

« Chacun sait en effet que la ligne droite ne peut être le plus court chemin d'un point à un autre. Sauf, évidemment, si les deux points sont bien en face l'un de l'autre. » Pierre Desproges

Comtesse du Canard Enchaîné :

On l'a trop **g**âté à la **ta**ule. Ce **j**us sent le **co**ing. Faut il évacuer l'**é**lu ? **T**rain de **P**uteaux. Les cheminots **d**outent des **g**ares. Ce viticulteur a vu éclater bien des fûts. On observe des **b**ruits en tas. Ce **cl**imat trop chaud c'est à **T**honon ? La dessinatrice **q**uête des **ma**quettes. Cette **B**uzin n'arrête pas de **p**éter.

Gérard Durand Gérant du Rare (spécialiste des palindromes) :

Mon Edmond, rare génie, venu à Noël à Segré, va, ... râpé par Luc, reçu, sa sale ! On a une veine, Gérard, nom de nom !

Question de cours :

Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ (rappeler la définition).

Montrez que $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \Omega\}$ est encore un ouvert.

Montrez que si Ω est un intervalle ouvert, $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \Omega\}$ n'est plus forcément un intervalle ouvert.

Montrez que si Ω est ouvert, $\{f(x) \mid x \in \Omega\}$ n'est plus forcément un ouvert (prenez par exemple $f = \sin$).

Petit exercice d'analyse :

Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq |2x + 1|$.

Résolvez dans $\mathbb{R}$ $\sqrt{x^2 - 5x + 4} \geq 2x + 1$.

Petit exercice d'arithmétique et calcul :

a , b et n sont des entiers naturels. Vrai ou faux : si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $a^n \equiv b^n \pmod{n}$.

Petit exercice d'algèbre :

Dans l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, on a trois sous-espaces vectoriels A , B et C vérifiant $A \subset B \cup C$ (oui, réunion, pas somme).

Montrez $A \subset B$ ou $A \subset C$.

Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».

Montrez que n (impair) est sur divisible si et seulement si $2n$ l'est aussi.

A suivre...

Rappel des règles : sur chaque ligne et sur chaque colonne, il y a chacun des cinq entiers 1, 2, 3, 4 et 5.

Et il des signes « plus grand que » et « plus petit que » ; bien entendu, ils doivent être corrects.

□ ^ □ v □ 1	□ ^ 3	□ ^ 1	□ ^ 2	□ ^ □	et	5	□ ^ 2	□ ^ 1	□ ^ □	□ ^ □
□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 2	□ ^ 1	□ ^ 3		□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 5	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 4
□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 2	□ ^ 1	□ ^ 3		□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 5	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 4
□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 2	□ ^ 1	□ ^ 3		□ ^ □ v □ 1	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 5	□ ^ □ v □ 1	□ ^ 4



Question de cours :

Donnez deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique mais ne sont pas semblables, en taille 2 puis en taille 3.

Rappelons que le seul sens vrai est « semblables implique même polynôme caractéristique ».

Sincèrement, qu'à l'issue de vos études vous soyez incapable de diagonaliser une matrice, de calculer la trajectoire d'un électron soumis à une force électromagnétique ou de décomposer un tenseur antisymétrique, on s'en fout. Royalement. Mais que vous ne soyez pas capable de comprendre la différence entre « il faut » et « il suffit », et c'est foutu, vous allez faire perdre des milliers d'euros à votre entreprise et mettre la vie des gens en danger. C'est tout ce que j'avais à dire...

La seule solution à notre niveau pour montrer que deux matrices A et B de même format sont semblables est de trouver P inversible vérifiant $A.P = P.B$. Ou d'utiliser la transitivité de la relation « être semblable à ».

On peut proposer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Même trace, même déterminant, même polynôme caractéristique, même spectre (la valeur double 0), mais pas semblables (qui à part $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?).

Mots clefs : valeur propre double.

Petit exercice d'analyse :

On définit : $f = x \mapsto [x].\sin(\pi.x)$. Montrez que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrez que l'équation $\int_a^x f(t).dt = 0$ a une solution entre 3 et 4.

L'application est continue en tout point d'un intervalle du type $]n, n+1[$ (ouvert), car elle y est de la forme $x \mapsto n.\sin(\pi.x)$.

Les seuls points posant problème sont donc les entiers relatifs n de $\mathbb{Z}$.

Comme c'est une définition avec une partie entière, il est judicieux de regarder à droite et à gauche.

intervalle	$]n-1, n[$	n	$]n, n+1[$
fonction	$(n-1).\sin(\pi.x)$	0	$n.\sin(\pi.x)$
limite en n	à gauche : 0	0	0 à droite

Les deux limites latérales coïncident avec la valeur de la fonction. Elle est continue aussi en n de $\mathbb{Z}$.

Maintenant qu'elle est continue sur un intervalle tel que $[3, 4]$, on va appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

On découpe donc l'intégrale par relation de Chasles :

$\int_0^1 f(t).dt = \int_0^1 0.dt$	$\int_1^2 f(t).dt = \int_1^2 \sin(\pi.t).dt$	$\int_2^3 f(t).dt = \int_2^3 2.\sin(\pi.t).dt$	$\int_3^4 f(t).dt = \int_3^4 3.\sin(\pi.t).dt$
0	$\frac{-2}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{-6}{\pi}$
		$f(3) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} \geq 0$	$f(4) = \frac{4}{\pi} - \frac{2}{\pi} - \frac{6}{\pi} \leq 0$

Et encore une fois, un bon tableau vaut mieux qu'un con discours.

Si vous vous contentez de dire « oui, j'ai le bon argument », vous n'avez pas l'esprit à réussir aux concours.

Si vous vous demandez « ai je rendu la chose claire et compréhensible », vous avez l'esprit ingénieur...

Mots clefs : limite à droite et à gauche, relation de Chasles, théorème des valeurs intermédiaires.

1. Oui, un tableau, c'est plus lisible que des formules partout que l'on ne relie pas entre elles au premier coup d'œil et qui s'étalent sur des lignes et des lignes ; y'a écrit « maths », donc on ne calcule pas, on communique.

Petit exercice d'arithmétique et calcul :

Résolvez le système $\begin{cases} 8^x = 10 \cdot y \\ 2^x = 5 \cdot y \end{cases}$ d'inconnues réelles x et y .

x et y ont le droit d'être réels, et y est même strictement positif.

On Raisonne par équivalences en effectuant le quotient des deux lignes et en en gardant une² :

$$\begin{cases} 8^x = 10 \cdot y \\ 2^x = 5 \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8^x / 2^x = 2 \\ 2^x = 5 \cdot y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 2 \\ 2^x = 5 \cdot y \end{cases}$$

On résout la première : x vaut $\frac{1}{2}$ et on reporte dans la seconde : y vaut $\frac{\sqrt{2}}{5}$.

La conclusion attendue n'est pas un nombre ici et un nombre là mais $S_{(x,y)} = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5} \right) \right\}$ un seul élément, un couple.

Mots clefs : équivalences.

Petit exercice d'algèbre :

Pouvez vous trouver deux matrices A et B de taille 2 sur 2 telles que les spectres soient

A	B	$A+B$	A	B	$A+B$	A	B	$A+B$
$\{1, 3\}$	$\{1, 5\}$	$\{4, 6\}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$	$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{4, 6\}$

(trois exercices)

Les matrices de spectre $\{1, 3\}$ sont diagonalisables (deux valeurs propres distinctes, chaque valeur propre apporte un vecteur propre, on a deux vecteurs propres indépendants, donc une matrice de passage). Elles sont donc de la forme $P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$, avec en particulier $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On raisonnement de même pour « spectre $\{1, 5\}$ », avec cette fois les $Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$ et en particulier $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On tient une solution facile :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$+$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$=$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
spectre $\{1, 3\}$		$\{5, 1\}$		$\{6, 4\}$

On peut ensuite cacher les choses avec $P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} + P \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$

Ça, c'est l'art du « poseur d'exercices ».

Pour le triplet

A	B	$A+B$
$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$

la même idée ne convient plus.

D'ailleurs, aucune idée ne convient. Et c'est rapide. Regardez la trace

matrice	A	B	$A+B$
spectre	$\{1, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{1, 4\}$
trace	4	7	5

On n'a pas $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$. Le problème n'a pas de solution.

La même idée avec

A	B	$A+B$
$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{4, 6\}$

matrice	A	B	$A+B$
spectre	$\{0, 3\}$	$\{2, 5\}$	$\{6, 4\}$
trace	3	7	10

c'est incohérent. Mais ça ne prouve pas qu'il y a une solution³.

Il faut vraiment construire une solution.

2. tout le gain de ces exercices sera pour vous de comprendre que vous devez raisonner par équivalences et non balancer des formules les unes à la suite des autres ; la partie calcul n'est qu'accessoire.

3. Point important à nouveau : montrer qu'il n'y a pas d'incohérence ne montre pas qu'il y a une solution, on est d'accord ! L'incohérence peut être ailleurs. On raisonne !

Cette fois, ce n'est pas avec des jeux sur

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

qu'on trouve une solution.

Il faut jouer sur $P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1}$ et $Q \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot Q^{-1}$.

Ou sur $Q^{-1} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot Q$ et $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On va donc prendre une matrice R inversible, et poser $A = R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$ avec R inversible et $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

	matrice	trace	déterminant	polynôme caractéristique	spectre
Par construction,	$A = R \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot R^{-1}$	3	0	$X^2 - 3.X$	$\{0, 3\}$
	$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	7	10	$X^2 - 7.X + 10$	$\{2, 5\}$
	$A + B$	10	?	$X^2 - 10.X + ?$	$\{4, 6\}$

La condition nécessaire et suffisante est $\det(A + B) = 24$.

Si on n'arrive pas à avoir ça ! Prenons même R assez simple pour commencer : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix}$.

Le calcul « à la main » donne $A + B = \frac{1}{b-a} \cdot \begin{pmatrix} 8.a - 5.b & -3.a \\ 3.b & 2.a - 5.b \end{pmatrix}$.

On effectue : $\det(A + B) = \frac{16.a - 25.b}{a-b}$.

C'est faisable, avec $a = 1$ et $b = 8$ par exemple.

	matrice	trace	déterminant	polynôme caractéristique	spectre
On résume :	$A = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}$	3	0	$X^2 - 3.X$	$\{0, 3\}$
	$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	7	10	$X^2 - 7.X + 10$	$\{2, 5\}$
	$A + B = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ -8 & 14 \end{pmatrix}$	10	24	$X^2 - 10.X + 24$	$\{4, 6\}$

D'autres réponses sont possibles.

Rappel des règles : Mettre dans le grille tous les entiers de 1 à 9 (certains sont déjà placés) pour que les trois additions en ligne et en colonne soient correctes :

1	8	2	=	11	8	7	3	=	18
5	6	3	=	14	9	4	2	=	15
7	9	4	=	20	6	5	1	=	12
=	=	=			=	=	=		
13	23	. 9			23	16	. 6		

Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».

Il est temps d'écrire un résultat important :

Quand on connaît la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers, on connaît son nombre de diviseurs.

Prenons un exemple : $n = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^3$ a $(1+3) \cdot (1+2) \cdot (1+3)$ diviseurs.

ce sont les $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$ avec $0 \leq a \leq 3$, $0 \leq b \leq 2$ et $0 \leq c \leq 3$.

2^a	3^b	7^c
1	1	1
2	3	7
4		49

Pour ma part je les vois ainsi :

Choisissez un nombre par colonne, multipliez, et vous avez

un diviseur

2^a	3^b	7^c
	1	
2		
		49

ici 2.1.49.

2^a	3^b	7^c	11^d	13^e
1	1	1	1	1
2	3	7	11	13
2^2		7^2		13^3
		7^3		

Autre exemple : diviseurs de $2^2 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2$: il y en a 3.2.4.2.3 (nombre pair soit

dit en passant).

Le fait que ce soit $NDiv = \prod_{i=1}^d (1 + \alpha_i)$ se justifie par ce dénombrement. Le « 1+ » se comprend car on peut commencer à l'exposant 0.

Ce résultat général étant établi, prenons un nombre sur-divisible impair, qu'on écrit $(p_1)^{\alpha_1} \cdot (p_2)^{\alpha_2} \dots (p_r)^{\alpha_r}$. Il a $NDiv = (1 + \alpha_1) \cdot (1 + \alpha_2) \dots (1 + \alpha_r)$ diviseurs.

Étant sur-divisible, il est divisible par ce nombre de diviseurs $NDiv$.

Comme n est impair, $NDiv$ est donc aussi impair. C'est donc que tous les $(1 + \alpha_i)$ sont impairs.

Et donc tous les α_i sont pairs.

Mais alors si tous les exposants sont pairs, notre nombre est un carré parfait !

$$n = (p_1)^{\alpha_1} \cdot (p_2)^{\alpha_2} \dots (p_r)^{\alpha_r} = (p_1)^{2 \cdot \beta_1} \cdot (p_2)^{2 \cdot \beta_2} \dots (p_r)^{2 \cdot \beta_r} = \left((p_1)^{\beta_1} \cdot (p_2)^{\beta_2} \dots (p_r)^{\beta_r} \right)^2.$$

Par exemple, $3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^8$ ne peut pas être sur-divisible, puisque son nombre de diviseurs est 8.7.9 et ne peut diviser $3^7 \cdot 5^6 \cdot 7^8$.