



Lycée Charlemagne

.2018.–

MPSI2

–.2019.

Vendredi 14 juin



DS11



Bintou vient de faire une partie de puissance 4 ou morpion contre Aïssata qui s'est conclue par un nul. Il n'y a aucun alignement de quatre croix ni de quatre cercles, que ce soit en ligne, colonne ou diagonale. Version Bintou : Retrouvez le contenu des cases qui manquent. Combien de solutions ?

χ	$\bigcirc$	χ	$\bigcirc$	χ
χ	χ		$\bigcirc$	
	χ			
χ	$\bigcirc$			$\bigcirc$
$\bigcirc$				$\bigcirc$

Version I.P.T. : une matrice de taille 5 sur 5 contient des 0 et des $\&$, il faut vérifier qu'il n'y a aucun alignement de quatre pions.



Un classique

DS11

On veut montrer le résultat suivant : si deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ sont semblables en tant que matrices à coefficients complexes (c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice P à coefficients complexes) alors elles le sont aussi en tant que matrices à coefficients réels (c'est à dire par l'intermédiaire d'une matrice R à coefficients réels).

Regardons un exemple $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Arrangez vous pour que A ait la même trace et le même déterminant que B . 1 pt.

Vérifiez que A est semblable à B via la matrice P . Trouvez une matrice réelle R telle que A soit semblable à B via R . 3 pt.

Dans le cas général, un élève propose la démonstration suivante :

on part de $A = P^{-1}.B.P$, on écrit $P = R+i.S$, on obtient $(R+i.S).A = B.(R+i.S)$ d'où $R.A = B.R$ et on a trouvé R ;

Complétez les étapes qui manquent dans son raisonnement (il y a des notations à rendre rigoureuses et il y a une grosse lacune sur la fin). 5 pt.



Trois preuves

DS11

soient A , B et C trois matrices carrées de même format avec C non nulle, vérifiant $A.C = C.B$. Il faut montrer que A et B ont au moins une valeur propre commune.

On a un résultat général :

Rappel : • polynôme caractéristique de A carrée de format n sur n : $\chi_A(X) = \det(A - X.I_n)$

• vecteur propre de A : vecteur U non nul tel que $A.U$ et U soient colinéaires

• valeur propre de A : racine du polynôme caractéristique

◦ nombre λ tel qu'il existe au moins un vecteur U non nul

vérifiant $A.U = \lambda.U$

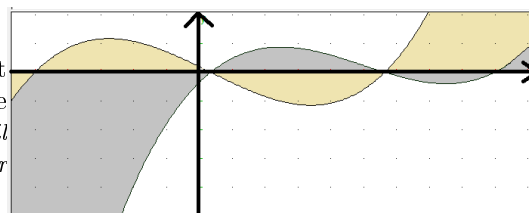
Hypothèse utile : montrez qu'on pourrait avoir $A.C = C.B$ sans que A , B et C soient carrées de même format. 1 pt.

Cas particulier trop simple : montrez que si C est inversible, alors A et B ont les mêmes valeurs propres. 1 pt.

Exemple :

$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 29 & -8 & -18 \\ -23 & 13 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -22 & 6 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\chi_A = -X^3 + X^2 + 28.X - \dots$	$\chi_B = -X^3 + 15.X^2 + \dots + 18$	$rg(C)$

Complétez A et B , montrez $A.C = C.B$, calculez χ_A et χ_B et $rg(C)$, et vérifiez que A et B ont une valeur propre commune (il n'y a pas forcément de racine évidente, il faudra éventuellement appliquer l'algorithme d'Euclide pour chercher leur p.g.c.d.). 5 pt.



• **Méthode 1.** Un théorème que vous démontrerez en Spé (par récurrence) dit "toute matrice complexe B est semblable à une matrice triangulaire". On écrira donc ici $B = P.T.P^{-1}$ avec T triangulaire supérieure (t_i^k nul pour $i > k$). Montrez alors $A'.C' = C'.T$ avec $A' = P^{-1}.A.P$ et $C' = T^{-1}.C.T$. Montrez que la première colonne non nulle de C' donne un vecteur propre de A de valeur propre t_k^k . Déduisez que A' et T ont une valeur propre commune. Concluez que A et B ont une valeur propre commune. 6 pt.

• **Méthode 2.** Prouvez qu'il existe P et Q inversibles et r entre 1 et n vérifiant $C = P.J.Q$ avec $J = [(i=k)*(i < r) \text{ for } k \text{ in range } n] \text{ for } i \text{ in range } n]$ (en Python dans le texte). On pose alors $A' = P^{-1}.A.P$ de terme général α_i^k et $B' = Q.B.Q^{-1}$ de terme général β_i^k . Montrez alors $\alpha_i^k = \beta_i^k$ pour i et k plus petits que r . Montrez $\alpha_i^k = 0$ pour i plus grand que r . Quel résultat similaire a-t-on pour les β_i^k ? Déduisez que le polynôme caractéristique de $(\alpha_i^k)_{\substack{i \leq r \\ j \leq r}}$ divise $\chi_{(A')}$ et $\chi_{(B')}$. Concluez. 6 pt.

• **Méthode 3.** On suppose que A et B n'ont aucune valeur propre commune. Montrez pour tout λ de $\mathbb{C}$ et tout p de $\mathbb{N}$: $(A - \lambda.I_n)^p.C = C.(B - \lambda.I_n)^p$. Montrez que si λ est valeur propre de B , alors pour tout p on a $Ker(b - \lambda.Id) \subset Ker(c)$ en posant $b = X \mapsto B.X$ et $c = X \mapsto C.X$. En faisant parcourir à λ l'ensemble de toutes les valeurs propres de B , déduisez $\mathbb{R}^n \subset Ker(c)$. Concluez. 6 pt.

	Trigonalisation	DS11
---	------------------------	------

0 On veut trigonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$. Calculez son polynôme caractéristique. 1 pt.

1 Montrez en étudiant ses variations qu'il admet trois racines réelles. Déduisez que M se diagonalise sur $\mathbb{R}$ (mais ne cherchez pas à la diagonaliser). 3 pt.

M est elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$. 1 pt.

2 Montrez que M n'admet pas de valeur propre "évidente", c'est à dire qu'aucun rationnel $\frac{p}{q}$ ne peut être racine de son polynôme caractéristique (on pourra montrer qu'on a $p^3 + 5.p.q^2 - 6.p^2.q = q^3$, qu'il faut que p divise q et que q divise p). 2 pt.

3 Conscient de la difficulté, on décide que le corps sur lequel on travaille est celui des entiers de 0 à 6 pour l'addition et la multiplication modulo 7. Donnez alors son spectre (entiers de 0 à 6), et montrez qu'elle ne se diagonalise pas. Montrez qu'elle est quand même semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. 4 pt.

	Un peu d'analyse	DS11
---	-------------------------	------

Montrez : $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{5/2}} = \frac{2}{3}$. 4 pt.

Donnez le développement limité d'ordre 4 en 1 de $\frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^{5/2}}$. 4 pt.

Lycée Charlemagne

.2018. –

MPSI2

–.2019.

Correction



DS11



Bintou et Aïssata.

DS11

Au moins une des case se déduit tout de suite pour qu'il n'y ait pas d'alignement de trois $\mathcal{O}$

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	là		
χ	$\mathcal{O}$			$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Mais alors, pour éviter un alignement de trois croix, une nouvelle case est forcée.

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ		$\mathcal{O}$	
	χ	χ		
χ	$\mathcal{O}$		là	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$				$\mathcal{O}$

Et le jeu se poursuit avec le même argument à chaque fois, jusqu'à

χ	$\mathcal{O}$	χ	$\mathcal{O}$	χ
χ	χ	$\mathcal{O}_3$	$\mathcal{O}$	χ_7
$\mathcal{O}_5$	χ	χ_0	χ_4	$\mathcal{O}_6$
χ	$\mathcal{O}$	χ_2	$\mathcal{O}_1$	$\mathcal{O}$
$\mathcal{O}$	$\mathcal{O}_8$			$\mathcal{O}$

Les indices indiquent l'ordre de remplissage.

Il reste deux cases, qu'on remplit comme on veut du moment qu'il n'y a pas deux $\mathcal{O}$. Sauf qu'il n'y a pas non plus de χ dans la dernière à cause d'une diagonale. Finalement, il ne reste qu'un choix

χ	$\mathcal{O}$
--------	---------------

On peut compter les χ et les $\mathcal{O}$ afin de savoir qui a commencé et terminé.

Pour information : $\frac{\sqrt{2}}{(1+1+2h+h^2)^{5/2}} = \frac{1}{4} - \frac{5h}{8} + \frac{25h^2}{32} - \frac{35h^3}{64} + \frac{35h^4}{512} + o(h^4)_{h \rightarrow 0}$.

Et comme primitive, on arrive à $x \mapsto \frac{4x^3 + 6}{3(1+x^2)^{5/2}}$.



$A.C = C.B$; cas particuliers.

DS11

La relation $A.C = C.B$ impose certaines relations sur les formats de A , B et C . Mais pas tant que ça. On note n_A et c_A le nombre de lignes et de colonnes de A , on fait de même pour B et C .

Pour que le produit $A.C$ existe : $c_A = n_C$.

Pour que le produit $C.B$ existe : $c_C = n_B$.

Pour que $A.C$ ait autant de lignes que $C.B$: $n_A = n_C$.

Pour que $A.C$ ait autant de colonnes que $C.B$: $c_C = c_B$.

Déjà, avec le point de vue de l'algébriste : quatre équations pour six inconnues, on a de la marge.

On peut choisir deux des dimensions et les autres suivent, mais elles peuvent être distinctes.

On s'en sort avec un contre-exemple :

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix} \text{ qui donne } \begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}.$$

On commence par le cas où C est inversible dans la formule $A.C = C.B$. Mais alors on a $A = C.B.C^{-1}$ en multipliant à droite par C . Il s'ensuit que A et B sont semblables. Elles ont le même polynôme caractéristique et carrément les mêmes valeurs propres (racines dudit polynôme).

Proprement : $\chi_A(X) = \det(A - X.I_n) = \det(C.B.C^{-1} - X.I_n) = \det(C.(B - \lambda.I_n).C^{-1}) = \det(B - \lambda.I_n) \cdot \det(C) \cdot \det(C^{-1}) = \chi_B(X)$.

On nous donne $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 29 & -8 & -18 \\ -23 & 13 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -X^3 + X^2 + 28X - \dots$. Or, on sait que les coefficients du polynôme caractéristique sont la trace (somme des racines), le déterminant (produit des racines)

et la somme des mineurs de taille 2 (*somme des doublets*).

Ici, on veut donc : $\chi_A = -(X^3 - X^2 - 28.X + d)$, et donc $Tr(A) = 1$, $Min_2(A) = 28$.

En notant a et b les deux coefficients qui manquent : $-2 - 8 + b = 1$, le terme a_3^3 vaut 11.

On poursuit : $((-2).(-8) - 29.a) + ((-8).11 + 13.18) + ((-2).11 - (-1).(-23)) = 28$: a vaut 5.

On a alors $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 29 & -8 & -18 \\ -23 & 13 & 11 \end{vmatrix} = -10$ (*Sarrus*) et enfin $\chi_A = -X^3 + X^2 + 28.X - 10$

La pire des choses à faire selon le matheux : aborder de front avec la seule formule qu'on ait retenue en recopiant un livre : $\begin{vmatrix} -2-X & a & -1 \\ 29 & -8-X & -18 \\ -23 & 13 & b-X \end{vmatrix} = -X^3 + X^2 + 28.X - d$. Ensuite, on développe tout et on identifie. Ça conduit à la solution, mais c'est ce que l'esprit du matheux appelle démarche de collégien ou de lycée n'ayant pas dépassé la Terminale.

Pour B on procède de même : la trace (valant 15) donne $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -22 & 9 & 6 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. c'est ensuite le déterminant (*égal à -18*) qui nous donne l'autre valeur manquante : -2 (*la division tombe juste, merci*).

On calcule alors les trois déterminants de taille 2 : $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -22 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 56$.

On résume : $\chi_A = -X^3 + X^2 + 28.X - 10$ | $\chi_B = -X^3 + 15.X^2 - 56.X + 18$

On vérifie :

$$A.C = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 29 & -8 & -18 \\ -23 & 13 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 & 10 \\ 19 & 0 & 16 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -22 & 9 & 6 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix} = C.B$$

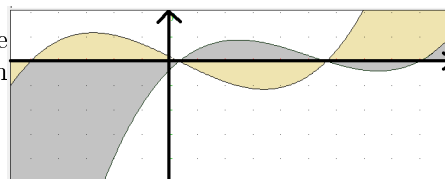
D'autre part, C est au moins de rang 2 (deux colonnes non proportionnelles).

Et à cause de sa colonne nulle, elle n'est pas de rang 3. C est de rang é.

Il faut ensuite trouver une racine commune à ces deux polynômes (*et peut être même deux, si on en croit le dessin*).

Si on a un peu d'astuce, on voit que B a une valeur propre évidente. Non pas en cherchant des entiers "petits". Mais en

regardant B : $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ -22 & 9 & 6 \\ 9 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.



Ça ne vous saute pas aux yeux ? 9 est valeur propre de B !

Mais si ! Et pas en disant : $-549 + 15.81 - 56.9 + 18 = 0$, ce serait bidon.

Le physicien dira $\begin{vmatrix} -2-9 & 0 & -2 \\ -22 & 9-9 & 6 \\ 9 & 0 & 8-9 \end{vmatrix} = 0$ car il y a une colonne nulle.

Le mathématicien dira : $f(\vec{j}) = 9.\vec{j}$ donc $\vec{j}$ est vecteur propre de valeur propre 9, ça se lit sur la colonne 2 de la matrice B .

Partant de cette information, on factorise donc $\chi_B = -X^3 + 15.X^2 - 56.X + 18 = (9-X).(X^2 + 6.X + 2)$

On factorise soit en posant une division euclidienne, soit en proposant/vérifiant, mais si possible en évitant le $(X-9).(a.X^2 + b.X + c) = -X^3 + 15.X^2 - 56.X + 18$ qui est vraiment lourd lourd lourd comme un noyau d'unuoctium.

Il reste à voir si 9 est racine du polynôme χ_A (*non*), ou si $-3 + \sqrt{7}$ (*ou* $-3 - \sqrt{7}$) est racine de χ_A (*oui !*).

Mais sinon, il y a la preuve directe. On cherche le p.g.c.d. de χ_A et χ_B par algorithme d'Euclide, qui ne sera pas long car on part de polynômes de degré 3.

$$\begin{array}{l} -X^3 + 15.X^2 - 56.X + 18 \\ \text{reste} = 14.X^2 - 84.X + 28 \end{array} \left| \begin{array}{l} -X^3 + X^2 + 28.X - 10 \\ \text{quotient} = 1 \end{array} \right. \text{puis} \begin{array}{l} -X^3 + X^2 + 28.X - 10 \\ \text{reste} = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 14.X^2 - 84.X + 28 \\ \text{quotient} = -\frac{X}{14} - \frac{5}{14} \end{array} \right.$$

On aurait pu s'attendre à finir sur un reste de degré 1 (auquel cas on aurait eu une racine commune).

Mais ici, c'est mieux, le dernier reste non nul est $14.X^2 - 84.X + 28$ qui se factorise en $14.(X^2 - 6.X + 2)$.

χ_A et χ_B sont divisibles par ce polynôme : $\chi_A = -X^3 + X^2 + 28.X - 10 = (X^2 + 6.X + 2).(5 - X)$
 $\chi_B = -X^3 + 15.X^2 - 56.X + 18 = (X^2 + 6.X + 2).(9 - X)$

Les deux réels $3 - \sqrt{7}$ et $3 + \sqrt{7}$ sont valeurs propres communes de A et B .

Les plus pervers d'entre vous seront peut être allés chercher les racines de χ_A et χ_B par les formules de Cardan. Ce serait encore une piste horriblement calculatoire et ne prenant jamais son envol.

Heureusement, l'énoncé demande juste les valeurs propres (et même l'existence et pas la valeur), et ne demande pas les vecteurs propres...

Sinon, iriez vous chercher $\begin{pmatrix} 153 + 3.\sqrt{7} \\ 182 + 29.\sqrt{7} \\ 124 - 23.\sqrt{7} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 153 - 3.\sqrt{7} \\ 182 - 29.\sqrt{7} \\ 124 + 23.\sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 93 \\ -25 \\ 154 \end{pmatrix}$?



Méthode par trigonalisation.

DS11

On suppose donc qu'on peut écrire $B = P.T.P^{-1}$ avec T triangulaire (soit encore $B.P = P.T$ pour lequel je n'ai pas de mnémotechnie à vous proposer). On remplace dans l'hypothèse $A.C = C.B$ et on trouve $A.C = C.P.T.P^{-1}$. On multiplie à droite par P et à gauche par P^{-1} : $P^{-1}.A.C.P = P^{-1}.C.P.T$.

On insère $P.P^{-1}$ au bon endroit : $P^{-1}.A.P.P^{-1}.C.P = P^{-1}.C.P.T$.

On place des parenthèses : $(P^{-1}.A.P).(P^{-1}.C.P) = (P^{-1}.C.P).T$ et on reconnaît $A'.C' = C'.T$.

En fait, on a juste fait un changement de base pour rendre la matrice B triangulaire. On doit faire le même sur A et C pour préserver la relation $A.C = C.B$ qui devient en quelque sorte $A'.C' = C'.B'$.

On redescend au niveau des coefficients, une fois n'est pas forcément coutume :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^n \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1^1 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^n \\ \gamma_2^1 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_n^1 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 0 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}.$$

En particulier, on a donc $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^1 \\ \gamma_2^1 \\ \vdots \\ \gamma_n^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1^1 \cdot \gamma_1^1 \\ t_1^1 \cdot \gamma_2^1 \\ \vdots \\ t_1^1 \cdot \gamma_n^1 \end{pmatrix}$ en ne gardant qu'une colonne.

On a fort envie de dire tout de suite que l'on a une relation $A'.U = t_1^1.U$ qui dit que U est vecteur propre de A' .

Mais il y a un petit détail. Si ce vecteur est nul ? Il n'a pas le statut de vecteur propre. Et t_1^1 ne sera pas forcément valeur propre de A' .

Mais regardons le cas où tout ce vecteur est nul :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^n \\ 0 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1^2 & \dots & \gamma_1^n \\ 0 & \gamma_2^2 & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \gamma_n^2 & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 0 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n^n \end{pmatrix} \text{ et ne gar-}$$

dons que la seconde colonne de nos produits : $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^2 \\ \gamma_2^2 \\ \vdots \\ \gamma_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2^2 \cdot \gamma_1^2 \\ t_2^2 \cdot \gamma_2^2 \\ \vdots \\ t_2^2 \cdot \gamma_n^2 \end{pmatrix}$ car t_1^2

ne tombe que sur des réels nuls. De fait, c'est cette fois la deuxième colonne de C' qui devient vecteur propre de A' .

Et si elle est nulle ? On prend la suivante. Et ainsi de suite, jusqu'à trouver une colonne non nulle (la première) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_1^k & \dots & \gamma_1^n \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_2^k & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n^k & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \gamma_1^k & \dots & \gamma_1^n \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_2^k & \dots & \gamma_2^n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_n^k & \dots & \gamma_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^1 & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 0 & t_2^2 & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n^n \end{pmatrix}$$

En ne gardant que la $k^{ième}$ colonne, on a bien $\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \gamma_2^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix} = t_k^k \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1^k \\ \gamma_2^k \\ \vdots \\ \gamma_n^k \end{pmatrix}.$

Et cela prouve quoi ? Que le vecteur colonne ci dessus est vecteur propre (il est bien non nul, puisque C' a au moins une colonne non nulle sans quoi C serait nulle).

Mais surtout cela dit que t_k^k est une valeur propre de A' .

Et alors ? A et A' sont semblables (via P). Elles ont donc le même spectre.

Donc, le complexe t_k^k est valeur propre de A .

Mais il est aussi valeur propre de T :

$$\det(T - X.I_n) = \begin{vmatrix} t_1^1 - X & t_1^2 & \dots & t_1^n \\ 0 & t_2^2 - X & \dots & t_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_n^n - X \end{vmatrix} = (t_1^1 - X).(t_2^2 - X) \dots (t_n^n - X).$$

Et comme B et T sont semblables, t_k^k est aussi valeur propre de B .

Finalement, il y a au moins ce complexe qui est valeur propre de A et de B en même temps.

	Méthode par matrices équivalentes.	DS11
---	---	-------------

Cette fois, on a P et Q , on va donc parler de matrices équivalentes.

La première étape demande d'écrire $C = P.J.Q$. C'est le théorème d'isomorphisme entre supplémentaire du noyau et image.

Toute matrice est équivalente (changement de base au départ par Q et changement de base à l'arrivée par P) à une matrice de rang r , notée $J_{n,n,k}$ dans le cours.

Reste à se convaincre que `[(i==k)*(i<r) for k in range n] for i in range n` est bien une matrice du type indiqué.

On reconnaît déjà une matrice sous forme de liste de listes. Chaque `[(i==k)*(i<r) for k in range n]` est une liste de n réels, et on en copie n comme ça (pour l'indice de ligne i allant de 0 à $n-1$).

Sur chaque ligne, on fait avancer k et on calcule à chaque fois un booléen, qui vaut donc 0 ou 1 (produit de deux booléens, ceci force l'évaluation en entier).

Il vaut presque toujours 0, sauf quand les deux booléens valent `True` (ou 1). Pour ce faire, il faut avoir `i==k` (terme diagonal) et `i<r` (pas trop loin sur la diagonale).

On a donc bien une matrice du type ci contre.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

On se rassurera, comme i commence à 0, la condition $i < r$ donne bien r termes égaux à 1 sur la diagonale.

Bref, une question de cours, doublée de l'identification d'une procédure `Python`.

Le rang de C vaut tout sauf 0, puisque C n'est pas la matrice nulle.

La formule est alors $A.P.J.Q = P.J.Q.B$.

On multiplie par P^{-1} à gauche et Q^{-1} à droite $P^{-1}.A.P.J = J.Q.B.Q^{-1}$.

On place des parenthèses $(P^{-1}.A.P).J = J.(Q.B.Q^{-1})$, de la forme $A'.J = J.B'$.

Encore une fois, ce qui était vrai pour A , B et C le devient après deux changements de base bien faits au départ et à l'arrivée.

On notera qu'on pouvait aussi partir de $A'.J$ et $J.B'$ et chercher à voir si c'étaient bien les mêmes matrices. Ce qu'il ne fallait pas faire (ce qu'il ne fallait plus faire pour les plus encrassés d'entre vous dans des pratiques de bas étage d'une logique défaillante) :

partir de $A'.J = J.B'$ et arriver à quelquechose de vrai.

Quel intérêt en effet. On ne part pas de ce qu'on cherche pour arriver à quelquechose de vrai. Ça ne prouve strictement rien, hormis le fait que vous êtes con.

Imaginez que pour prouver que je suis Dieu je vous dise :

supposons que je suis Dieu, alors j'ai les pleins pouvoirs, je peux vous faire passer en Spé. Vous passez en Spé ! Merci, je suis donc Dieu.

On redescend jusqu'aux coefficients :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_2^n \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & \dots & \alpha_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & \alpha_n^3 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 & \dots & \beta_1^n \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 & \dots & \beta_2^n \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & \dots & \beta_3^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_n^1 & \beta_n^2 & \beta_n^3 & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

Pour la lisibilité, j'ai pris ici r égal à 2 :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^1 & \alpha_n^2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1^1 & \beta_1^2 & \beta_1^3 & \dots & \beta_1^n \\ \beta_2^1 & \beta_2^2 & \beta_2^3 & \dots & \beta_2^n \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Que reste-t-il après identification : des termes égaux, des termes nuls, et des termes sans contrainte :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_2^n \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_n^3 & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_3^1 & \beta_3^2 & \beta_3^3 & \dots & \beta_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \beta_n^1 & \beta_n^2 & \beta_n^3 & \dots & \beta_n^n \end{pmatrix}$$

du type par blocs $\begin{pmatrix} R & A' \\ 0 & B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ B' & B'' \end{pmatrix}$

Les blocs Nord-Ouest de A' et B' sont égaux.
Le bloc Sud-Ouest de A' est nul.
Le bloc Nord-Est de B' est nul.

Les deux derniers blocs cités sont rectangulaires.

On calcule le polynôme caractéristique de A' :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 - X & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & \dots & \alpha_1^n \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 - X & \alpha_2^3 & \dots & \alpha_2^n \\ 0 & 0 & \alpha_3^3 - X & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \alpha_n^3 & \dots & \alpha_n^n - X \end{vmatrix}$$

C'est un produit par blocs, le cours assure que c'est donc

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^1 - X & \alpha_1^2 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 - X \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha_3^3 - X & \dots & \alpha_2^n \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^3 & \dots & \alpha_n^n - X \end{vmatrix}$$

De même, $\chi_{B'}(X) = \chi_R(X) \cdot \chi_{B''}(X)$ (les parties A'' et B'' n'ont aucun rôle dans le déterminant).

Le polynôme caractéristique de R (égale à $(\alpha_i^k)_{\substack{i \leq r \\ j \leq r}}$) divise $\chi_{(A')}$ et $\chi_{(B')}$.

Comme il est au moins de degré 1 (il est en fait de degré r), il a au moins une racine λ_0 (d'Alembert-Gauss). Pour ce λ_0 , on a donc $\chi_{B'}(\lambda_0) = \chi_R(\lambda_0) \cdot \chi_{B''}(\lambda_0) = 0$. $\chi_{B''}(\lambda_0) = 0$ et aussi pour la même raison : $\chi_{A'}(\lambda_0) = 0$.

Ce complexe λ_0 est valeur propre de A' et de B' .

Mais A est semblable à A' (via P) et B est semblable à B' (via Q). Deux matrices semblables ayant le même spectre, par transitivité, λ_0 est valeur propre de A et de B .

On notera qu'on a autant de valeurs propres en commun que le rang de la matrice C .



Preuve par l'absurde.

DS11

On suppose donc que A et B n'ont aucun valeur propre commune. On espère arriver à une contradiction.

Déjà, on se donne un complexe λ et on montre pour tout p : $(A - \lambda.I_n)^p.C = C.(B - \lambda.I_n)^p$, par récurrence sur p .

Pour p égal à 0, c'est $I_n.C = C.I_n$.

Pour p égal à 1, c'est $(A - \lambda.I_n).C = C.(B - \lambda.I_n)$.

On se donne p quelconque, et on suppose le résultat vrai pour ce p . On tente de passer au suivant :

$(A - \lambda.I_n)^p.C = (A - \lambda.I_n).(A - \lambda.I_n)^p.C = (A - \lambda.I_n).C.(B - \lambda.I_n)^p$ par hypothèse de rang p .

Or, $(A - \lambda.I_n).C = A.C - \lambda.C = C.B - \lambda.C = C.(B - \lambda.I_n)$.

On reporte : $(A - \lambda.I_n)^p.C = (A - \lambda.I_n).C.(B - \lambda.I_n)^p$.

Une question sans difficulté que l'on peut traiter pour gagner des points. Encore faut-il la traiter proprement, et non balancer un "par récurrence évidente".

Prenons alors un vecteur dans $\text{Ker}((b - \lambda.Id)^p)$, c'est à dire un vecteur $\vec{a}$ vérifiant $(b - \lambda.Id)^p(\vec{a}) = \vec{0}$.

Par composition, on a $c((b - \lambda.Id)^p(\vec{a})) = \vec{0}$ (et par linéarité de c , oui, je sais).

Par propriété démontrée au dessus par récurrence : $(a - \lambda.Id)^p(c(\vec{a})) = \vec{0}$.

On voudrait simplifier. Mais on n'a pas le droit. Il ne faut pas conclure juste parce que ça permet de conclure.

Mais si on traduit matriciellement : $(A - \lambda.I_n)^p.C.U = 0_n$.

Et la matrice $A - \lambda.I_n$ a un déterminant non nul, sinon λ serait à la fois valeur propre de A et B , ce qu'on a refusé.

On a donc $\det(A - \lambda.I_n) \neq 0$, puis même $\det((A - \lambda.I_n)^p) \neq 0$.

La matrice $(A - \lambda.I_n)^p$ est inversible. On multiplie par son inverse : $C.U = 0$.

On reconnaît : $\text{Ker}((b - \lambda.Id)^p) \subset \text{Ker}(c)$.

Comme $\text{Ker}(c)$ est un espace vectoriel, on a pour λ et λ' valeurs propres de B :

$\text{Ker}((b - \lambda.Id)^p) \subset \text{Ker}(c)$ et $\text{Ker}((b - \lambda'.Id)^{p'}) \subset \text{Ker}(c)$ et en sommant $\text{Ker}((b - \lambda.Id)^p) + \text{Ker}((b - \lambda'.Id)^{p'}) \subset \text{Ker}(c)$.

En recommençant avec toutes les valeurs propres de b avec leur multiplicité :

$\text{Ker}((b - \lambda_1.Id)^{p_1}) + \text{Ker}((b - \lambda'.Id)^{p'}) + \dots + \text{Ker}((b - \lambda_i.Id)^{p_i}) \subset \text{Ker}(c)$

Il reste à conclure. En prenant pour les λ_i les valeurs propres de b avec leur multiplicité, on finit par reconstruire le polynôme caractéristique de b .

Or, b est annulé par son polynôme caractéristique.

Donc, en entassant plein de $\text{Ker}((b - \lambda_1.Id)^{p_1}) + \text{Ker}((b - \lambda'.Id)^{p'}) + \dots + \text{Ker}((b - \lambda_i.Id)^{p_i})$, on arrive à $\text{Ker}(\vec{a} \mapsto \vec{0})$ (noyau de l'application nulle).

Et qui est ce gros noyau ? C'est $\mathbb{R}^n$ tout entier.

On est alors arrivé à $\mathbb{R}^n \subset \text{Ker}(c)$. On a donc $\text{Ker}(c) = \mathbb{R}^n$ et c est l'application nulle (C est la matrice nulle). On tient notre contradiction.

	Trigonalisation.	DS11
---	-------------------------	-------------

On calcule les éléments propres de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ notée A :

$$\text{Tr}(A) = 1 + 1 + 4, \text{Min}_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \text{ et } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1.$$

On a un polynôme : $X^3 - 6.X^2 + 5.X - 1$ que l'on peut dériver : $3.X^2 - 12.X + 5$.

On a deux racines réelles de la dérivée : $\frac{6 - \sqrt{21}}{3}$ et $\frac{6 + \sqrt{21}}{3}$.

Calculons la valeur du polynôme en chacun de ces deux réels :

$$\left(\frac{6 - \sqrt{21}}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{21}}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{6 - \sqrt{21}}{3}\right) - 1 = \frac{216 - 108 \cdot \sqrt{21} + 18 \cdot 21 - 21 \cdot \sqrt{21}}{27} + 6 \cdot \frac{36 - 12 \cdot \sqrt{21} + 21}{9} + 5 \cdot \frac{6 - \sqrt{21}}{3} -$$

$$\text{On trouve } \frac{14 \cdot \sqrt{21} - 63}{9} \text{ et ensuite } \frac{-14 \cdot \sqrt{21} - 63}{9}.$$

La deuxième valeur est négative.

La première est positive. Et ce n'est pas en faisant appel à la calculatrice ! On n'est pas dans un laboratoire de physique pressé de conclure un T.P. avec des résultats qui collent à ce que l'on attend.

On raisonne, sans rien faire d'autre.

On a juste besoin de connaître le signe de $14 \cdot \sqrt{21} - 63$ et même celui de $2 \cdot \sqrt{21} - 9$. On compare les carrés : $4 \cdot 21$ face à 81 . De peu, mais c'est positif.

Sincèrement, on a plus vite fait de faire ce calcul de tête que de taper des symboles sur sa calculatrice... Mais on ne vous a pas appris à faire ça au lycée. Je ne sais d'ailleurs plus trop ce qu'on vous a appris au lycée, à part que 1515 est la date de la bataille de Marignan et le produit de trois nombres premiers.

On résume le tableau de variations : $-\infty \nearrow \text{positif} \quad \text{positif} \searrow \text{négatif} \quad \text{négatif} \nearrow +\infty$

Sur chaque intervalle, on a une valeur propre (valeurs intermédiaires).

On a trois valeurs propres, on les a toutes.

Chaque valeur propre amène au moins un vecteur propre, puisque $A - \lambda.I_3$ est non inversible et a donc un noyau.

On a donc trois valeurs propres et trois vecteurs propres U_1 , U_2 et U_3 .

On a alors $A.(U_1|U_2|U_3) = (\lambda_1.U_1|\lambda_2.U_2|\lambda_3.U_3) = (U_1|U_2|U_3) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, de la forme

$$M.P = P.D.$$

Quant à la matrice P , elle est inversible. En effet, si on part de $\alpha_1.U_1 + \alpha_2.U_2 + \alpha_3.U_3 = 0_3$, on a aussi $\lambda_1.(\alpha_1.U_1) + \lambda_2.(\alpha_2.U_2) + \lambda_3.(\alpha_3.U_3) = 0_3$ et $(\lambda_1)^2.(\alpha_1.U_1) + (\lambda_2)^2.(\alpha_2.U_2) + (\lambda_3)^2.(\alpha_3.U_3) = 0_3$ en multipliant deux fois de suite par A .

On a un système de VanDerMonde, avec les λ_i distincts. La seule solution est $\alpha_1.U_1 = \alpha_2.U_2 = \alpha_3.U_3 = 0_3$ et donc $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$.

C'est le théorème qui dit "si on a autant de valeurs propres distinctes que la dimension, alors la matrice est diagonalisable". Il est naturel. Et utile.

La matrice est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $\mathbb{C}$ évidemment.

On veut voir si cette matrice admet des valeurs propres rationnelles. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'un certain $\frac{p}{q}$ avec p et q entiers, premiers entre eux, est racine du polynôme :

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 6.\left(\frac{p}{q}\right)^2 + 5.\left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0.$$

Mais alors, on est dans $\mathbb{Q}$, là où on a trop de mal à raisonner. Venons en à $\mathbb{Z}$ là où la notion de divisibilité est plus naturelle, en multipliant par q^3 : $p^3 - 6.p^2.q + 5.p.q^2 - q^3 = 0$.

On arrange à notre guise : $p^3 = q.(6.p^2 - 5.p.q + q^2)$ et $q^3 = p.(p^2 - 6.p.q + 5.q^2)$.

De la première : p^3 est multiple de q . De la seconde : q^3 est multiple de p .

Seulement voilà, on prend une idée : q divise $p^2.p$ et q est premier avec p . Par lemme de Gauss, q divise p^2 .

On recommence : q divise $p.p$, et q est premier avec p . Par lemme de Gauss, q divise p .

On termine : q divise $p.1$, et q est premier avec p . Par lemme de Gauss, q divise 1.

De la même façon, avec l'autre égalité : p divise 1.

Qui sont les deux entiers divisant 1 : c'est 1 et -1.

On a donc $p = 1$ ou $p = -1$ et de même $q = 1$ ou $q = -1$.

On aboutit à "la seule racine rationnelle possible est 1 (ou -1)".

Or, ni 1 ni -1 n'est racine du polynôme.

Le polynôme n'a pas de racine rationnelle.

On passe à un corps plus agréable : les entiers de 0 à 6, pour les opérations modulo 7.

Le polynôme caractéristique est $X^3 - 6.X^2 + 5.X - 1$ ou même $X^3 + .X^2 + 5.X + 6$.

On cherche ses valeurs propres. Le plus rapide est de tester tous les entiers de 0 à 6 :

$0^3 + 0^2 + 5.0 + 6 = 6 \neq 0$	$1^3 + 1^2 + 5.1 + 6 = 1 \neq 0$	$2^3 + 2^2 + 5.2 + 6 = 0$	$3^3 + 3^2 + 5.3 + 6 = 1 \neq 0$
$4^3 + 4^2 + 5.4 + 6 = 1 \neq 0$	$5^3 + 5^2 + 5.5 + 6 = 6 \neq 0$	$6^3 + 6^2 + 5.6 + 6 = 1 \neq 0$	

Pour 6, on ne se prend pas la tête, c'est -1 par exemple.

On n'a qu'une valeur propre, et c'est 2.

On vérifie d'ailleurs : $(X - 2)^3 = X^3 - 6.X^2 + 12.X - 8 = X^3 + X^2 + 5.X + 6$.

2 est valeur propre triple.

Si la matrice est diagonalisable, elle ne peut être semblable qu'à $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Mais $P.(2.I_3).P^{-1}$ ça

fait toujours $2.I_3$. Et ici, la matrice n'est pas $2.I_3$.

Elle ne se diagonalise pas.

On va tenter de la trigonaliser.

	Matrices semblables dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.	DS11
---	---	-------------

On donne $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ pour avoir même trace et même déterminant.

On vérifie $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+2.i & -3.i \\ -1-i & 2+2.i & -2-2.i \\ i & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Au non, tiens ! C'est $\boxed{P.A = B.P}$ qui est vraie.

Cette question était là pour tester votre faculté à bluffer. Mais j'ai très peur alors de croiser des âneries dans vos copies "on calcule et tout va bien".

Ah, si il y a pire, largement pire. Ce sont les élèves qui remplissent des pages pour calculer P^{-1} et vérifier $A = P^{-1}.B.P$. Ceux là, je ne peux plus rien pour eux. Ils en sont restés à chaque fois à la première formule comme en Terminale et ne veulent pas devenir intelligents. Désolé...

Et après, il y a le détail qui manque. P est elle inversible. Et là, c'est lourd et long : $\det(P) = -2 - 4.i$.

Séparons quand même P en deux matrices : $P = R + i.S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + i. \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On vérifie $R.A = B.R$ et aussi $S.A = B.S$

A et B sont semblables via les deux matrices R et S (inversibles).

L'idée n'est pas originale : $P.A = B.P$ donnait $(R+i.S).A = B.(R+i.S)$ et donc $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.
On identifie, on doit bien avoir $R.A = B.R$ et aussi $S.A = B.S$.

Prenons d'ailleurs le raisonnement général.

On part de $P.A = B.P$ avec P complexe inversible.

On écrit $P = R + i.S$ avec R réelle et S aussi (le terme général de P est $p_j^k = \Re(p_j^k) + i.\Im(p_j^k)$ qu'on sépare).

On développe $R.A + i.S.A = B.R + i.B.S$.

On identifie partie réelle et partie imaginaire : $R.A = B.R$ et $S.A = B.S$.

On a envie d'écrire $A = R^{-1}.B.R$ et de conclure.

Mais qui dit que R est inversible ? Rien.

L'inversibilité de P ne se transmet pas forcément à sa partie réelle (pensez à $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$).

Pas grave, on a aussi $S.A = B.S$. Donc, si R n'est pas inversible, on prend S .

Mais il se peut que S ne soit pas inversible non plus.

Alors, qui ?

C'est là qu'on ruse avec $(a.R + b.S)$.

On a en effet $(a.R + b.S).A = B.(a.R + b.S)$.

Et sur toutes les matrices $(a.R + b.S)$, il doit bien y en avoir une qui est inversible.

L'idée était de dire : si on n'a pas R ou S inversible utilisable, on va prendre $R + S$ ou $R - S$.

Proprement, on prend $R + \lambda.S$. On va détecter qu'il y a au moins un λ réel tel que $R + \lambda.S$ soit inversible.

Sinon, pour tout λ réel, $\det(R + \lambda.S)$ est nul.

Or, $\det(R + \lambda.S)$ est un polynôme en λ .

S'il est nul pour tout λ réel, alors c'est le polynôme nul.

Et il est nul aussi pour tout λ complexe. Et en particulier pour $\lambda = i$. Ce qui est contraire à " P est inversible".

Niveau "Sup bête" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous pensiez conclure.

Niveau "Sup normal" : j'attendais de vous que vous alliez jusqu'à $A.R = R.A$ et que vous disiez "mais il y a un problème car R n'est peut être pas inversible".

Niveau "Sup bien parti vers la Spé" : j'attendais de vous que vous tentiez alors des choses avec S mais aussi $R + S$.

Niveau "Nomale Sup" : vous avez deviné la bonne solution, ou même vous en avez trouvé une nouvelle.