Exercices sur les séries :

-a- Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{Arctan(n)}{n}\right)$ diverge (minoration ou équivalent).

Le terme général est positif, la série des sommes partielles croît.
Le terme général tend vers 0 ($arctan$ est bornée, et $\dfrac{1}{n}$ tend vers 0).
Mais il ne tend pas vers 0 assez vite. En$+\infty$, $\dfrac{Arctan(n)}{n}$ est équivalent à $\dfrac{\pi}{2.n}$. Et la série de terme général positif $\dfrac{\pi}{2.n}$ diverge (multiple de la série harmonique).
Par théorème sur les séries à termes positifs équivalents en $+\infty$, la série de terme général $\left(\dfrac{Arctan(n)}{n}\right)$ diverge.

Mais on peut le jouer plus simple, par minoration : $\dfrac{Arctan(n)}{n} \geqslant \dfrac{\pi}{4.n}$ (croissance de $Arctan$ sur les entiers plus grands que 1).
On somme de 1 à N : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n \geqslant \frac{\pi}{4}.\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$. Il ne reste plus qu'à repousser vers l'infini, à la vitesse d'une série harmonique.

-b- Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{Arctan(n)}{n^2}\right)$ converge (majoration).

Cette fois, on a une série à terme général positif. Les sommes partielles vont en croissant.
Mais on majore le terme général : $0 \leqslant \dfrac{Arctan(n)}{n^2} \leqslant \dfrac{\pi}{2.n^2}$.
La série de terme général positif $\dfrac{\pi}{2.n^2}$ converge (Riemann). Le théorème de majoration sur les séries à terme général positif permet de conclure.

-c- Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{1+\cos(n)}{n^2}\right)$ converge (majoration).

Le terme général existe et est positif. La série des sommes partielles croit.
On majore aussi par $\dfrac{2}{n^2}$. On rappelle que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}$converge (et on se moque de savoir vers quoi).
Le théorème de majoration sur les séries à terme général positif permet de conclure.

-d- Montrez que la série de terme général $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ converge pour $|x| < 1$ (majoration).

Le terme général est de signe quelconque. Intéressons déjà à la série de terme général $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.[1]
On majore par une série simple et de référence. Pas $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ dont la série diverge, mais $(x^n)_{n\geqslant 1}$ dont la série converge[2], vers $\dfrac{1}{1-|x|}$
.Par théorème de majoration des séries à termes positifs, la série de terme général $\left(\dfrac{|x|^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.
Par théorème de convergence en valeur absolue, la série de terme général $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge.[3]

1. l'indication par $\left(\dots\right)_{n\geqslant 1}$ a l'avantage de préciser à quel terme on commence
2. on ne pense pas assez souvent à la série géométrique
3. ce chapitre est l'occasion de vous entrainer à la Spé : des théorèmes à citer proprement, à utiliser au bon moment, à distinguer les uns des autres par un intitulé précis

---

Variante efficace : on travaille sur les sommes partielles : $F_N = x \longmapsto \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{n}$. On les dérive : $F'_N = x \longmapsto \sum_{n=1}^{N} x^{n-1}$.

On reconnait une série géométrique : $F'_N = x \longmapsto \frac{1-x^N}{1-x}$.

On intègre de 0 à 1 (avec $F_N(0)=0$) : $F_N = x \longmapsto \ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$.

On fait tendre N vers l'infini, la somme de la série vaut $\ln(1-x)$.

Le fait d'avoir une limite fait que la série converge. $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x) \text{ pour } |x|<1}$

Il faut quand même vraiment montrer que $\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini, et pas juste avec un argument du type « parce que ça me simplifie la vie ».
Quel argument alors ? t^N tend vers 0 quand N tend vers l'infini, car t est entre -1 et 1.
Mais t bouge. Il faut le faire avec les moyennes du bord, mais avec rigueur. Pour faire tendre une intégrale vers 0, on la pince, on l'encadre.
$0 \leqslant \Big|\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt\Big| \leqslant \int_{t=0}^x \Big|\frac{t^N}{1-t}\Big|.dt \leqslant \int_{t=0}^x \frac{x^n}{1-x|}.dx = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ pour x positif
$0 \leqslant \Big|\int_0^x \frac{t^N}{1-t}.dt\Big| \leqslant \int_{t=0}^x \Big|\frac{t^N}{1-t}\Big|.dt \leqslant \int_{t=x}^0 \frac{|x|^n}{1|}.dx = |x|^{n+1}$ pour x négatif
Le théorème d'encadrement permet de conclure.

-e- Montrez que la série de terme général $\left(\frac{x^n}{n}\right)$ dit verge pour $|x|>1$ (oh la grossière).

Comme indiqué dans l'énoncé, elle diverge grossièrement. Le terme général ne tend pas vers 0.
C'est certes une forme indéterminée, mais l'exponentielle qu'est x^n l'emporte sur le polynôme du dénominateur.
Le terme général tend carrément vers l'infini !
La série diverge, et le théorème de Cesàro dit même que $\frac{1}{N}.\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n}$tend aussi vers l'infini.

-f- Montrez que la série de terme général $(n.x^n)$ converge pour $|x|<1$ (majoration plus astucieuse ?).

Cette fois l'exponentielle de raison plus petite que 1 l'emporte dans le bon sens, par croissances comparées.
Prenez par exemple $x=\frac{1}{2}$, évidemment que $\frac{n}{2^n}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.
Le n vous ennuie ? Il ne permet pas de majorer par $|x|^n$.
On va insérer un élément entre x et 1 : $\frac{1+|x|}{2}$. Et on va dominer par $\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n$.
On montre alors : $n.|x|^n = o\left(\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n\right)$ en étudiant la limite du quotient : $\frac{n}{q^n}$ avec $q = \frac{1+|x|}{2.|x|} > 1$.

séries géométriques de raison dans $]-1,\ 1[$	la série de terme général $\left(\left(\frac{1+|x|}{2}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$ converge
théorème de domination sur les séries à termes positifs	la série de terme général $(n.|x|^n)_{n\geqslant 0}$ converge
théorème de convergence en valeur absolue	la série de terme général $(n.x^n)_{n\geqslant 0}$ converge

---

On peut aussi trouver une formule explicite issue d'une dérivation
$\sum_{n=0}^{N} n.x^n = x.\sum_{n=0}^{N} n.x^{n-1} = x.\frac{1}{(1-x)^2} - x.\frac{(N+1).x^N}{1-x} - \frac{x^{N+1}}{(1-x)^2}$

(dérivation de $x \longmapsto \dfrac{1-x^{N+1}}{1-x}$).

On fait tendre N vers l'infini, avec croissances comparées : $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n.x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \text{ pour } |x|<1}$

Il y a aussi des séries que l'on pourra calculer les sommes partielles, en général par télescopage, et s'épargner l'usage de théorèmes lourds.

Exemple : j'aime assez $a_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{1^3+2^3+\ldots+n^3}$
mais aussi $b_n = \dfrac{n^4-(n+1)^3}{n!}$ et $c_n = \ln\Big(1-\dfrac{1}{n^2}\Big)$ et aussi $d_n = \ln\Big(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\Big)$
et enfin $e_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2}).(1+\sqrt{3})\ldots(1+\sqrt{n})}$.

$a_n = \dfrac{1+2+\ldots+n}{1^3+2^3+\ldots+n^3}$ est bien défini, et vaut $\dfrac{\frac{n.(n+1)}{2}}{\Big(\frac{n.(n+1)}{2}\Big)^2}$ qu'on simplifie en $a_n = \dfrac{2}{n.(n+1)}$ et qu'on décompose en $a_n = \dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n+1}$.

On peut alors sommer et télescoper : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = 2 - \frac{2}{N+1}$.
Cette quantité a une limite quand n tend vers l'infini et c'est 2.
Inutile de raconter qu'elle est croissante majorée... elle converge !

Simplifions : $b_n = \dfrac{n^4-(n+1)^3}{n!} = \dfrac{n^4}{n!} - \dfrac{(n+1)^3}{n!} = \dfrac{n^3}{(n-1)!} - \dfrac{(n+1)^3}{n!}$. Il y a un décalage de 1 entre numérateur et dénominateur.
On en vient à poser $\beta_n = \dfrac{n^3}{(n-1)^3}$. On a alors $b_n = \beta_n - \beta_{n+1}$.
La somme se simplifie : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} \beta_n - \beta_{N+1} = \beta_1 - \beta_{N+1}$.
β_1 vaut 1 et β_N tend vers 0.
La série de terme général $\Big(\dfrac{n^4-(n+1°\hat{}3}{n!}\Big)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour somme β_1.
La série de terme général $\Big(\dfrac{n^4-(n+1°\hat{}3}{n!}\Big)_{n\geqslant 0}$ converge et a pour somme $b_0+\beta_1$. Ce qui fait 0. C'est bien triste.
Et un logiciel tel que Xcas donne la réponse tout seul.

---

c_n se calcule dès que n a dépassé 1 et vaut $\ln\Big(\dfrac{n^2-1}{n^2}\Big)$.
On arrange en $\ln(n-1)+\ln(n+1)-2.\ln(n)$.
On somme et on sépare les sommes : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N} c_n = \sum_{n=2}^{N}(\ln(n+1)-\ln(n)) + \sum_{n=2}^{N}(\ln(n-1)-\ln(n))$.
L'une télescope en $\ln(N+1)-\ln(2)$ et l'autre en $\ln(1)-\ln(N)$.

Il reste donc $\ln\left(\dfrac{N+1}{N}\right) - \ln(2)$. On y parvenait aussi avec

$\ln(1)$	$+\ln(3)$	$-2.\ln(2)$
$\ln(2)$	$+\ln(4)$	$-2.\ln(3)$
$\ln(3)$	$+\ln(5)$	$-2.\ln(4)$
$\ln(4)$	$+\ln(6)$	$-2.\ln(5)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\ln(N-3)$	$+\ln(N-1)$	$-2.\ln(N-2)$
$\ln(N-2)$	$+\ln(N)$	$-2.\ln(N-1)$
$\ln(N-1)$	$+\ln(N+1)$	$-2.\ln(N)$

On peut maintenant trouver une limite : $-\ln(2)$ *(normal, les termes de la série sont quand même négatifs).*

Cette fois, on somme des $\ln\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right)$ (à partir de $n = 2$).

En lisant malproprement, on a $\Big(\ln(3)-\ln(2)\Big) + \Big(\ln(2)-\ln(3)\Big) + \Big(\ln(5)-\ln(4)\Big) + \Big(\ln(4)-\ln(5)\Big) + \Big(\ln(7)-\ln(6)\Big) + \Big(\ln(6)-\ln(7)\Big) \ldots$ et on fait attention où on s'arrête.

Les termes ne s'en vont pas si bien que ça, mais quand même. Tout va dépendre du rang auquel on s'arrête.

En posant $A_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right)$, on somme $2.N$ termes :

$A_{2.N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2.N} \ln\left(\dfrac{n+(-1)^n}{n}\right) = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\dfrac{(2.p)+1}{(2.p)}\right) + \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\dfrac{(2.p+1)-1}{(2.p+1)}\right)$.

$A_{2.N} = 0$ Si si !

$A_{2.N+1} = A_{2.N} + \ln\left(\dfrac{(2.N+1)-1}{(2.N+1)}\right) = \ln\left(\dfrac{2.N}{2.N+1}\right)$.

La sous-suite $(A_{2.N})$ converge évidemment vers 0, de même que $(A_{2.N+1})$.

Par recouvrement, (A_N) converge vers 0.

$e_n = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2}).(1+\sqrt{3})\ldots(1+\sqrt{n})}$ se calcule pour tout n supérieur ou égal à 1. Et il est positif.

Essayons d'y voir comme recommandé une somme télescopique $\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}$.

La forme suggère une réduction au dénominateur commun, avec un dénominateur de plus en plus grand.

On pose naturellement $\varepsilon_n = \dfrac{1}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n-1}).(1+\sqrt{n})}$

et donc $\varepsilon_{n-1} = \dfrac{1}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n-1})}$. On a alors

$\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \dfrac{1+\sqrt{n}}{(1+\sqrt{1})\ldots(1+\sqrt{n-1}).(1+\sqrt{n})} - \dfrac{1}{(1+\sqrt{1})\ldots(1+\sqrt{n-1}).(1+\sqrt{n})}$.

Raté. Je viens d'inventer un autre exercice.

Après tâtonnements, je propose $\varepsilon_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n-1}).(1+\sqrt{n})}$.

On compare avec $\varepsilon_{n-1} = \dfrac{\sqrt{(n-1)!}}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n-1})}$.

En réduisant au dénominateur commun : $\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \dfrac{\sqrt{n!} - \sqrt{(n-1)!}.(1+\sqrt{n})}{(1+\sqrt{1}).(1+\sqrt{2})\ldots(1+\sqrt{n-1}).(1+\sqrt{n})}$.

On trouve justement e_n !

On peut donc sommer et télescoper : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e_n = \sum_{n=1}^{N} (\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) = \varepsilon_0 - \varepsilon_N$.
Il reste à montrer que ε_N converge (vers 0) quand N tend vers l'infini.
Si on veut utiliser le théorème de croissance logarithmique, $\dfrac{\varepsilon_{N+1}}{\varepsilon_N}$ est sans effet ici.
A suivre ?