Lycée Charlemagne

$\mathcal{MPSI}2$

.2018.– –.2019.

Vendredi 21 septembre

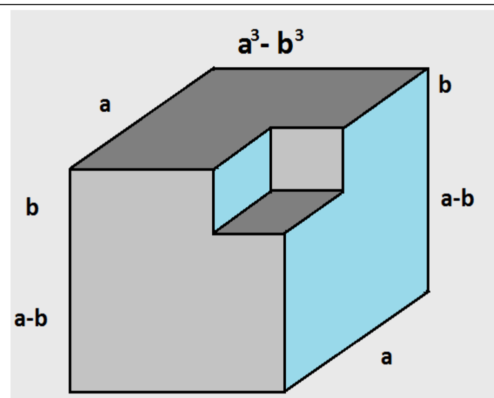
DS 1

♡ 0 ♡ Montrez : $\forall(a,\ b)\in D^2,\ \Big((\tan(a)=\tan(b))\Leftrightarrow(\exists k\in\mathbb{Z},\ b=a+k.\pi)\Big)$ avec $D=\bigcup_{p\in\mathbb{Z}}\Big]-\dfrac{\pi}{2}+p.\pi,\ \dfrac{\pi}{2}+p.\pi\Big[$. 2 pt.

♡ 1 ♡ Montrez : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2.n}\Big(k^{((-1)^k)}\Big)=\frac{4^n.(n!)^2}{(2.n)!}$ pour tout n. 4 pt.

♡ 2 En I.S. et en T.D., on a croisé des exercices du type "calculer $\tan(\pi/48)$" ou "calculer $\sin(\pi/36)$". Pour ceux ci, on partait d'un angle de tangente connue, et on divisait par 2. La démarche semblait systématique. Montrez donc les deux formules utiles de division par 2 si l'on pose $s=\sin(\theta)$ et $t=\tan(\theta)$ pour un θ de $]0,\ \pi/2[$,

alors on a
$$\tan(\theta/2)=\frac{1}{\dfrac{1}{\sin(\theta)}+\dfrac{1}{\tan(\theta)}}$$
et
$$\sin(\theta/2)=\sqrt{\frac{\sin(\theta).\tan(\theta/2)}{2}}$$
. 4 pt.



♡ 2 ♡ Prouvez par découpage : $a^3-b^3=(a-b).(a^2+a.b+b^2)$. 3 pt.

♡ 3 ♡ Montrez que l'application qui à un entier n associe le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n!$ n'est pas injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, ni surjective. Est elle injective de $[6,\ +\infty[\cap\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$? 4 pt.

♡ 4 ♡ a, $b$et c sont les affixes de trois points A, B et C du plan complexe. Montrez l'équivalence des trois propositions suivantes : 4 pt.

(A,B,C) est un triangle équilatéral orienté dans le sens direct	$(b-c)=e^{i.\pi/3}.(a-c)$	$a+j.b+j^2.c=0$

♡ 5 ♡ Un petit Vrai/Faux de l'E.S.I.E.E. : 3 pt.

z est le complexe $1+i$	(A) $\dfrac{z^3}{\overline{z}}=\dfrac{1}{2}.z^4$	(B) $\dfrac{\overline{z}}{z^3}\in\mathbb{R}$
(C) $\dfrac{\overline{z}^4}{z^2}$ est imaginaire pur.	(D) il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que z^n soit un réel strictement négatif.	(E) $\exists n\in\mathbb{N},\ Arg(z^n)=-\frac{\pi}{2}\ [2.\pi]$

Polynôme — DS 1

◇ 0 ◇ Montrez que pour tout a réel, le polynôme $X^3-3.X^2+a$ (noté P_a) admet au moins une racine réelle. 1 pt.

◇ 1 ◇ Pour tout a, on note $\rho(a)$ la plus grande racine réelle de P_a. Calculez $\rho(0)$, $\rho(4)$. Calculez $\rho(2)$. Prouvez $\rho(-16)=4$, $\rho(20)=-2$. 6 pt.

◇ 2 ◇ Montrez qu'il n'existe aucun a vérifiant $\rho(a)=0$. 2 pt.

◇ 3 ◇ Montrez que ρest injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. 2 pt.

◇ 4 ◇ ρest elle continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? 2 pt.

Rappel : pour montrer des inégalités, on calcule des différences.
C'est à dire que pour montrer $a \leqslant b$, on calcule $b-a$. Quand à la fin du calcul, il est clair que $b-a$ est positif, on a prouvé $a \leqslant b$.

Inégalité de Tchebitchev DS 1

I∼0) Les a_i et les $b_j$sont des réels, vérifiant $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3 \leqslant b_4$.

Montrez : $a_1.b_1 + a_2.b_2 \geqslant \dfrac{(a_1+a_2).(b_1+b_2)}{2}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

Retrouvez le résultat dévu vu en I.S. : pour x et y strictement positifs, avec par exemple $0 < x < y$, on a $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{x.y}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼1) Développez $(a_2-a_1).(b_2-b_1)+(a_3-a_1).(b_3-b_1)+(a_3-a_2).(b_3-b_2)$, et déduisez $a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3 \geqslant \dfrac{(a_1+a_2+a_3).(b_1+b_2+b_3)}{3}$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

I∼2) Montrez, en choisissant bien vos a_i et b_j pour tout triplet de réels strictement positifs : $(\alpha+\beta+\gamma).\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right) \geqslant 9$. $\boxed{\text{3 pt.}}$

I∼3) Montrez $a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+a_4.b_4 \geqslant \dfrac{(a_1+a_2+a_3+a_4).(b_1+b_2+b_3+b_4)}{4}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼4) Enoncez le résultat général pour deux suites de n réels, et si possibe, démontrez le. $\boxed{\text{6 pt.}}$

I∼5) Retrouvez la comparaison des moyennes arithmétiques et harmoniques :
pour n réels strictement positifs α_1 à α_n : $\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n} \geqslant \dfrac{1}{\dfrac{\frac{1}{\alpha_1}+\ldots+\frac{1}{\alpha_n}}{n}}$. $\boxed{\text{2 pt.}}$

Oui, la moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne des inverses. On la croise dans l'exercice suivant et ses variables :
sur un trajet aller retour, vous avez parcouru l'aller à la vitesse moyenne v_1 et le retour à la vitesse moyenne v_2 : quelle a été votre vitesse moyenne sur l'aller retour ? $\boxed{\text{2 pt.}}$

I∼6) Retrouvez la comparaison des moyennes arithmétiques et quadratiques :
pour n réels α_1 à α_n : $\left(\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{(\alpha_1)^2+\ldots+(\alpha_n)^2}{n}$ *(carré de la moyenne contre moyenne des carrés).* $\boxed{\text{2 pt.}}$

Inégalité de Nesbitt DS 1

II∼0) a, b et c sont trois réels strictement positifs vérifiant $0 < a \leqslant b \leqslant c$. Prouvez :
$\dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{a+c} \leqslant \dfrac{1}{a+b}$ puis $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b} \geqslant \dfrac{3}{2}$ (c'est ça l'inégalité de Nesbitt) $\boxed{\text{3 pt.}}$
(attention, il faudra utiliser deux inégalités, et pas une seule ; y'a pas écrit Bac !)

II∼1) Donnez un cas d'égalité. $\boxed{\text{1 pt.}}$

II∼2) Variante de la démonstration :
Montrez $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{3}{2} = \dfrac{3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)}{2.(a+b).(a+c).(b+c)}$.
Retrouvez l'inégalité de Nesbitt. $\boxed{\text{3 pt.}}$

Lycée Charlemagne

.2018.– MPSI2 –.2019.

Correction

DS 1

Questions de cours. DS 1

On prend a et b dans le domaine de définition de la tangente.

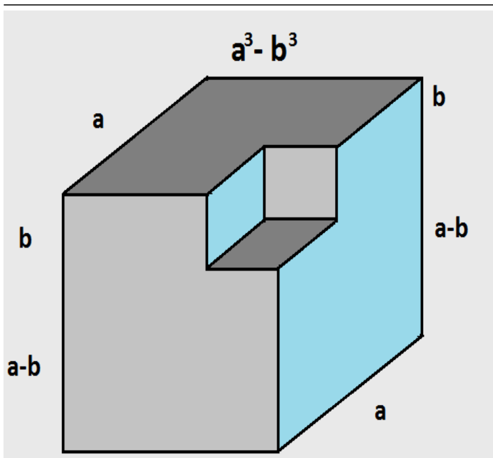
On suppose $\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)} = \dfrac{\sin(b)}{\cos(b)}$. On effectue un produit en croix et on fait passer d'un seul côté : $\sin(a).\cos(b) - \cos(a).\sin(b) = 0$.

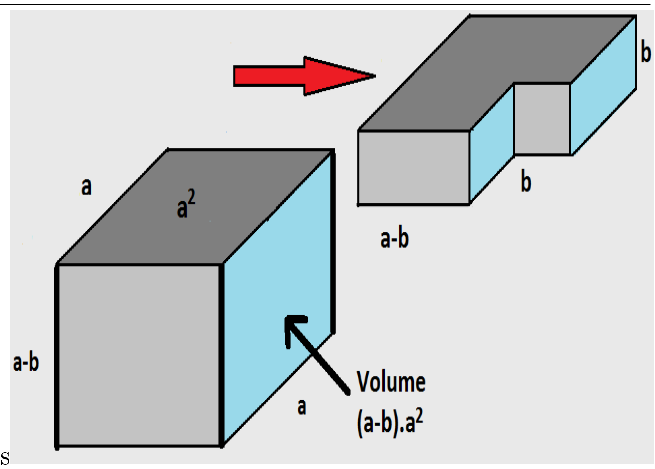
On reconnaît une formule de trigonométrie : $\sin(a-b) = 0$.

Le sinus est nul uniquement pour les multiples de π : $\exists k \in \mathbb{Z},\ b - a = k.\pi$.

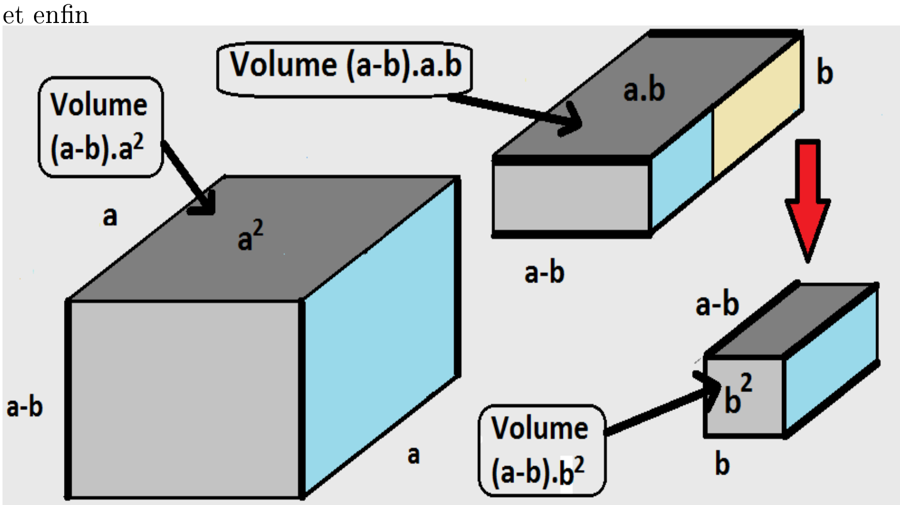
On reconnaît que a et b sont congrus modulo π.

Pour la réciproque, si on écrit $b = a + k.\pi$, on a $\tan(b) = \tan(a + k.\pi) = \dfrac{\tan(a) + \tan(k.\pi)}{1 - \tan(a).\tan(k.\pi)}$. Sachant que $\tan(k.\pi)$ est nul, il reste $\tan(b) = \tan(a)$.



puis


et enfin



Aurai-je une solution sous forme de copie "pop-up" ? Ou aurais je une solution à construire moi même ?

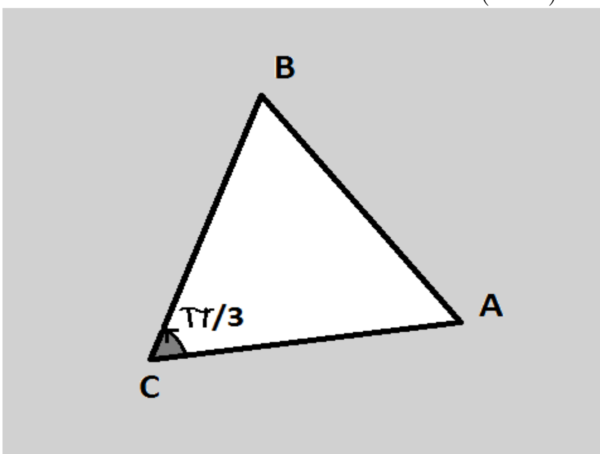
On prend donc les points A, B et C d'affixes a, b et c.

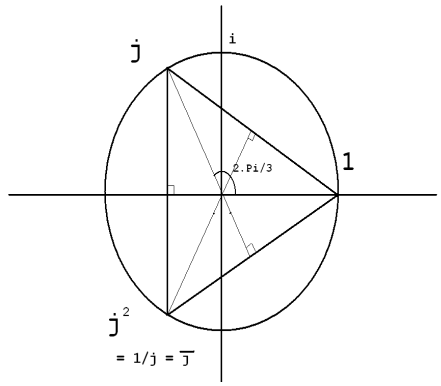
Le triangle $(A,\ B,\ C)$ est équilatéral si et seulement si

les trois côtés sont égaux	pas pratique
les trois angles sont égaux	pas partique
on passe d'un sommet au suivant par rotation autour de l'autre sommet	pratique

Oui, il faut voir la géométrie de manière dynamique, avec des points qui bougent, et nullement avec des équations partout. Intentez un procès à vos rofesseurs et aux inspecteurs pédagogiques si ils vous ont persuadé que tout se mettait en équation.

On se place en C : une rotation d'angle $\pi/3$ fait passer de A à B.
On résume effectivement : $b-c=e^{i.\pi/3}.(a-c)$.





Et si vous aimez les équations, ceci dit déjà : $|b-c|=|e^{i.\pi/3}|.|a-c|$ donc $|b-c|=|a-c|$. On interprète : $BC=AC$. Le triangle est isocèle.
On extrait aussi : $Arg\Big(\dfrac{b-c}{a-c}\Big)=\dfrac{\pi}{3}$. L'angle en C vaut $\pi/3$.
Un triangle isocèle avec un angle $\pi/3$! Il est équilatéral.

On passe maintenant de $b-c=e^{i.\pi/3}.(a-c)$ à $a+j.b+j^2.c=0$.
Comment faire venir j ? $1+j=e^{i.\pi/3}=-j^2$.
$b-c=e^{i.\pi/3}.(a-c)$ équivaut à $(b-c)=-j^2.(a-c)$.
On met tout d'un même côté : $b-c+j^2.a-j^2.c=0$.
On multiplie par j : $j.b-j.c+1.a-1.c=0$.
On remplace $-1-j$ par $+j^2$ et c'est fini.

Quotient de factorielles. DS 1

Le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{2.n}\Big(k^{((-1)^k)}\Big)$ est fait de termes dont l'exposant vaut -1 ou 1. On le nomme A_n pour le calculer.
C'est $A_n=1^{(-1)^1}.2^{(-1)^2}.3^{-1)^3}.4^{(-1)^4}\dots(2.n-1)^{(-1)^{2.n-1}}.(2.n)^{(-1)^{2.n}}$.
On calcule les exposants : $A_n=1^{-1}.2^1.3^{-1}.4^1\dots(2.n-1)^{-1}.(2.n)^1$.
On tient compte des exposants $A_n=\dfrac{2.4.6\dots(2.n)}{1.3.5\dots(2.n-1)}$.
Posons : $a_n=2.4.6\dots(2.n)$ et $b_n=1.3.5\dots(2.n-1)$ pour simplifier les choses.
On a alors trois informations : $A_n=\dfrac{a_n}{b_n}$, $a_n.b_n=(2.n)!$ et $a_n=2^n.n!$ (en ayant sorti tous les 2).
On extrait : $b_n=\dfrac{(2.n)!}{2^n.n!}$ puis $A_n=\dfrac{2^n.n!}{(2.n)!}.2^n.n!=\dfrac{4^n.(n!)^2}{(2.n)!}$.

Une récurrence sur n est aussi possible. On commence au rang 1.
On calcule les deux quantités : $\displaystyle\prod_{k=1}^{2.1}\Big(k^{((-1)^k)}\Big)=1^{(-1)^1}.2^{(-1)^2}=2$ et $\dfrac{4^1.(1!)^2}{(2.1)!}=2$. Il y a égalité.

On se donne ensuite un entier naturel n quelconque, et on suppose $\prod_{k=1}^{2.n}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^n.(n!)^2}{(2.n)!}$.

On doit prouver $\prod_{k=1}^{2.n+1}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^{n+1}.((n+1)!)^2}{(2.(n+1))!}$.

Partons de $\prod_{k=1}^{2.(n+1)}\left(k^{((-1)^k)}\right)$. C'est $\prod_{k=1}^{2.n}\left(k^{((-1)^k)}\right)$ multiplié par deux termes de plus : celui d'indice $2.n+1$ et celui d'indice $2.n+2$:

$$\prod_{k=1}^{2.n+2}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \left(\prod_{k=1}^{2.n}\left(k^{((-1)^k)}\right)\right).\left((2.n+1)^{(-1)^{2.n+1}}.(2.n+1)^{(-1)^{2.n+1}}\right)$$

puis $\prod_{k=1}^{2.(n+1)}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \left(\prod_{k=1}^{2.n}\left(k^{((-1)^k)}\right)\right).\left(\frac{1}{2.n+1}.(2.n+2)\right)$.

On remplace par l'hypothèse de récurrence $\prod_{k=1}^{2.(n+1)}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^n.(n!)^2}{(2.n)!}.\left(\frac{2.n+2}{2.n+1}\right)$.

On arrange $\prod_{k=1}^{2.n+2}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^n.(n!)^2}{(2.n)!}.\frac{2.(n+1)}{2.n+1} = \frac{4^n.2.(n+1)!.n!}{(2.n+1)!}$.

On multiplie par $\frac{2.(n+1)}{2.n+2}$ pour avoir les factorielles attendues :

$$\prod_{k=1}^{2.n+2}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^n.2.(n+1)!.n!}{(2.n+1)!}.\frac{2.(n+1)}{2.n+2}.$$

On trouve bien $\prod_{k=1}^{2.(n+1)}\left(k^{((-1)^k)}\right) = \frac{4^n.4.(n+1)!.(n+1)!}{(2.n+2)!} = \frac{4^{n+1}.((n+1)!)^2}{(2.n+2)!}$. La récurrence s'achève.

Division d'un angle par 2. DS 1

On se donne θ entre 0 et $\pi/2$ (son sinus, sa tangente sont positifs, et il en sera de même pour $\theta/2$).

On doit prouver : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\frac{1}{\sin(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}}$.

Partons de la quantité la plus compliquée et tentons de la simplifier, c'est à dire du membre de droite :

$\frac{1}{\frac{1}{\sin(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$. On remplace $\cos(\theta)$ par $\cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2)$ ou même mieux encore, par $2.\cos^2(\theta)/2$. On ajoute 1, il reste $\frac{1}{\frac{1}{\sin(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} = \frac{\sin(\theta)}{2.\cos^2(\theta/2)}$.

On remplace alors $\sin(\theta)$ par $2.\sin(\theta/2).\cos(\theta/2)$ *(cas particulier dans la formule $\sin(a+b) = \sin(a).\cos(b) + \cos(a).\sin(b)$ avec $a = b = \theta/2$).*

Il reste à simplifier $\frac{1}{\frac{1}{\sin(\theta)} + \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}} = \frac{2.\sin(\theta/2).\cos(\theta/2)}{2.\cos^2(\theta/2)} = \frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

C'est bon. Il existe aussi une preuve visuelle.

On prend ensuite $\sqrt{\frac{\sin(\theta).\tan(\theta/2)}{2}}$ dans laquelle on remplace encore $\sin(\theta)$ par $2.\sin(\theta/2).\cos(\theta/2)$.

On a maintenant $\sqrt{\frac{2.\sin(\theta/2).\cos(\theta/2).\tan(\theta/2)}{2}}$. Les 2 s'en vont, de même que $\cos(\theta)$ présent au dénominateur dans la tangente. Il ne subsistera que $\sqrt{\sin^2(\theta/2)}$ et on pourra conclure par un argument de signe *(à ne pas oublier, on est en maths, le raisonnement est plus important que le calcul).*

C'est avec ces formules qu'Archimède a calculé le périmètre d'un polygône régulier à 6, 12, 24, 48 et même 96 côtés. Il a ainsi obtenu une belle approximation de π. Obtenue par la raison et non par l'expérience, l'affirmation ou la seule intuition ou même la foi. Bref, le génie.

Nombre de chiffres de la factorielle. DS 1

L'application qui à n associe le nombre de chiffres de l'écriture décimale de $n!$ peut être exmplicitée au moins pour sses premiers termes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n!$	1	1	2	6	24	120	720	5040	40 320	362 880
nombre de chiffres	1	1	1	1	2	3	3	4	5	6

On a déjà nos contre-exemples à l'injectivité : $f(0) = f(1)$; $f(5) = f(6)$ en notant f cette application (qui va bien de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$).
Pour un défaut de surjectivité, il faut trouver une valeur non atteinte.
On peut prendre son cougae à deux mains et tenter de calculer les premières factorielles :

n	10	11	12	13	14	15
$n!$	3 628 800	39 916 800	479 001 600	6 227 020 800	87 178 291 200	1 307 674 368 000
nombre de chiffres	7	8	9	10	11	13

On peut comprendre que la valeur 12 n'a pas été atteinte et ne le sera plus...

J'en devine en train de dire "mais ça s'fait pas ; on ne peut pas nous demander de calculer des nombres aussi atroces !".
Et ma réponse est "oui, pas d'inquiétude, il y a plus simple".
Considérons $f(99)$. C'est le nombre de chiffres de 99!. On ne le connaît pas [1].
Et qui est $f(100)$? C'est $f(99) + 2$. En effet, pour passer de 99! à 100!, on multiplie par 100 tout rond, ce qui a pour effet d'ajouter deux chiffres au bout (des 0, c'est vrai).
La valeur $f(99) + 1$ ne sera donc jamais atteinte. On a sauté au dessus.

Rappelons au passage que f est croissante au sens large, comme composée de deux applictions croissantes : la factorielle et l'application "qui à un nombre associe son nombre de chiffres". On a donc bien, pour $n \leqslant 99$: $f(n) \leqslant f(99) < f(99) + 1$ et pour $n \geqslant 100$: $f(n) \geqslant f(100) = f(99) + 2 > f(99) + 1$.

Ce n'est pas le premier contre-exemple, mais c'est le plus simple.

L'énoncé propose ensuite de travailler sur $|[6,\ +\infty|[$. Pour montrer l'injectivité, montrons la croissance stricte.

n	6	7	8	9	10	11
$n!$	720	5040	40 320	362 880	3 628 800	39 916 800
nombre de chiffres	3	4	5	6	7	8

Elle est validée pour les premières valeurs et à partir de 10, c'est un jeu d'enfant.
Considérons $f(n)$ et $f(n+1)$. On sait que $n!$ s'écrit avec $f(n)$ chiffres. Pour passer à $(n+1)!$, il faut multiplier par $n+1$, donc par un nombre plus grand que 10. Avec la multiplication par 10, l'écriture augmentait d'un chiffre. Par multiplication par $n+1$, elle augmente d'au moins un chiffres.
On a prouvé : $\forall n \geqslant 10,\ f(n+1) \geqslant f(n) + 1 < f(n)$.
On a aussi : $\forall n \geqslant 100,\ f(n+1) \geqslant f(n) + 2 < f(n)$.
Et même : $\forall n \geqslant 1\ 000,\ f(n+1) \geqslant f(n) + 3 < f(n)$.

Un Q.C.M. de l'E.S.I.E.E. DS 1

Comme on a posé $z = 1 + i$, on a aussi $z = \sqrt{2}.e^{i.\pi/4}$. Les quotients sont alors faciles à calculer :

$$\frac{z^3}{\overline{z}} = \frac{2.\sqrt{2}.e^{i.3.\pi/4}}{\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4}} = 2.e^{4.i.\pi/4} = -2 \text{ et } \frac{z^4}{2} = \frac{4.e^{4.i.\pi/4}}{2} = -2 \text{ ; } A \text{ est vraie.}$$

$$\frac{\overline{z}}{z^3} = \frac{\sqrt{2}.e^{-i.\pi/4}}{2.\sqrt{2}.e^{3.i.\pi/4}} = \frac{e^{-4.i.\pi/4}}{2} = -\frac{1}{2} \text{ ; c'est un réel.}$$

$$\frac{\overline{z}^4}{z^2} = \frac{4.e^{-4.i.\pi/4}}{2.e^{2.i.\pi/4}} = 2.e^{-6.i.\pi/4} = 2.i \text{ ; c'est un pur imaginaire.}$$

[1] bon, ça fait 157 à titre indicatif

z^n a pour argument $n.\pi/4$ (modulo $2.\pi$) et réel négatif pour $n = 4$.
z^6 a pour argument $6.\pi/4$ modulo $2.\pi$, on prend

z est le complexe $1 + i$	(A) $\dfrac{z^3}{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}.z^4$ Vrai	(B) $\dfrac{\overline{z}}{z^3} \in \mathbb{R}$ Vrai
(C) $\dfrac{\overline{z}^4}{z^2}$ est imaginaire pur. Vrai	(D) il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que z^n soit un réel négatif. Vrai	(E) $\exists n \in \mathbb{N}$, $Arg(z^n) = -\frac{\pi}{2}$ $[2.\pi]$ Vrai

Tout est vrai.

Inégalité de Tchebitchev, petites valeurs. DS 1

Pour prouver $a_1.b_1 + a_2.b_2 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2).(b_1 + b_2)}{2}$, on calcule la différence “celui dont on veut qu’il soit le plus grand moins celui dont on veut qu’il soit le plus petit” :
$D = a_1.b_1 + a_2.b_2 - \dfrac{(a_1 + a_2).(b_1 + b_2)}{2} = \dfrac{2.a_1.b_1 + 2.a_2.b_2 - (a_1 + a_2).(b_1 + b_2)}{2}$.
Quand on développe le produit et simplifie, il reste $D = \dfrac{a_1.b_1 + a_2.b_2 - a_1.b_2 - a_2.b_1}{2}$.
On ne regarde que le numérateur, où on regroupe et factorise :
$a_1.b_1 + a_2.b_2 - a_1.b_2 - a_2.b_1 = a_1.b_1 - a_2.b_1 + a_2.b_2 - a_1.b_2 = b_1.(a_1 - a_2) + b_2.(a_2 - a_1)$.
On devine la nouvelle factorisation $a_1.b_1 + a_2.b_2 - a_1.b_2 - a_2.b_1 = (a_2 - a_1).(-b_1 + b_2)$.
Dans ce produit, les deux facteurs $(a_2 - a_1)$ et $(-b_1 + b_2)$ sont positifs. Le produit est positif.
On a donc prouvé $a_1.b_1 + a_2.b_2 - \dfrac{(a_1 + a_2).(b_1 + b_2)}{2} \geqslant 0$.

On nous donne x et y. Il faut prouver : $\dfrac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{x.y}$.
Quel rapport avec $a_1.b_1 + a_2.b_2 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2).(b_1 + b_2)}{2}$?
Prenons : $a_1 = b_1 = \sqrt{x}$ et $a_2 = b_2 = \sqrt{y}$. On a bien $a_1 \leqslant a_2$ et $b_1 \leqslant b_2$, ce qui autorise à appliquer le résultat précédent :
on a alors $\sqrt{x}.\sqrt{x} + \sqrt{y}.\sqrt{y} \geqslant \dfrac{(\sqrt{x} + \sqrt{x}).(\sqrt{y} + \sqrt{y})}{2}$.
On reconnaît : $x + y \geqslant \dfrac{2.\sqrt{x}.2.\sqrt{y}}{2}$. *C’est la comparaison des moyennes.*

Développons cette fois $(a_2 - a_1).(b_2 - b_1) + (a_3 - a_1).(b_3 - b_1) + (a_3 - a_2).(b_3 - b_2)$ qu’on va noter D et regroupons les termes :

$$D = \begin{array}{cccc} a_2.b_2 & -a_2.b_1 & -a_1.b_2 & +a_1.b_1 \\ a_3.b_3 & -a_3.b_1 & -a_1.b_3 & +a_1.b_1 \\ a_3.b_3 & -a_3.b_2 & -a_2.b_3 & +a_2.b_2 \end{array}$$

$D = (a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3) - (a_1.b_2 + a_2.b_1 + a_2.b_3 + a_3.b_2 + a_1.b_3 + a_3.b_1)$
Une chose à dire : D est positif, puisque c’est une somme de produits positifs.
(en effet, par exemple : $a_2 \leqslant a_3$ et $b_2 \leqslant b_3$ donc $(a_3 - a_2)$ et $(b_3 - b_2)$ sont positifs).

Calculons à présent la différence à rendre positive :
$a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 - \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)}{3} = \dfrac{3.a_1.b_1 + 3.a_2.b_2 + 3.a_3.b_3 - (a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)}{3}$

On développe le numérateur et on a $3.a_1.b_1 + 3.a_2.b_2 + 3.a_3.b_3 + \begin{array}{ccc} -a_1.b_1 & -a_2.b_1 & -a_3.b_1 \\ -a_1.b_2 & -a_2.b_2 & -a_3.b_2 \\ -a_1.b_3 & -a_2.b_3 & -a_3.b_3 \end{array}$.

On reconnaît D. La différence est donc positive.
On fait passer de l’autre côté $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)}{3}$.

On se donne cette fois trois réels strictement positifs. On va supposer $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$. En effet, les rôles sont symétriques dans la quantité $\Big(\alpha + \beta + \gamma\Big).\Big(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\Big)$.

On a grande envie de prendre $\boxed{a_1 = \alpha,\ a_2 = \beta \text{ et } a_3 = \gamma}$ On a bien $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$.

On a aussi envie de prendre $b_1 = \dfrac{1}{\alpha}$, $b_2 = \dfrac{1}{\beta}$ et $b_3 = \dfrac{1}{\gamma}$.

Mais on n'a pas $b_1 \leqslant b_2 \leqslant b_3$. Bien au contraire : $\dfrac{1}{\alpha} \geqslant \dfrac{1}{\beta} \geqslant \dfrac{1}{\gamma}$.

On ne peut donc pas appliquer la formule qu'on a prouvée à la question précédente.

Mauvais réflexe des élèves qui ont la volonté de tenter d'avoir une note, plutôt que la volonté de devenir intelligents :
on a montré une formule sous certaines hypothèses ; le mauvais réflexe est d'appliquer la formule juste parce que ça ressemble, sans vérifier si on a les hypothèses.
Quand on a prouvé $P \Rightarrow Q$, on n'a pas le droit d'affirmer Q sans regarder déjà si P est vraie...

Alors que faire ? C'est pourtant tentant d'écrire $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = \alpha.\dfrac{1}{\alpha} + \beta.\dfrac{1}{\beta} + \gamma.\dfrac{1}{\gamma} = 3$.

L'idée : $\boxed{b_1 = -\dfrac{1}{\alpha},\ b_2 = -\dfrac{1}{\beta} \text{ et } b_3 = -\dfrac{1}{\gamma}}$ Cette fois, on a bien $-\dfrac{1}{\alpha} \leqslant -\dfrac{1}{\beta} \leqslant -\dfrac{1}{\gamma}$.

On a le droit d'écrire $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3).(b_1 + b_2 + b_3)}{3}$ qui devient

$-3 = -\alpha.\dfrac{1}{\alpha} - \beta.\dfrac{1}{\beta} - \gamma.\dfrac{1}{\gamma} \geqslant \dfrac{(\alpha + \beta + \gamma).\Big(-\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\Big)}{3}$.

On croise : $-9 \geqslant (\alpha + \beta + \gamma).\Big(-\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta} - \dfrac{1}{\gamma}\Big)$.

On efface les signes moins : $9 \leqslant (\alpha + \beta + \gamma).\Big(\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}\Big)$.

Une question qui permettra de voir si vous affirmes des choses juste pour conclure, ou si vous affirmez des choses parce qu'elles vous semblent vraies.

Pour prouver $a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+a_4.b_4 \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)}{4}$, calculons le numérateur de la différence, qu'on va noter D parce que c'est une habitude :

$D = 4.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + a_4.b_4) - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4).(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)$.

On arrange en $4.a_1.b_1 + 4.a_2.b_2 + 4.a_3.b_3 + 4.a_4.b_4 + \begin{array}{cccc} -a_1.b_1 & -a_2.b_1 & -a_3.b_1 & -a_4.b_1 \\ -a_1.b_2 & -a_2.b_2 & -a_3.b_2 & -a_4.b_2 \\ -a_1.b_3 & -a_2.b_3 & -a_3.b_3 & -a_4.b_3 \\ -a_1.b_4 & -a_2.b_4 & -a_3.b_4 & -a_4.b_4 \end{array}$

et même $3.a_1.b_1 + 3.a_2.b_2 + 3.a_3.b_3 + 3.a_4.b_4 + \begin{array}{cccc} & -a_2.b_1 & -a_3.b_1 & -a_4.b_1 \\ -a_1.b_2 & & -a_3.b_2 & -a_4.b_2 \\ -a_1.b_3 & -a_2.b_3 & & -a_4.b_3 \\ -a_1.b_4 & -a_2.b_4 & -a_3.b_4 & \end{array}$

A toutes fins utiles : 24 termes dont la moitié avec un signe plus (les $a_k.b_k$) et la moitié avec un signe moins (les $a_i.b_j$ avec $i \neq j$).

On veut montrer que ce réel est positif. On s'inspire de ce qui précède et on développe
$(a_2 - a_1).(b_2 - b_1) + (a_3 - a_1).(b_3 - b_1) + (a_4 - a_1).(b_4 - b_1) + (a_3 - a_2).(b_3 - b_2) + (a_4 - a_2).(b_4 - b_2) + (a_4 - a_3).(b_4 - b_3)$

Chaque terme comme $a_1.b_1$ est présent trois fois.

Les termes en $a_i.b_j$ avec $i \neq j$ sont présents chacun une fois avec un signe moins.

C'est donc D.

Or, $(a_2 - a_1).(b_2 - b_1) + (a_3 - a_1).(b_3 - b_1) + (a_4 - a_1).(b_4 - b_1) + (a_3 - a_2).(b_3 - b_2) + (a_4 - a_2).(b_4 - b_2) + (a_4 - a_3).(b_4 - b_3)$ est une somme de termes positifs ($positif\ fois\ positif$). Il est positif.

On a bien $a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 + a_4.b_4 - \dfrac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)}{4} \geqslant 0$.

On a même $a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3+a_4.b_4-\dfrac{(a_1 + a_2 + a_3 + a_4).(b_1 + b_2 + b_3 + b_4)}{4} = \dfrac{\displaystyle\prod_{i<j}(a_j - a_i).(b_j - b_i)}{4}$.

Inégalité de Tchebitchev, version à n termes. DS 1

On voit vite venir la formule générale : $a_1.b_1+a_2.b_2+\ldots+a_n.b_n \geqslant \dfrac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{n}$.

Mais il doit y avoir des hypothèses : $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$.
On écrit : $\forall (a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^{2.n}$,

$$\begin{matrix} a_1 & \leqslant a_2 & \leqslant \ldots & \leqslant a_n \\ b_1 & \leqslant b_2 & \leqslant \ldots & \leqslant b_n \end{matrix} \Rightarrow a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)}{n}$$

On écrit même en quantifiant :

$$\forall (a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^{2.n},\ \Big(\forall (i, j),\ i \leqslant j \Rightarrow \begin{matrix} a_i \leqslant a_j \\ et \\ b_i \leqslant b_j \end{matrix}\ \Big) \Rightarrow \Big(\prod_{k=1}^{n} a_k.b_k \geqslant \frac{1}{n}.\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big).\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big)\Big)$$

Pour ce qui est de la preuve, on doit regarder le signe de
$n.(a_1.b_1 + a_2.b_2 + \ldots + a_n.b_n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n).(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$
Il suffit de dire que ce nombre est égal à la somme de produits de termes positifs
$(a_2 - a_1).(b_2 - b_1) + (a_3 - a_1).(b_2 - b_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}).(b_n - b_{n-1})$
On affirme qu'il y a égalité.

Et si on doit le prouver ? Je vous le fais, mais ceux qui n'ont manipulé les sigma que pour des sommes du type $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i$ vont avoir du mal.

On calcule $\displaystyle\sum_{i,j} (a_j - a_i).(b_j - b_i)$ qui n'est même pas $(a_2 - a_1).(b_2 - b_1) + (a_3 - a_1).(b_2 - b_1) + \ldots + (a_n - a_{n-1}).(b_n - b_{n-1})$.

C'est en effet une somme où i et j bougent tous les deux, sans même imposer $i < j$. Il y a carrément $n \times n$ termes *(n choix pour i et n choix pour j).*
Quand i est plus petit que j, c'est un terme $positif\ fois\ positif$.
Quand i est plus grand que j, c'est un terme $negatif\ fois\ negatif$.
Quand i est égal à j, c'est un terme nul.
Tous les termes sont positifs ou nuls : $\displaystyle\sum_{i,j} (a_j - a_i).(b_j - b_i) \geqslant 0$.

On développe $\displaystyle\sum_{i,j} (a_j.b_j - a_i.b_j - a_j.b_i + a_j.b_j) \geqslant 0$.

On sépare : $\displaystyle\sum_{i,j} a_j.b_j - \sum_{i,j} a_i.b_j - \sum_{i,j} a_j.b_i + \sum_{i,j} a_j.b_j \geqslant 0$.

• Dans la somme $\displaystyle\sum_{i,j} a_j.b_j$, il y a n^2 termes, mais quand i prend ses n valeurs, on a toujours le même $a_j.b_j$. C'est à dire que $a_1.b_1$ est présent pour les couples (i, j) suivants : $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$ jusqu'à $(1, n)$. On a donc n fois $a_1.b_1$. Il en est de même pour $a_2.b_2$ jusqu'à $a_n.b_n$.

Bref, $\displaystyle\sum_{i,j} a_j.b_j = n.\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i = n.\sum_{k=1}^{n} a_k.b_k$ car la variable de sommation peut changer de nom.

• Dans la somme $\displaystyle\sum_{i,j} a_i.b_j$, chaque a_i rencontre chaque b_j. C'est donc le développement brut de $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$ avec ses n^2 termes.

• Dans la somme $\displaystyle\sum_{i,j} a_i.b_j$, on la les mêmes termes certes pas dans le même ordre, mais c'est aussi $\displaystyle\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big).\Big(\sum_{j=1}^{n} b_j\Big)$.

• Dans la somme $\displaystyle\sum_{i,j} a_j.b_j$, chaque $a_j.b_j$ est encore présent n fois *(i sert de compteur).*

Bref, $\displaystyle\sum_{i,j} a_j.b_j - \sum_{i,j} a_i.b_j - \sum_{i,j} a_j.b_i + \sum_{i,j} a_j.b_j = n.\sum_{k} a_k.b_k - 2.\sum_{i} a_i.\sum_{j} b_j + n.\sum_{k} a_k.b_k$.
On fait passer de l'autre côté du symbole $\geqslant 0$, on divise par 2 et on a la formule...

Moyenne des inverses. DS 1

On prend n réels strictement positifs. Rien n'interdit des les imaginer classés par ordre croissant, ce qui ne change rien à une somme comme $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n$.

On pose alors comme tout à l'heure

$a_1 = \alpha_1$	$\leqslant a_2 = \alpha_2$	$\leqslant a_3 = \alpha_3$	$\ldots$	$\leqslant a_n = \alpha_n$
$b_1 = -\dfrac{1}{\alpha_1}$	$\leqslant b_2 = -\dfrac{1}{\alpha_2}$	$\leqslant b_3 = -\dfrac{1}{\alpha_3}$	$\ldots$	$\leqslant b_n = -\dfrac{1}{\alpha_n}$

Le premier membre de la formule $a_1.b_1 + \ldots + a_n.b_n$ est alors juste une somme de n termes égaux à -1.

Le second terme de la formule est le produit $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n).\Big(-\dfrac{1}{\alpha_1} - \ldots - \dfrac{1}{\alpha_n}\Big)$.

On a donc : $-n \geqslant \dfrac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n).\Big(-\dfrac{1}{\alpha_1} - \ldots - \dfrac{1}{\alpha_n}\Big)}{n}$.

On efface les signes moins : $n \leqslant \dfrac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n).\Big(\dfrac{1}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}\Big)}{n}$.

On fait passer de l'autre côté la somme positive des inverses : $\dfrac{n}{\dfrac{1}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}} \leqslant \dfrac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}$

On propulse même en bas le n : $\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{\alpha_1} + \ldots + \dfrac{1}{\alpha_n}}{n}} \leqslant \dfrac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n}$.

Oui, il y a des élèves qui ont du mal avec $\dfrac{a}{\frac{b}{c}} = \dfrac{a.c}{b}$*. Je fais quoi de ceux là ? Pour l'instant je les engueule.*

Plus tard dans l'année, si ils persistent, on verra.

L'inverse de la moyenne des inverses est plus petit que la moyenne classique.

On imagine donc comme indiqué un aller retour.
La distance à parcourir à l'aller comme au retour est notée d.

	distance	vitesse	durée
aller	d	v_1	
retour	d	v_2	

donc

	distance	vitesse	durée
aller	d	v_1	$\dfrac{d}{v_1}$
retour	d	v_2	$\dfrac{d}{v_2}$

On regarde le temps total :

	distance	vitesse	durée
aller	d	v_1	$\dfrac{d}{v_1}$
retour	d	v_2	$\dfrac{d}{v_2}$
aller retour	$2.d$		$\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}$

On a parcouru $2.d$ en un temps $\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}$, la vitesse moyenne est $\dfrac{2.d}{\dfrac{d}{v_1} + \dfrac{d}{v_2}}$. On trouve $\dfrac{2}{\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2}}$.

Testez l'exercice avec des amis :
on a fait l'aller à la vitesse de 20 à l'heure et le retour à la vitesse de 10 à l'heure. Il est idiot de dire que l'aller retour se serait fait à 15 à l'heure.
Ne tentez pas de convaincre votre interlocuteur par le calcul. Proposez lui :
on a fait l'aller à 20 km/h et le retour à 0 km/h ; on n'a pas fait l'aller-retour à 10 km/h.
On n'a même pas fait l'aller-retour !

Sinon, avez vous appris par coeur en physique (électricité) *des formules en* $\dfrac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$ *pour les résistances en parallèle ? Ou avez vous plutôt compris :* $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$ (inverse de la somme des inverses) *?*
Vous vous doutez quelle approche je préfère nettement en tant que matheux et même en tant que prof du supérieur ?

Carré de la moyenne, moyenne des carrés. DS 1

Comme les quantités $\left(\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\right)^2$ et $\dfrac{(\alpha_1)^2+\ldots+(\alpha_n)^2}{n}$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel on cite les éléments, on peut supposer la liste classée par ordre croissant : $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \alpha_n$ et aussi $\alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \alpha_n$. L'inégalité de Tchebitchev donne :
$\alpha_1.\alpha_1+\alpha_2.\alpha_2+\ldots+\alpha_n.\alpha_n \geqslant \dfrac{(\alpha_1+\ldots+\alpha_n).(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)}{n}$.
On divise une fois de plus par n (positif) et on a bien $\dfrac{(\alpha_1)^2+\ldots+(\alpha_n)^2}{n} \geqslant \left(\dfrac{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}{n}\right)^2$.

Inégalité de Nesbitt. DS 1

On a donc supposé $0 < a \leqslant b \leqslant c$.

On repart de $0 < a \leqslant b$ et on ajoute c : $0 < a+c \leqslant b+c$. Par décroissance de $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0,\ +\infty[$, on obtient $0 < \dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{a+c}$.

On fait de même : $(0 < b \leqslant c) \Rightarrow (0 < b+a \leqslant c+a) \Rightarrow \left(0 < \dfrac{1}{c+a} \leqslant \dfrac{1}{b+a}\right)$.

On peut aussi calculer une différence : $\dfrac{1}{b+a} - \dfrac{1}{c+a} = \dfrac{c-b}{(b+a).(c+a)} \geqslant 0$.

On repart de $a \leqslant b \leqslant c$ et $0 < \dfrac{1}{b+c} \leqslant \dfrac{1}{a+c} \leqslant \dfrac{1}{b+a}$ et on écrit l'inégalité de Tchebitchev d'ordre 3 :

$a.\dfrac{1}{b+c} + b.\dfrac{1}{a+c} + c.\dfrac{1}{a+b} \geqslant \dfrac{(a+b+c).\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)}{3}$.

Mais on a montré un résultat sur les moyennes : $(\alpha+\beta+\gamma).\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}\right) \geqslant 9$.

On l'applique à $\alpha = b+c$, $\beta = a+c$ et $\gamma = a+c$.

Elle donne : $((b+c)+(a+c)+(a+b)).\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$.

On arrange : $2.(a+b+c).\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+b}\right) \geqslant 9$.

On enchaîne : $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{C}{a+b} \geqslant \dfrac{(a+b+c).\left(\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{a+b}\right)}{3} \geqslant \dfrac{9/2}{3} = \dfrac{3}{2}$.

Il fallait utiliser deux des inégalités au dessus et ne pas se contenter d'une seule.
Les outils sont du niveau Terminale sans aucune difficulté.
Les réflexes ne sont pas du niveau Bac ; l'exercice n'est pas basé sur des automatismes.

Un cas d'égalité : $a = b = c$ *(et même pas forcément $a = b = c = 1$ comme vous allez sans doutes mes le dire).*

On a bien $\dfrac{a}{a+a}+\dfrac{a}{a+a}+\dfrac{a}{a+a} = \dfrac{3}{2}$.

Pour montrer $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}-\dfrac{3}{2} = \dfrac{3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)}{2.(a+b).(a+c).(b+c)}$, on réduit le premier au dénominateur commun et on étudie la différence entre
$\dfrac{2.(a.(a+c).(a+b)+b.(b+a).(b+c)+c.(c+a).(c+b))-3.(a+b).(a+c).(b+c)}{2.(a+b).(a+c).(b+c)}$
et $\dfrac{3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)}{2.(a+b).(a+c).(b+c)}$

On compare juste les numérateurs en développant
$2.a.(a+c).(b+c)+2.b.(b+a).(b+c)+2.c.(c+a).(c+b)-3.(a+b).(a+c).(b+c)$.
Avec signe plus, on y trouve $2.(a^3+b^3+c^3)$ puis $2.(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)$ et enfin $2.3.a.b.c$.
Avec signe moins, on a $3.(2.a.b.c+a^2.b+a^2.c+b^2.c+b^2.a+c^2.b+c^2.a)$ *(huit termes).*
On "compacte" : $2.(a^3+b^3+c^3)-(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)$.

Et si on développe $3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)$, les cubes sont en $3.a^3-a^3+3.b^3-b^3+3.c^3-c^3$, et les autres termes *(avec signe moins)* sont des $a^2.b$ et variantes.

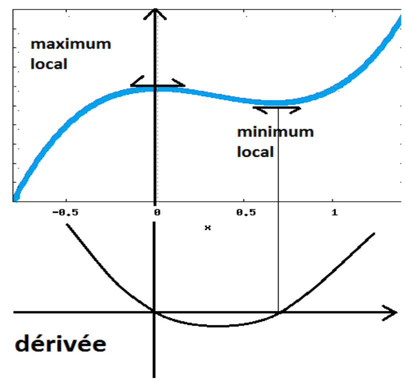
Bref, on a encore $2.(a^3+b^3+c^3)-(a^2.b+a^2.c+b^2.a+b^2.c+c^2.a+c^2.b)$.

Il y a bien égalité.

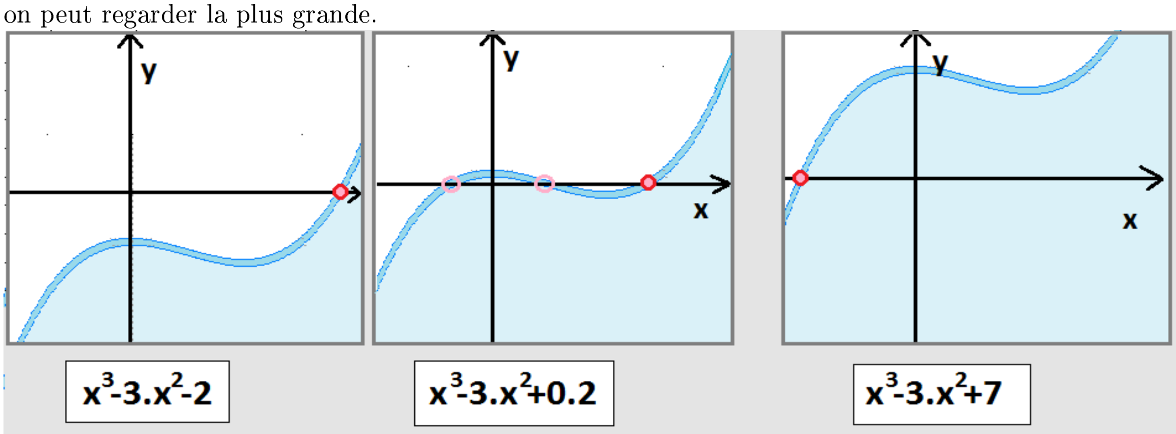
Pour montrer $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}+\dfrac{c}{a+b}\geqslant\dfrac{3}{2}$, il suffit donc de prouver $\dfrac{3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)}{2.(a+b).(a+c).(b+c)}\geqslant 0$. Comme le dénominateur est positif, il suffit de prouver $3.(a^3+b^3+c^3)-(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)$.
Et vous savez quoi ? C'est une inégalité de Tchebitchev :
on a $a\leqslant b\leqslant c$ et $a^2\leqslant b^2\leqslant c^2$
on déduit $a.a^2+b.b^2+c.c^2\geqslant\dfrac{(a+b+c).(a^2+b^2+c^2)}{3}$. C'est exactement ce qu'il nous faut.

Polynômes P_a. DS 1

On étudie les variations et la continuité de P_a en le dérivant : $(P_a)'=x\longmapsto 3.x^2-3.x$. La dérivée s'annule et change de signe en 0 et 1/2. Elle est positive, puis négative, puis positive. Le polynôme P_a est croissant, décroissant, croissant. Vers $-\infty$, c'est x^3qui l'emporte, de même vers $+\infty$.
On résume : $P_a(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ et tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires, P_a s'annule au moins une fois.
Et peut être même trois.
Ou deux (avec une racine double).
Quoi qu'il en soit, il a une, deux ou trois racines réelles.



Comme il en a, on peut essayer de regarder l'une d'entre elles. Et comme il n'y en a qu'un nombre fini, on peut regarder la plus grande.



On cherche la plus grande racine de P_0. Le polynôme P_0est $X^3-3.X^2$. Il a pour racines 0 *(double)* et 3. La plus grande est 3.
On cherche la plus grande racine de P_4. Le polynôme P_0est $X^3-3.X^2+4$. On n'a pas de racine évidente. On dresse un tableau de variations.

Pour prouver $\rho(-16)=4$ il suffit de prouver que le polynôme P_{-16} admet pour racine 4, et que parmi ses trois racines si il y en a trois, c'est la plus grande. On écrit $P_{16}=X^3-3.X^2-16$ et on vérifie déjà : $4^3-3.4^2-16=0$. Mais qui sont les autres racines de ce polynôme ? On le factorise comme on peut : $P_{-16}=X^3-3.X^2-16=(X-4).(X^2+X+4)$. Le "sous"-polynôme (X^2+X+4) n'a pas de racine réelle. C'est donc que 4 est la seule racine réelle de P_{-16} ; c'est la plus grande... On peut aussi dresser le tableau de variations.

Pour factoriser, vous pouvez
• *faire du vélo avec des petites roues :*
on pose $X^3 - 3.X^2 - 16 = (X-4).(a.X^2 + b.X + c)$, *on développe, on identifie, on résout*
• *bosser comme un étudiant en médecine qui apprend une méthode et la comprendre plus tard :*
algorithme de Hörner
• *poser une division euclidienne*

$$\begin{array}{cccc|ccc} X^3 & -3.X^2 & +0.X & -16 & X & -4 & \\ -(X^3 & -4.X^2) & & & X^2 & +X & +4.X \\ & X^2 & +0.W & & & & \\ & -(X^2 & -4.X) & & & & \\ & & 4.X & -16 & & & \end{array}$$

Et pour rédiger ? Aucune de ces choses à : vous faites ce que vous voulez au brouillon, et vous écrivez directement $(X-4).(X^2 + X + 4) = X^3 - 3.X^2 - 16$, *c'est si évident quand on le lit dans le sens normal.*

Pour $\rho(20) = -2$, il suffit de montrer que -2 est racine de $X^3 - 3.X^2 + 20$ (on vérifie : $-8 - 3.4 + 10 = 0$), et que c'est la plus grande.
$X^3 - 3.X^2 + 20 = (X+2).(X^2 - 5.X + 10)$: les deux autres racines sont non réelles, là encore.
La plus grande est bien -2.

On cherche $\rho(2)$. On résout donc l'équation $X^3 - 3.X^2 + 2 = 0$. On trouve une racine évidente : 1.
On factorise pour trouver les autres $X^3 - 3.X^2 + 2 = (X-1).(X^2 - 2.X - 2)$. On les trouvez toutes les trois, et on les trie : $1 - \sqrt{3} < 1 < 1 + \sqrt{3}$. On a la plus grande : $\boxed{\rho(2) = 1 + \sqrt{3}}$

On veut résoudre $\rho(a) = 0$ d'inconnue a. On doit donc regarder si l'équation $X^3 - 3.X^2 + a$ peut admettre pour plus grande racine 0.
Il faut déjà que 0 soit racine. On demande donc $X^3 - 3.X^2 + a = 0$. On a donc $a = 0$.
Mais alors P_0 est le polynôme $X^3 - 3.X^2$ et ses racines sont 0 et 3. La plus grande racine est 3.
La seule possibilité pour a n'en est pas une. Dommage.

On se donne a et b, on suppose $\rho(a) = \rho(b)$. On doit montrer $a = b$.
On va donner une notation : $\alpha = \rho(a) = \rho(b)$.
On sait déjà que α est la plus grande racine de P_a et est aussi la plus grande racine de P_b.
On a donc déjà $\alpha^3 - 3.\alpha^2 + a = 0$ et $\alpha^3 - 3.\alpha^2 + b = 0$.
Sans effort par comparaison : $a = b$ $(= 3.\alpha^2 - \alpha^3)$.

L'application ρ ne peut pas être continue. Sinon, elle vérifierait le théorème des valeurs intermédiaires.ρest elle continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?
On a trouvé $\rho(-16) = 4$, $\rho(20) = -2$. De -16 à 10, ρpasse de 4 à -2. Par continuité, elle devrait passer par 0. Et on a montré qu'elle ne passait pas par 0.