du cours, la sous famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ est libre.

En effet, si on part de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$, on déduit $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + 0.\overrightarrow{g_1} + \dots + 0.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$, et par liberté de la grande famille $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0 = \dots = 0$.

$\boxed{\mathbb{H}}$ Les deux familles $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p})$ et $(\overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ sont libres. $\boxed{?}$ La grande famille $(\overrightarrow{f_1}, \dots \overrightarrow{f_p}, \overrightarrow{g_1}, \dots \overrightarrow{g_q})$ est libre.

On se donne $p + q$ réels α_i et β_j. On suppose $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} + \beta_1.\overrightarrow{g_1} + \dots + \beta_q.\overrightarrow{g_q} = \overrightarrow{0}$.

On a un nouvel objectif : les α_i et les β_j sont nuls.

On note $\overrightarrow{u}$ le vecteur $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p}$. Il est dans f. Mais en constatant $\overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, le voilà dans G.

Étant à la fois dans F et G (d'intersection triviale), le voilà nul.

On repart donc de $\alpha_1.\overrightarrow{f_1}, + \dots + \alpha_p.\overrightarrow{f_p} = \overrightarrow{0}$. par liberté de la petite famille, tous les α_i sont nuls.

Dans le même temps $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{u} = -\beta_1.\overrightarrow{g_1} - \dots - \beta_q.\overrightarrow{g_q}$, et c'est au tour des β_j d'être nuls par liberté de l'autre petite famille.

Un petit raisonnement d'une simplicité incroyable. Il ne demande aucune connaissance approfondie. Aucun apprentissage de lignes et de lignes. Aucun par cœur. Juste savoir mettre bout à bout des idées. Et surtout ne pas partir n'importe comment en tapant sur les hypothèses (quand déjà elles sont bien quantifiées).
Bref, des maths dans toute leur splendeur pour détecter votre capacité à raisonner.

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{7+\cos(2.t)}.dt$ existe par continuité de la fonction sous le signe somme (le dénominateur reste entre 6 et 8).
On effectue le changement proposé : $s = \sin(t)$

t de 0 à $\pi/2$	s de 0 à 1

$s = \sin(t)$	$ds = \cos(t).dt$
$t = Arcsin(s)$	$dt = \dfrac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$

$\cos(2.t) = 1 - 2.\sin^2(t)$

L'intégrale devient $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{7+1-2.s^2}$. On l'écrit $\displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{2.(2-s).(2+s)}$.
On décompose en éléments simples $\dfrac{1}{2.(2-s).(2+s)} = \dfrac{1}{8}.\Big(\dfrac{1}{2+s} + \dfrac{1}{2-s}\Big)$.
On intègre en $\dfrac{1}{8}\ln\Big(\dfrac{2+1}{2+0}\Big) - \dfrac{1}{8}\ln\Big(\dfrac{2-1}{2-0}\Big)$. On arrange les logarithmes de 2 entre eux, et il reste $\dfrac{\ln(3)}{8}$.

Le système $\left\{\begin{array}{lcl} 2^a\times 3^b\times 5^c & = & 235 \\ 3^a\times 5^b\times 2^c & = & 352 \\ 5^a\times 2^b\times 3^c & = & 523 \end{array}\right.$ peut avoir l'air étrange. Mais si on pense à passer au logarithme, il devient très simple *(et le passage au logarithme est une équivalence)* :
$\left\{\begin{array}{lllcl} \ln(2).a & +\ln(3).b & +\ln(5).c & = & \ln(235) \\ \ln(3).a & +\ln(5).b & +\ln(2).c & = & \ln(352) \\ \ln(5).a & +\ln(2).b & +\ln(3).c & = & \ln(523) \end{array}\right.$ et même $\begin{pmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(3) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(5) & \ln(2) & \ln(3) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(235) \\ \ln(352) \\ \ln(523) \end{pmatrix}$.

La matrice est inversible. On déduit la valeur de a *(unique)* : $a = \dfrac{\begin{vmatrix} \ln(235) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(352) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(523) & \ln(2) & \ln(3) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \ln(2) & \ln(3) & \ln(5) \\ \ln(3) & \ln(5) & \ln(2) \\ \ln(5) & \ln(2) & \ln(3) \end{vmatrix}}$.

L'application numérique est une horreur :
$$a = \frac{-\ln(5)^2.\ln(532) - \ln(2).\ln(3).\ln(235) - \ln(2).\ln(3).\ln(352) + \ln(2).\ln(3).\ln(532) + \ln(2).\ln(5).\ln(235) + \ln(3).\ln(5).\ln(352)}{-\ln(5)^3 - \ln(2)^2.\ln(3) + \ln(2)^2.\ln(5) + \ln(3)^2.\ln(5) - \ln(2).\ln(3)^2 + \ln(2).\ln(3).\ln(5)}$$
Et aucune formule intelligete ne simplifie $\ln(a).\ln(b)$ (hormis $\ln(a^{\ln(b)})$) mais je n'en vois pas l'intérêt.

C'était juste une question sur les systèmes et les formules de Cramer une fois qu'on passait au logarithme. Le pire est de répondre qu'il n'y a pas de solution, en croyant qu'il faut aller chercher des solutions seulement dans $\mathbb{N}^3$, en factorisant $235 = 5.47$ par exemple.

Suites de Kaprekar. DS 7

On prend un entier `n`, on en fait une chaine de caractères `str(n)`, puis une liste `list(str(n))`, puis on la trie `L.sort()` ou `L=sorted(list(sort(n))`.
Sinon, on peut utiliser le truc rapide avec congruences :

```
def Convert(n) :
....L = [ ]
....while n > 0 :
........unite = n%10
........n = n/10
........L.append(unite)
....return(L)
```

On peut même insérer dans l'ordre croissant :

```
def Convert(n) :
....L = [ ]
....while n > 0 :
........unite = n%10
........n = n/10
........index = 0 :
............while L[index] < unite and index < len(L) :
............index+=1
........L = L[ :index]+[unite]+L[index : ]
....return(L)
```

Ensuite, on reprend la liste des chiffres telle que `[0, 1, 2, 9]` pour en faire un nombre tel que `0129`

```
Petit = 0
for k in range(len(L)) :
....Petit = Petit*10+int(L[k])
```

Mais il faut aussi le grand :
```
Grand = 0
```

```
for k in range(len(L)) :
....Grand = Grand*10+int(L[-1-k])
```
Ou alors on fait un `L.reverse( )` et on recommence.
Il ne reste qu'à retourner la différence `return(Grand-Petit)`.

```
def Kap(n) :
....L = list(int(n))
....L.sort()
....Grand, Petit = 0, 0
....for chiffre in L :
........Petit = 10*Petit+chiffre
....L.reverse( )
....for chiffre in L :
........Grand = 10*Grand+chiffre
....return(Grand-Petit)
```

Pour la mise en boucle, on crée une liste, on y met `n`, on calcule son `Kap`, et tant qu'on ne le trouve pas dans la liste, on continue :

```
def Kaprekar(n) :
....L = [n]
....k = Kap(n)
....while not(k in L) :
........L.append(k)
........k = Kap(k)
....return(L)
```

Pour la version sécurisée :

```
def Kaprekar(n, MaxIter=1000) :
....L = [n]
....k = Kap(n)
....while not(k in L) and len(L) < MaxIter :
........L.append(k)
........k = Kap(k)
....return(L)
```

Si on n'entre aucune valeur pour `MaxIter`, il prendra par défaut la valeur `1000`.

Passons aux questions mathématiques, même si on peut les traiter informatiquement :
Pour avoir `Kap(n)=0`, il faut et il suffit que la liste des chiffres dans l'ordre croissant soit la même que dans l'ordre décroissant : $\overline{abc} - \overline{bca} = 0$. La seule solution : tous les chiffres sont égaux : `Kap(55)=55-55`, `Kap(1111)=1111-1111`, et sinon, il y a une différence quelquepart.
De 0 à 2019, il y a

dix entrier à un chiffre	0 à 9	`Kap(7)=7-7=0`
neuf entiers à deux chiffres	$\overline{aa}$ avec a de 1 à 9	`Kap(44)=44-44=0`
neuf entiers à trois chiffres	$\overline{aaa}$ avec a de 1 à 9	`Kap(666)=666-666=0`
un entier à quatre chifffres		`Kap(1111)=1111-1111=0`

Le total est $\boxed{\text{vingt neuf}}$

Programmation :

```
L = [ ]
for n in range(2020) :
....if Kap(n) == 0 :
........L.append(n)
```

Une solution pour avoir `Kap(n)=999` ? Il faut au moins trois chiffres, et même quatre, car on a une différence.
Tiens, c'est simple : `Kap(1000)=1000-0001=999`.
Mais tous les nombres suivants conviennent aussi !
[1000, 1011, 1101, 1110, 1112, 1121, 1211, 1222, 2111, 2122, 2212, 2221, 2223, 2232, 2322, 2333, 3222, 3233, 3323, 3332, 3334, 3343, 3433, 3444, 4333, 4344, 4434, 4443, 4445, 4454, 4544, 4555, 5444, 5455, 5545, 5554, 5556, 5565, 5655, 5666, 6555, 6566, 6656, 6665, 6667, 6676, 6766, 6777, 7666, 7677, 7767, 7776, 7778, 7787, 7877, 7888, 8777, 8788, 8878, 8887, 8889, 8898, 8988, 8999, 9888, 9899, 9989, 9998]

```
L = [ ]
for n in range(10000) :
....if Kap(n) == 999 :
........L.append(n)
```

Et maintenant, la valeur `59994`. Pourquoi pas. Avec deux nombres à cinq chiffres : $\overline{abcde} - \overline{edcba} = 59994$.

Posons l'opération : $\begin{array}{cccccc} & 5 & 9 & 9 & 9 & 4 \\ + & e & d & c & b & a \\ \hline & a & b & c & d & e \end{array}$. On doit avoir $4 + a = e$ et $5 + e = a$. C'est impossible.
Ou alors, il y a une retenue $4 + a = e + 10$ et $5 + e = a$. Impossible aussi.

Et si il y avait une retenue venant de $9+d$? Ce qui serait d'ailleurs logique. $4+a=e+10$ et $5+e+1=a$.
La cette fois, on trouve qu'on peut prendre a et e comme on veut, de différence 6. On tente notre chance avec $a=7$ et $e=1$ *(e est le plus petit des chiffres et 7 est le plus grand).* $\begin{array}{cccccc} & 5^1 & 9 & 9 & 9^1 & 4 \\ + & 1 & d & c & b & 7 \\ - & - & - & - & - & - \\ & 7 & b & c & d & 1 \end{array}$.
On demande cette fois $9+1+b=d+10$ *(avec une retenue, en effet).* b et d sont égaux, et la chose se propage.
Une solution $\begin{array}{cccccc} & 5^1 & 9^1 & 9^1 & 9^1 & 4 \\ + & 1 & 3 & c & 3 & 7 \\ - & - & - & - & - & - \\ & 7 & 3 & c & 3 & 1 \end{array}$ et c fait ce qu'il veut, mais les chiffres doivent être dans l'ordre croissant. Par exemple $n=13337$: `Kap(13337)=73331-13337=59994`.
Mais on peut prendre aussi `K(31733)=73331-13337`.
Votre réponse est elle dans cette liste ?
[10116, 10161, 10611, 11016, 11061, 11106, 11117, 11160, 11171, 11601, 11610, 11711, 12227, 12272, 12722, 13337, 13373, 13733, 14447, 14474, 14744, 15557, 15575, 15755, 16011, 16101, 16110, 16667, 16676, 16766, 17111, 17222, 17333, 17444, 17555, 17666, 17777, 20226, 20262, 20622, 21227, 21272, 21722, 22026, 22062, 22127, 22172, 22206, 22217, 22228, 22260, 22271, 22282, 22602, 22620, 22712, 22721, 22822, 23338, 23383, 23833, 24448, 24484, 24844, 25558, 25585, 25855, 26022, 26202, 26220, 26668, 26686, 26866, 27122, 27212, 27221, 27778, 27787, 27877, 28222, 28333, 28444, 28555, 28666, 28777, 28888, 30336, 30363, 30633, 31337, 31373, 31733, 32338, 32383, 32833, 33036, 33063, 33137, 33173, 33238, 33283, 33306, 33317, 33328, 33339, 33360, 33371, 33382, 33393, 33603, 33630, 33713, 33731, 33823, 33832, 33933, 34449, 34494, 34944, 35559, 35595, 35955, 36033, 36303, 36330, 36669, 36696, 36966, 37133, 37313, 37331, 37779, 37797, 37977, 38233, 38323, 38332, 38889, 38898, 38988, 39333, 39444, 39555, 39666, 39777, 39888, 39999, 40446, 40464, 40644, 41447, 41474, 41744, 42448, 42484, 42844, 43449, 43494, 43944, 44046, 44064, 44147, 44174, 44248, 44284, 44349, 44394, 44406, 44417, 44428, 44439, 44460, 44471, 44482, 44493, 44604, 44640, 44714, 44741, 44824, 44842, 44934, 44943, 46044, 46404, 46440, 47144, 47414, 47441, 48244, 48424, 48442, 49344, 49434, 49443, 50556, 50565, 50655, 51557, 51575, 51755, 52558, 52585, 52855, 53559, 53595, 53955, 55056, 55065, 55157, 55175, 55258, 55285, 55359, 55395, 55506, 55517, 55528, 55539, 55560, 55571, 55582, 55593, 55605, 55650, 55715, 55751, 55825, 55852, 55935, 55953, 56055, 56505, 56550, 57155, 57515, 57551, 58255, 58525, 58552, 59355, 59535, 59553, 60000, 60111, 60222, 60333, 60444, 60555, 60666, 61011, 61101, 61110, 61667, 61676, 61766, 62022, 62202, 62220, 62668, 62686, 62866, 63033, 63303, 63330, 63669, 63696, 63966, 64044, 64404, 64440, 65055, 65505, 65550, 66066, 66167, 66176, 66268, 66286, 66369, 66396, 66606, 66617, 66628, 66639, 66660, 66671, 66682, 66693, 66716, 66761, 66826, 66862, 66936, 66963, 67166, 67616, 67661, 68266, 68626, 68662, 69366, 69636, 69663, 71111, 71222, 71333, 71444, 71555, 71666, 71777, 72122, 72212, 72221, 72778, 72787, 72877, 73133, 73313, 73331, 73779, 73797, 73977, 74144, 74414, 74441, 75155, 75515, 75551, 76166, 76616, 76661, 77177, 77278, 77287, 77379, 77397, 77717, 77728, 77739, 77771, 77782, 77793, 77827, 77872, 77937, 77973, 78277, 78727, 78772, 79377, 79737, 79773, 82222, 82333, 82444, 82555, 82666, 82777, 82888, 83233, 83323, 83332, 83889, 83898, 83988, 84244, 84424, 84442, 85255, 85525, 85552, 86266, 86626, 86662, 87277, 87727, 87772, 88288, 88389, 88398, 88828, 88839, 88882, 88893, 88938, 88983, 89388, 89838, 89883, 93333, 93444, 93555, 93666, 93777, 93888, 93999, 94344, 94434, 94443, 95355, 95535, 95553, 96366, 96636, 96663, 97377, 97737, 97773, 98388, 98838, 98883, 99399, 99939, 99993]

```
L = [ ]
for n in range(10000)
:
....if Kap(n) ==
59994 :
........L.append(n)
```

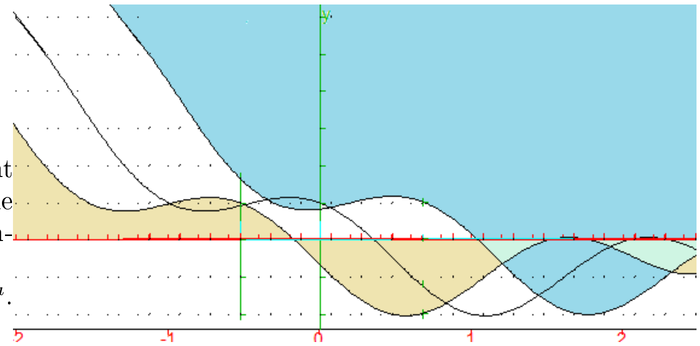
Les nombres obtenus sont anagrammes de quelques solutions fondamentales.

On cherche ensuite des nombres à trois chiffres a, b et c ($a \geqslant b \geqslant c$), vérifiant $\overline{abc}-\overline{cba}=le\ nombre.$
On constate $\overline{abc}-\overline{cba}=100.a+10.b+c-(100.c+10.b+a)=99.(a-c)$.
Notre nombra est un multiple de 99. On n'en a pas tant :

n	0	99	198	297	396	495	594	693	792	891	990
$Kap(n)$	0	0	792	693	594	495	495	594	693	792	891

La seule qui convienne est $\{0,\ 495\}$ et on a prouvé que c'étaient les seules solutions.

Profondeur. DS 7



On prend une application f. Les f_a sont obtenues par translation. On regarde alors la dimension de la famille engendrée par toutes ces fonctions.
Pour $f = \exp$, on a $f_a = x \longmapsto e^{x+a}$.
On reconnait $f_a = e^a.f$.
Toutes les applications construites sont colinéaires entre elles.
$Vect(\exp_a \mid a \in \mathbb{R}) = Vect(\exp) = \{\lambda.\exp \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. On a une dimension égale à 1.

Pour le cosinus, on écrit $\cos_a = x \longmapsto \cos(x+a)$. En restant à l'étage des fonction : $\cos_a = \cos(a).\cos - \sin(a).\sin$. On a beau faire, on a des combinaisons de sinus et de cosinus, et c'est tout. $Vect(\cos_a \mid a \in \mathbb{R}) = Vect(\cos,\ \sin)$. On a un espace de dimension 2.
Les confusions du type $f_a = f(x+a)$ ou $Vect(\cos(a).\cos(a) - \sin(a).\sin(x) \mid a \in \mathbb{R})$ ne pourront pas rapporter tous les points. C'est un vendredi « maths » hein !

Prenons $f = x \longmapsto x^3$. Chaque f_a est de la forme $x \longmapsto x^3 + 3.a.x^2 + 3.a^2.x + a^3$. C'est une combinaison des quatre fonctions $x \longmapsto x^3$, $x \longmapsto x^2$, $x \longmapsto x$, et $x \longmapsto 1$. Un peut abruptement, en confondant polynôme et fonction polynôme : tous les f_a sont dans $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$, de dimension 4.
On a envie de répondre que la profondeur de $x \longmapsto x^3$ est donc 4.
Mais si tous les f_a étaient dans un sous-espace de $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$, de dimension plus petite ?
On doit donc montre que la dimension atteint bien 4. Pour ce faire, on montre que $(f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3)$ par exemple forme une famille libre.
On écrit sa matrice sur la base canonique de l'espace $(\mathbb{R}_3[X], +, .)$: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 8 & 27 \\ 0 & 3 & 12 & 27 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. Ce déterminant est non nul, c'est bon.
On a donc une profondeur de 4.

Plus généralement, on montrerait qu'un polynôme de degré n a une profondeur de $n+1$ et qu'avec ses translatés, on réussit à reconstruire tout polynôme de degré inférieur ou égal à n.

On construit un déterminant de matrice de taille n sur n dont le terme général est $a_i^k = |i-k|$. La matrice est symétrique. Mais ça ne nous dit rien de plus. On n'invente pas des théorèmes...
Les exemples sont $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.
On trouve -1, 4, -12 et 32. C'est sur la dernière qu'on va expliquer ce qu'on peut faire.
On soustrait chaque colonne à la suivante *(en gardant la première intacte)*

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

On garde la première colonne, puis sur les suivantes, on soustrait chacune à la suivante à nouveau *(on doit conserver la seconde)* :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Finalement, on a effectué des $L_k = L_k - 2.L_{k-1} + L_{k-2}$.

On développe par rapport à la première ligne : un signe moins : $\begin{vmatrix} & 1 & & & \\ 1 & & 2 & 0 & 0 \\ 2 & & 0 & 2 & 0 \\ 3 & & 0 & 0 & 2 \\ 4 & & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

On développe cette fois par rapport à la dernière ligne. Le facteur vaut $n-1$. Il est en colonne 1 ligne $n-1$ *(on en a perdu une)*.
Il reste une matrice diagonale faite de plein de 2 *(mais il ne reste que $n-2$ lignes ou colonnes)*. On trouve bien $(-1)^{n+1}.(n-1).2^{n-2}$.

La version points de suspension donne

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & & n-4 & n-3 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & & 1 & 1 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n-2 & -1 & -1 & & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

puis

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ n-2 & -1 & 0 & & 0 & 2 \\ n-1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & & 0 & 0 \\ 2 & 0 & & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n-2 & 0 & & 0 & 2 \\ n-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}.(n-1). \begin{vmatrix} 2 & & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \\ & & & \vdots \\ 0 & & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

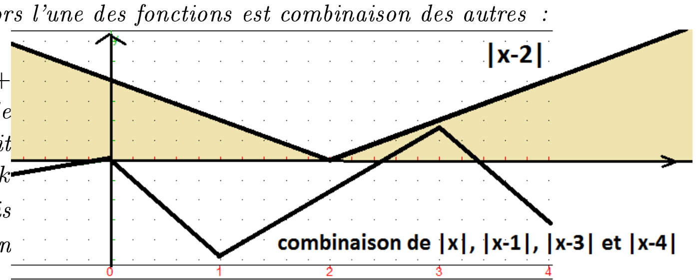
et moi je la comprends beaucoup moins bien que celle avec n égal à 5.

Quel rapport ensuite avec la valeur absolue et les V_a ?
Moi, je le vois tout de suite, mais c'est une question d'habitude.
On prend comme indiqué la famille $(V_0, \dots V_n)$ faite de $n+1$ fonctions. On veut montrer qu'elle est libre. On prend donc $n+1$ réels quelconques α_0 à α_n et on suppose $\alpha_0.V_0 + \dots + \alpha_n.V_n = 0$ *(fonction nulle)*. On doit montrer que les α_k sont tous nuls.
On traduit l'hypothèse $\alpha_0.V_0 + \dots + \alpha_n.V_n = 0$ qui donne : $\forall x \in \mathbb{R},\ \alpha_0.|x| + \alpha_1.|x-1| + \alpha_{2.}|x-2| + \dots \alpha_n.|x-n| = 0$ (et surement pas $\alpha_0.|x| + \alpha_1.|x-1| + \alpha_{2.}|x-2| + \dots \alpha_n.|x-n| = 0$ comme l'écrit l'élève qui n'a rien compris aux raisonnement et fera peut être un brillant calculateur et applicateur, mais jamais un ingénieur).
Comme l'hypothèse est vrai pour tout x, on l'applique pour des x qui nous sont utiles :

$$\begin{array}{llllll} x=0 & & \alpha_1 & +2.\alpha_2 & +\dots & +n.\alpha_n & =0 \\ x=1 & \alpha_0 & & +\alpha_2 & +\dots & +(n-1).\alpha_n & =0 \\ x=2 & 2.\alpha_0 & +\alpha_1 & & +\dots & +(n-2).\alpha_n & =0 \\ x=n & n.\alpha_n & +(n-1).\alpha_{n-1} & +(n-2).\alpha_{n-2} & +\dots & & =0 \end{array}$$

C'est le système $M_{n+1}.\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ où M est la matrice inversible de tout à l'heure. L'unique solution est donc que tous les α_k soient nuls.

Autre preuve, n'utilisant pas notre déterminant.
On suppose la famille $(V_0, \dots V_n)$ liée. Alors l'une des fonctions est combinaison des autres :



$V_i = \alpha_0.V_0 + \dots + \alpha_{i-1}.V_{i-1} + \alpha_{i+1}.V_{i+1} + \dots + \alpha_n.V_n$. *Mais la fonction du membre de droite est dérivable en i (chaque V_k est soit de la forme $x \longmapsto x-k$ ou $x \longmapsto -x+k$ sur tout l(intervalle $\left[i-\frac{1}{2},\ i+\frac{1}{2}\right]$), tandis que la fonction du membre de gauche a un point anguleux en i. Il y a contradiction.*

Dans $\{V_a \mid a \in \mathbb{R}\}$ il y a des familles libres aussi grandes qu'on veut, telles que justement $(V_0, \dots V_n)$.

La dimension est infinie.

En dépit de son caractère « moins riche » que l'exponentielle, la fonction valeur absolue engendre un espace vectoriel de plus grande dimension par translations.

On part de $\cos^2$ et des ses translatés : $x \longmapsto (\cos(a+x))^2$.
Ce sont des combinaisons de trois fonctions fondamentales : $x \longmapsto \cos^2(x)$, $x \longmapsto \sin^2(x)$ et $x \longmapsto \cos(x).\sin(x)$ (avec coefficients $\cos^2(a)$, $\sin^2(a)$ et $-2.\cos(a).\sin(a)$.
La dimension vaut au maximum 3.

Si on trouve trois applications indépendantes dans l'ensemble, on pourra conclure.

Prenons f_0 , $f_{\pi/3}$ et $f_{2.\pi/3}$.
Comment se convaincre de leur indépendance ? Prenons trois réels a, b et c et supposons $a.f_0+b.f_{\pi/3}+c.f_{2.\pi/3}=0$ (fonction nulle). On va montrer que a, b et c sont nuls.
L'hypothèse « fonction nulle » nous autorise à calculer en trois points comme 0, $\pi/3$ et $2.\pi/3$:
$a.1^2+b.\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+c.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2=0$, $a.\Big(\frac{1}{2}\Big)^2+b.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+c.(-1)^2=0$ et enfin $a.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2+b.\Big(-1\Big)^2+c.\Big(-\frac{1}{2}\Big)^2=0$.
Le physicien vous fat résoudre le système et trouver $a=b=c=0$.
Le mathématicien vous dit « calcule le déterminant, il est non nul, il n'y a qu'une solution, et c'est $(0,0,0)$.

$\boxed{\cos^2 \text{ est de profondeur } 3}$ *(avec une base en $(x \longmapsto \cos^2(x),\ x \longmapsto \sin^2(x),\ x \longmapsto \cos(x).\sin(x))$ par exemple).*

Dans cet exercice sur les profondeurs, il n'y a aucune difficulté. En tout cas, il n'y a aucun gros calcul, aucun théorème puissant à appliquer.
Mais il faut avoir compris la question au départ.
C'est à dire qu'il faut rester une ou deux minutes à se demander « qu'est ce que c'est que f_a, qu'est ce que c'est une famille libre de fonctions, qu'est ce que c'est que des fonctions linéairement dépendantes », et seulement après se lancer dans des calculs « rassurants ».

Diagonalisation. DS 7

$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&4&4\\2&4&4\end{pmatrix}$ La trace vaut 9, le déterminant est nul (colonnes égales !), et la somme des mineurs de taille 2 vaut $\begin{vmatrix}4&4\\4&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}$, ce qui fait peu.
Le polynôme caractéristique est $X^3-9.X$.
Le spectre est $[0,\ 0,\ 9]$ (0 est racine double).
Tout ensemble de la forme $\{U\in\mathbb{R}^3 \mid M.U=0_3\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
On y trouve le vecteur nul : $M.U=0_3$.
Si U et v sont dans cet ensemble, et si λ et μ sont réels, alors on a $M.(\lambda.U+\mu.V)=\lambda.M.U+\mu.M.V=0_3$.
On peut appliquer ce résultat à $M=A$ (c'est K) ou $M=A^2$ (c'est K') ou $M=A-I_3$ (pour N).
On fera de même pour B.

Sinon, sans effort, on détermine explicitement K, et on le met sous la forme $Vect(\ldots)$ et c'est bien un espace vectoriel !
$K=\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x+2.y+2.z=0\}=\{\begin{pmatrix}-2.y-2.z\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x+2.y+2.z=0\}=Vect(\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\}$
Sachant $A^2=\begin{pmatrix}9&18&18\\18&36&36\\18&36&36\end{pmatrix}$, on a $K'=K$, aussi de dimension 2.
Enfin, $N=Vect(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix})$ en résolvant le système dégénéré $\left\{\begin{array}{rrrr}-8.x&+2.y&+2.z&=0\\2.x&-5.y&+4.z&=0\\2.x&+4.y&-5.y&=0\end{array}\right|$ $(L_1=$

$-2.L_2 - 2.L_3)$.

On résume

espace	équations	base	dimension
K	$x + 2.y + 2.z = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	2
$K' = K$	$x + 2.y + 2.z = 0$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	2
N	$\left\{\begin{array}{rrrr} 4.x & -y & -z & = 0 \\ 2.x & -5.y & +4.z & = 0 \end{array}\right.$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On constate $K \cap N = \{\overrightarrow{0}\}$. On a donc $dim(K \cap N) = 0$ puis $dim(K + N) = dim(K) + dim(N) - 0 = 3$. Ayant déjà l'inclusion, on déduit $K + N = \mathbb{R}^3$. Comme l'intersection est réduite à $\overrightarrow{0}$, la somme est directe : $K \oplus N = \mathbb{R}^3$.

$K_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A + N_A = \mathbb{R}^3$	$K'_A \oplus N_A = \mathbb{R}^3$
oui	oui	oui	oui

Pour B on recommence de même ou presque : polynôme caractéristique $X^3 - 9.X$ et spectre $[0,\ 0,\ 9]$.

On constate $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix} = A^2$.

espace	équations	base	dimension
K_B	$\left\{\begin{array}{rrrr} 5.x & +4.y & -2.z & = 0 \\ -x & +y & +4.z & = 0 \end{array}\right.$	$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	1
$K'_B = K_A$	$\left\{\begin{array}{rrrr} x & +2.y & +2.z & = 0 \end{array}\right.$	$\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$	2
N	$\left\{\begin{array}{rrrr} -4.x & +4.y & -2.z & = 0 \\ -2.x & -7.y & +8.z & = 0 \end{array}\right.$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$	1

On a des espaces déjà croisés, certaines sommes, directes ou non sont déjà obtenues. Pour d'autres, la dimension suffit à obtenir $K_B + N_B \neq \mathbb{R}^3 + N_B \neq \mathbb{R}^3$.

$K_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B + N_B = \mathbb{R}^3$	$K'_B \oplus N_B = \mathbb{R}^3$
non, dim 2	non, je l'ai déjà dit	oui	oui

Vous voulez des polynômes annulateurs : A et I_3 sont indépendantes, mais $A^2 = 9.A$.
B est non colinéaire à I_3 et B^2 n'est pas combinaison de I_3 et B. En revanche, $B^3 = 9.B^2$

$B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} 9 & 18 & 18 \\ 18 & 36 & 36 \\ 18 & 36 & 36 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 81 & 162 & 162 \\ 162 & 324 & 324 \\ 162 & 324 & 324 \end{pmatrix}$

Polynômes annulateurs :

$X^2 - 9.X$	$X^3 - 9.X^2$
$A^2 = 9.A$	$A^3 = 9.B^2$

La matrice I_3est diagonalisable. Déjà diagonale. Et elle est inversible.

La matrice $0_{3,3}$ est diagonalisable, déjà diagonale. Si on y tient : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = I_3.\begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix}.(I_3)^{-1}$.

Mais pas très inversible.
Ni A ni B n'est inversible.

Mais A est diagonalisable. On a une matrice diagonale : $\begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$, imposée par le polynôme caractéristique.

On cherche P avec des vecteurs vérifiant $M.U = 0.U$, $M.V = 0.V$ et $.W = 9.W$. Et on veut qu'ils forment une famille libre.

$P = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$$

Si B était diagonalisable, ce serait en la même matrice D. Mais on n'arrive pas à trouver U et V vérifiant $B.U = 0.U$ et $B.V = 0.V$ et formant une famille libre. La dimension de K_B n'est pas suffisante.

D'ailleurs, si B se diagonnalisait, on aurait $B = Q. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .Q^{-1}$ puis $B^2 = Q. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 81 \end{pmatrix} .Q^{-1} = 9..B$, ce qui n'est pas le cas...

Pour prolonger l'exercice : trouvez Q vérifiant $B.Q = Q.D'$ avec $D' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix}$ (un petit 1, appelé terme de trigonalisation de Jordan, en plus).

	diagonalisable	non diagonalisable
inversible	$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & o & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$	
non inversible	$O_{3,3} = \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 0 \end{pmatrix}$, $A = P. \begin{pmatrix} 0 & o & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .P^{-1}$	$B = Q. \begin{pmatrix} 0 & 1 & o \\ o & 0 & o \\ o & o & 9 \end{pmatrix} .Q^{-1}$

Et si vous voulez compléter la case qui manque : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & o \\ o & 1 & o \\ o & o & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

Formules de Newton. DS 7

On écrit $(X-a).(X-b).(X-c).(X-d).(X-e) = X^5 - \sigma_1.X^4 + \sigma_2.X^3 - \sigma_3.X^2 + \sigma_4.X - \sigma_5$.
Les relations coefficients-racines disent tout de suite

$\sigma_1 = a+b+c+d+e$
$\sigma_2 = a.b+a.c+a.d+a.e+b.c+b.d+b.e+c.d+c.e+d.e$
$\sigma_3 = a.b.c+a.b.d+a.b.e+a.c.d+a.c.e+a.d.e+b.c.d+b.c.e+b.d.e+c.d.e$
$\sigma_4 = a.b.c.d+a.b.c.e+a.b.d.e+a.c.d.e+b.c.d.e$
$\sigma_5 = a.b.c.d.e$

Un calcul classique donne $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2 = (\sigma_1)^2 - 2.\sigma_2$

On doit décomposer $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$ en éléments simples. C'est $\dfrac{P'(x)}{(X-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)}$.
On peut décomposer en éléments simples sous la forme $\dfrac{\alpha}{x-a} + \dfrac{\beta}{x-b} + \dfrac{\gamma}{x-c} + \dfrac{\delta}{x-d} + \dfrac{\epsilon}{x-e}$.
Il ne reste plus qu'à calculer α, β, γ, δ et ϵ par la méthode des pôles et trouver 1 à chaque fois.
Soit en bluffant, soit par un calcul bien mené.

Mais il ne faut pas toujours utiliser la même méthode. Il faut savoir varier les points de vue. partir de droite pour aller à gauche, ou partir de gauche pour aller à droite ; réduire au dénominateur commun ou au contraire séparer... Innovez !
Ici, on part de ce qu'on nous propose à droite :

$$\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \frac{1}{x-e} = \frac{\dots}{(x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)} = \frac{\dots}{P(x)}$$

Et qui est ce numérateur ? C'est $(x-b).(x-c).(x-d).(x-e) + (x-a).(x-c).(x-d).(x-e) + (x-a).(x-b).(x-d).(x-e) + (x-a).(x-b).(x-c).(x-e) + (x-a).(x-b).(x-c).(x-d)$.
Il est facile d'y voir une chose comme $u'.v + u.v'$ ou $v'.v.w + u.v'.w'$ et même la généralisation à cinq termes, où chaque dérivée u', v' ou w' vaut 1.
Bref, c'est $P'(x)$ quand on dérive $P(x) = (x-a).(x-b).(x-c).(x-d).(x-e)$ comme un produit.
C'est tout !

Pour la formule $\dfrac{1}{t-\alpha} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$, on peut aussi partir du meilleur côté. Le plus compliqué. Qu'on va essayer de simplifier.
Sinon, c'est une formule de Taylor avec reste intégrale pour l'application $x \longmapsto \dfrac{1}{t-\alpha}$ qu'on aura d'abord factorisée sous la forme $\dfrac{1}{t}.\dfrac{1}{1-\alpha.t}$. On y écrase ensuite le reste intégrale en en faisant un $o(1/t^{n+1})$.
Mais partons juste de $\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\alpha^k}{t^{k+1}} = \dfrac{1}{t} + \dfrac{\alpha}{t^2} + \dfrac{\alpha^2}{t^3} + \ldots + \dfrac{\alpha^n}{t^{n+1}}$. C'est une série géométrique dont la raison est $\dfrac{\alpha}{t}$, qui ne vaut pas 1 (comme t va tendre vers l'infini, il a dépassé la valeur particulière α).
Ceci vaut $\dfrac{\dfrac{1}{t} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}}}{1-\dfrac{\alpha}{t}}$ et on simplifie en $\dfrac{1}{t-\alpha} - \dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}$.
On tient notre terme $\dfrac{1}{t-\alpha}$, et le terme correctif est $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}$.

On vérifie si c'est un $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en effectuant (comme la définition le dit) le quotient $\dfrac{\dfrac{\alpha^{n+1}}{t^{n+2}.\Big(1-\frac{\alpha}{t}\Big)}}{\dfrac{1}{t^{n+1}}}$. Il vaut $\dfrac{\alpha^{n+1}}{t.\big(1-\frac{\alpha}{t}\big)}$. Quand t tend vers l'infini, ceci tend bien vers 0.

Écrivons cette formule pour α égal à a, puis à b, puis à c, puis à d et à e, et sommons :
$\dfrac{1}{t-a} + \dfrac{1}{t-b} + \ldots + \dfrac{1}{t-e} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k}{t^{k+1}} + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{b^k}{t^{k+1}} + \ldots + \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{e^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en sommant déjà les quatre $o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ en un seul.
On réunit les sommes en une seule, et on dit qui est le premier membre :
$\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a^k+b^k+c^k+d^k+e^k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$.
Et heureusement, il y a une notation pour $a^k+b^k+c^k+d^k+e^k$, et c'est justement S_k.
On a bien $\dfrac{P'(t)}{P(t)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{S_k}{t^{k+1}} + o\Big(\dfrac{1}{t^{n+1}}\Big)$ quand t tend vers l'infini.

Dans la formule précédente, effectuons un produit en croix et remplaçons $P'(t)$ et $P(t)$ par leurs valeurs sur la base canonique :
$5.X^4 - 4.\sigma_1.X^3 + 3.\sigma_2.X^2 - 2.\sigma_3.X + \sigma_4 = (t^5 - \sigma_1.t^4 + \sigma_2.t^3 - \sigma_3.t^2 + \sigma_4.t - \sigma_5).\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{S_k}{t^{k+1}} + o\Big(\frac{1}{t^{n+1}}\Big)\Big)$
quand t tend vers l'infini.
La mention « quand t tend vers l'infini », c'est pour que le petit o ait un sens, sinon, il y a un reste sous forme d'intégrale impossible à écrire simplement.
Écrivons cette formule pour n pas trop grand :
$5.t^4 - 4.\sigma_1.t^3 + 3.\sigma_2.t^2 - 2.\sigma_3.t + \sigma_4 = (t^5 - \sigma_1.t^4 + \sigma_2.t^3 - \sigma_3.t^2 + \sigma_4.t - \sigma_5).\Big(\frac{S_0}{t} + \frac{S_1}{t^2} + \frac{S_2}{t^3} + \frac{S_3}{t^4} + \frac{S_4}{t^5} + o\Big(\frac{1}{t^5}\Big)\Big)$
$(t \to +\infty)$
avec bien sûr $S_0 = a^0 + b^0 + c^0 + d^0 + e^0 = 5$.
On identifie de chaque côté les termes en fonction des puissances de t

t^4	5	S_0
t^3	$-4.\sigma_1$	$S_1 - \sigma_1.S_0$
t^2	$3.\sigma_2$	$S_2 - \sigma_1.S_1 + \sigma_2.S_0$
t	$-2.\sigma_3$	$S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - \sigma_3.S_0$
1	σ_4	$S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0$

L'identification donne
- $S_0 = 5$, ce n'est pas un scoop.

• $-4.\sigma_1 = S_1 - 5.\sigma_1$ d'où $\sigma_1 = S_1$, nihil novi sub sole
• $3.\sigma_2 = S_2 - (\sigma_1)^2 + 5.\sigma_2$, rien de neuf non plus : $(S_1)^2 = S_2 + 2.\sigma_2$.
• $-2.\sigma_3 = S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - 5.\sigma_3$ c'est déjà un peu plus intéressant :
$(a^3 + \ldots + e^3) - (a + \ldots + e).(a^2 + \ldots e^2) + (a.b + a.c + \ldots + d.e).(a + \ldots + e) = 3.(a.b.c + \ldots + c.d.e)$
Et la dernière relie un peu toutes les autres, mais avec $(a^4+b^4+\ldots+e^4)$ et des $(a.b+a.c+\ldots d.e).(a^2+\ldots+e^2)$ et autres termes homogènes.

On doit trouver une belle formule avec un déterminant.
La démarche bourrine de Terminale constiste à calculer S_4, à calculer le déterminant et à comparer les deux objets.
Vous n'irez jamais loin en « rasonnant » comme ça.
Regardez ce qu'on a obtenu plus haut :

$S_0 = 5$
$S_1 - \sigma_1.S_0 = -4.\sigma_1$
$S_2 - \sigma_1.S_1 + \sigma_2.S_0 = 3.\sigma_2$
$S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1 - \sigma_3.S_0 = -2.\sigma_3$
$S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 - \sigma_3.S_1 + \sigma_4.S_0 = \sigma_4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4.\sigma_1 \\ 3.\sigma_2 \\ -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 \end{pmatrix}$$

Ca s'appelle un système de Cramer, et ça se résout par les formules du même nom. En particulier
$$S_4 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & \sigma_4 \end{vmatrix}$$
En plus petit, on avait aussi $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -\ 4.\sigma_1 \\ 3.\sigma_2 \end{pmatrix}$

puis $S_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 3.\sigma_2 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^2 - 2.\sigma_2$

Mais les formules de Newton se généralisent avec
$$a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & -\sigma_5 \end{vmatrix}$$
puis $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4.\sigma_1 \\ \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3.\sigma_2 \\ -\sigma_1 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & 0 & -2.\sigma_3 \\ \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & 0 & \sigma_4 \\ -\sigma_5 & \sigma_4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 1 & -\sigma_5 \\ 0 & -\sigma_5 & \sigma 4 & -\sigma_3 & \sigma_2 & -\sigma_1 & 0 \end{vmatrix}$ puisque σ_6 est nul.

Il existe aussi les formules renversées qui calculent les coefficients σ_k du polynôme à l'aide des sommes de puissances des racines :

telles que $\sigma_2 = \dfrac{1}{2!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 \\ S_2 & S_1 \end{vmatrix}$, $\sigma_3 = \dfrac{1}{3!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 \\ S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$,$\sigma_4 = \dfrac{1}{4!}.\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 \\ S_3 & S_2 & S_1 & 3 \\ S_4 & S_3 & S_2 & S_1 \end{vmatrix}$