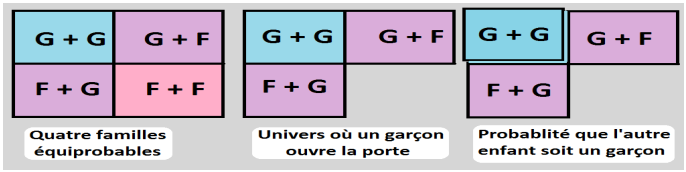
Probas

Lycée Charlemagne



Mai
Juin

PROBABILITES SUR UN UNIVERS FINI

a- Expérience aléatoire et univers.

L'ensemble des issues *(ou résultats possibles ou réalisations)* d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Evénements,
- **événement élémentaires *(singletons, "atomes")*,**
- **événement contraire *(complémentaire)*,**
- **événement "A et B" *(intersection)*,**
- **événement "A ou B" *(réunion)*,**
- **événement impossible *(vide)*,**
- **événements incompatibles *(intersection vide)*,**
- **système complet d'événements**

(partition de l'ensemble : $\forall a \in \Omega,\ \exists! i \in I,\ a \in A_i$***).***

Lancers de pièces, lancers de dés, tirages d'urnes, dates d'anniversaires, parcours de l'ivrogne, défauts d'une machine, gain au jeu, rendez vous galant,...
L'univers envisagé est fini dans notre programme, dénombrable dans le programme de Spé

EXERCICE CLASSIQUE. Donnez le cardinal de l'univers Ω dans les cas suivants :
- distribution en deux paquets égaux d'un jeu de 32 cartes pour jouer à bataille
- distribution en deux paquets pas forcément égaux (mais aucun n'est vide) d'un jeu de 32 cartes (l'ordre dans les deux paquets n'a pas d'importance)
- distribution en deux paquets égaux d'un jeu de 34 cartes pour jouer à bataille *(il y a deux jokers indistinguables)*
- affectation de 100 élèves dans trois écoles ayant respectivement 25, 35 et 40 places,
- marche d'un ivrogne de n déplacement dans le plan
- marche auto-évitante de n déplacements d'un ivrogne dans le plan (il n'a pas le droit de revenir là où il est déjà passé
- marche d'un ivrogne de n déplacement dans l'espace
- référendum "Oui/Non" à n votants successifs
- lancers d'un dé jusqu'à avoir obtenu des résultats identiques sur la liste des lancers
- lancers d'un dé dans un espace vectoriel euclidien de dimension 4 (et pas forcément 3, le dé n'a donc plus six faces)
- répartition de douze canettes de bière toutes semblables entre 5 élèves, sachant que chacun doit en avoir au moins une.

---

b- Espaces probabilisés finis.

1- Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $P(\Omega)$ dans $[0,\ 1]$ telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour tout couple d'événements disjoints A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

EXERCICE CLASSIQUE.

A	B	C	D
[0, 0, 4, 4, 4, 4]	[3, 3, 3, 3, 3, 3]	[2, 2, 2, 2, 6, 6]	[1, 1, 1, 5, 5, 5]

Ce sont des dés équilibrés à six faces *(appelés dés de Bradley Effron)*.
Montrez que la probabilité que A batte B est 2/3.
Montrez que la probabilité que B batte C est 2/3.
Montrez que la probabilité que C batte D est 2/3.
Quelle est la probabilité que D batte A ?

EXERCICE DE CONCOURS. On lance un dé équilibré à six faces classique. On note A l'événement "tirer un nombre pair" et B l'événement "tirer un nombre impair". Calculez $P(A).P(B) - P(A \cap B)$.
On se donne un univers probabilisé $(\Omega,\ P)$ et deux événements A et B. On note $a = P(A)$ et $b = P(B)$.
Montrez : $P(A \cap B) \leqslant \sqrt{a.b}$ *(c'est une inégalité de Cauchy Schwarz sur* $\sum_a 1_{A\cap B}(a).P(a)$*)*.

Montrez : $a.b - P(A \cap B) = \begin{vmatrix} P(A \cap \overline{B}) & P(\overline{A} \cap \overline{B}) \\ P(A \cap B) & P(\overline{A} \cap B) \end{vmatrix}$.
Déduisez $|a.b - P(A \cap B)| \leqslant Max(a.(1-a),\ b.(1-b))$.
Déduisez enfin $|a.b - P(A \cap B)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.
Un dé pas équilibré du tout a six faces. Le résultat d'un lancer est appelé A. Est il possible d'avoir

$P(A < 4)$	$P(A\ pair)$	$P(A \geqslant 5)$
1/2	1/3	1/4

2- Détermination d'une probabilité par les images des singletons.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. On veut simuler un dé à six faces non équilibré avec les probabilités suivantes :

1	2	3	4	5	6
1/13	2/13	5/13	1/13	3/13	1/13

Ecrivez un script `Python` qui s'en charge.

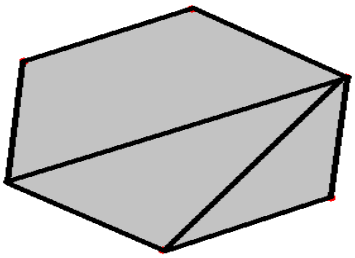
EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Montrez : $Max(0,\ P(A) + P(B)) \leqslant P(A \cap B) \leqslant Min(P(A),\ P(B))$.

3- Probabilité uniforme : $P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)}$.

EXERCICE DE CONCOURS. n est un entier fixé. On tire de manière uniforme l'une des $n!$ permutations de S_n *(groupe symétrique)*. Pour j dans $\{1, 2, \ldots n\}$, on dit que σ bat un record en j si $\sigma(j) > \sigma(i)$ pour tout i entre 1 et $j-1$.
Déterminez la probabilité de l'événement "σ *bat un record en* j".

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE.

Trois garçons et trois filles s'installent aléatoirement aux six places d'une table hexagonale. Calculez la probabilité que les garçons forment un triangle équilatéral.
Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle équilatéral ?
Quelle est la probabilité que les filles forment un triangle rectangle, sur l'univers restreint où les garçons forment un triangle isocèle ?



EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Un dé non équilibré à quatre faces numérotées de 1 à 4 vérifie :

tirage	pair	premier	$\leqslant 3$
probabilité	1/2	1/3	3/5

Calculez la probabilité de tirer 1.

4- Propriétés des probabilités :

- **probabilité de la réunions de deux événements :** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **probabilité de l'événement contraire :** $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- **croissance :** $(A \subset B) \Rightarrow (P(A) \leqslant P(B))$,
- **cas d'un système complet :** $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$.

Démonstration. • On se donne A et B. On écrit $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$. C'est une réunion de deux ensembles d'intersection vide, on a donc $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$.
On écrit aussi $A \cup B = B \cup (A \cap \overline{B})$ et c'est encore une réunion de deux ensembles d'intersection vide. On a cette fois $P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap \overline{B})$. On reporte une formule dans l'autre : $P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$.
• Pour A donné, on écrit $\Omega = A \cup \overline{A}$; c'est une réunion disjointe, donc $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$.
• Si A est inclus dans B, on écrit $B = A \cup (B \cap \overline{A})$. C'est encore une réunion disjointe, on a donc $P(B) = P(A) + P(B \cap \overline{A}) \geqslant P(B)$ car une probabilité est toujours positive.
• La formule $P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k)$ se démontre par récurrence sur le nombre de parties du système complet.

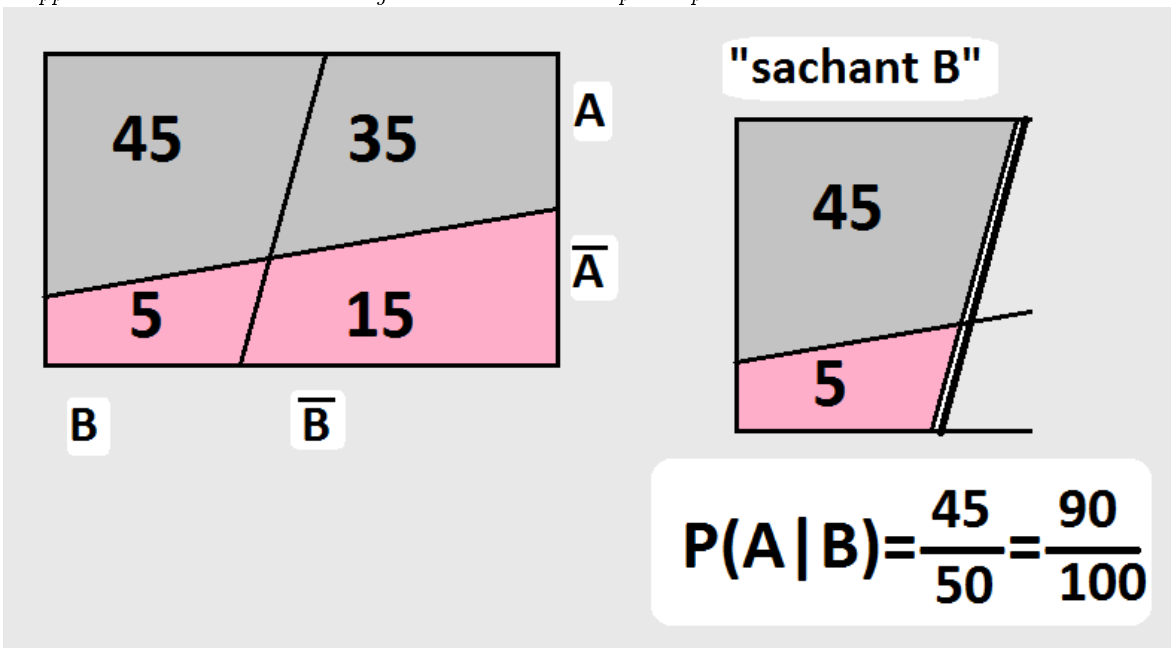
Exercice élémentaire. Comparez les probabilités de "*avoir au moins un* 6 *avec six dés*" et "*avoir au moins deux* 6 *avec douze dés*" (et pourquoi pas "*avoir au moins un* 12 *avec douze dés*" ?).

Exercice élémentaire. Pouvez vous définir un univers et trois événements A, B et C de cet univers chacun de probabilité $1/2$, de sorte que la probabilité que deux d'entre eux exactement soient réalisés soit égale à $2/3$?

c- Probabilités conditionnelles.

1- Si B est un événement de probabilité non nulle, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

L'appellation "sachant B" est ambigüe et devrait être remplacée par "sur l'univers restreint à B".

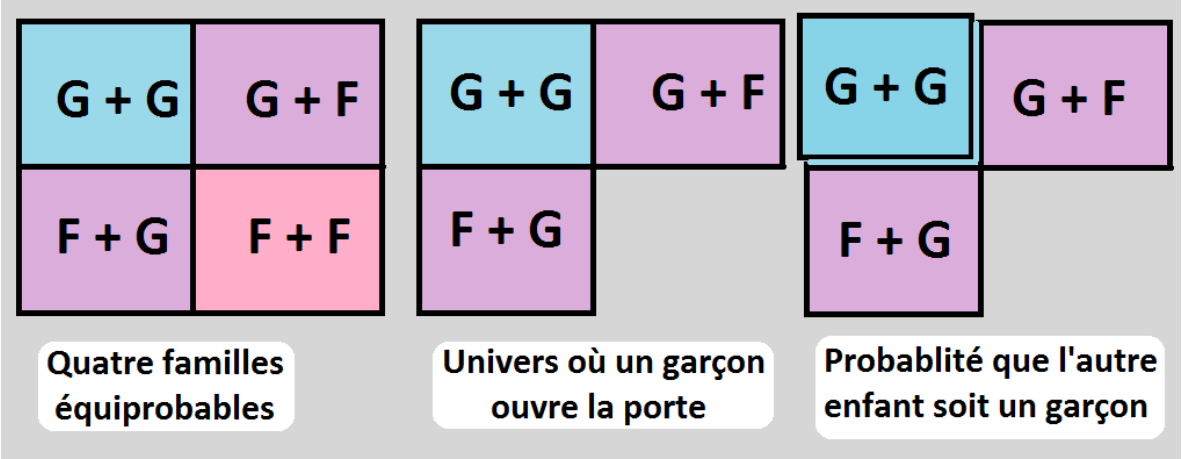


En général, la probabilité de A change quand on restreint l'univers à B, sauf si "la proportion d'éléments de A

dans B est la même que la proportion d'éléments de A dans l'univers total Ω".

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Calculez (et interprétez) : $P(A \mid A)$, $P(A \mid \overline{A})$ et $P(A \mid \Omega)$.

EXERCICE CLASSIQUE. Vous vous rendez dans une famille qui a deux enfants *(on considère les sexes à la naissance équiprobables, et les naissances indépendantes)*. Un enfant ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?



Variantes :
•1• Vous vous rendez dans une famille qui a deux enfants. L'ainé ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon ?
•2• Vous vous rendez dans une famille qui a trois enfants. L'un d'eux ouvre la porte, c'est un garçon, quelle est la probabilité qu'il y ait au moins un autre garçon ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Dans cette ville, il y a mille couples. Soixante sont des couples "gay" et quarante sont des couples "saphiques" [1]. Vous frappez à une porte, un homme vient vous ouvrir. Quelle est la probabilité que l'autre membre du foyer soit une femme.

EXERCICE DE CONCOURS. Soient Ω un ensemble fini, A et B des parties telles que $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient non vides. Soient $(a,\ b,\ c,\ d) \in [0,\ 1]^4$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur $(a,\ b,\ c,\ d)$ pour qu'il existe sur $(\Omega,\ P(\Omega))$ une probabilité P vérifiant $P(A \mid B) = a$, $P(A \mid \overline{B}) = b$, $P(B \mid A) = c$ et $P(B \mid \overline{A}) = d$.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Montrez : $P(A \mid B) \geqslant P(A) \ \Rightarrow \ P(B \mid A) \geqslant P(B)$. Interprétation ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Comparez $P(A \cap B \mid A \cup B)$ et $P(A \cap B \mid A)$. Interprétez.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Une urne contient huit tétraèdres roses et trois tétraèdres transparents [2].
Vous tirez trois tétraèdres.
Quelle est la probabilité que l'un au moins soit rose ?
Sachant que vous avez tiré au moins un rose, quelle est la probabilité que ce fût le premier tiré ?

2- Formule des probabilités composées :

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A).P(B \mid A).P(C \mid A \cap B).P(D \mid A \cap B \cap C).$$

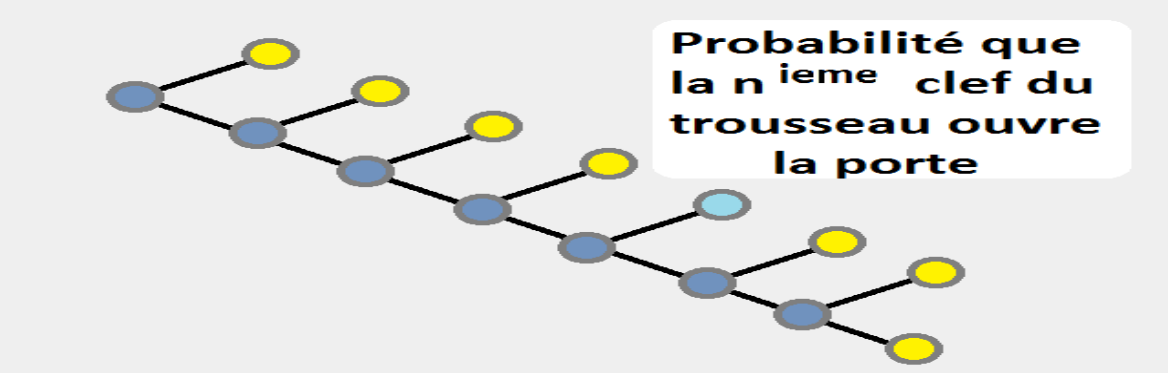
C'est un simple produit télescopique.
On écrit la formule général $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{k=1}^{i-1} A_i\right)$ avec une convention naturelle sur une intersection vide.
C'est la formule utilisée pour calculer le "poids" d'une feuille d'un arbre de probabilités en multipliant

[1] après l'Informatique Pour Tous, c'est le Mariage Pour Tous
[2] pour changer des boules noires et blanches

les poids des branches menant à cette feuille.

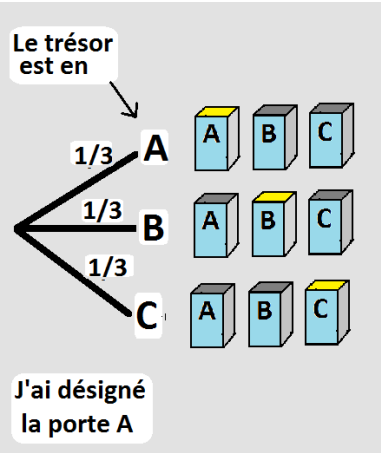
EXERCICE DE CONCOURS.

Pour ouvrir une serrure, vous disposez de n clefs. Une seule ouvre la serrure. Vous les essayez successivement, sans remise. Quelle est la probabilité que la serrure s'ouvre au k^{ieme} essai ?



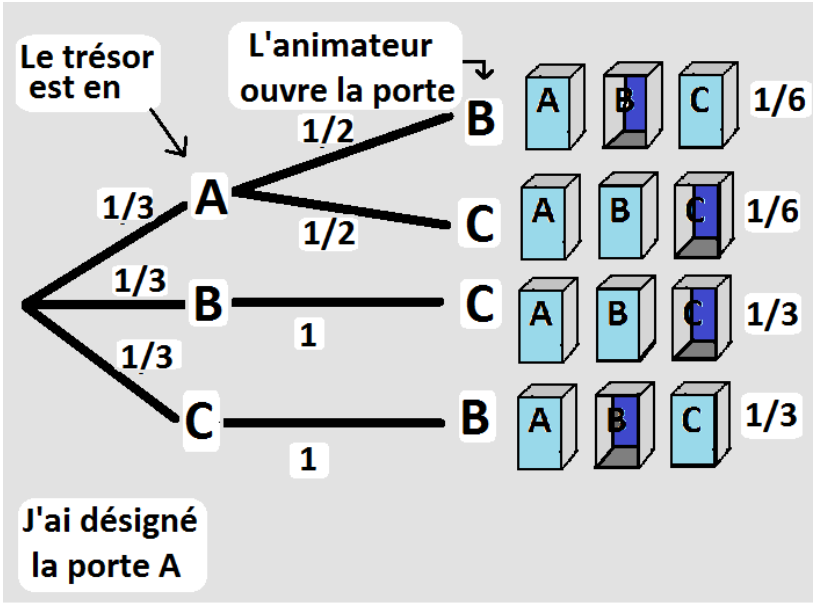
EXERCICE CLASSIQUE.

En supposant les dates d'anniversaires de N personnes uniformément réparties sur une année *(de 365 jours)*, quelle est la probabilité que personne n'ait la même date d'anniversaire que vous ?
En supposant les dates d'anniversaires de N personnes uniformément réparties sur une année *(de 365 jours)*, quelle est la probabilité qu'au moins deux personnes aient la même date d'anniversaire ? A partir de quelle valeur de N *(notée N_0)* cette probabilité dépasse 1/2 ? Faut il en déduire qu'à partir de $2.N_0$, elle vaut 1 ?



Problème de MONTY HALL, qui divisa même la communauté mathématique.
Vous jouez à un jeu télévisé. Devant vous, trois portes. Derrière l'une il y a un trésor, derrière les deux autres, il n'y a rien[a]. Vous indiquez une porte *(au hasard, puisqu'il n'y a aucun indice, on l'appellera donc A)*.
L'animateur [b] ouvre alors l'une des deux autres portes *(B ou C)* pour vous montrer qu'il n'y a rien derrière *(il sait pour sa part où se trouve le trésor)*.

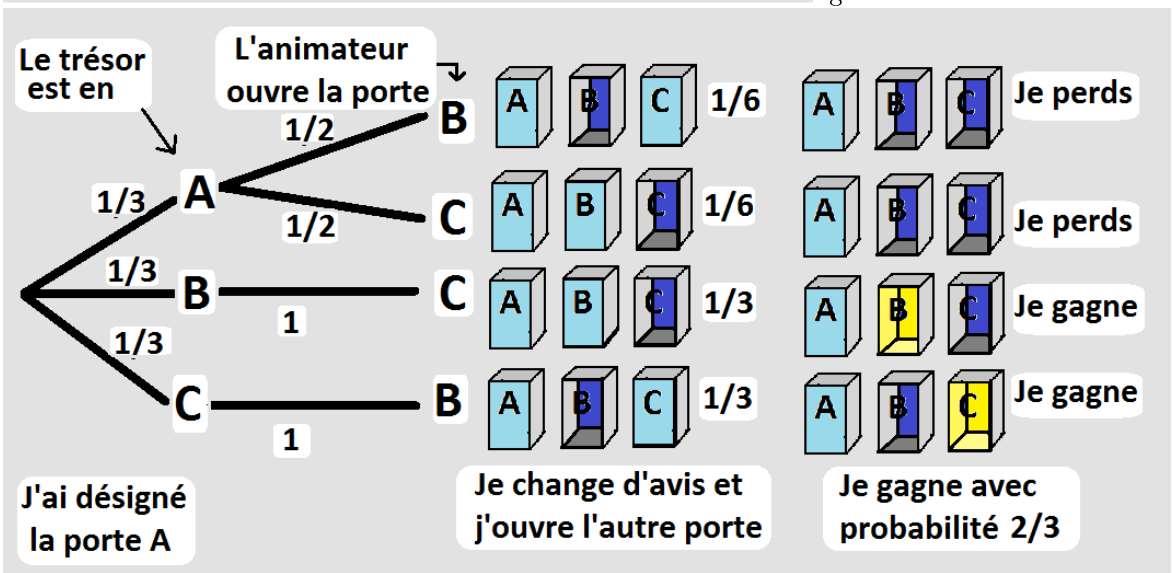
[a] le jeu original parle d'une voiture et de deux chèvres
[b] Vincent Lagaff dans la version française du jeu, appelé alors Big-Dil

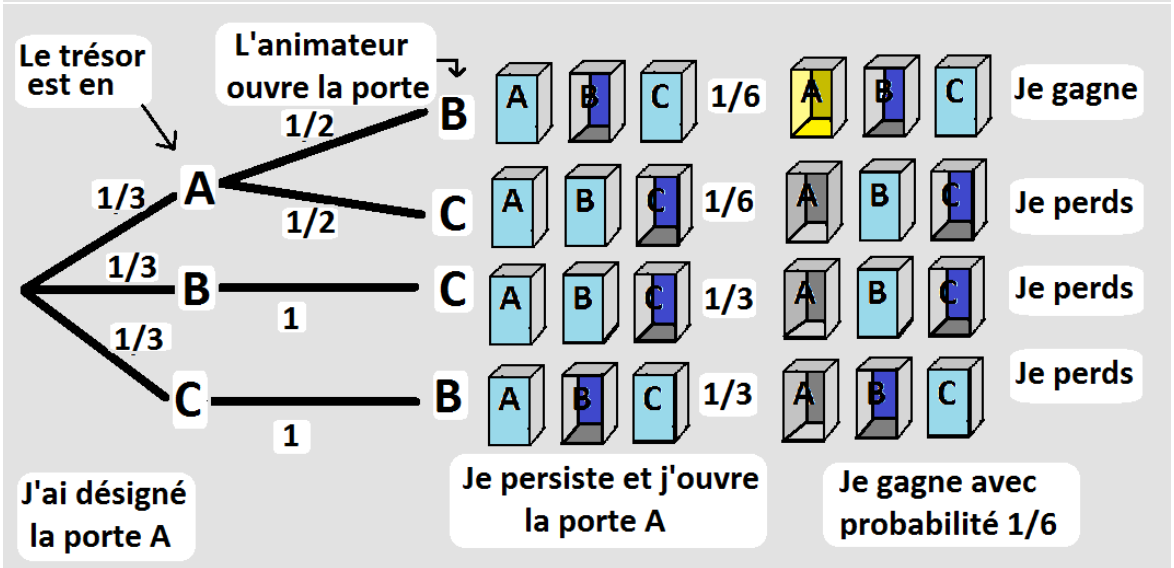


Quel est votre intérêt ?

- persister et demander à ouvrir la porte A ?
- reporter votre choix sur la porte que l'animateur a laissée close ?

On part du présupposé que votre choix se porte sur la voture et non sur la chèvre, même si vous avez gardé un bon souvenir de la chèvre qui broutait à côté de chez votre grand-tante.





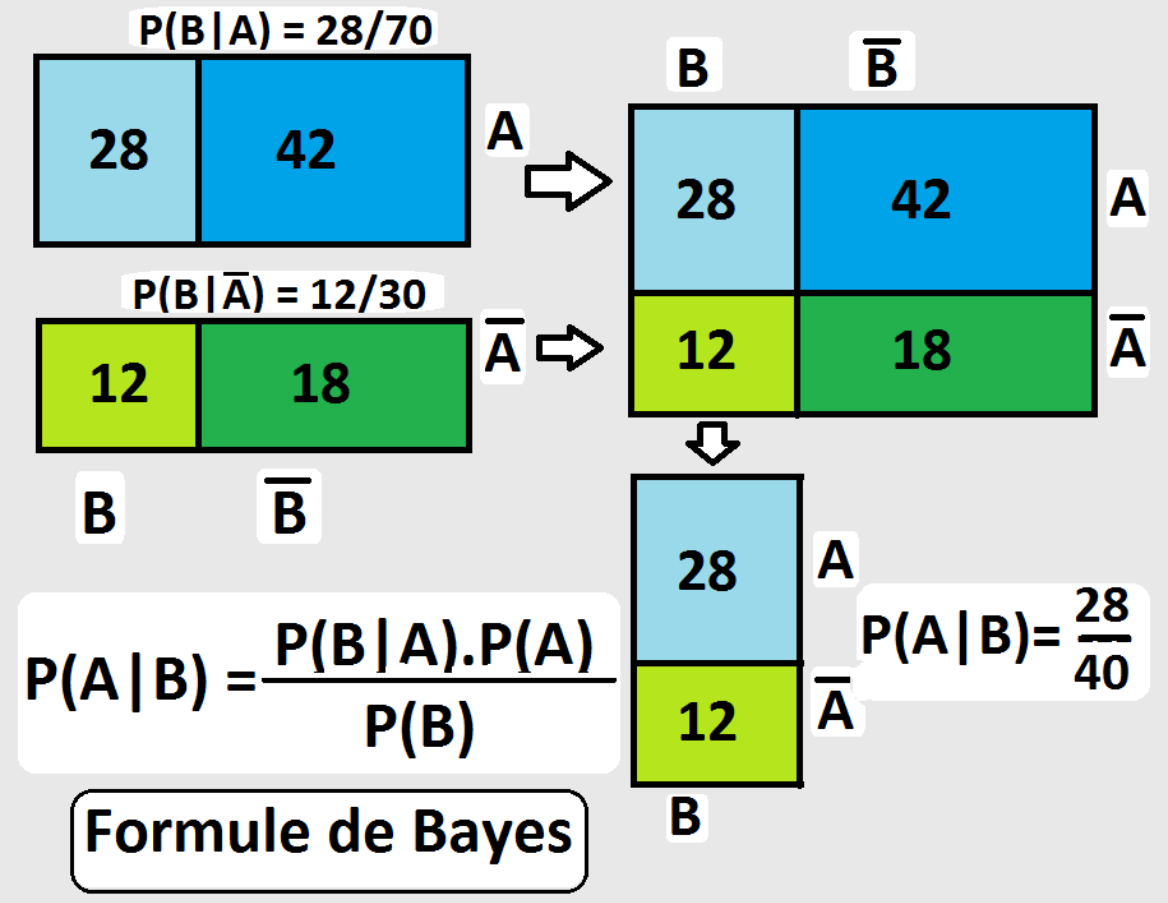
3- Formule des probabilités totales $P(B) = \sum_{i \in I} P(B \cap A_i)$

C'est la formule que vous utilisez pour dire "*j'ai étudié toutes les possibilités menant à cet événement*".

EXERCICE DE CONCOURS. Une urne contient $2.n$ boules numérotées de 1 à $2.n$. Vous en tirez n au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité que vous tiriez 1, 3, 5, jusqu'à $2.n-1$, dans cet ordre ? Quelle est la probabilité que vous tiriez 1, 3, 5,jusqu'à $2.n-1$, pas forcément dans cet ordre ? Donnez la loi de la variable aléatoire donnant le rang du dernier numéro impair alors obtenu. Calculez son espérance.

4- Formules de BAYES :
• si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A).P(A)}{P(B)}$$



4bis- Formule de BAYES :
• si $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles, alors on a

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j).P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i).P(A_i)}$$

EXERCICE CLASSIQUE. Un test de dépistage est mis en place pour dépister une maladie qui frappe statistiquement une personne sur cent.
Ce test n'est pas fiable à cent pour cent, et a deux types d'erreurs :
• répondre "*malade*" alors que l'individu est sain (probabilité conditionelle d'erreur : 2 pour cent)
• répondre "*sain*" alors que l'individu est malade (probabilité conditionnelle d'erreur : 1 pour cent).
Vous faites le test. Il indique "*malade*". Quelle est la probabilité que vous soyez effectivement malade ?

EXERCICE CLASSIQUE. Je joue contre un adversaire pris au hasard dans la salle. Je sais quand même qu'un élève sur dix triche. Face à un tricheur, je perds une fois sur trois. Face à un joueur honnête, je perds une fois sur vingt.
J'ai joué, j'ai perdu. Je le traite de tricheur. Quelle est la probabilité que ce soit vrai.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. On vous a donné deux dés dont les six faces sont étrangement numérotées :

dé Graflesoutif	1	2	3	3	3	4
dé Crochlalune	1	1	2	2	3	3

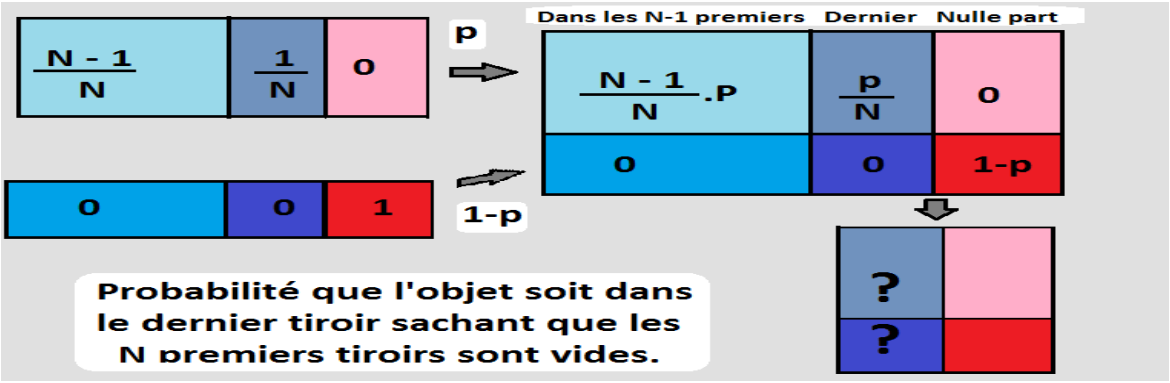
mais ils sont équilibrés *(faces équiprobables)*.
Vous lancez les deux, quelle est la probabilité que vous ayez un double ?
Pour un duel, lequel des deux dés prenez vous ?
Je lance un dé, je vois affiché 4. Quelle est la probabilité que ce soit le dé Graflesoutif ?
Je lance un dé, je vois affiché 2. Quelle est la probabilité que ce soit le dé Graflesoutif ?

EXERCICE CLASSIQUE. Dans ce café, il y a cinq WC : deux pour hommes, trois pour femmes. Vous savez par expérience qu'un WC "homme" a soixante pour cent de "chances" d'être souillé, et qu'un WC "dame" a seulement quarante pour cent de chances d'être souillé. Vous ouvrez une porte au hasard. Les lieux sont propres. Quelle est la probabilité que vous soyez dans les toilettes correspondants à votre sexe ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Vous êtes entrepreneur désireux de bâtir un complexe industriel dans une zone protégée. Vous devez donc soudoyer un élu en Mairie. Vous savez que les élus Cubration se laissent corrompre dans trente pour cent des cas, et que les élus Cidé se laissent corrompre dans soixante pour cent des cas. Quant aux élus Teufinal, ils sont incorruptibles. La composition du Conseil Municipal est de quatre Cubration, cinq Cidé et un Teufinal.
Vous prenez rendez vous avec un élu. Le secrétaire de Mairie a choisi au hasard. Quelle est la probabilité que vous réuississiez à obtenir votre autorisation pourtant illégale ?
Vous avez réussi à obtenir votre permis. Quelle est la probabilité que vous ayez eu affaire à un élu Cubration ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Un homme a six chances sur mille d'avoir un vrai jumeau. Dans ce cas, si l'un est somnambule, l'autre a une chance sur deux de l'être aussi. Huit fois sur dix, un des jumeaux est droitier et l'autre gaucher. "Somnambulisme" et "dextrographie/senestrographie" sont des événements indépendants.
Alain est somnabule et gaucher.
Quelle est la probabilité qu'il ait un frère jumeau gaucher ?
Quelle est la probabilité qu'il ait un frère jumeau somnambule ?
Quelle est la probabilité d'avoir un jumeau gaucher et somnambule ?

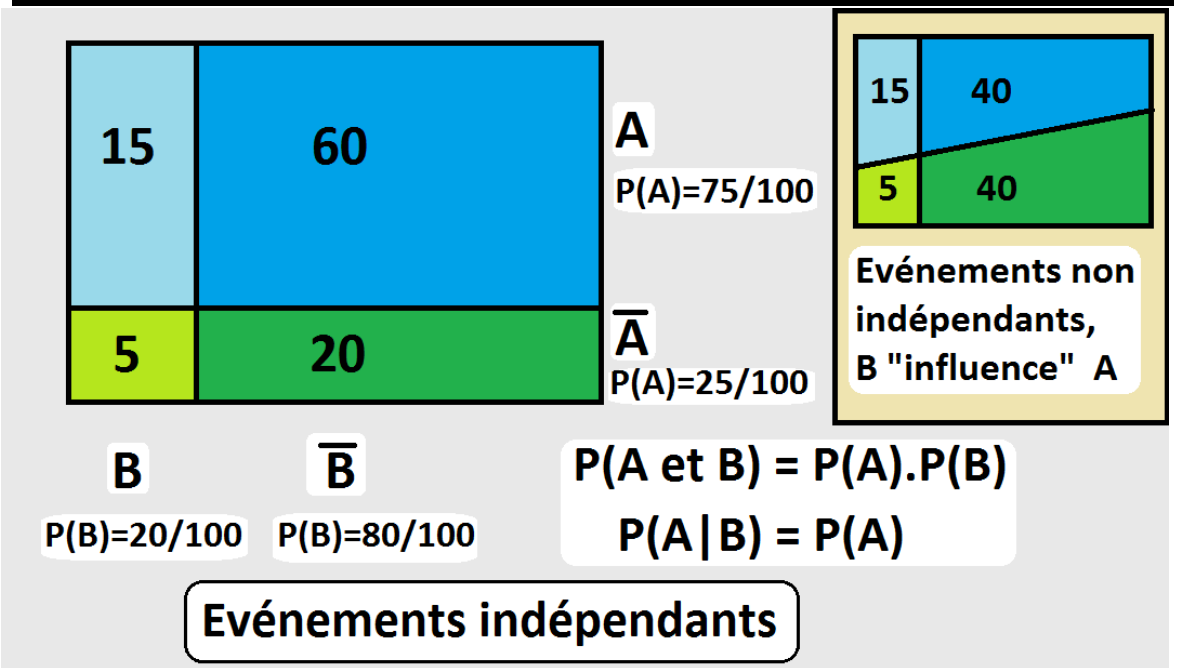
EXERCICE DE CONCOURS. Un meuble a huit tiroirs. Un objet se trouve dans le meuble avec une probabilité p. Le propriétaire vient d'ouvrir les sept premiers tiroirs sans y trouver l'objet. Quelle est la probabilité que l'objet soit dans le huitième tiroir ? Non, ce n'est pas p.



Exercice de concours. On rappelle que pour une pièce équilibrée, les tirages successifs sont indépendants. C'est ainsi que contrairement aà ce que pensent les débutants, la probabilité d'obtenir Pile sachant qu'on a obtenu Face aux cent tirages précédents reste toutjours $\frac{1}{2}$. La loi des grands nombres qui tend à équilibrer le nombre moyen de Pile est un théorème asymptotique, qui parle de $\forall \varepsilon$, $\exists N$, et à 100 ou même 10^{20}, on est encore très loin de l'infini[3].
Mais passons à l'ercice : vous avez deux pièces d monnaie dans votre poche : une pièce classique avec des faces P/F, et une pièce avec deux faces Face (F/F, pratique pour tricher).
Vous sortez une pièce au hasard (vous ne savez pas laquelle des deux). Vous la lancez cent fois, vous avez obtenu cent fois Pile. Quelle est la probabilité que vous obteniez Face au tirage suivant ?

d- Evénements indépendants.

1- Couple d'événements indépendants.



	A	$\overline{A}$
B	$P(A \cap B) = \alpha$	$P(\overline{A} \cap B) = \alpha$
$\overline{B}$	$P(A \cap \overline{B}) = \alpha$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = \alpha$

Les deux événements sont indépendants si et seulement si $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ est nul.

Exercices élémentaires. Que signifie "A est indépendant de lui même" ?

[3] d'ailleurs, quand vous commencez à lancer la pièce, vous estimez normal que les probabilités soient 1/2 et 1/2, alors même que vous ignorez si elle n'est tombé trente fois sur Pile juste avant que vous ne la ramassiez

Montrez que si A est indépendant de B, alors $\overline{A}$ est indépendant de B, A est indépendant de $\overline{B}$ et $\overline{A}$ est indépendant de $\overline{B}$.
La relation "être indépendant de" est elle réflexive, symétrique, transitive, antisymétrique ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Dans l'univers des entiers de 0 à 239, les événements "être un multiple de 2" et "être un multiple de 3" sont ils indépendants ?
les événements "être un multiple de 2" et "être un multiple de 5" sont ils indépendants ?
les événements "être un multiple de 3" et "être un multiple de 7" sont ils indépendants ?

2- Lien avec les probabilités conditionnelles.

On montre que A et B sont indépendantes si et seulement si on a $P(A \mid B) = P(A)$.
La proportion d'éléments de B vérifiant A est la même que la proportion d'éléme,ts de Ω vérifiant A.
On a alors $P(B \mid A) = P(B)$ et $P(\overline{A} \mid B) = P(\overline{A})$.

3- Famille finie d'événements mutuellement indépendants.

EXERCICE DE CONCOURS. Soient $A_1, \dots A_n$ des événements indépendants d'un univers probabilisé $(\Omega,\ P(\Omega),\ P)$. Montrez que la probabilité qu'aucun ne soit réalisé est majoréer par $\exp\left(-\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)$.

EXERCICE CLASSIQUE. X et Y sont deux expériences : lancer de deux pièces indépendantes, équilibrées.
On donne trois événements : A = *X tombe sur pile* , B = *Y tombe sur pile* et C = *X et Y tombent sur la meme face.*
Montrez : $P(A \cap B) = P(A).P(B)$, $P(A \cap C) = P(A).P(C)$, $P(B \cap C) = P(B).P(C)$ et $P(A \cap B \cap C) \neq P(A).P(B).P(C)$. Concluez.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Montrez par un contre-exemple que si A est indépendant de B et de C, il n'est pas forcément indépendant de $B \cap C$.
Si A est indépendant de B et de C, est indépendant de $B \cup C$.

VARIABLES ALEATOIRES

a- Variables aléatoires.

1- Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque E est une partie de $\mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

On pourra construire les variables aléatoires constantes comme $\omega \longmapsto 1$ (espérance 1, variance nulle).
On pourra aussi construire pour un événement A donné sa fonction indicatrice $\omega \longmapsto \left\{ \begin{array}{cc} 1 & si \quad \omega \in A \\ 0 & si \quad \omega \notin A \end{array} \right.$
(espérace $P(A)$, variance $P(A).(1 - P(A))$).

2- Loi P_X de la variable aléatoire X.

On ne cherche en général pas à connaître totalement la variable aléatoire, "ω par ω".
Ce qui nous importe est de savoir mesurer les événements liés à la variable aléatoire par image réciproque.
Si on connaît pour chaque a chaque $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$, on connaît la variable.
Si on connaît pour chaque a chaque $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\})$, on connaît la loi de la variable, ce qui est amplement suffisant. La "masse" de l'image réciproque $P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\})$ est simplement notée $P(X = a)$.
On notera que les $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = a\}$ avec a dans l'ensemble image forment un système complet d'événements.

EXERCICE DE CONCOURS. On a un Q.C.M. à n questions, avec 4 choix à chaque question. Pour chaque question, on a une probabilité p de connaître la réponse *(quand on la connaît, on répond juste)*. Quand on ne connaît pas la réponse, on coche au hasard une des quatre cases. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses obtenues en connaissant la réponse. On note Y la variable aléatoire qui compte le nombre de bonnes réponses quand on répond au hasard. Trouvez la loi de la variable aléatoire $X+Y$.

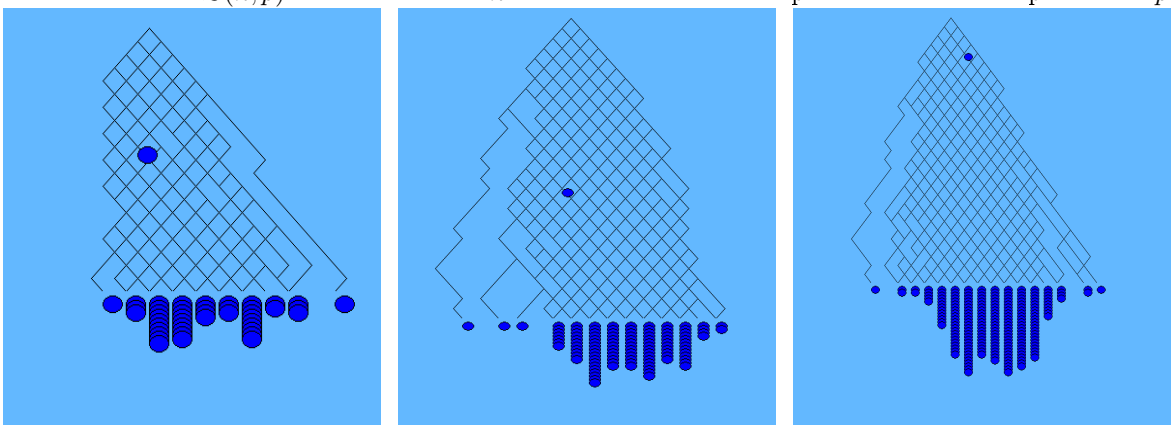
3- Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.

Si X est une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E et f une application de E dans F, alors $f(X)$ est à son tour une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E.
La nouvelle loi est la liste des $P(f(X)=y)$. On montre alors $P(f(X)=y)=\sum_{\substack{x\in E\\ f(x)=y}} P(X=x)$.

b- Lois usuelles.

Loi uniforme sur range(1, n+1)	$P(U_n=k)=\dfrac{1}{n}$
Loi de BERNOULLI de paramètre p *(dans $[0,\ 1]$)* :	$P(X=0)=1-p$ et $P(X=1)=p$
Loi binomiale de paramètres n *(dans $\mathbb{N}^*$)* et p *(dans $[0,\ 1]$)* :	$P(X=k)=\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$

On ajoutera si nécessaire la loi de Rademacher $P(X=1)=P(X=-1)=\dfrac{1}{2}$. Il s'agit de la translation/dilatation d'une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$, et elle modélise le torage "pile ou face équilibré".
La loi binomiale $\mathfrak{B}(n,p)$ est la somme de n lois de BERNOULLI indépendantes de même paramètre p.



Tant qu'on y est, allez sur YouTube voir des vidéos de la planche de GALTON, y compris la vidéo (travaillée avec Blender3D) dans laquelle une planche de Galton semble servir à trier des billes de couleur.

EXERCICE IDIOT. *Vous tirez un Bernoulli au hasard, quelle est la probabilité qu'il s'appelle Jean ?*

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Vrai ou faux :
- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n,\ p)$, alors $n-X$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n,\ 1-p)$,
- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n,\ p)$, alors $2.X$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n,\ p)$,
- si X suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n,\ p)$, alors $X/2$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(n,\ p)$,
- si X et Y suivent une loi binomiale $\mathfrak{B}(n,\ p)$, alors $X+Y$ suit une loi binomiale $\mathfrak{B}(2.n,\ p)$.

EXERCICE CLASSIQUE. On considère la marche de l'ivrogne parti de $(0,\ 0)$ dans le plan en $2.n$ étapes *(à chaque étape, les déplacements* $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, *sont équiprobables).*

Montrez que la probabilité que l'ivrogne soit revenu sur l'axe Oy est $\binom{2.n}{n}.\frac{1}{4^n}$.
Montrez que la probabilité que l'ivrogne soit revenu sur l'axe Ox est $\binom{2.n}{n}.\frac{1}{4^n}$.
Quelle est la probabilité p_n que l'ivrogne soit revenu à l'origine ?
Donnez un équivalent de p_n à l'aide de la formule de Stirling.
La série de terme général $p_n$converge-t-elle ?
Pourquoi n'envisage-t-on pas la probabilité que l'ivrogne soit revenu en $(0,0)$ en $2.n+1$ étapes ?

c- Couples de variables aléatoires.

1- Loi conjointe : liste des $P((X,Y)=(a,b))$ pour a et b décrivant A et B.

Exercice vraiment élémentaire. A et B sont deux variables aléatoires indépendantes "lancer d'un dé équilibré à six faces".
Complétez la loi cojointe de $(A,\ B)$. Complétez la loi cojointe de $(\mu,\ M)$ avec $\mu = Min(A,B)$ et $M = Max(A,B)$.

	$A=1$	$A=2$	$A=3$	$A=4$	$A=5$	$A=6$
$B=1$	1/36	1/36	1/36			
$B=2$	1/36	1/36				
$B=3$	1/36					
$B=4$				1/36		
$B=5$						1/36
$B=6$						

	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$	$\mu=6$
$M=1$	1/36		0			
$M=2$	1/18	1/36				
$M=3$			1/36			
$M=4$						
$M=5$	1/18					
$M=6$						

Exercice moins élémentaire. Est il possible de créer deux dés "non équilibrés" pour avoir :

	$\mu=1$	$\mu=2$	$\mu=3$	$\mu=4$	$\mu=5$	$\mu=6$
$M=1$	6/441	0	0	0	0	0
$M=2$	17/441	10/441	0	0	0	0
$M=3$	22/441	23/441	12/441	0	0	0
$M=4$	27/441	26/441	25/441	12/441	0	0
$M=5$	32/441	29/441	26/441	23/441	10/441	0
$M=6$	37/441	32/441	27/441	22/441	17/441	6/441

Exercice de concours (Spé).
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $P(X=i\ et\ Y=j)=0$ si $i>j$ et $P(X=i,\ Y=j)=\frac{1}{2^j}.\binom{j}{i}.p.(1-p)^j$ sinon. Vérifiez que c'est bien une loi de probabilité.
Calculez les lois de X et Y.
Les variables aléatoires X et Y sont elles indépendantes ?

2- Lois marginales d'un couple de variables aléatoires $P(X=a)=\sum_{b\in B} P((X,Y)=(a,b))$.

Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe. sauf en cas d'indépendance.

Exercice élémentaire. Complétez

	$X=1$	$X=2$	$X=3$
$Y=1$		1/5	1/20
$Y=2$	3/20		3/20
$Y=3$		1/20	

sachant $P(X=2)=\frac{7}{20}$, $P(X=3)=\frac{3}{10}$ et $P(Y=1)=\frac{1}{4}$.
Calculez $P(X=1)$. Calculez $P(X=2 \mid Y=1)$.
Calculez $P(X>Y)$, $P(X=Y)$ et $P(X>Y \mid X\geqslant Y)$ et $P(X\geqslant Y \mid X>Y)$.

3- Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

	X=a	X=b	X=c	X=d
Y=1	0,1	0,1	0,2	0,05
Y=2	0,1	0,1	0,05	0,1
Y=3	0,05	0,05	0	0,1

Loi conjointe

	X=a	X=b	X=c	X=d	
Y=1	0,1	0,1	0,2	0,05	0,45
Y=2	0,1	0,1	0,05	0,1	0,35
Y=3	0,05	0,05	0	0,1	0,2
	0,25	0,25	0,25	0,25	

loi marginale de X

Lois marginales

Couples de variables aléatoires

	X=a	X=b	X=c	X=d
Y=1	0,1	0,4	0,2	0,05
Y=2	0,1	0,4	0,05	0,1
Y=3	0,05	0,2	0	0,1

Loi conditionnelle de Y sachant X = b

Exercice pour caser une contrepetrie. Maintenant, je peux vous l'avouer. Pour noter vos devoirs, c'était simple, Solène et moi disposions d'une urne[4] contenant vingt boules numérotées de 1 à 20 *(le serpent Python était bien déçu, pas de 0)*. Je tirais une note, puis Solène en tirait une autre *(j'ai bien dit une autre, je gardais ma boule)*. Complétez la loi conjointe du tirage : $P(N = k,\ S = n) = \left\{ \begin{array}{lll} & si & k \neq n \\ 0 & si & k = n \end{array} \right|$.

Ensuite, comme c'est moi le plus gentil, je vous donnais en maths la meilleure des deux notes, et bien sûr $P = Min(N,\ S)$.

Complétez : $P(M = k,\ P = n) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & si & k \leqslant n \\ & si & k > n \end{array} \right|$. Vérifiez que la somme vaut 1.

Déduisez $P(M = k) = \dfrac{2.(k-1)}{19.20}$. Déterminez $P(P = n)$.

4- Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

Les exercices classiques de tirages dans des urnes *(ou de situations répétitives équivalentes)* correspondent à des n-uplets de variables aléatoires. La précision "*avec remise*" fait que les variables sont indépendantes. La mention "*sans remise*" fait intervenir un arbre ou la formule des probabilités composées.

Exercice classique. x est un réel et les X_i sont des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes et de même loi. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on définit $Y_n = \dfrac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n} X_k$.

Montrez que si on a $P(X_1 < x) = 1$ alors pour tout n, $P(Y_n < x) = 1$.
Montrez que si on a $P(X_1 \geqslant x) > 0$ alors pour tout n, $P(Y_n \geqslant x) > 1$.
m et n sont deux entiers naturels non nuls, montrez :

$$\left(\{Y_n \geqslant x\} \bigcap \left\{\frac{1}{n}.\sum_{k=m+1}^{m+n} X_k \geqslant x\right]\right) \subset \{Y_{n+m} \geqslant x\}$$

Déduisez : $P(Y_{n+m} \geqslant x) \geqslant P(Y_m \geqslant x).P(Y_n \geqslant x)$.

[4] une urne énorme et un petit cube

Démontrez la convergence de la suite $\left(\sqrt[n]{P(Y_n \geqslant x)}\right)_n$.

d- Variables aléatoires indépendantes.

1- Si X et Y sont indépendantes : $P((X,\ Y) \in A \times B) = P(X \in A) \times P(Y \in B)$.

Exercice classique. Deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\{a_1, \dots a_n\}$ et $\{b_1, \dots b_p\}$ sont indépendantes si et seulement si la matrice de terme général $P(X = a_i \text{ et } Y = b_k)$ est de rang 1.

Exercice élémentaire. Complétez pour que les variables aléatoires "*note en maths*" et "*note en physique*" soient indépendantes, pour faire plaisir à l'inspecteur.

élève	Alice	Bintou	Camille	Diane	Elie	Fred	Gwen	Hans	Ilias	Jules
maths	A	A	A	B	A	B	C	B	B	
physique	A	B	C		C			B	B	
élève	**Klaus**	**Lev**	**Max**	**Naomi**	**Omar**	**Piotr**	**Quik**	**Ruth**	**Swen**	**Tcheng**
maths	B	B	B		B	B	B	C		C
physique								A		A

2- Variables aléatoires mutuellement indépendantes.

X suit une loi uniforme sur l'ensemble à deux éléments $\{-1,\ 1\}$. Y aussi et est indépendante de X : la table conjointe est donc

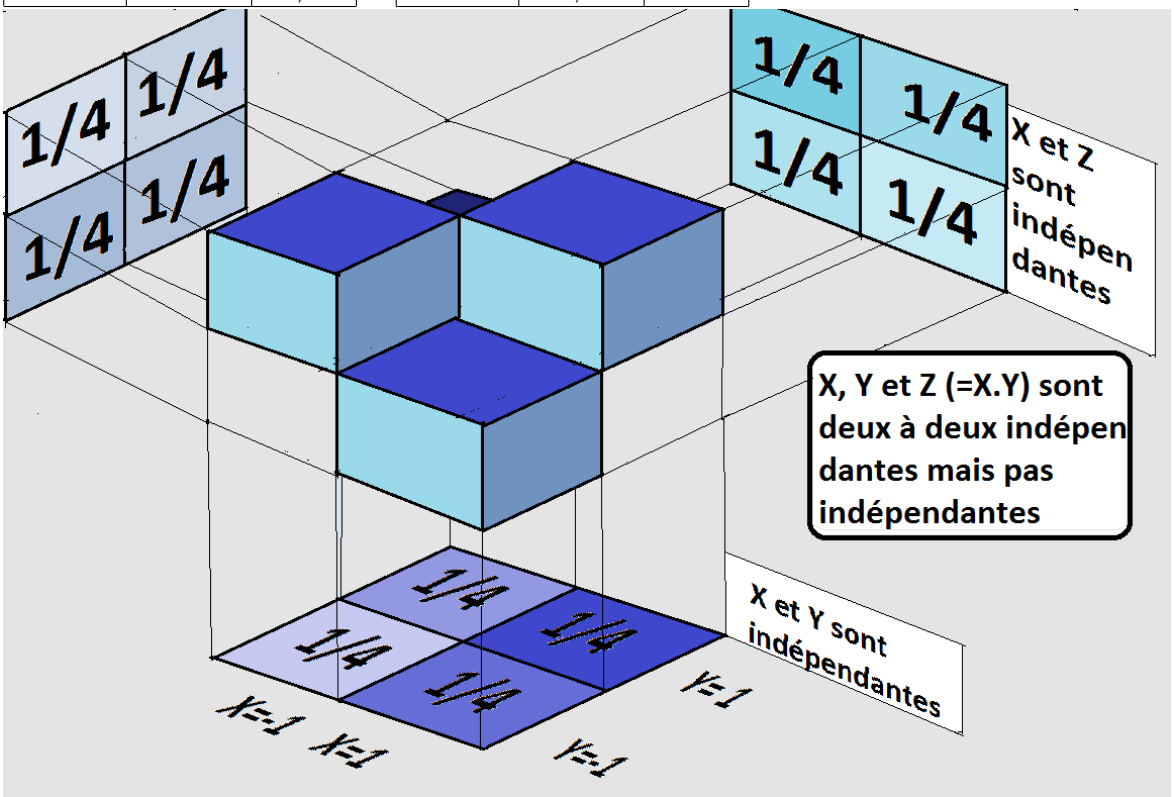
	$X=-1$	$X=1$
$Y=-1$	1/4	1/4
$Y=1$	1/4	1/4

Le produit $Z = X \times Y$ suit aussi une loi uniforme sur $\{-1,\ 1\}$:

$Z=1$	$X=-1$	$X=1$
$Y=-1$	1/4	
$Y=1$		1/4

et

$Z=-1$	$X=-1$	$X=1$
$Y=-1$		1/4
$Y=1$	1/4	



Les couples $(X,\ Y)$, $(Y,\ Z)$ et $(X,\ Z)$ sont faits de variables indépendantes.
Mais le triplet (X, Y, Z) n'est pas fat de variables indépendantes : $P\big((X, Y, Z) = (1, 1, -1)\big) = 0$ et $P(X = 1).P(Y = 1).P(Z = -1) = \dfrac{1}{8}$.

3- Modélisation de n expériences indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Il parait qu'il faut montrer un jour aux élèves que si par exemple $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6)$ est un sextuplet de variables mutuellement indépendantes, alors pour toute application F, G et H, les variables $F(X_1, X_2)$, $G(X_3, X_4, X_5)$et $H(X_6)$ sont mutuellement indépendantes.

4- Si $X_1, \dots X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $B(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $B(n, p)$.

Exercice de concours. Deux variables indépendantes X et Y suivent deux lois binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(n', p')$. A quelle condition $X + Y$ suit elle une loi binomiale ? A quelle condition supplémentaire $n - X + Y$ suite elle aussi une loi binomiale ?

5- Si X et Y sont indépendantes, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.

Outil classique. Si A est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (comme un temps d'attente), on définit sa fonction caractéristique : $\phi_A(x) = \sum_k P(A = k).x^k$ *(somme finie donc polynôme car on a une variable aléatoire à support fini, sinon, on a une série).*

Calculez $\phi_A(1)$, $\phi'_A(1)$. Qui est $\dfrac{\phi_A^{(n)}(0)}{n!}$?
Exprimez $Var(A)$ à l'aide de ϕ_A.
Déterminez ϕ_A quand A suit une loi uniforme ; quand A suit une loi de Bernoulli ; quand A suit une loi binomiale.
Montrez que si A et B sont indépendantes, on a $\phi_{A+B}(x) = \phi_A(x).\phi_B(x)$ pour tout x.

Applicatons.
Retrouvez sans effort la fonction caractéristique de la loi de Bernoulli.
On rappelle que la somme de deux tirages uniformes sur $\{1, \dots 6\}$ indépendants n'est pas un tirage uniforme sur $\{2, \dots 12\}$. Donnez la fonction génératrice de sa loi.
Est il possible d'écrire une variable uniforme sur $\{1, \dots 12\}$ comme somme de deux variables aléatoires indépendantes *(aucune n'étant constante)* ?
Est il possible d'écrire une variable uniforme sur $\{1, \dots 13\}$ comme somme de deux variables aléatoires indépendantes *(notion de loi divisible)* ?

---

e- Espérance.

1- Espérance d'une variable aléatoire réelle.

Relation : $E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega).X(\omega)$.

Exercice élémentaire. Démontrez pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$ *(sachant qu'il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans cette somme).*

Exercice de concours. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée (pouvant même être vide). Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables. On note X la variable aléatoire donnant la somme des numéros tirés. Calculez $E(X)$.

Exercice de concours. n est un entier fixé ; on donne une matrice M de $M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendants et de même loi. Calculez l'espérance de la trace de M.
Calculez l'espérance du déterminant de M.
Pour λ dans $\mathbb{C}$, donnez l'espérance de $\chi_M(\lambda)$ *(polynôme caractéristique de M calculé en λ).*

EXERCICE DE CONCOURS. On dispose d'un dé truqué à six faces tel que la probabilité de tomber sur la face est proportionnelle au chiffre sur lequel le dé tombe. On note X la variable aléatoire donnant le chiffre tiré. Calculez la loi de X, son espérance et sa variance.

EXERCICE DE CONCOURS. X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur range(1, n+1). Déterminez l'espérance de $Min(X,\ Y)$, de $Max(X,\ Y)$ et de $|X-Y|$.

EXERCICE DE CONCOURS. Les X_i sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi : $P(X=-1)=1-p$ et $P(X=1)=p$. On pose $Y=X_1\times X_2\times X_n$. Calculez de deux façons $E(Y)$. Déterminez la valeur de $P(Y=1)$.

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Ayant constaté qu'en moyenne un paquet sur vingt n'arrive pas à destination, j'hésite. Je dois envoyer deux objets de valeurs respectives 100 et 150 euros. Je fais un seul paquet groupé, ou je fais deux envois ?
Calculez l'espérance *(le mot est il bien choisi ?)* de la valeur perdue dans chaqun des deux cas.
Et pour trois objets, de valeurs 100, 150 et 200 euros ?

EXERCICE ÉLÉMENTAIRE. Une loterie a édité deux cent billets, dont trois qui font gagner vingt euros, cinq qui font gagner dix euros et sept qui font gagner deux euros. Vous achetez dix billets. Quelle est la probabilité que vous ayez un gain de vingt euros ? Quelle est la probabilité que vous ayez un gain de douze euros ? Complétez l'espérance de votre gain :
$$\frac{20.\binom{3}{1}.\binom{5}{0}.\binom{7}{0}.\binom{185}{9}+40.\binom{3}{2}.\binom{5}{0}.\binom{7}{0}.\binom{185}{8}+\ldots+30.\binom{3}{1}.\binom{5}{1}.\binom{7}{0}.\binom{185}{8}+\ldots+12.\binom{3}{0}.\binom{5}{0}.\binom{7}{6}.\binom{185}{4}+\ldots}{\binom{200}{10}}$$

2- Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle ; $X-E(X)$ est centrée.

Qu'est ce que l'algébriste qui est en vous pense de la formule $X=E(X)+\big(X-E(X)\big)$?
Et devinez quel est le nimimum de $\alpha\longmapsto E((X-\alpha)^2)$? Qu'en pense votre côté pas obscur du tout *(le côté algébriste)*.

3- Propriétés de l'espérance :
- **linéarité** $E(a.X+b.Y)=a.E(X)+b.E(Y)$,
- **positivité, croissance :** $(X\leqslant Y)\Rightarrow(E(X)\leqslant E(Y))$.

4-

Espérance d'une variable aléatoire constante	$E(C)=c$
Espérance d'une variable de BERNOULLI de paramètre p	$E(B_p)=p$
Espérance d'une variable binomiale de paramètres n et p	$E(\mathcal{B}_{\mathrm{n,p}})=n.p$

5- Formule de transfert : si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $E(f(X))=\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x).f(x)$.

Formule technique, mais à comprendre. Il suffit d'écrire
$$E(f(X))=\sum_{\omega\in\Omega}f(X(\omega)).p(\{\omega\})=\sum_{x\in E}\Big(\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x}}f(X(\omega)).p(\{\omega\})\Big)=\sum_{x\in E}\Big(f(x).\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x}}p(\{\omega\})\Big).$$

EXERCICE HORS PROGRAMME DE SUP. Vous avez un dé à six faces équilibré que vous lancez sans répit. Quand il tombe sur un nombre pair au n^{ieme} lancer, vous posez $a_n=\dfrac{1}{2^n}$, et sinon, vous posez

$a_n = \dfrac{1}{3^n}$. Montrez que la série de terme général a_n converge. Quelle est l'espérance de la somme de la série ?
Variante : vous lancez toujours votre dé sans répit. Quand il tombe sur la valeur f au n^{ieme} lancer, vous posez $a_n = \dfrac{1}{f^n}$. Quelle est la probabilité que la série de terme général a_n converge ? Quelle est l'espérance de la somme de la série ?

6- Inégalité de Markov : $P(A \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(A)}{a}$

Démonstration. On prend une variable aléatoire positive A et un réel a strictement positif.
On écrit la définition : $E(A) = \sum_x x.P(A = x)$.
On coupe en deux $E(A) = \sum_{x<a} x.P(A = x) + \sum_{a\leqslant x} x.P(A = x)$.
La première somme est positive, car la variable aléatoire est positive.
Dans la seconde, on minore : $a \leqslant x$ donc $a.P(A = x) \leqslant x.P(A = x)$.
On a donc à ce stade $E(A) \leqslant \sum_{a\leqslant x} a.P(A = x) = a.\sum_{a\leqslant x} P(A = x)$.
Or, la somme $\sum_{a\leqslant x} P(A = x)$ est précisément $P(A \geqslant a)$.
Il ne reste plus qu'à diviser par a strictement positif.
Pour a trop proche de 0, cette inégalité est sans intérêt.

Exercice élémentaire. Montrez pour g croissante : $P(|X| \geqslant a) \leqslant \dfrac{E(g(X))}{g(a)}$.

Exercice de concours. X est une variable aléatire réelle à valeurs dans $\{1,\ 2, \dots n\}$. Montrez, pour tout m de $\{1,\ 2, \dots n\}$: $E(X) \leqslant m - 1 + n.P(X \geqslant m)$.

7- Si X et Y sont indépendantes : $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

Démonstration. On écrit la définition de l'espérance pour la variable aléatoire produit : $E(X.Y) = \sum_{(a,b)} a.b.P((X, Y) = (a, b))$.
On profite de l'indépendance : $E(X.Y) = \sum_{(a,b)} a.b.P(X = a).P(Y = b)$.
On compare avec le produit de sommes : $\Big(\sum_a a.P(X = a)\Big).\Big(\sum_b b.P(Y = b)\Big)$.

Exercice de concours. X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé ne prenant chacune que deux valeurs. Montrez que X et Y sont indépendantes si et seulement si on a $E(X.Y) = E(X).E(Y)$.

---

f- Variance, écart-type et covariance.

1- Moments. Le moment d'ordre k de X est $E(X^k)$.

Exercice élémentaire. Un dé à six faces non équilibré porte la valeur 1 sur deux de ses faces, la valeur 2 sur deux autres et la valeur 3 sur les deux dernières *(c'est finalement ce qu'on pourrait appeler un dé à trois faces et il est non équilibré je le rappelle).*
On lance ce dé, l'espérance du résultat est 47/22. Ecrivez l'équation linéaire concernant $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$.
La variance est 365/484.

Complétez : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix}$. Calculez alors les trois probabilités.
Que serait ce problème avec un dé à quatre faces numérotées a, b, c et d ? Que vient faire ici VanDerMonde ?

2- Variance, écart-type :

$$Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Exercice élémentaire. Que signifie "la variance de X est nulle" ?

Exercice élémentaire. Dans l'entreprise A, il a a vingt salariés dont dix neuf touchent 2 000 euros par mois.
Dans l'entrprise B, il y a aussi vingt salariés, tous payés 2 500 euros par mois.
Retrouvez le salaire du dernier salarié de A sachant que l'espérance du salaire est la même dans les deux entreprises.
Comparez les variances.
Pouvez vous modifier les salaires de deux salariés de A pour que l'espérance reste la même mais que la variance soit divisée par 2 ?

Exercice élémentaire. X, Y et Z sont trois variables de Bernoulli de même paramètre p, mutuellement indépendantes.
Calculez et comparez $Cov(X,\ Y)$, $Cov(X,\ Z)$, $Cov(2.X,\ Y+Z)$, $Cov(X+Z,\ Y+Z)$ et $Cov(X.Z,\ Y.Z)$.

3- Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1 ; $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.

La preuve est élémentaire.

4- Relation $Var(a.X + b) = a^2.Var(X)$.

Démonstration. On développe $E((a.X+b)^2) = E(a^2.X^2+2.a.X+b^2) = a.E(X^2)+2.a.E(X)+b^2$.
On développe aussi $(E(a.X + b))^2 = (a.E(X) + b)^2 = a^2.(E(X))^2 + 2.a.E(X) + b^2$.
On soustrait : $E((a.X + b)^2) - (E(a.X + b))^2 = a^2.(E(X^2) - E(X)^2) = a^2.Var(X)$.

Exercice élémentaire. On dispose d'un dé équilibré à six faces. On le lance une première fois *(variable aléatoire X)*. Si la valeur affichée vaut 4 ou 5, on la garde *($Y = X$)*, sinon, on relance *(nouvelle valeur : Y)*.

Complétez

$P(Y)=1$	$P(Y)=2$	$P(Y)=3$	$P(Y)=4$	$P(Y)=5$	$P(Y)=6$

Calculez espérance et variance de X et de Y.
Calculez l'espérance de $X.Y$ et la covariance du couple $(X,\ Y)$.

5-

Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli :	$p.(1-p)$
Variance d'une variable aléatoire binomiale : $n.p.(1-p)$:	$n.p.(1-p)$
Variance d'une variable uniforme sur range(1, n+1) :	$\dfrac{n^2-1}{12}$

La variance de la loi binomiale peut se calculer à l'aide des sommes suivantes $\sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$,

$\sum_{k=0}^{n} k.(k-1).\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$ et $\sum_{k=0}^{n} k.\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k}$.
Mais il suffit de se dire que pour n variables de Bernouilli indépendantes, les variances s'additionnent.

6- Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$$

Démonstration. On prend une variable aléatoire X, d'espérance $E(X)$ et de variance $Var(X)$.
La variable aléatoire $(X - E(X))^2$ est positive. Elle a pour espérance $Var(X)$.
On lui applique l'inégalité de Markov avec $A = (X - E(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$:
$P((X - E(X))^2 \geqslant \varepsilon^2) \leqslant \frac{E((X - E(X))^2)}{\varepsilon^2}$.
C'est exactement $P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}$.

Exercice de concours (presque). Soit (Y_k) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi. On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} Y_k$. Prouvez pour tout a strictement positif : $P\Big(\Big|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\Big|\Big) \leqslant \frac{V(Y_n)}{n.a^2}$.
(une question de cours juste avant demandait comme par hasard "rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebitchev").
Application : une burne contient 2 boules carmin et 3 boules ébène *(ça change de rouge et noir)*. On les tire, avec remise *(sinon elle sera vite vide)*. A partir de combien de tirages peut on garantir à plus de 95% que la proportion de boules carmin restera comprise entre 0,35 et 0,45 ? *(Indication : $Y_k = k^{ieme}$ tirage, Bernoulli).*

Exercice de concours (génétiquement modifié). Neuf fois sur dix, Martine [5] se prend un rateau quand elle tente sa chance avec un garçon. Est ce que ça veut dire que si elle tente sa chance dix fois elle va emballer à coup sûr ? Non. Quelle est la probabilité qu'elle se prenne dix rateaux ?
Combien son Bienaymé lui recommande-t-il de faire de tentatives pour emballer avec quatre vingt dix huit pour cent de chances ?

Exercice de concours.

Un avion peut transporter 200 passagers et leurs bagages. Avant de les charger, il pèse déjà 190 tonnes *(matériel, équipage, carburant)*. IL ne pourra décoller que si sa masse ne dépasse pas 220 tonnes.
Les passagers, mutuellement indépendants, ont une masse qui suit une loi d'espérance 68 kilogrammes et d'écart-type 10 *(quelle unité pour la variance, quelle unité pour l'écart-type ?)*.
La loi de la masse des bagages a pour espérance 18 kilogrammes et pour variance 49 kilogrammes-carrés *(pardon ? j'ai répondu à la question précédente ?)*.
Calculez la masse moyenne du chargement passagers et bagages.
Calculez la variance du chargement passages et bagages.
Montrez que la probabilité que l'avion soit en surcharge se majore par $3,3 \times 10^{-4}$ *(on sera ammené à inclure le cas où l'avion est au contraire en sous-poids sous la barre des 160 tonnes).*

7- Covariance de deux variables aléatoires :

$$Cov(X, Y) = E(X.Y) - E(X).E(Y)$$

Exercice élémentaire. Montrez : $(Cov(X,\ Y))^2 \leqslant Var(X).Varx(Y)$.
Qu'est ce que l'algébriste qui est en vous en pense ? Quelles sont les lois "*orthogonales*" à toutes les autres ?

---

[5] pour éviter tout problème et préserver son anonymat, le prénom a été changé, et le visage a été flouté, ce qui explique peut être son peu de succès

On réalise des essais successifs mutuellement indépendants, avec tous probabilité de réussite égale à p.
On note S_n la variable aléatoire "nombre de succès sur les n premiers essais. On suppose $0 < n < N$.
Montrez que S_n et $S_N - S_n$ sont indépendantes et donnez leurs lois.
Montrez $Cov(S_n,\ S_N) = n.p.(1-p)$ *(utilisez la bilinéarité).*

8- Cas de variables indépendantes : la covariance est nulle *(pas de réciproque).*

Exercice élémentaire. On donne

Probabilités	$X=-1$	$X=0$	$X=1$
$Y=0$	0	1/2	0
$Y=1$	1/4	0	1/4

Montrez que X et Y ne sont pas indépendantes. Complétez :

$P(X=-1)$	$P(X=0)$	$P(X=1)$	$E(X)$	$P(Y=0)$	$P(Y=1)$	$E(Y)$

et

$P(X.Y=-1)$	$P(X.Y=0)$	$P(X.Y=1)$	$E(X.Y)$

. Concluez.

9- Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.

Exercice de concours (Spé).
Une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si elle est à valeurs dans $[n,\ +\infty[\cap\mathbb{N}$ et vérifie $P(X=k) = \binom{k-1}{n-1}.(1-p)^{n-k}.p^n$.
Vérifiez que c'est une loi de probabilité.
Montrez que c'est la loi suivie par la somme de n variables géométriques indépendantes de paramètre p.

Exercice de concours (Spé). Les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant toutes pour espérance μ et variance v. Montrez que $prod_{i=1}^{n} X_n$ a pour espérance μ^n et pour variance $(v+\mu^2)^n - \mu^n$.