



Lycée Charlemagne

.2018.— MPSI2 —.2019.

MARDI 28 MAI



IS29



♥ 0 ♥ Montrez que si f et g sont convexes et g croissante, alors $g \circ f$ est convexe. 1 pt.

♥ 1 ♥ Montrez que si une application convexe prend la même valeur en trois points distincts, alors elle est constante sur le segment qu'ils délimitent. 3 pt.

♥ 2 ♥ Donnez le développement limité d'ordre 3 en $t = \frac{\pi}{2}$ de $\cos\left(\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$. 3 pt.

♥ 3 ♥ Donnez le développement limité d'ordre 3 en $t = 0$ de $\text{Arctan}(e^t)$ (commencez par dériver). 3 pt.

♥ 4 ♥ Prolongez par continuité en 0 $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ et donnez alors sa dérivée en 0 (notée b) puis la position du graphe par rapport à sa tangente. Vérifiez que $f - b \cdot \text{Id}$ est paire. Donnez le coefficient de t^9 dans le développement limité de f en 0. 4 pt.

◇ 0 ◇ Montrez : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2 + \cos^2(\theta)} \cdot d\theta = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$. 2 pt. Montrez : $\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(t)}{(1+t)^2} \cdot dt = \frac{\ln(2)}{4}$. 3 pt.

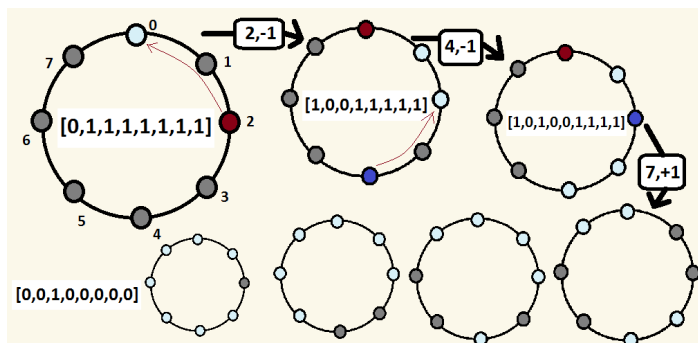
◇ 1 ◇ Donnez une base du noyau et une base de l'image de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$ après avoir vérifié que c'est bien un endomorphisme de $(M_{2,2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$. 3 pt.

◇ 2 ◇ Il me semble qu'on a $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$. Indiquez déjà ce qu'on est en train d'étudier. Et ensuite, prouvez le, ou invalidez le par un contre-exemple. 3 pt.

◇ 3 ◇ Construisez sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un endomorphisme de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ de noyau $\text{Vect}(\vec{i} + \vec{j})$, d'image d'équation $x - y + 2z = 0$ et vérifiant $f(\vec{i}) = 2 \cdot \vec{i} - \vec{k}$. Déterminez $\dim(\text{Ker}(f \circ f))$, $\dim(\text{Ker}(f \circ f \circ f))$. 4 pt.

◇ 4 ◇ Montrez que $f \mapsto f'' + f'$ est un endomorphisme de $\text{Vect}(ch, sh, ch^2, sh^2, ch \cdot sh)$. Donnez la dimension de son noyau et de son image. 4 pt.

♣ 0 ♣ ALEX THAO (MPSI2, MP*, EIVP), présent à la matinée des anciens, m'a suggéré l'exercice suivant, qui peut donner plein de questions : le solitaire circulaire ou sOlitaire. On a un anneau/cadran type horloge à n sommets (*ce sera $\text{range}(n)$*). Toutes les cases en sont remplies sauf la première, celle de midi (*l'était initial est donc $[0, 1, 1, \dots, 1]$*). A chaque déplacement, un pion saute au dessus d'une case occupée, et retombe sur la case qui suit (*impérativement libre*). On enlève alors le pion de cette case. Par exemple, on passe de $[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ à $[1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ par l'instruction $2, -1$ (*le pion 2 saute dans le sens négatif*).



Écrivez une procédure **Saut** qui prend en entrée L , **Index** et **Sens** (*la liste, l'indice du pion qui saute, et le sens 1 ou -1 dans lequel il saute*), vérifie que le coup est jouable et retourne la nouvelle liste. Exemple $\text{Saut}([1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], 6, -1)$ donne $[1, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0]$ tandis que $\text{Saut}([1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1], 1, -1)$ donne un message d'erreur. 3 pt.

Résolvez le sOlitaire partant de $[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$ et aboutissant à une liste avec un seul 1 en indiquant simplement la liste des **Index** et des **Sens**. 3 pt.



Comme ça se passe en $\frac{\pi}{2}$, on pose $t = \frac{\pi}{2} + h$ et on commence au plus profond de la formule

$$\sin\left(\frac{t}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{48} + o(h^3)\right)$$

On multiplie par $\pi \cdot \sqrt{2}$: $\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{2}\right) = \sin(\pi + u)$ avec $u = \pi \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{48} + o(h^3)\right)$.

On identifie que u tend vers 0, on peut utiliser

$$\cos(\pi + u) = -\cos(u) = -1 + \frac{u^2}{2} + o(u^3) \text{ avec}$$

$$o(u^3) = o(h^3).$$

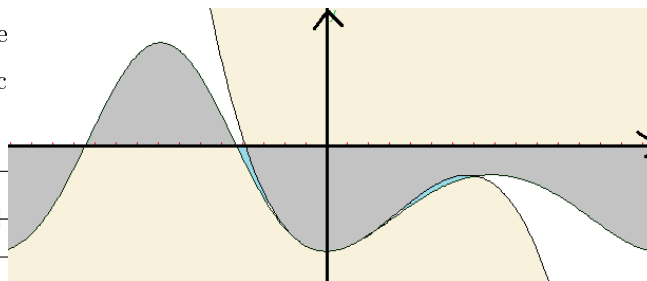
On a juste besoin des termes pertinents de

$$u^2 : u^2 = \pi^2 \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)\right)^2 \text{ donc}$$

$$u^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot h^2 - \frac{\pi^2}{8} \cdot h^3 + o(h^3). \text{ On somme :}$$

$$\cos\left(\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) = -1 + \frac{\pi^2}{8} \cdot h^2 - \frac{\pi^2}{16} \cdot h^3 +$$

et surtout, on n'y touche plus.



L'application $t \mapsto \text{Arctan}(e^t)$ est de classe C^∞ en tout point de $\mathbb{R}$ et y admet donc des développements limités à tous ordres. En 0, la valeur est $\text{Arctan}(1)$ c'est à dire $\frac{\pi}{4}$. En notant f cette application, elle a pour dérivée

$$f = x \mapsto \frac{e^x}{1 + e^{2x}} \text{ et même } f = x \mapsto \frac{1}{2 \cdot \cosh(x)} \text{ en divisant haut et bas par } e^x.$$

On fait un développement limité de f en 0 à l'ordre 4 : $f'(x) = \frac{1}{2(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))}$. En utilisant la formule

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \text{ avec } u \text{ qui tend bien vers } 0, \text{ on trouve } f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right).$$

On rassemble les morceaux et on intègre : $\text{Arctan}(e^t) - \text{Arctan}(e^0) = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^t \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)\right) \cdot dx$.

$$\text{On recolle : } \boxed{\text{Arctan}(e^t) = \frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^5}{48} + o(t^5)_{t \rightarrow 0}}$$

L'application $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ n'est pas définie en 0 mais s'y prolonge par la valeur $\boxed{1}$ (inverse d'un taux d'accroissement de l'exponentielle en 0, c'est si con !).

Pour la dérivabilité, on peut étudier $\frac{\frac{t}{e^t - 1} - 1}{t} = \frac{t - e^t + 1}{t \cdot (e^t - 1)} = \frac{t - \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) + 1}{t \cdot (1 + t + o(t) - 1)}$.

Le numérateur est équivalent à $-\frac{t^2}{2}$ et le dénominateur à t^2 . Le quotient tend vers $-\frac{1}{2}$. Les taux d'accroissement ont une limite, l'application est dérivable.

Qui est passé par une recherche de la limite de $t \mapsto \frac{e^t - 1 - t \cdot e^t}{(e^t - 1)^2}$ en allant ensuite chercher le théorème de la limite de la dérivée ?

On cherche ensuite le signe de $\frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$ pour connaître la position du graphe par rapport à sa tangente.

On réduit au dénominateur commun : $\frac{2.t - 2.e^t + 2 + t.e^t - t}{2.(e^t - 1)}$. On cherche le signe du numérateur grâce à un développement limité :

$$2 - 2.e^t + t + t.e^t = 2 - 2 - 2.t - t^2 - \frac{t^3}{3} + t + \left(t + t^2 + \frac{t^3}{2}\right) + o(t^3) = \frac{t^3}{6} + o(t^3)_{t \rightarrow 0}$$

Le numérateur sera du signe de t , et le dénominateur aussi $(e^t - 1)$. Le quotient est toujours positif. Le graphe est au dessus de sa tangente.

On aurait pu aussi écrire a priori $\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + c.t^2 + o(t^2)$, effectuer un produit en croix $t = \left(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{2} + c.t^2 + o(t^2)\right)$ et identifier. On trouvait alors $\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + o(t^2)_{t \rightarrow 0}$ et conclure « graphe localement convexe ».

On doit étudier $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$ et prouver sa parité (domaine de définition symétrique).

On compare donc $\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2}$ et $\frac{-t}{e^{-t} - 1} - \frac{t}{2}$ en calculant leur différence :

$$\frac{t}{e^t - 1} + \frac{t}{2} + \frac{t}{e^{-t} - 1} + \frac{t}{2} = t \cdot \left(1 + \frac{1}{e^t - 1} + \frac{1}{e^{-t} - 1}\right).$$

En réduisant au dénominateur commun, on trouve $t \cdot \frac{(e^t - 1) \cdot (e^{-t} - 1) + (e^{-t} - 1) + (e^t - 1)}{(e^t - 1) \cdot (e^{-t} - 1)}$ ce qui fait bien 0.

Comme $f - a.Id$ est paire, le coefficient en t^9 du développement limité en 0 est nul.

On ajoute $a.t$ qui ne change en rien le coefficient de t^9 : il reste nul.

Dans $\frac{t}{e^t - 1}$ il y a un terme constant, un terme en t et ensuite que des termes d'exposant pair.

Pour information : $\frac{t}{e^t - 1} = 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} - \frac{t^4}{720} + \frac{t^6}{30240} - \frac{t^8}{1209600} + \frac{t^{10}}{47900160} - 691 \cdot \frac{t^{12}}{1307674368000} + o(t^{13})$ avec des coefficients qui sont des célébrités des mathématiques : les nombres de Bernoulli.



Une intégrale.

IS29

L'application étudiée est continue sur le segment l'intégrale existe. Avec les règles de Bioche, on pose $c = \cos(\theta)$.

On a alors $\sin(2.\theta).d\theta = 2.\sin(\theta).\cos(\theta).d\theta = -2.c.dc$. L'intégrale devient $\int_1^0 \frac{-2.c}{2 + c^2} .dc$ On intègre en logarithme : $\ln(2 + c^2)$ et on trouve ce qui est demandé.

Pour $\int_0^1 \frac{\text{Arctan}(t)}{(1+t)^2} .dt$ (existence sans problème), on intègre par parties :

$\frac{\text{Arctan}(t)}{(1+t)^2}$	$\hookleftarrow$	$\frac{1}{1+t^2}$
$\frac{1}{(1+t)^2}$	$\hookrightarrow$	$-\frac{1}{1+t}$

On a un terme rectangle de valeur $-\frac{\pi}{8}$, et on décompose $\frac{1}{(1+t^2).(1+t)} = \frac{1}{2.(1+t)} + \frac{1-t}{2.(1+t^2)}$, on intègre en $\frac{1}{2} \cdot \ln(1+t)$, $-\frac{1}{4} \ln(1+t^2)$ et $\frac{\text{Arctan}(t)}{2}$.

Les morceaux donnent au final $\left[\frac{\ln(1+t)}{2} - \frac{\ln(1+t^2)}{4} + \frac{\text{Arctan}(t)}{2} - \frac{\text{Arctan}()}{1+t} \right]_{t+}^{t=1}$.



Convexité.

IS29

On prend f et g convexes, et g croissante.

On se donne x et y quelconques et t entre 0 et 1 (oubliez que t est entre 0 et 1, et à quoi sert d'écrire des formules qui devraient parfois alors être dans l'autre sens) :

$f((1-t).x + t.y) \leq (1-t).f(x) + t.f(y)$ par convexité de f

$g(f((1-t).x + t.y)) \leq g((1-t).f(x) + t.f(y))$ par croissance de g

On applique la convexité de g au couple $(f(a), f(b))$ (et au même réel t de $[0, 1]$)

$g(f((1-t).x + t.y)) \leq g((1-t).f(x) + t.f(y)) \leq (1-t).g(f(a)) + t.g(f(b))$ on reconnaît la convexité de $x \mapsto g(f(x))$.

La démonstration par $(g \circ f)'' = ((g' \circ f).f')' = (g' \circ f).f'' + (g'' \circ f).(f')^2$ n'est pas totalement fautive si vous vivez dans l'univers idéalisé d'avant le bac où tout est dérivable autant de fois que le physicien le veut pour mener ses calculs sans avoir à réfléchir.

On suppose que f convexe prend la même valeur en trois points a , b et c , avec $a < b < c$ pour se simplifier la vie. Ça fait beaucoup de cordes horizontales. On va montrer que f est constante sur tout $[a, b]$.

On a donc $f(a) = f(b) = f(c)$, qu'on va noter λ . On prend x entre a et b , il faut montrer $\lambda = f(x)$.

Commençons par le cas où x est entre a et b . On a déjà $a < x < b$ donc $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & x & b \\ \lambda & f(x) & \lambda \end{vmatrix} \geq 0$, ce qui donne

$$f(x) \leq \frac{x-a}{b-a} \cdot \lambda + \frac{b-x}{b-a} \cdot \lambda = \lambda \text{ (le graphe est sous la corde).}$$

Mais avec le triplet $x < b < c$ on a $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & b & b \\ f(x) & \lambda & \lambda \end{vmatrix} \geq 0$ d'où cette fois $f(x) \geq \lambda$ (au dessus de la corde car avant la corde).

Par antisymétrie : $f(x) = \lambda$.

Pour x entre b et c , le triplet (b, x, c) donne $f(x) \leq \lambda$, et le triplet (a, b, x) donne $f(x) \geq \lambda$. On a encore $f(x) = \lambda$.

Que x soit entre a et b ou entre b et c , on a toujours $f(x) = \lambda$.



Endomorphisme sur $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

IS29

L'application prend une matrice carrée de taille 2 et calcule une nouvelle matrice carrée de taille 2.

Ça c'est pour endo. Trop d'élèves oublient que pour « endo-morphisme », il y a deux choses à prouver. Les mathématiques seraient elles la seule matière où une question peut amener une réponse en plusieurs points argumentés successivement ? Non, mais elle est peut-être la seule dans le domaine qu'on appelle « sciences ». C'est pourtant bien ce que vous aurez à faire quand vous serez à la tête d'un projet...

Pour la linéarité, on prend deux matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et un réel λ

On compare alors $\lambda \cdot \begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \lambda \cdot a + \lambda \cdot b & \lambda \cdot b + \lambda \cdot c \\ \lambda \cdot c + \lambda \cdot d & \lambda \cdot d + \lambda \cdot a \end{pmatrix}$: il y a égalité

On compare aussi $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \beta+\gamma \\ \gamma+\delta & \delta+\alpha \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a+\alpha+b+\beta & b+\beta+c+\gamma \\ c+\gamma+d+\delta & d+\delta+a+\alpha \end{pmatrix}$: égalité aussi.

C'est le genre de question qui rapporte des points sans qu'on ait à réfléchir en écrivant. Simplement, il faut l'écrire. Et ici, on ne peut pas mettre sous une forme matricielle $M \mapsto K \cdot M$ car il faudrait écrire la matrice M sous forme d'une colonne et K serait elle même une matrice de taille 4 sur 4. L'espace $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est en effet de dimension 4.

On cherche le plus simple pour l'élève qui sait résoudre des équations et a du mal dès qu'il s'agit de voir bouger des variables (il est plus simple de taper sur des nombres et des égalités que de les laisser vivre leur vie) :

On cherche les matrices d'image nulle : $\begin{pmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ d'inconnue $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

On trouve $a = c$ et $b = d = -a$: $\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ a & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$ C'est un espace de dimension 1.

L'ensemble image sera par soustraction de dimension 3.

On prend ensuite une base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et on lui applique f (c'est le nom que je viens de donner à notre endomorphisme) :

$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de l'image.

Mais on sait qu'elle est liée par au moins une relation : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple (c'est le noyau qui le dit).

On élimine un vecteur inutile : $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Ces trois derniers vecteurs de l'espace d'arrivée $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ forment une famille libre (sinon on aurait encore d'autres vecteurs dans le noyau), c'est une base de l'image.

Mais il y en a d'autres. Elles seront toutes de même cardinal, et formées de vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x & y \\ z & x-y+z \end{pmatrix}$ puisque si on a posé $x = a+b$, $y = b+c$ et $z = c+d$ il reste naturellement $d+a = x-y+z$.



Une équivalence à étudier $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$

IS29

On donne trois espaces vectoriels $(E, +, \cdot)$, $(F, +, \cdot)$ et $(G, +, \cdot)$ et deux applications linéaires f et g (f de

$(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ et g de $(F, +, .)$ dans $(G, +, .)$. On va comparer des noyaux, sous-espaces vectoriels de $(E, +, .)$ sous des hypothèses sur des sous-espaces vectoriels de $(F, +, .)$.

On va tenter de montrer l'équivalence, et si on achoppe à un moment sur une difficulté, on tentera de s'en inspirer pour construire un contre-exemple...

○ $\boxed{\mathbb{H}}$ On suppose $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$. $\boxed{?}$ On va montrer $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$.

• On a déjà évidemment $\vec{0} \in \text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)$ puisque ce sont des sous-espaces vectoriels de $(F, +, .)$.

• Reste à prouver qu'il n'y a que lui. Prenons un vecteur $\vec{b}$ à la fois dans $\text{Im}(f)$ et $\text{Ker}(g)$ (objectif : il est nul).

Par appartenance à $\text{Im}(f)$, $\vec{b}$ s'écrit $f(\vec{a})$ pour un certain $\vec{a}$ de $(E, +, .)$.

Par appartenance à $\text{Ker}(g)$, il vérifie $g(\vec{b}) = \vec{0}_G$.

On incorpore : $g(f(\vec{a})) = \vec{0}_G$. On reconnaît $\vec{a} \in \text{Ker}(g \circ f)$.

On prend la peine d'utiliser l'hypothèse : $\vec{a} \in \text{Ker}(f)$.

Mais alors on a $f(\vec{a}) = \vec{0}_F$, c'est à dire $\vec{b} = \vec{0}_F$. On a montré une implication.

○ $\boxed{\mathbb{H}}$ On suppose $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g) = \{\vec{0}\}$. $\boxed{?}$ On va montrer $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)$.

• On a déjà évidemment $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ puisque la relation $f(\vec{a}) = \vec{0}_F$ entraîne $g(f(\vec{a})) = g(\vec{0}_F) = \vec{0}_G$ par linéarité de g .

• On prend maintenant $\vec{a}$ dans $\text{Ker}(g \circ f)$. Est-il dans $\text{Ker}(f)$?

On traduit : $g(f(\vec{a})) = \vec{0}_G$. On reconnaît que le vecteur $f(\vec{a})$ est dans $\text{Ker}(g)$. Mais par définition même il est dans $\text{Im}(f)$. Étant à la fois dans $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(f)$, il est contraint par hypothèse à être nul. On a donc $f(\vec{a}) = \vec{0}_F$, ce qui donne bien $\vec{a} \in \text{Ker}(f)$.

Finalement, l'énoncé ne disait pas de connerie.



Noyau et images imposés.

IS29

L'application f doit être linéaire de $(\mathbb{R}^3, +, .)$ dans lui-même. Elle doit vérifier $f(\vec{i} + \vec{j}) = \vec{0}$, $f(\vec{i}) = 2 \cdot \vec{i} - \vec{k}$ et tout vecteur image doit vérifier $x - y + 2z = 0$ (c'est le cas pour $2 \cdot \vec{i} - \vec{k}$).

Par linéarité : $f(\vec{j}) = -f(\vec{i}) = -2 \cdot \vec{i} + \vec{k}$. On peut choisir $f(\vec{k})$ comme on veut. Enfin, quand même pas nul, puisqu'il doit être dans le plan d'équation $x - y + 2z = 0$. Et il ne doit pas être colinéaire à $f(\vec{i})$ car sinon, l'ensemble image n'est que de dimension 1.

On peut prendre par exemple $f(\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j}$. On trouve alors, en développant $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$

$$f(\vec{a}) = x \cdot (2 \cdot \vec{i} - \vec{k}) + y \cdot (-2 \cdot \vec{i} + \vec{k}) + z \cdot (\vec{i} + \vec{j}) = (2x - 2y + z) \cdot \vec{i} + z \cdot \vec{j} + (-x + y) \cdot \vec{k} \text{ et } M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vous n'avez pas la même? C'est normal. On peut en trouver d'autres. Elles auront toutes la forme $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & a \\ 0 & 0 & a + 2c \\ -1 & 1 & c \end{pmatrix}$ avec une petite exigence sur a et c .

Ce qui est important : les deux premières colonnes sont opposées, et sur chaque colonne, la somme $x - y + 2z$ est nulle.

$$\text{On élève la matrice au carré pour connaître } f \circ f : M^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

La forme générale n'est pas géniale.

En tout cas, on aura $\dim(\text{Ker}(f^2)) = \dim(\text{Ker}(f^3)) = 2$.



Dérivation sur un ensemble.

IS29

On a un espace vectoriel fait d'applications $t \mapsto a \cdot \text{ch}(t) + b \cdot \text{sh}(t) + c \cdot \text{ch}^2(t) + d \cdot \text{sh}^2(t) + e \cdot \text{ch}(t) \cdot \text{sh}(t)$.

La transformation $f \mapsto f'' + f'$ est linéaire : $(f+g)'' + (f+g)' = (f''+f') + (g''+g')$ et $(\lambda \cdot f)'' + (\lambda \cdot f)' = \lambda \cdot (f''+f')$.

Il faut vérifier si elle va de $(E, +, .)$ dans lui-même en notant E l'espace vectoriel de l'énoncé.

Plutôt que de le vérifier sur $t \mapsto a \cdot \text{ch}(t) + b \cdot \text{sh}(t) + c \cdot \text{ch}^2(t) + d \cdot \text{sh}^2(t) + e \cdot \text{ch}(t) \cdot \text{sh}(t)$, qui met des variables partout, on le vérifie pour les vecteurs de la famille génératrice

f	ch	sh	ch^2	sh^2	$\text{ch} \cdot \text{sh}$
$f'' + f'$	$\text{ch} + \text{sh}$	$\text{ch} + \text{sh}$	$2 \cdot \text{ch}^2 + 2 \cdot \text{sh}^2 + 2 \cdot \text{ch} \cdot \text{sh}$	$2 \cdot \text{ch}^2 + 2 \cdot \text{sh}^2 + 2 \cdot \text{ch} \cdot \text{sh}$	$4 \cdot \text{ch} \cdot \text{sh} + \text{ch}^2 + \text{sh}^2$

Chacun a une image dans $(E, +, .)$, il en sera de même des combinaisons linéaires.

Comme plusieurs éléments ont la même image, on se doute que l'ensemble image sera de dimension plus petite que prévu.

On perd au moins deux dimensions.

- $ch - sh$ est dans le noyau (car ch et sh ont la même image).
- $h^2 - sh^2$ est aussi dans le noyau.

On note qu'il s'agit de $t \mapsto e^{-t}$ et de $t \mapsto 1$.

Le noyau est formé d'applications vérifiant $f'' + f' = 0$. On a une équation différentielle linéaires d'ordre 2. Les solutions forment donc un espace vectoriel de dimension 2 (et peut être moins, si on avait eu par exemple des solutions comme $\cos$ et $\sin$, elle n'étaient pas dans $(E, +, \cdot)$). Le noyau est exactement de dimension 2 (ici, le spectre est $\{-1, 0\}$ et les solutions sont $\text{Vect}(t \mapsto e^{-t}, t \mapsto e^{0 \cdot t})$).

L'ensemble image n'est plus que de dimension 3.



Solitaire en cercle.

IS29

On nous donne un Index, et un Sens. Les cases concernées sont Index, Index+Sens et Index+2*Sens.

Il faut vérifier si les deux premières sont occupées et la troisième libre.

Ensuite, on change la valeur de chacune des trois.

```
def Saut(L, Index, Sens) :
...Saut = Index+Sens)%n #modulo pour éviter les débordements
...Arrivee = (Index+2*Sens)%n #même remarque
...if L[Index] == 0 or L[Saut] == 0 or L[Arrivee] == 1 :
.....return('Erreur')
...else : #mais ce else est inutile, puisque le if a fait sortir
.....L[Index] = 0 #le pion s'en va
.....L[Saut] = 0 #ce pion est détruit
.....L[Arrivee] = 1 #un pion arrive
.....return(L)
```

En observant qu'on écrit trois fois une ligne d'attribution, on pourrait aussi créer

```
def Saut(L, Index, Sens) :
...def Modifie(i) : #procédure qui va servir plusieurs fois
.....L[i] = 1-L[i] #passe de 0 à 1 et de 1 à 0
...Saut = Index+Sens)%n
...Arrivee = (Index+2*Sens)%n
...if L[Index] == 0 or L[Saut] == 0 or L[Arrivee] == 1 :
.....return('Erreur')
...for i in [Depart, Saut, Arrivee] :
.....Modifie(i) #on utilise la procédure
...return(L)
```

Avantage de cette démarche : si ensuite, on veut que l'affichage à l'écran soit modifié, on le fait dans la procédure *Modifie()* et pas trois fois de suite sur les lignes concernées dans la première version. Bref, on fait de l'informatique. Quand une instruction revient pour la troisième fois, on en fait une procédure, avec paramètre. Ça évite les programmes spagettis.

On résout le sOLitaire à dix fichets :

L	index	sens
[0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]	2	-1
[1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]	4	-1
[1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1]	6	-1
[1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 1]	8	-1
[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]	8	-1
[1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1]	9	1
[0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	1	1
[0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 0, 0]	3	1
[0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0]	5	1
[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0]	5	1

M.P.S.I.2 2018 33 points 2019 CHARLEMAGNE

IS29