« On éprouve de la jouissance à fabriquer une belle démonstration mathématique. Encore plus qu'en lisant un roman policier. C'est comme si l'on élucidait nous-mêmes l'intrigue. » Paul Jolissaint

Comtesse du Canard Enchaîné :
Mémoire de veilleurs : des standardistes qui baillent l'écoutent et surveillent le chiffre des combinés se répondent en tranchant. Des pontes rudes relient un zombie à chaque Covid. Pape et confinés : messes sans foules. Ah, ce vieux pape hautain s'endort. Plus de bises pour les confinés. On a vu des photos de péniches dans les vécés.

Palindrome numérique

91	=	90	+	01
10	+	06	=	16

Question de cours :
Donnez la forme logarithmique des applications réciproques de sh, ch et th (domaine convenable), et calculez leurs dérivées.

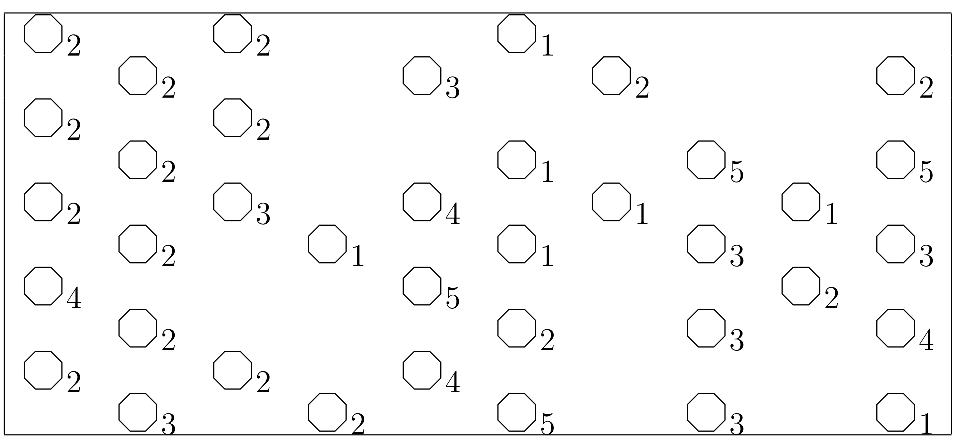
Petit exercice d'analyse :
L'application continue f vérifie $\forall x,\ f(x) = \sin(x) + 2.\int_0^x e^{x-t}.f(t).dt$. Calculez $f(0)$. Montrez que f est dérivable et dérivez la (attention, séparez déjà en $e^x.\int_0^x f(t).e^{-t}.\mathrm{dt}$), et trouvez f.

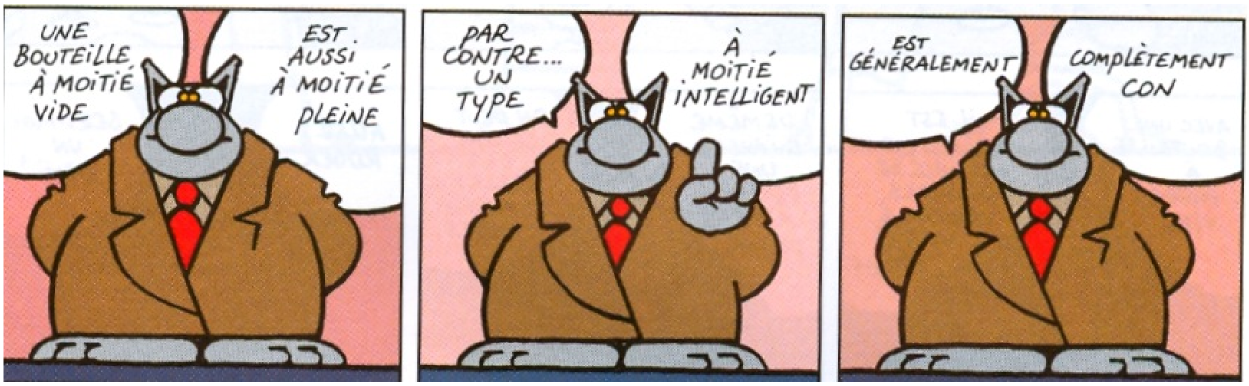
Petit exercice d'arithmétique et calcul :
Montrez pour tout n de $\mathbb{N}$: $\prod_{k=0}^{n}\Big((2.k+1)!\Big) \geqslant \Big((n+1)!\Big)^{n+1}$.

Petit exercice d'algèbre :
$P(X)$ est un polynôme réel unitaire de degré 4 n'ayant aucune racine réelle. Montrez : $(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) > 0)$.
Montrez que P se factorise sous la forme $\mu.(X-\alpha).(X-\beta).(X-\overline{\alpha}).(X-\overline{\beta})$ pour un réel μ et deux complexes α et β.[a]
Montrez que P s'écrit $(A(X))^2 + (B(X))^2$ pour deux polynômes réels A et B.

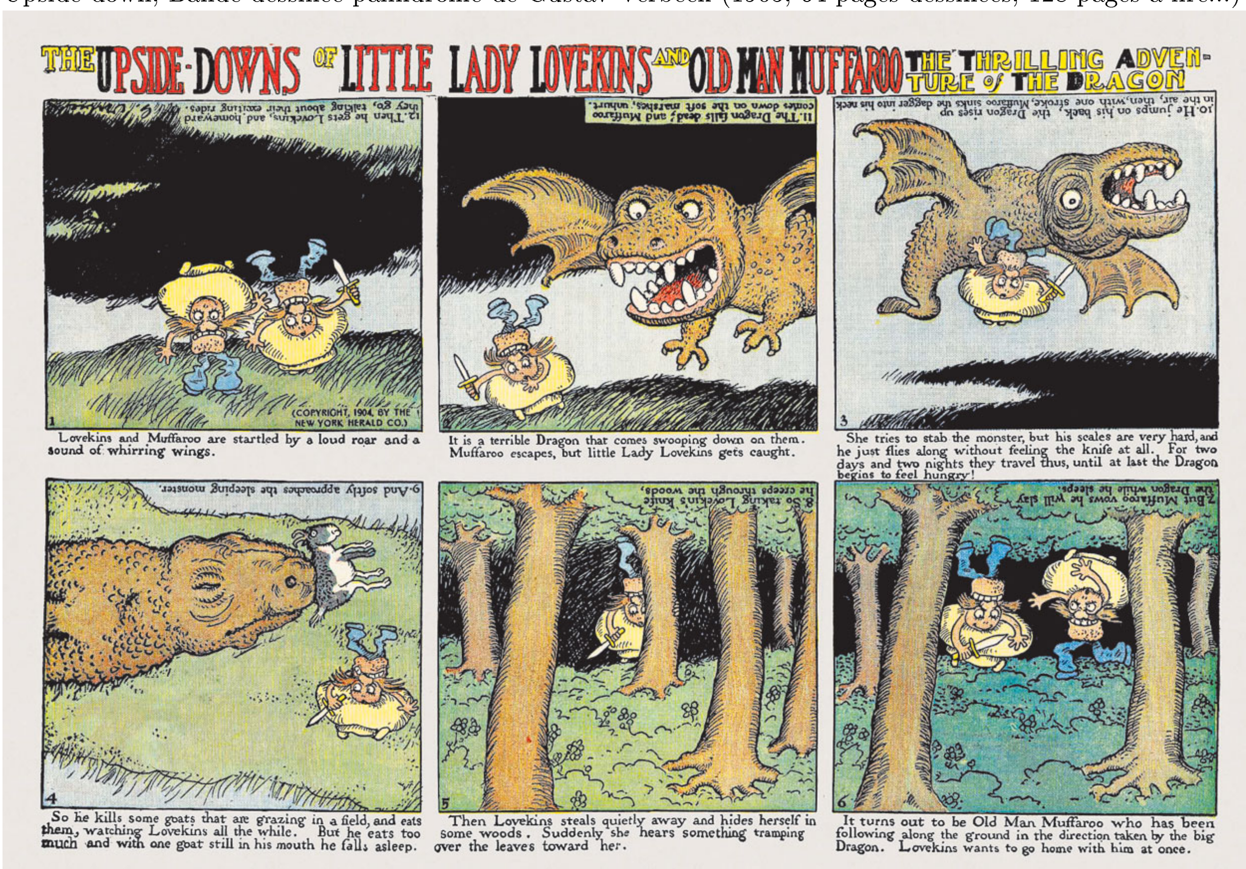
a. unitaire : son coefficient dominant (du terme de plus hait degré) vaut 1

Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Écrivez un script qui compte combien il y a de couples de nombres sur-divisibles ((n, n+1) tous les deux surdivisibles) plus petits que N donné.





Upside-down, Bande dessinée palindrome de Gustav Verbeek (1905, 64 pages dessinées, 128 pages à lire...)



Pensez à effectuer une rotation de π pour lire la fin de l'histoire.

Question de cours :
Montrez que $M_n(\mathbb{R})$ est égal à $S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.

Toute matrice carrée M est la somme d'une matrice symétrique $\dfrac{M +^t M}{2}$ (de terme général $\dfrac{a_i^k + a_k^i}{2}$) et d'une matrice antisymétrique $\dfrac{M -^t M}{2}$ (de terme général $\dfrac{a_i^k - a_k^i}{2}$). il suffit de vérifier qu'elles sont bien symétrique et antisymétrique et que leur somme vaut M. On a donc l'existence.
Pour l'unicité, il suffit de montrer que la seule matrice à la fois symétrique ($A =^t A$) et antisymétrique ($A = -^t A$) est la matrice nulle ($A = -A$).

Question de cours :
Vrai ou faux : $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ est de dimension $n+1$ et ses sous-espaces vectoriels sont les $\mathbb{R}_k[X]$ avec k de 0 à n.

Faux ! Il y a bien d'autres sous-espaces vectoriels.
C'est vrai que $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}_n[X], +, .)$ mais il n'y a pas que lui.
Il y a aussi $Vect(X, X^2, \dots, X^n)$, ou $Vect(1 + X)$, ou de multiples sous-espaces en tout sens.
Cette affirmation pourtant croisée sur des copies d'élèves serait aussi idiote que de dire que dans le plan il n'y a que deux droites : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Petit exercice d'analyse :
On note $(E, +, .)$ l'espace vectoriel des suites réelles qui convergent vers 0 à l'infini (l'ensemble $o(1)$ en fait). Montrez que $a \longmapsto Sup\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une norme sur E.

Existence. On prend une suite a_n qui converge vers 0. Elle est donc bornée. L'ensemble des valeurs prises $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est donc bien une partie de $\mathbb{R}$ non vide, et majorée. Elle admet une borne supérieure.

C'est même un plus grand élément, mais ça ne sert à rien de perdre du temps à le prouver.
Vous devez quand même comprendre que si la suite n'avait pas été convergente, cette borne supérieure n'avait pas de raison d 'exister.
.

Positivité. C'est la borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}^+$ (valeurs absolues). Elle est positive ou nulle.

Séparation. Si on suppose $||a|| = 0$, cela signifie que la borne supérieure de $\{|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ est nulle. Comme la borne supérieure est un majorant :
$\forall n,\ 0 \leqslant |a_n| \leqslant 0 = ||a||$ par antisymétrie : $\forall n,\ a_n = 0$, la suite est nulle.

Inutile de prouver l'autre sens de l'implication, il est conséquence de l'homogénéité, et de toutes façons, il est direct.
.

Homogénéité. On ne se prend pas la tête pour affirmer $\{|\lambda.a_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \{|\lambda|.|a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$ et en passant à la borne supérieure $Sup\{|\lambda.a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}) = |\lambda|.Sup\{|\lambda.a_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
On a bien $||\lambda.a|| = |\lambda|.||a||$.

On ne vous en voudra pas de traiter rapidement cette question.
On vous en voudra si vous prétendez conclure $||\lambda.a|| = \lambda.||a|$ en oubliant la valeur absolue.
On vous en voudra aussi si vous écrivez $||a_n||$ au lieu de $||a||$.
.

On est plus exigeant sur **l'inégalité triangulaire**.
On se donne a et b deux suites de limite nulle.
On a pour tout n : $|a_n + b_n| \leqslant |a_n| + |b_n|$ et même $|a_n + b_n| \leqslant ||a|| + ||b||$ puisque le réel $||a||$ majore tous les $|a_n|$.
Le réel $||a|| + ||b||$ majore tous les $|a_n + b_n|$ quand n décrit $\mathbb{N}$. C'est UN majorant de $\{|a_n + b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
Et par définition, $||a + b||$ est LE PLUS PETIT majorant de $\{|a_n + b_n| \mid n \in \mathbb{N}\}$.
On a donc $||a + b| \leqslant ||a|| + ||b||$.
. *Raisonnement classique à mener à chaque fois que vous avez une norme définie par un Sup.*

Montrez que pour tout a de E la série de terme général $\left(\dfrac{a_n}{2^n}\right)_{n \geqslant 0}$ converge (on note sa somme $S(a)$).
Montrez que S est lipschitzienne de E dans $\mathbb{R}$.

Une série à termes réels de signe quelconque.

Le terme général tend vers 0, c'est bon signe mais ça ne prouve rien.
On étudie la série de terme général $\left(\dfrac{|a_n|}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$. La suite des sommes partielles est croissante.
On majore ensuite $\dfrac{|a_n|}{2^n} \leqslant \dfrac{||a||}{2^n}$.
La série de terme général $\left(\dfrac{||a||}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ est géométrique et on calcule même explicitement ses sommes partielles.
Elle converge.
Par théorème de domination des séries à termes positifs, la série de terme général $\left(\dfrac{|a_n|}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.
Par théorème de convergence en valeur absolue, la série de terme général $\left(\dfrac{a_n}{2^n}\right)_{n\geqslant 0}$ converge.

On se pose la question du caractère lipschitzien de S. C'est quoi cette question ?
Pour une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est $|f(a) - f(b)| \leqslant K|b - a|$.
Mais ici, f s'appelle S et les éléments sont des suites. Pour elles, pas de valeur absolue, mais la norme $|| \dots ||$.
On doit donc trouver k pour avoir $|S(a) - S(b)| \leqslant K.||a - b||$.
On se donne a et b. Et on calcule $S(a) - S(b)$. C'est un réel. C'est $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{2^n}$.
On passe à la valeur absolue et on majore vite : $\displaystyle\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n - b_n}{2^n}\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|a_n - b_n|}{2^n}$.
On majore chaque $||a_n - b_n||$ par $||a - b||$: $\displaystyle\Big|S(b) - S(a)\Big| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{||a - b||}{2^n} = ||b - a||.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.
La série géométrique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ est connue, elle vaut 2.
On a donc $||S(b) - S(a)| \leqslant 2.||b - a||$.
S est lipschitzienne de rapport 2 de $(E, ||.||)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ (on prend la peine de dire quelle norme on définit sur chacun des espaces (départ et arrivée)).

> *Attention, on a bien* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$ *et non pas* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \longrightarrow 2$ *comme l'écrivent les élèves perdus avec les variables.*
> *Ce que vous pouvez écrire, c'est* $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2^n} \longrightarrow_{N\to+\infty} 2$.
> *Si vous avez du mal à saisir la différence, achetez des lunettes et regardez bien la différence entre* $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}$ *et* $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}$.
.
> *Et si vous avez toujours du mal à saisir, achetez un cerveau.*

La démonstration vous semble subtile, parce qu'il y a plusieurs espaces : $\mathbb{R}$avec la valeur absolue
E avec la norme $||.||$
C'est tout à fait normal. C'est des maths, des vraies.
Vous auriez préféré calculer une grosse intégrale avec trois changements de variable ? Je suis déçu, déçu, déçu...

La transformation qui à a associe sa moyenne de Cesàro va-t-elle bien de E dans E ? Est elle lipschitzienne ?

Cette fois, on prend a dans E et on définit c par $c_n = \dfrac{a_0 + \ldots + a_n}{n+1}$ pour tout n.
On a une nouvelle suite. C'est bon signe. Mais est elle dans E ?
Le théorème de Cesàro dit que si (a_n) converge vers 0, alors (c_n) converge aussi vers 0.
C'est bon.

Et la question de rapport de Lipschitz ? Cette fois, c'est a départ et à l'arrivée qu'on va utiliser la norme $||.||$.
On se donne a et b [1]

1. ou si vous préférez « on se donne (a_n) et (b_n) », mais ne vous laissez pas donner $a_n$et $b_n$vous n'auriez qu'un terme sur une infinité... loin d'avoir une suite

La différence des moyennes de Cesàro est la suite de terme général $\dfrac{(b_0-a_0)+\ldots+(b_n-a_n)}{n+1}$ que je vais appeler C_n

On regarde la valeur absolue de C_n : $|C_n|\leqslant \dfrac{1}{n+1}.\Big|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)\Big|\leqslant \dfrac{1}{n+1}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n}|b_k-a_k|$.

On majore chaque $|b_k-a_k|$ par $||b-a||$ par définition.

On a alors $|C_n|\leqslant$

$dsp\frac{(n+1).||b-a||}{n+1}=||b-a||$.

Le réel $||b-a||$ majore $\{|C_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$. On a donc par définition du plus petit majorant $||C||\leqslant||b-a||$ soit encore $||\gamma(b)-(a)||\leqslant||b-a||$ en notant γ l'opérateur de Cesàro qui transforme une suite en la suite de ses moyennes.

Il est donc $1-$lipschitzien.

Vous ne vous êtes ^pas perdu dans les étages. parfait.
Vous êtes bien partis pour la Spé et les concours. [a]

a. mais au fait, c'est quoi un concours d'école d'ingénieurs ?

.

Petit exercice d'arithmétique et calcul :
On définit $u_n=n.4^{n+1}-(n+1).4^n+1$. Montrez que chaque u_n est divisible par 9.

On calcule les premiers

n	0	1	2	3
u_n	0	9	81	513

On part pour une récurrence ? Allez.

Oui, je pars pour une récurrence. Mais ce n'est pas pour prouver un truc du niveau de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_0$.

.

On passe donc de n à $n+1$, sachant qu'une partie du travail est déjà faite [2].

n est donné. On suppose que u_n est un multiple de 9.

Question de prof : comment écrit on « $u_n$est un multiple de 9 » :

$u_n=9.k$	*NON ! Aucun sens. Retourne au C.P. (en amphi 21) !*
$\exists k,\ u_n=9.k$	*C'est mieux. Il y a des VARIABLES enfin !*
$\exists k\in\mathbb{Z},\ u_n=9.k$	*C'est mathématiquement bien mieux. mais un peu lourd.*
$\frac{u_n}{9}\mathbb{Z}$	*C'est correct pour le matheux. mais aussi indigeste pour lui qu'un cours de chimie*
$u_n\in 9.\mathbb{Z}$	*Pour les matheux orthodoxes en habit noir, c'est parfait !*
u_n est un multiple de 9	*Voila ! Enfin la bonne réponse !*

C.P. = Cours de Physique.
Là où on apprend à parler la langue « maternelle » (de maman Solène).
Mais pas la langue « paternelle » (de papa Nico).

.

On calcule $u_{n+1}=(n+1).4^{n+2}-(n+2).4^{n+1}+1$ sachant $u_n=n.4^{n+2}-(n+1).4^n+1$.

L'envie doit être grande de retrouver u_n dans u_{n+1} [3]. De par les facteurs 4^n on va même tenter de retrouver $4.u_n$dans u_{n+1} :

$u_{n+1}=n.4^{n+2}+4^{n+2}-(n+1).4^{n+1}-4^{n+1}+1+4^{n+2}-4^{n+1}=\Big(n.4^{n+2}-(n+1).4^{n+1}+1\Big)+4^{n+2}-4^{n+1}$

$u_{n+1}=\Big(n.4^{n+1}-(n+1).4^n+1\Big).4-3+4^{n+2}-4^{n+1}$

$u_{n+1}=4.u_n+4^{n+2}-4^{n+1}-3=4.u_n+4^{n+1}.(4-1)-3=4.u_n+3.(4^{n+1}-1)$.

Dans cette formule, $4.u_n$est un multiple de 9 par hypothèse de rang n.

Et $4^{n+1}-1$ est un multiple de 3. C'est $(4-1).(4^n+4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+1)$, et là, vous le voyez le facteur 3.

On multiplie par 3 : c'est aussi un multiple de 9.

u_{n+1} est la somme de deux multiples de 9, c'est un multiple de 9.

2. non seulement l'initialisation, mais aussi le fait de nommer l'objet sur lequel on travaille
3. meilleure façon de pouvoir ensuite utiliser l'hypothèse de récurrence

Oui, j'ai fait une récurrence. Mais ce n'est pas si dévalorisant, car c'est quand même une récurrence qui utilise ensuite un peu de calcul.
Ensuite, il faut reconnaitre que vos connaissances en arithmétique sont souvent très très basses.
Ce n'est pas que vous soyez mauvais ou mal préparés en arithmétique.
Mais vous croyez qu'il faut en rédiger des tonnes et des tonnes avec des $+k.n$ et autres incongruités partout.
Alors qu'il doit être clairement admis des phrases aussi simples que

- *la somme de deux multiples de n est un multiple de n*
- *le produit de deux multiples de n est un multiple de n^2*
- *si a est congru à b modulo n alors $a.c$ est aussi congru à $b.c$ modulo n*
- *si a est congru à b modulo n alors a^p est aussi congru à b^p modulo n*

.

Ces quatre résultats doivent vous sembler naturels.
Et aucun ne doit demander la moindre démonstration de votre part.
Et vous devez les énoncer avec des mots, et pas avec des k partout, ON EST EN MATHS PAS EN CHIMIE !

.

Petit exercice d'algèbre :
On travaille dans l'espace vectoriel des matrices de taille n sur n.
On définit $f = M \longmapsto M - Tr(M).I_n$. Montrez que f est linéaire.
Est elle injective ? Est elle bijective ?
La famille $(f,\ f\circ f)$ est elle liée ? La famille $(f,\ f\circ f,\ f\circ f\circ f)$ est elle liée ?

f prend une matrice de taille n sur n et crée une nouvelle matrice de taille n sur $n$aussi.
Pour la linéarité, on vérifie $\forall (M, N),\ \forall \lambda$

$$f(M+N) = (M+N) + Tr(M+N).I_n = (M+Tr(M).I_n) + (N+Tr(N).I_n)$$
$$f(\lambda.M) = \lambda.M + Tr(\lambda.M).I_n = \lambda.(M+Tr(M).I_n)$$

L'application linéaire va d'un espace dans lui même, c'est un $\boxed{\text{endomorphisme}}$

Pour l'injectivité, on se donne M et N et on suppose que leurs images sont égales $M = Tr(M).I_n = N + Tr(N).I_n$ (il faut aboutir à $M = N$).
On passe à la trace (information en plus, on garde toujours aussi $M = Tr(M).I_n = N + Tr(N).I_n$) :
$Tr(M + Tr(M).I_n) = Tr(N + Tr(N).I_n)$ et donc $Tr(M) + TR(M).n = Tr(N) + Tr(N).n$.
On simplifie : $Tr(M) = Tr(N)$. On reporte donc dans l'équation qu'on n'a pas perdue : $Tr(M) + t.I_n = N + t.I_n$ et donc $M = N$. C'est fini.

Certains vont aller regarder dans la suite du cours et dire « il suffit de chercher le noyau et de montrer qu'il est réduit à $O_{n,n}$.
On résout donc $M + Tr(M).I_n = 0_{n,n}$ et on aboutit à $M = 0_{n,n,}$.
Et c'est effectivement la bonne méthode.
Mais ce qui serait idiot, ce serait de dire « voilà, je dois appliquer ça sans réfléchir », alors même que l'idée sous jacente est d'une évidence incroyabe :
$f(M) = f(N) \Leftrightarrow f(M-N) = 0_{n,n} \Leftrightarrow M - N = 0_{n,n}$
L'argument tient en une ligne, il est éivident. Et retenir par couer le « passage par le noyau » sans comprendre que c'est aussi simple que ça derrière, c'est ne pas faire des maths, mais appliquer des recettes. Ce n'est pas avec ça qu'on devient intelligent.

. *A la rigueur, ça permet d'intégrer une école, et c'est déjà ça. Mais ensuite ?*

Pour la surjectivité : tout élément B a-t-il au moins un antécédent A.
On se donne B, il faut trouver A vérifiant $A + Tr(A).I_n = B$.
On raisonne par analyse et synthèse, et on ne rédige que la synthèse :

Analyse :

$(A \quad + \quad Tr(A).I_n \quad = \quad B) \quad \Rightarrow$

$$\left\{\begin{array}{ccccc} A & + & Tr(A).I_n & = & B \\ Tr(A) & + & Tr(A).n & = & Tr(B) \end{array}\right\}.$$

On trouve la valeur de $Tr(A)$: $\dfrac{Tr(B)}{1+n}$.

On reporte dans l'équation : $A = B - \dfrac{Tr(B)}{1+n}.I_n$.

En fait, on a redémontré que si B a un antécédent, ce ne peut être que celui ci.
C'est à dire qu'on a remontré l'injectivité.

Synthèse :

On propose $A = B - \dfrac{Tr(B)}{1+n}.I_n$.

On calcule :

$Tr(A) = Tr(B) - \dfrac{Tr(B)}{1+n}.Tr(I_n) = \dfrac{Tr(B)}{1+n}$.

On calcule alors $f(A) = A + \dfrac{Tr(B)}{1+n}.I_n =$

$= B - \dfrac{Tr(B)}{1+n}.I_n + \dfrac{Tr(B)}{1+n}.I_n = B$.

On a trouvé un antécédent [a].

[a]. au moins un, et on sait en fait que c'est le seul par analyse

L'application linéaire est à la fois injective et surjective, elle est bijective, c'est un $\boxed{\text{isomorphisme}}$

L'application linéaire est bijective d'un espace dans lui même, c'est un $\boxed{\text{automorphisme}}$

Attention, avec f et $f \circ f$, on se place un étage plus haut.
La question « $(f,\ f \circ f)$ est elle liée » ne concerne pas $f(M)$ et $f(f(M))$, mais f et $f \circ f$.
On se demande si $f \circ f$ est un multiple de f.
Évidemment, pour déterminer $f \circ f$ on redescend au niveau des matrices : $f \circ f(M) = f(f(M)) = f(M) + Tr(f(M)).I_n$ (on calcul l'image par f d'une matrice N qui est ici $f(M)$).
On calcule $Tr(f(M)) = Tr(M + t.I_n) = Tr(M) + t.n = (n+1).Tr(M)$ en ayant posé un court temps $Tr(M) = t$).
On reporte : $f \circ f = M \longmapsto (M + Tr(M).I_n) + (n+1).Tr(M).I_n$.
On résume : $\boxed{f = M \longmapsto M + Tr(M).I_n}\boxed{f \circ f = M \longmapsto M + (n+2).Tr(M).I_n}$
Elle se ressemblent, mais ne sont pas proportionnelles. La famille $(f,\ f \circ f)$ est libre.

On va un cran plus loin, toujours à l'étage des fonction :
$f \circ f \circ f$ est l'application qui à M associe $f(f^2(M))$ c'est à dire $f(M + (n+2).Tr(M).I_n)$.
Par linéarité de f, ceci vaut $f(M) + (n+2).Tr(M).f(I_n)$ [4].
On a calculé $f(I_n) = I_n + n.I_n$. On a donc $f^3 = M \longmapsto M + p.Tr(M).I_n$ avec cette fois $p = (n+2) + (n+2).(n+1)$.
Cette fois :

$\boxed{f = M \longmapsto M + Tr(M).I_n}\boxed{f \circ f = M \longmapsto M + (n+2).Tr(M).I_n}\boxed{f \circ f \circ f = M \longmapsto M + p.Tr(M).I_n}$

Cette fois, même si il n'y a pas de proportionnalité entre elles, on se dit qu'on doit pouvoir exprimer la dernière comme combinaison des deux premières.
On peut trouver a et b vérifiant $\Big(M \longmapsto M + p.Tr(M).I_n\Big) = a.\Big(M \longmapsto M + Tr(M).I_n\Big) + b.\Big(M \longmapsto M + (n+2).Tr(M).I_n\Big)$.
Oui, c'est un peu indigeste à cet étage :
$\exists a(,\ b),\ \forall M,\ M + p.Tr(M).I_n = a.\Big(M + Tr(M).I_n\Big) + b.\Big(M + (n+2).Tr(M).I_n\Big)$
On résout un petit système et on trouve a et b [5].

Attention, vos deux réels a et b ne doivent pas dépendre de M, sinon, c'est que vous n'êtes pas au bon étage.

.
Mais ça, c'est lourd. Il suffit de définir deux applications linéaires sur l'espace des matrices
$\boxed{Id = M \longmapsto M}\boxed{\tau = M \longmapsto Tr(M).I_n}$
On constate que f, f^2 et f^3 sont combinaisons de Id et τ.
Les trois applications sont dans un espace vectoriel engendré par deux applications, ils forment une famille liée.

C'est ça l'algèbre linéaire. C'est raisonner sur des dimensions pour s'épargner des calculs.
je sais, certains d'entre vous préfèrent calculer pendant un quart d'heure pour gagner un point plutôt que de raisonner deux minutes, au risque de ne pas avoir de point si ils ne trouvent pas.
Chacun son esprit.

.

4. oui, je calcule f^2 par une autre méthode diront certains, mais c'est la même
5. faites le, moi ça ne me passionne pas, je suis prof, et prof de maths

Un nombre sur divisible est un nombre « divisible par le nombre de ses diviseurs ».
Combien y a-t-il de nombres sur-factorisables ayant dix huit diviseurs ?

Ils doivent sa factoriser par 2.3^2. On les écrit $2^{a+1}.3^{b+2}.c$ avec c contenant d'autres facteurs que 2 et 3. Mais alors leur nombre de diviseurs devient $(a+2).(b+3).nombre$. Et ceci doit valoir 18 .

On s'en sort avec

a	0	1	4
b	6	3	0
	2.3^8	$2^2.3^5$	$2^5.3^2$

mais aussi

a	0
b	0
autre	p^2
	$2.3^2.p^2$

On vérifie que $2.3^2.5^2$ et plus généralement $2.3^2.p^2$ ($= 18.p^2$ avec p premier plus grand que 5) a bien $2 \times 3 \times 3$ diviseurs, ce qui fait 18 et ce nombre est multiple de 18.
Et ces nombres là, il y en a autant que de nombres premiers (moins 2) : une infinité.

Et si finalement on racontait ça comme des molécules avec des liaisons simples ou double ?

Bon, en tout cas, il est facile de commencer par les iles avec six ponts, surtout sur le bord ; cela implique tout de suite trois liaisons doubles.