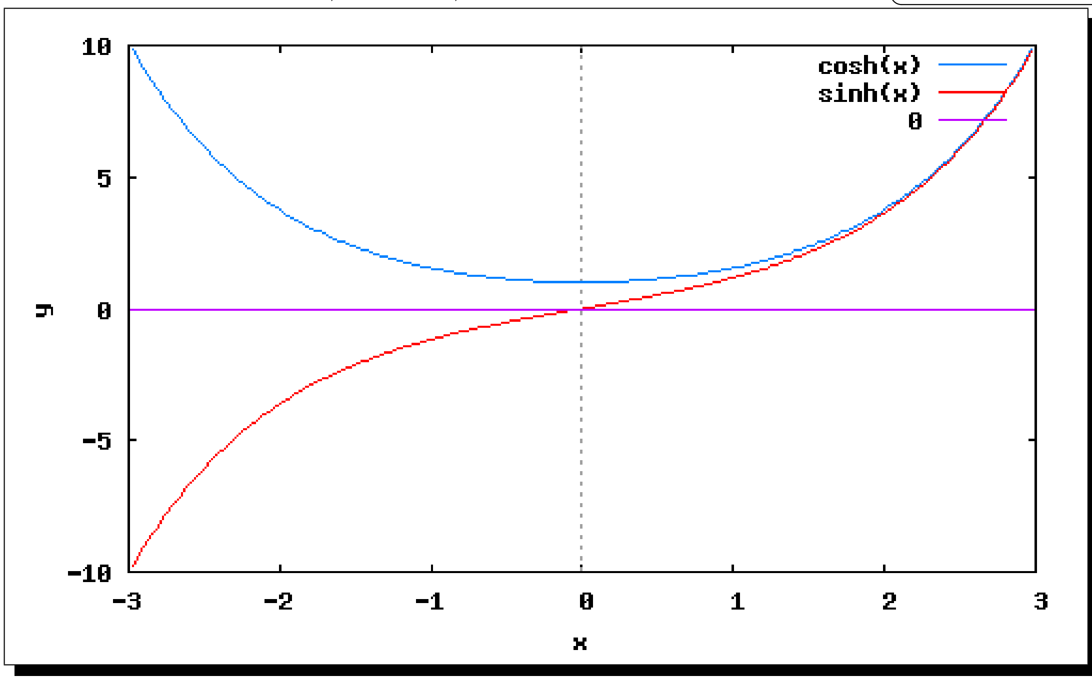
Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Hyperbolique

cours

On définit : $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ pour tout réel x *(et pourquoi pas, les complexes).*
Il s'agit de la partie paire et de la partie impaire de la fonction exponentielle.
Les deux sont définies sur $\mathbb{R}$, continues, dérivables. On les dérive aisément : $\boxed{ch' = sh \text{ et } sh' = ch}$



Elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions de $y" = y$.

Par récurrence sur n on établit

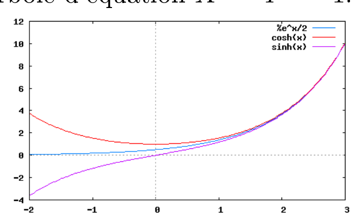
	$ch^{(n)}$	$sh^{(n)}$
n impair	sh	ch
n pair	ch	sh

.

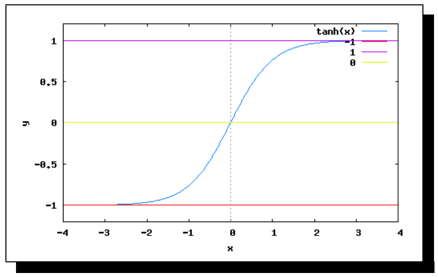
On trouve le signe et les variations de chacune. Le cosinus hyperbolique vaut toujours plus que 1.

On montre aisément $ch(x) + sh(x) = e^x$ et $ch(x) - sh(x) = e^-x$ puis $ch^2 - sh^2 = 1$. Ceci justifie l'appellation "hyperbolique". Les points $(ch(t),\ sh(t))$ sont sur l'hyperbole d'équation $X^2 - Y^2 = 1$.

On a les équivalents en $+\infty$: $ch(x) \simeq sh(x) \simeq \dfrac{e^x}{2}$ et $th(x) \longrightarrow 1^-$:



Il n'y a donc aucun problème d'existence pour la tangente hyperbolique :
$\boxed{th(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^-x} = \dfrac{e^{2.x} - 1}{e^{2.x} + 1}}$ Cette application est impaire, bornée par -1 et 1, crois-



sante, de dérivée $\dfrac{1}{ch^2} = 1 - th^2$

MPSI 2/2013 — **Formules d'addition** — *cours*

On montre, à l'image des fonctions trigonométriques usuelles :

$ch(a+b)$	$ch(a-b)$	
$ch(a).ch(b) + sh(a).sh(b)$	$ch(a).ch(b) - sh(a).sh(b)$	
$sh(a+b)$	$sh(a-b)$	
$sh(a).ch(b) + ch(a).sh(b)$	$sh(a).ch(b) - ch(a).sh(b)$	

On les retrouve d'ailleurs avec les matrices de la forme $\begin{pmatrix} ch(x) & sh(x) \\ sh(x) & ch(x) \end{pmatrix}$ de déterminant -1.

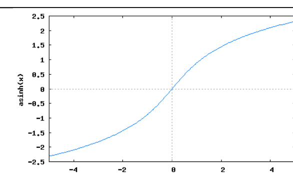
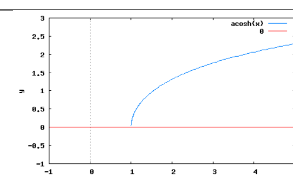
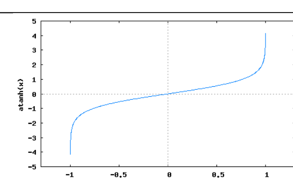
On peut recréer des formules pour $ch(p).ch(q)$ et autres, mais elles servent peu.

En passant au quotient, et en divisant par $sh(a).sh(b)$, on a $\boxed{th(a+b) = \dfrac{th(a)+th(b)}{1+th(a).th(b)}}$ *(ce qui explique un exercice classique : $\alpha * \beta = \dfrac{\alpha+\beta}{1+\alpha.\beta}$ sur $]-1,\ 1[$ est une loi de groupe).*

On montre la formule de Tchebitchev : $ch((n+1).x) = 2.ch(x).ch(n.x) - ch((n-1).x)$, et on a donc $T_n(ch(x)) = ch(n.x)$ (qui permet de résoudre des équations comme $T_n(x) = \lambda$ avec λ plus grand que 1).

MPSI 2/2013 — **Réciproques** — *cours*

Pour tout a réel, l'équation $sh(x) = a$ a une unique solution.
Pour tout a réel de $[1,\ +\infty[$, l'équation $ch(x) = a$ a un couple de solutions, opposées.
Pour tout a réel de $]-1,\ 1[$, l'équation $th(x) = a$ a une unique solution.

$sh(x) = a$	$a = \ln(a + \sqrt{1+a^2})$	$\dfrac{dx}{da} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}}$	sur $\mathbb{R}$	
$ch(x) = a$	$a = \ln(a + \sqrt{a^2-1})$	$\dfrac{dx}{da} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}$	sur $]1,\ +\infty$	
$th(x) = a$	$a = \dfrac{1}{1}\ln(\dfrac{1+a}{1-a})$	$\dfrac{dx}{da} = \dfrac{1}{1-a^2}$	sur $]-1,\ 1[$	

MPSI 2/2013	`0 points`	*cours*