« En mathématique, on ne comprend pas les choses, on s'y habitue »
John Von Neumann (fondateur de l'informatique)

Comtesse du Canard Enchaîné :
Ne laissez pas trainer vos robes dans l'usine. Je prendrais bien un bon coup avec la bûche (en route avec la bûche ?). On se réchauffe avec des branchettes, faute de lattes. Elle refuse de cacher les menus. Dures luttes pour avoir des boutures. Des jeux en quoi ?

Gérard Durand Gérant du Rare (spécialiste des palindromes) :
Un émir fada, venu du Nevada, frime nu.
Mais si, le camembert manqua le six mai (palindrome de syllabes), (l'ami Gérard gémit là !)

Question de cours :
Montrez $n! \geqslant \left(\dfrac{n}{e}\right)^n.e$ en utilisant le logarithme et une comparaison série intégrale.

Petit exercice d'analyse :
La suite (u_n) est définie par $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{2.\sqrt{n+u_n}}$. Donnez sa limite quand n tend vers l'infini.

Petit exercice d'arithmétique et calcul :
Montrez pour tout couple $(n,\ k)$ d'entiers naturels : $\displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i.\binom{n}{i}=(-1)^k.\binom{n-1}{k}$.
♣ Avez vous une preuve par dénombrement ?

Petit exercice d'algèbre :
A et B sont deux sous espaces vectoriels de $(E,+,.)$ (espace de dimension finie) vérifiant $A+B=E$.
Montrez qu'il existe $\begin{array}{lll} C & \text{sous espace vectoriel de } A & \text{vérifiant} \quad C\oplus B=E \\ D & \text{sous espace vectoriel de } D & \text{vérifiant} \quad A\oplus D=E \end{array}$.
Que pouvez vous dire si $C+D=E$?

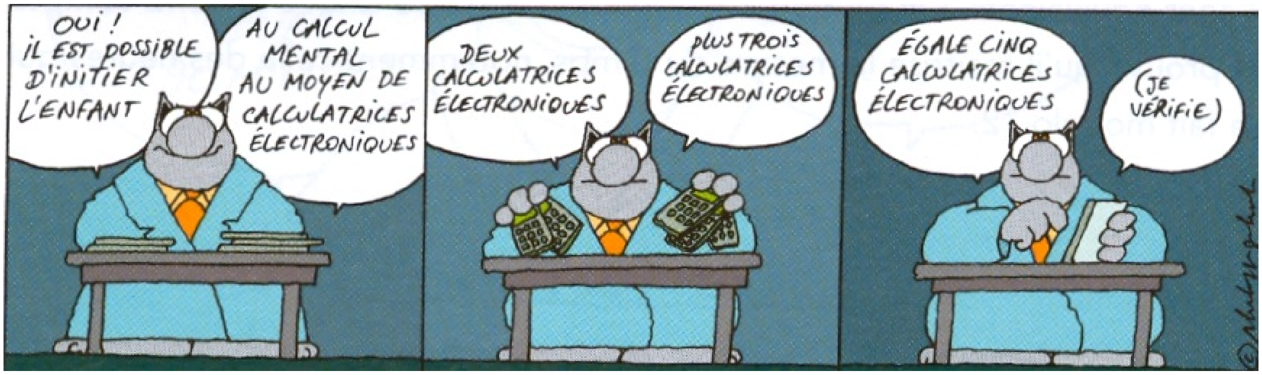
Un nombre surdivisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
On a montré que pour p premier, p^{p-1} est surdivisible.
L'ensemble des nombres surdivisibles est-il stable par multiplication ? J'ai ça à vous proposer : a admet d_a diviseurs et b en admet d_b. Les diviseurs de $a\times b$ sont produits d'un diviseurs de a par un diviseur de b. Il y en a donc $d_a\times d_b$ (prendr les $\alpha\times\beta$ avec d_a choix pour α et d_b choix pour β). Or, $d_a.d_b$ divise $a\times b$. Donc $a\times b$ est sur-divisible.
Où est l'erreur ? Quel est quand même le résultat qu'on peut donner ?
A suivre...

Rappel des règles :
Mettre dans le grille les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

9			=	13
			=	16
		7	=	16
=	=	=		
20	.7	18		

et

		6	=	21
			=	7
5			=	17
=	=	=		
13	19	13		


OUI !
IL EST POSSIBLE D'INITIER L'ENFANT
AU CALCUL MENTAL AU MOYEN DE CALCULATRICES ÉLECTRONIQUES
DEUX CALCULATRICES ÉLECTRONIQUES
PLUS TROIS CALCULATRICES ÉLECTRONIQUES
ÉGALE CINQ CALCULATRICES ÉLECTRONIQUES
(JE VÉRIFIE)

Question de cours :
Montrez que l'implication suivante est une bêtise :
$(A.U = B.U$ et $A \neq B) \Rightarrow U = 0_n$ (A et B sont des matrices carrées, de taille n sur n et U est un vecteur colonne de taille n).

Un contre-exemple permet de vous convaincre : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
En fait, que se passe-t-il ? On bascule de l'autre côté $A.U = B.U$ donne $(A - B).U = 0_n$.
On sait donc juste que U est dans ce qu'on va appeler dans le noyau de $A - B$.
Il suffit que $A - B$ soit non inversible et que U soit justement une combinaison sur les colonnes donnant le vecteur nul.

Rappelons que la relation $M.U = 0_n$ ne donne ni $M = 0_{n,n}$ ni $U = 0_n$. la multiplication matricielle n'est pas intègre.
De même $A.B = 0_{n,n}$ donne juste que l'une des deux au moins est non inversible.
Il faut aussi distinguer « $A.U = B.U$ » de « $\forall U,\ A.U = B.U$ ». la deuxième donne alors bien $A = B$.
De même, pour simplifier par une matrice, il faut qu'elle soit carrée. Et inversible.

Petit exercice d'analyse :
Montrez que la suite $(\tan(n))_{n\in\mathbb{N}}$ne converge pas, ni ne diverge vers $+\infty$.

Si elle converge vers α, alors les suites $(\tan(2.n))$ et $(\tan(n+1))$ convergent aussi vers α.
Or, $\tan(2.n) = \dfrac{2.\tan(n)}{1 - \tan^2(n)}$ et $\tan(n+1) = \dfrac{\tan(n) + \tan(1)}{1 - \tan(n).\tan(1)}$.
En passant à la limite : $\alpha = \dfrac{2;\alpha}{1 - \alpha^2}$ et $\alpha = \dfrac{\alpha + \tan(1)}{1 - \alpha\tan(1)}$.
La première donne $\alpha = 0$ (ou $\alpha = \pm i$?), et ceci est incompatible dans la seconde.

De même, si $\tan(n)$ tendait vers l'infini, $\tan(n+1)$ tendrait vers $\dfrac{1}{-\tan(1)}$, ce qui est là encore incohérent (cette fois, j'ai utilisé $\tan(n+1) = \dfrac{1 + \frac{\tan(1)}{\tan(n)}}{\frac{1}{\tan(n)} - \tan(1)}$).
En fait, la suite $(\tan(n))$ se promène partout dans $\mathbb{R}$.
On pourrait montrer que tout réel est limite d'une suite extraite de cette suite.

Petit exercice d'arithmétique et calcul :
Montrez que pour tout n, il y a au moins un nombre premier entre n et $n! + 2$ (regardez $n! + 1$, puis...).

On se donne n et on considère donc $n! + 1$.
Si on a de la chance (exemple : $2! + 1$ ou $11! + 1$), c'est un nombre premier. Et dans ce cas, il est entre n et $n! + 2$.
Sinon, cet entier admet un diviseur premier p (il en admet surement même beaucoup).
Mais aucun ne peut être inférieur ou égal à n.
Par l'absurde : si un entier p plus petit que n divise $n! + 1$, il divise quand même aussi $n!$ puisque il fait partie de la liste $1 \times 2 \times \ldots \times n$ et par soustraction, il divise 1.
C'est donc que p est plus grand que n et plus petit que $n! + 1$ évidemment.

n	$n! + 1$	décomposition		n	$n! + 1$	décomposition
2	3	3		8	40321	61×661
3	7	7		9	362881	$19 \times 71 \times 269$
4	25	5^2		10	3628801	11×329891
5	121	11^2		11	39916801	39916801
6	721	7×103		12	479001601	$13^2 \times 2834329$
7	5041	71^2		13	6227020801	83×75024347

Notons qu'il ne serait pas judicieux de regarder $n! + 2$, puisque cet entier est pair.
Notons aussi que le théorème de Tchebychev et Erdös dit qu'entre n et $2.n$ il y a toujours un nombre premier.

Petit exercice d'algèbre :
Montrez, pour A, B et C sous-espaces vectoriel de $(E, +, .)$:
$\big(A \subset B\big) \Rightarrow \big(A + (B \cap C) = (A + B) \cap (A + C)\big)$.

On a une hypothèse : tout $\overrightarrow{a}$ de A est dans b.
On doit établir deux inclusions.

•On prend un $\overrightarrow{u}$ de $A + (B + C)$. Il s'écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans $B \cap C$.
On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans B. On reconnaît qu'il est dans $A + B$.
On a aussi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ avec $\overrightarrow{a}$ dans A et $\overrightarrow{b}$ dans C. On reconnaît qu'il est dans $A + C$.
Ayant à la fois $\overrightarrow{u} \in A + B$ et $\overrightarrow{u} \in A + C$, on peut affirmer : « $\overrightarrow{u} \in (A + B) \cap (A + C)$ ».
On notera que pour ce sens, l'hypothèse $A \subset B$ n'a pas servi.

•Pour l'autre sens, on prend $\overrightarrow{u}$ dans $(A + B) \cap (A + C)$.
Il s'écrit tout à la fois $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ et $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{c}$, et rien ne nous dit que $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{\alpha}$soient égaux, ne poussez pas.
Toutefois, en égalisant, on trouve $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{c}$ puis $+\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} - \overrightarrow{\alpha}$.
Les trois vecteurs du membre de droite sont dans B et dans A, avec l'hypothèse $A \subset B$, ils sont tous dans B.
Par combinaison, $\overrightarrow{c}$ est dans B.
Il est à la fois dans B et dans C, il est dans $B \cap C$.
On a donc écrit $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{c}$ avec $\overrightarrow{\alpha}$ dans A et $\overrightarrow{c}$ dans $B \cap C$. Il est dans $A + (B \cap C)$.

Dans ce type d'exercice, il est important de donner des noms aux objets. Et si possible des noms cohérents.
Après il « suffit » de se laisser porter.
Et de ne pas écrire de bêtises du type « \vu est dans $A + B$ mais pas dans A, donc il est dans B ». Ce type d'ânerie, ça tue direct aux concours.

Rappel des règles :
Mettre dans le grille les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

4	1	2	=	7
6	7	8	=	21
9	5	3	=	17
=	=	=		
19	13	13		

et

4	5	6	=11	15
2	1	8	=	11
7	3	9	=10	19
=9	=	=14		
13	.9	23		

Nombres sur-divisibles.

Qui sont les diviseurs de $3^a.7^b$? Il y a 1, 3, 7, 9, 3×7, et ainsi de suite.
On peut les mettre en tableau, c'zest ce qui rend la compréhesion évidente :

1	3	3^2	$\dots$	3^a
7	3×7	$3^2 \times 7$		$3^a \times 7$
7^2	3×7^2	$3^2 \times 7^2$		$3^a \times 7^2$
$\vdots$			$3^\alpha \times 7^\beta$	$\vdots$
7^b	3×7^b	$3^2 \times 7^b$	$\dots$	$3^a.7^b$

Il y en a $(a + 1) \times (b + 1)$ (attention aux $+1$, car on commence à « exposant 0 »).
La question devient : est il possible que $(a + 1).(b + 1)$ divise $3^a.7^b$?

Oui :

$a = b = 0$	$a = 2$ ou $b = 2$	$a = 6$ ou $b = 6$	$a = 6$ et $b = 2$	$a = 8$	$a = 8$, $b = 2$
1	3^2 et 7^2	3^6 et 7^6	$3^2.7^6$ et vice versa	3^8 et 7^8	et ainsi de suite

La liste est longue... et infinie.

Vous voulez des nombres impairs surdivisibles ? inspirez vous de l'exercice précédent.

Prenez un nombre premier p. Regardez alors p^a. Cest un entier, et il a pour diviseurs 1, p, p^2,p^3 jsuqu'àp^a lui même. Et c'est tout.
Il a donc au total $a+1$ diviseurs.
On veut que ce nombre divise p ? Il suffit (en fait, il faut et il suffit) que a soit égal à 0 ou à $p-1$.

Bilan : chaque p^{p-1} est sur-divisible.
On a donc une liste de nombres surdivisibles, tous impairs : 3^2, 5^4, 7^6, 11^{10} et ainsi de suite.