

Qu'est ce qu'une fonction intégrable sur $[a, b]$? Qu'est ce que $\int_a^b f(t).dt$?

Avec vos réflexes de collègue (*c'est bien ça les études jusqu'à la Terminale*), c'est $F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f .

Mais ceci n'est qu'une conséquence de plusieurs gros théorèmes, et encore, uniquement dans le cas où l'application f est continue.

Mais il n'y a pas que les applications continues qui soient intégrables.

- Il y a aussi • les applications en escalier (non continues au niveau des marches)
- les applications croissantes, même avec plein de points de discontinuité
 - les applications... intégrables ^a

^a. y compris la fonction de Baire ! appelée fonction de Thomaë sur Wikipedia

Mais il y aura aussi des applications non intégrables. En tout cas non intégrables au sens de Riemann.

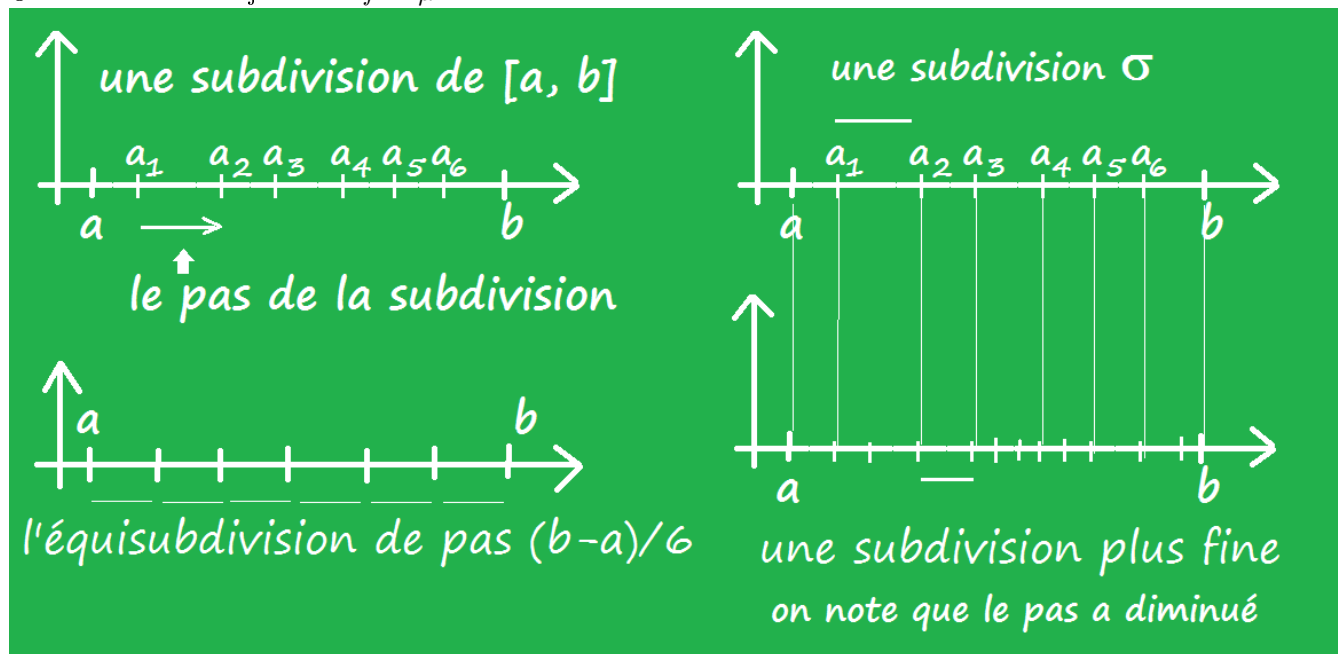
Vous croiserez peut être en école d'ingénieur la notion d'intégrale au sens de Henstock, de Lebesgue... avec un peu plus d'applications intégrables à chaque fois, et toujours des applications non intégrables (*mais de plus en plus tordues à définir*).

1°) Définitions.

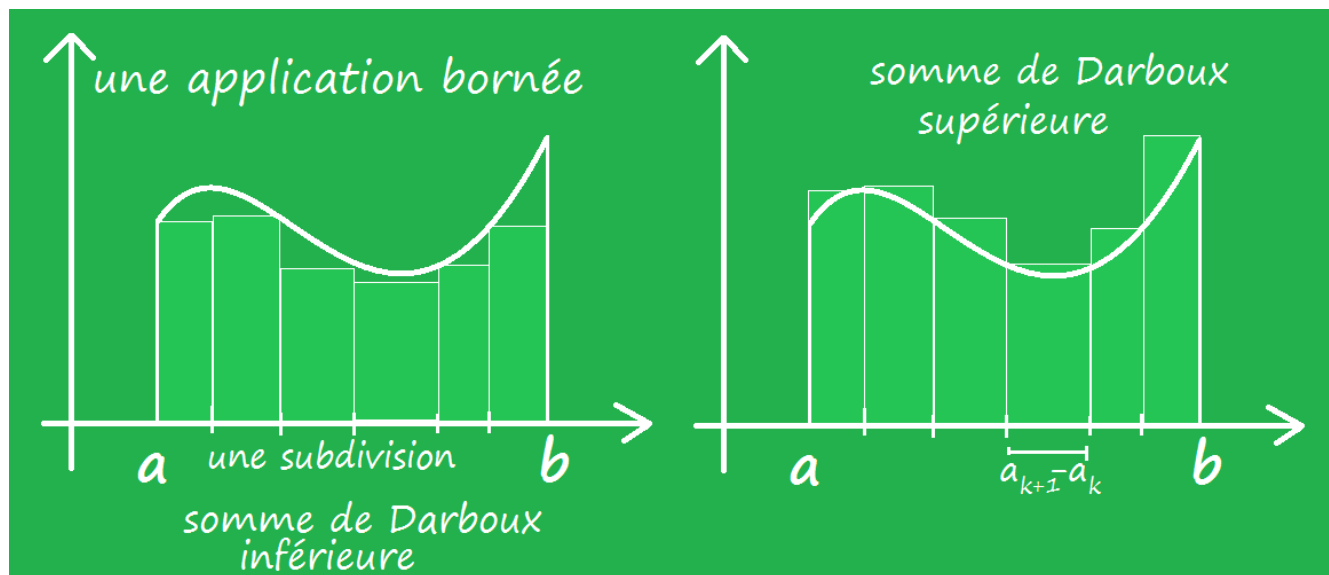
Dans tout ce qui suit, $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$, non réduit à un point.

f est une application de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, bornée (*on a l'implication continue $\Rightarrow$ bornée, mais on a aussi croissante $\Rightarrow$ bornée*).

On notera M un majorant de f et μ un minorant.



	Définition
Subdivision de $[a, b]$	Suite finie, croissante de points, qui commence en a et finit en b $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ Il y a $n + 1$ points, donc n segments $[a_k, a_{k+1}]$
Pas d'une subdivision	Plus grande différence $a_{k+1} - a_k$. $pas(\sigma) = \max\{a_{k+1} - a_k \mid 0 \leq k < n\}$ On prend des subdivisions avec un pas de plus en plus petit. Évidemment, un pas ne peut pas être nul. Et encore moins « infiniment petit », sauf en cours de physique.
Equi-subdivision	Cas particulier où tous les $a_{k+1} - a_k$ sont égaux : $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$. $a = a_0 < a + \frac{b-a}{n} < a + 2 \cdot \frac{b-a}{n} < a + 3 \cdot \frac{b-a}{n} < \dots < a + n \cdot \frac{b-a}{n} = b$ On écrira $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ ou $a_k = \frac{(n-k) \cdot a + k \cdot b}{n}$ suivant le point de vue qu'on choisit. On parlera de n -équisubdivision pour préciser la valeur (non nulle) de n .
Ordre sur les subdivisions	σ' est plus fine que σ si tous les points de σ sont dans σ' (σ' contient plus de points que σ). C'est une relation d'ordre sur les subdivisions. Cet ordre est partiel. Il y a une subdivision la moins fine de toutes. Mais il n'y a pas de subdivision la plus fine de toutes. Quand on raffine une subdivision, le pas diminue.
Sommes de Darboux de f pour la subdivision σ	On définit deux sommes de Darboux : $\underline{D}_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \inf\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\}$ $\overline{D}_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \sup\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\}$ Évidemment, $I_{[a,b]}(f) \leq \overline{I_{[a,b]}(f)}$.
Sommes de Riemann de f pour la subdivision σ	On définit trois sommes de Riemann, encadrées par les sommes de Darboux : $R_{g,\sigma}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_k)$ $R_{m,\sigma}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$ $R_{d,\sigma}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_{k+1})$
Borne supérieure des sommes de Darboux inférieures et borne inférieure des sommes de Darboux supérieures	$\underline{I_{[a,b]}(f)} = \sup\{\underline{D}_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$ et $\overline{I_{[a,b]}(f)} = \inf\{\overline{D}_\sigma(f) \mid \sigma \text{ subdivision de } [a, b]\}$
Application intégrable et son intégrale	f est dite intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si $\overline{I_{[a,b]}(f)} = \underline{I_{[a,b]}(f)}$ (pincement). Et dans ce cas, on pose $\int_a^b f(t) \cdot dt = \underline{I_{[a,b]}(f)} = \overline{I_{[a,b]}(f)}$.



2° Subdivisions.

Une subdivision, c'est donc des points entre a et b , notés a_k pour k de 0 (on est en a) à n (on est en b). Au total : $n + 1$ points et n intervalles.

Mais on notera que pour ensuite faire des sommes, on ne mettra bien que n termes : $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \text{truc}$, avec le célèbre `range(n)` de Python.

Pour fabriquer soi même une subdivision de $[a, b]$, avec des points pas régulièrement espacés :

```
from random import *
L=[a,b]
for k in range(n-1):
    ...L.append((a+random()*(b-a))
L.sort()
```

On a tiré des points au hasard (`random()` tire un float entre 0 et 1), et il a fallu trier à la fin.

.

.

.

Mais je préfère celle ci

```
from random import *
Alea, Total = [ ], 0
for k in range(n):
    ...Step=randrange(20)
    ...Alea.append(Step)
    ...Total+=Step
L, Mobile = [a], a
for Step in Alea:
    ...Mobile += Step*(b-a)/Total
    ...L.append(Mobile)
```

dans laquelle on tire d'abord des écarts aléatoires, puis on crée la liste.

Il vous semble que les scripts que vous avez croisés étaient moins compliqués ? Évidemment ! Puisque la tendance naturelle est de prendre une équisubdivision, où les espacements sont tous égaux : $\frac{b-a}{n}$.

Les points sont alors faciles à

exprimer :

- $a_k = a + k \cdot \frac{b-a}{n}$ (on part de a on avance de k pas de longueur $\frac{b-a}{n}$)
- $a_k = \frac{(n-k) \cdot a + k \cdot b}{n}$ c'est une moyenne pondérée de a et b coefficients $n-k$ et k .

a. mère veux tu ? oui ma fille combien de pas ? quatre pas de fourmi

On vérifie bien $a_0 = a$ et $a_n = b$.

Pour n égal à 1, on a d'ailleurs la « subdivision triviale », la plus grossière, on part de a et on saute tout de suite en

b. Elle aura son utilité pour écrire des choses aussi idiotes que $\int_a^b f(t).dt \leq (b-a).||f||_\infty$ dans laquelle le majorant est l'aire d'un rectangle.

Pour créer une équisubdivision sous Python :

```
Equi=[a+k*(b-a)/n for k in range(n+1)]
```

ou alors si vraiment vous êtes indignes des maths :

```
Equi = numpy.linspace(a, b, n)
```

L'avantage d'une équisubdivision est que dans les formules pour calculer des aires de rectangles, toutes les bases sont égales, c'est ainsi que les sommes de Riemann...

...passent de	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).f(a_k)$	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k).f(a_{k+1})$
à	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k)$	$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1})$
et même	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$	$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2.k + 1) \cdot \frac{b-a}{2.n}\right)$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

Exercice sans grande utilité :

Vérifier que la subdivision de $[a, b]$ en $n + 1$ points est une équisubdivision si et seulement si son pas vaut exactement $\frac{b-a}{n}$.

On a donc défini le pas d'une subdivision comme la longueur du plus grand intervalle $[a_k, a_{k+1}]$. Si on a une équisubdivision, tous les sauts ont la même longueur $\frac{b-a}{n}$ et le plus grand vaut bien $\frac{b-a}{n}$.

Réciproquement : tous les $\frac{a_{k+1} - a_k}{n}$ sont plus petits que le pas ;

si le pas vaut $\frac{b-a}{n}$, chaque $a_{k+1} - a_k$ vaut au plus $\frac{b-a}{n}$, et leur somme télescopique vaut au plus $b-a$;

si l'un d'entre eux ne vaut pas $\frac{b-a}{n}$, la somme ne peut plus valoir $b-a$, d'où contradiction.

J'insiste : le pas est le plus grand écart, et pas le plus petit.

Si vous tassez presque tous vos points dans la première moitié de l'intervalle, et sautez de $\frac{a+b}{2}$ à ben un seul saut, le pas est médiocre : $\frac{b-a}{2}$ et justement, l'approximation de l'intégrale l'est aussi.

Le pas d'une subdivision peut donc • valoir $b-a$ (la subdivision triviale),

• être très proche de $b-a$ même avec n grand (subdivision médiocre où tout est tassé en a ou presque)

• valoir $\frac{b-a}{n}$ (et pour une subdivision en $n+1$ points, il vaut au moins $\frac{b-a}{n}$)

• être très proche de 0 pour n grand (mais jamais il ne peut valoir 0)

La relation d'ordre sur les subdivisions est plus ou moins lourde à écrire proprement

σ' plus fine que σ :

$\sigma' : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{N-1} < \alpha_N = b$

$\sigma : a = a_0 < a_1 < \dots < a_n b$

• tous les points de σ sont des points (particuliers) de σ'

• $\forall a_k \in \sigma, \exists p, a_k = \alpha_p$

• $\sigma \subset \sigma'$

Une fois qu'on l'exprime comme l'inclusion, elle devient naturellement une relation d'ordre

réflexive	$\forall \sigma, \sigma \subset \sigma$
antisymétrique	$\forall (\sigma, \sigma'), (\sigma \subset \sigma' \text{ et } \sigma' \subset \sigma) \Rightarrow (\sigma = \sigma')$
transitive	$\forall (\sigma, \sigma', \sigma''), (\sigma \subset \sigma' \text{ et } \sigma' \subset \sigma'') \Rightarrow (\sigma \subset \sigma'')$

Il va de soi que pour que σ' soit plus fine que σ , il faut que σ' ait plus d'éléments que σ . Mais la réciproque n'est pas vraie.

En général, d'ailleurs, deux subdivisions ne sont pas comparables :

0	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$	1	
0		$\frac{1}{2}$		1	
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	1

Très simplement d'ailleurs, sur les équisubdivisions, la relation « être plus fine que » correspond entre les entiers à la relation « être multiple de ».

0	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		1	
0		$\frac{1}{2}$			1	
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

On notera que pour les algorithmes, il sera plus facile de passer de la n -équisubdivision à la $2n$ -équisubdivision qu'à la $(n+1)$ -équisubdivision.

La moins fine (la plus grossière) de toutes les subdivisions est $a < b$, en un saut.

Il n'y a pas de subdivision plus fine que toutes les autres. Chaque fois que vous avez une subdivision σ , vous pouvez la raffiner en ajoutant un point entre deux points de σ . On peut même en ajouter entre tous les couples de points de σ .

Exercice : écrivez un script Python qui prend en entrée une liste et insère les milieux de chaque segment
 $[1, 3, 9, 13, 21, 35]$ doit donner $[1, 2, 3, 6, 9, 11, 13, 17, 21, 27, 35]$

Petit truc technique, mais évident : si σ' est plus fine que σ alors le pas de σ' est plus fin que celui de σ (*non réciproque évidemment*).

Le pas de σ est de la forme $a_{k+1} - a_k$ pour un certain entier k bien choisi.

Mais les deux nombres a_{k+1} et a_k sont des α_i particuliers (*les α_i sont les points de σ'*).

On a donc $pas(\sigma) = a_{k+1} - a_k = \alpha_q - \alpha_p$ (*avec $q > p$ bien sûr*).

On télescope à rebours : $pas(\sigma) = \sum_{i=p}^{q-1} \alpha_{i+1} - \alpha_i$ avec au moins un terme dans cette somme, et peut être plus suivant combien de points de σ' se sont glissés dans $[a_k, a_{k+1}]$.

On majore chaque $a_{i+1} - a_i$ par le pas de σ' : $pas(\sigma) \leq \sum_{i=p}^{q-1} pas(\sigma') = (q-p).pas(\sigma') \leq pas(\sigma')$.

A noter : pour les calculs approchés d'intégrales par les méthodes classiques : rectangles, trapèzes et paraboles, on utilisera des équisubdivisions.

Mais d'autres algorithmes (Monte-Carlo, polynômes d'approximations) vont utiliser d'autres subdivisions, dont une faisant appel aux racines des polynômes de Tchebychev...

Un ingénieur pense que ses équations sont une approximation de la réalité.

Un physicien pense que la réalité est une approximation de ses équations.

Un mathématicien s'en moque.

Un mathématicien ne croit rien tant que ce n'est pas prouvé.

Un physicien croit tout tant que ce n'est pas réfuté.

Un chimiste s'en fiche.

Un biologiste ne comprend pas de quoi on parle.

La chimie est de la physique sans raisonnement.

Les mathématiques sont de la physique sans objectif.

La philosophie est un jeu avec des objectifs et sans règles.

Les mathématiques sont un jeu avec des règles et sans objectifs.

On demande à plusieurs scientifiques : « Combien vaut π ? »

L'ingénieur répond : « C'est approximativement $3,1415926536 \pm 0,0000000005$. »

Le physicien répond : « C'est 1, ou 3, voire 5 selon les besoins. $\sqrt{10}$ est une égalité très précise. »

L'informaticien répond : « Pi est une constante fixée en début de programme, et dont la valeur exacte varie selon le type de la variable (3 si Pi est un Integer, 3.14159 si c'est un Real, 3.141592653589793+ E00 si c'est un Long, True si c'est un Boolean). »

Le mathématicien réfléchit un instant et répond : « C'est égal à π . »

3°) Sommes de Darboux et Riemann.

Pour une application f donnée, bornée par μ et M , et une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ de $[a, b]$.

Sur chaque segment $[a_k, a_{k+1}]$, f est bornée, on peut donc définir

$$\begin{array}{lcl} \text{Sup} & \{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\} & \leq M \\ \text{Inf} & \{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\} & \geq \mu \end{array}$$

On notera que pour f continue, avec le mot « segment », vous pouvez affirmer que ces deux bornes sont atteintes sur le segment.

De même, si f est croissante, ces deux bornes sont atteintes aux extrémités du segment, ce sera utile pour la suite.

On définit alors les deux sommes :

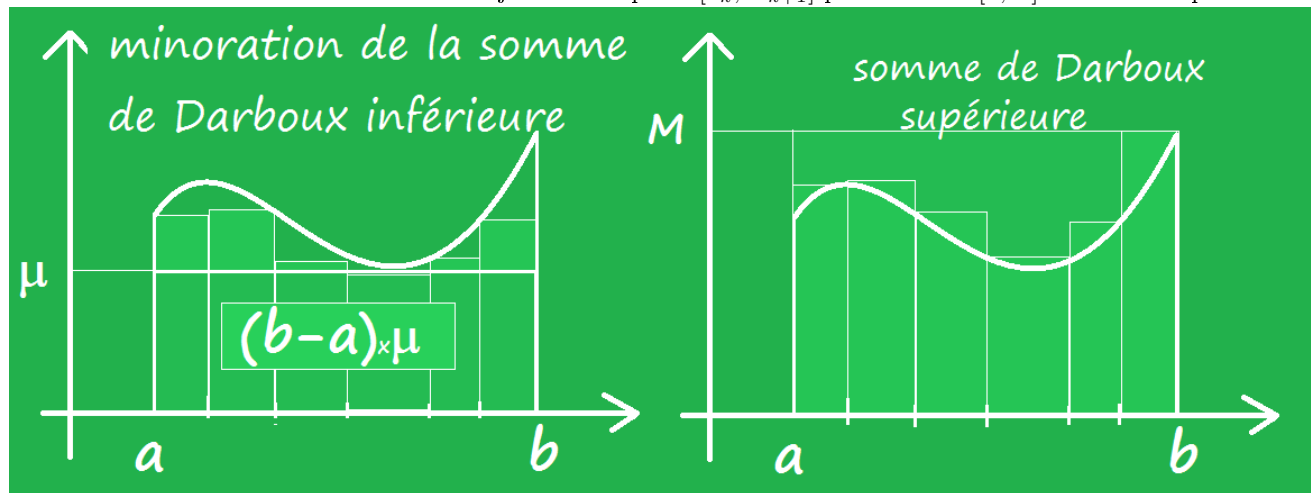
$$(b-a) \cdot \mu \leq \underline{D}_\sigma(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \text{Inf}\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\} \leq \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot \text{Sup}\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\} = \overline{D}_\sigma(f) \leq (b-a) \cdot M$$

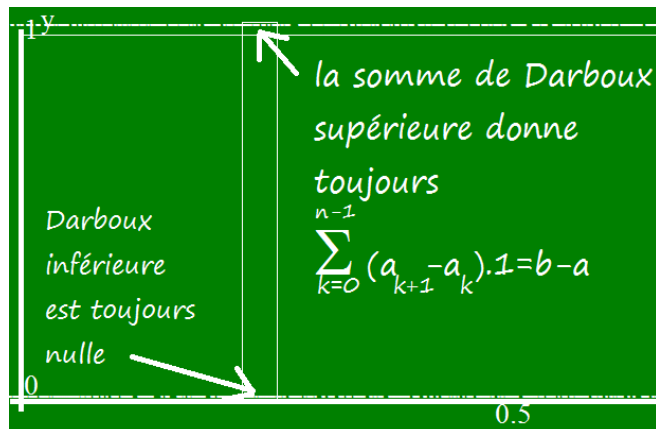
$$\overline{D}_\sigma(f) \leq (b-a) \cdot M$$

Les inégalités s'obtiennent • à droite en minorant l'inf sur $[a_k, a_{k+1}]$ par celui sur $[a, b]$ et en télescopant

• au milieu par $\text{Inf} \leq \text{Sup}$

• à gauche en majorant le sup sur $[a_k, a_{k+1}]$ par celui sur $[a, b]$ et en télescopant





Un exemple simple avec la fonction indicatrice des rationnels ?

Dans chaque intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ il y a toujours au moins un irrationnel, et toujours au moins un rationnel (densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$).

Chaque $\inf\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\}$ vaut 0, de même que leur somme.

Chaque $\sup\{f(t) \mid t \in [a_k, a_{k+1}]\}$ vaut 1, la somme donne $b - a : 0 = \underline{D}_\sigma(f) < \overline{D}_\sigma(f) = 1$.

C'est ce qui va expliquer que cette fonction ne sera pas intégrable dans le cadre de l'intégrale de Riemann/Darboux.

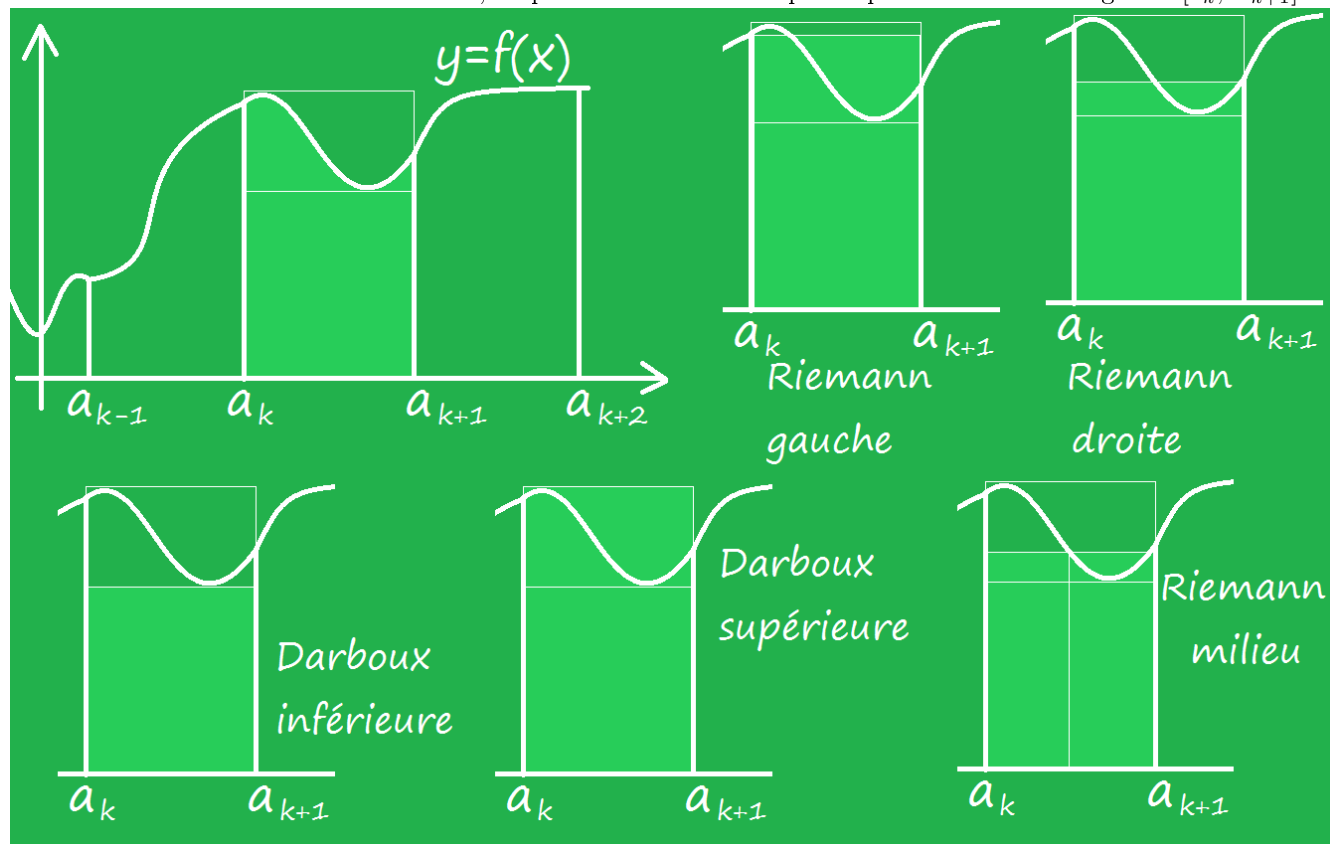
Elle le sera pour l'intégrale de Lebesgue (écoles d'ingénieurs).

Évidemment, si f est trop compliquée et varie vite (comme le mouvement brownien), il est difficile de déterminer explicitement $\underline{D}_\sigma(f)$ et $\overline{D}_\sigma(f)$. De même, un ordinateur n'ira pas calculer ce maximum sur chaque segment.

On note qu'avec une approche légèrement différente, $\overline{D}_\sigma(f)$ est l'intégrale d'une majorante en escalier de f associée à la subdivision σ

$\underline{D}_\sigma(f)$ est l'intégrale d'une minorante en escalier de f associée à σ

On définit aussi les sommes de Riemann, en prenant cette fois des points particuliers sur le segment $[a_k, a_{k+1}]$.



	Riemann gauche	Riemann milieu	Riemann droite
subdivision quelconque	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_k)$	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \cdot f(a_{k+1})$
équisubdivision	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$	$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + (2k+1) \cdot \frac{b-a}{2n}\right)$	$\frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(a + k \cdot \frac{b-a}{n}\right)$

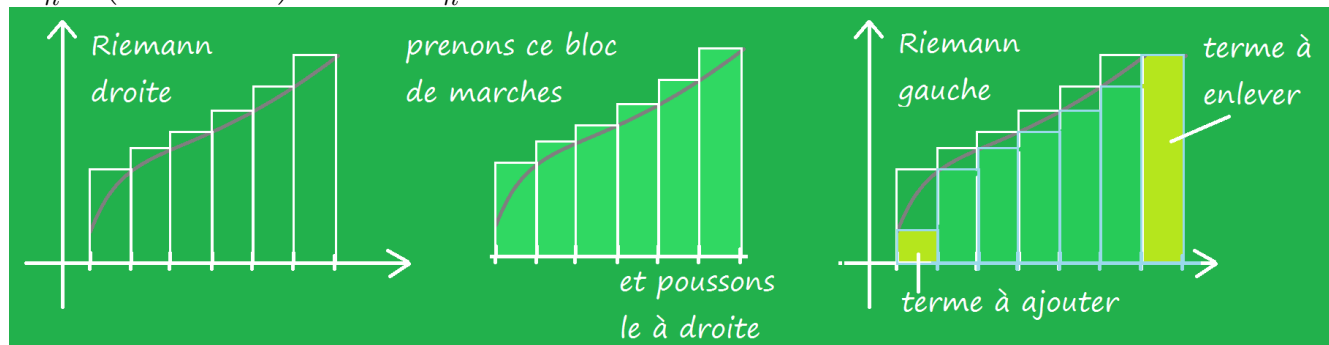
Comme chaque $f(a_k)$, $f(a_{k+1})$ et $f\left(\frac{a_k + a_{k+1}}{2}\right)$ est une valeur prise par f entre a_k et a_{k+1} , les trois sommes de Riemann sont encadrées par les deux sommes de Darboux (mais sauf à supposer f monotone, on ne sait pas trier

les trois sommes de Riemann) : $\underline{D_\sigma(f)} \leq \frac{R_d(f)}{R_g(f)} \leq \overline{D_\sigma(f)}$.

Grâce à cet encadrement, on en déduira que si les sommes de Darboux convergent vers une même limite (l'intégrale de f sur $[a, b]$) quand le pas de la subdivision tend vers 0, alors les sommes de Riemann font de même par encadrement.

Si f est croissante, on a même $\underline{D_\sigma(f)} = R_g(f) \leq R_n(f) \leq R_d(f) = \overline{D_\sigma(f)}$: les sommes de Riemann sont égales aux sommes de Darboux.

Et même plus précisément pour une équisubdivision : $R_d - R_g(f) = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f(a_k) - \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) = \frac{(b-a)}{n} \cdot (f(a_n) - f(a_0)) = \frac{(b-a) \cdot (f(b) - f(a))}{n}$.



C'est cette majoration (géométriquement interprétable) en $O\left(\frac{1}{n}\right)$ qui va permettre de dire que les applications croissantes (même très discontinues) sont intégrables.

Petit détail : on va certes savoir intégrer les applications discontinues (moches mais pas trop), c'est un fait.

Mais leurs intégrales ne se calculeront pas par $F(b) - F(a)$ avec F une primitive de f .

Seules les application continues auront une primitive.

C'est donc dans ce chapitre qu'on va donner une distinction entre intégrales et primitives, chose que nul professeur de physique ou de maths de Terminale (pléonasme ?) ne fait.

intégrable	l'intégrale existe $\int_a^x f(t).dt$	par les sommes de Darboux
continue	admet une primitive F telle que $F' = f$	par notre grand schéma d'analyse

Et enfin, au bout du chapitre, on reliera intégrales et primitives.

Et vous comprendrez alors pourquoi je hurle et me lamente quand vous (et ceci va inclure les autres Dieux de la classe) confondez intégrale et primitive.

La fonction partie entière $x \mapsto [x]$ est intégrable mais n'a pas de primitive...

A noter : quand on a une équisubdivision, il n'est pas utile de calculer les deux sommes de Riemann (droite et gauche), vu qu'elles ne diffèrent que d'un terme. Il suffit d'en calculer une, et à la fin d'ajouter et soustraire un terme..

Anecdote : un collègue a longuement cherché pourquoi son programme ne donnait pas la bonne réponse : il avait défini $\text{Pas} = (b-a)/n$ et était sur une version de **Python** où la division était euclidienne : donc pour découper le segment $[0, 1]$ en dix, le pas était $1/10$, c'est à dire 0...

Un résultat étrange pour l'instant : la somme de Riemann milieu sera une bien meilleure approximation de l'intégrale que les sommes Riemann droite ou gauche.

Mais d'ailleurs, pourquoi ne pas prendre aussi $\frac{Rg + Rd}{2}$ qui serait meilleure que chacune des deux. Point de vue intéressant : pour le travail d'équipe, faire une moyenne des deux intervenants donne de meilleurs résultats, étonnant non.

Il va falloir débrouiller tout ça... géométriquement évidemment !

```
def Riemann(f, a, b, n) :
....Pas = float((b-a))/n
....Rg, Rm = 0, 0
....Gauche, Milieu = a, a+Pas/2
....for k in range(n) :
.....Rg += f(Gauche)
.....Rm += f(Milieu)
.....Gauche += Pas
.....Milieu += Pas
....Rd = Rg-f(a)+f(b)
....return(Rg*Pas, Rm*Pas, Rd*Pas)
```

3°) Rectangles, Trapèzes, paraboles.