Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Vendredi 13 septembre

# $DS01$

Tiens, on est vendredi 13 ! En quelle année Noël tombera-t-il un vendredi 13 ? Quel sera le mois où il y aura deux vendredi 13 ?

MPSI 2/2013

## EXERCICES

$DS01$

♣1 Un élève prétend que si $F$ est une primitive de $f$ alors on a non seulement $\displaystyle\int_a^b f(t).dt = \Big[F(t)\Big]_{t=a}^{t=b}$ mais aussi $\displaystyle\int_a^b |f(t)|.dt = \Big[|F(t)|\Big]_{t=a}^{t=b}$. Prouvez lui qu'il a tort. •2 pt.•

♣2 Calculez $\displaystyle\int_0^\pi |1 + 2.\cos(t)|.dt$ en pensant à utiliser la relation de Chasles *(et même simplement déjà en pensant)*. •3 pt.•

♣3 Représentez graphiquement $a \longmapsto \displaystyle\int_0^2 |x^2 + (a-1).x - a|.dx$ pour $a$ de $-3$ à $3$. •5 pt.•
Le graphe de cette application admet-il un axe de symétrie ? •1 pt.•

---

♢1 Décomposez $20!$ en produit de facteurs premiers *(calculatrice interdite)*. •3 pt.•

---

♠1 Qu'affichera l'organigramme de la page suivante si la donnée saisie $x$ est nulle ? Quelles sont les valeurs que vous pouvez donner à $x$ pour que la valeur 7 soit affichée ? •4 pt.•

---

♢2 Ajustez le complexe $a$ pour que $1 + 3.i$ soit racine de l'équation $x^2 + a.x + 2 = 4.i$ d'inconnue complexe $x$. Trouvez alors l'autre racine. •3 pt.•

21 points — 21 points

MPSI 2/2013

## $\pi/7$

$DS01$

I- 1) Montrez pour tout réel $\theta$ : $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$ et $\cos(4.\theta) + \cos(2.\theta) = 2.\cos(3.\theta).\cos(\theta)$.
Exprimez $\cos(4.\theta)$ comme polynôme en $\cos(\theta)$. •4 pt.•

I- 2) Déduisez que $\cos(\pi/7)$ est racine des deux polynômes suivants de variable $X$ : $8.X^4 + 4.X^3 - 8.X^2 - 3.X + 1$ et $8.X^3 - 4.X^2 - 4.X + 1$ noté $P_\mu$. •3 pt.•

---

II- 1) **<u>Variante :</u>** on pose $\varepsilon = e^{2.i.\pi/7}$. Prouvez $\displaystyle\sum_{k=-3}^{k=3} \varepsilon^k = 0$. •2 pt.• Déduisez : $2.\big(\cos(6.\pi/7) + \cos(4.\pi/7) + \cos(2.\pi/7)\big) + 1 = 0$. •1 pt.•

II- 2) Retrouvez alors le polynôme $Q_\mu$ du troisième degré à coefficients entiers dont $\cos(2.\pi/7)$ est racine. •2 pt.•

---

III- 1) **<u>Autre variante :</u>** on garde $\varepsilon = e^{2.i.\pi/7}$ et on définit : $a = \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4$ et $b = \varepsilon^3 + \varepsilon^5 + \varepsilon^6$.
Montrez : $a.b = 2$ et calculez $a + b$ *(indication possible : calculer* $(1-\varepsilon).(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^6)$*)*. •3 pt.•

III- 2) Calculez alors $a$ et $b$. •2 pt.•

III- 3) Calculez $\cos(2.\pi/7) + \cos(4.\pi/7) + \cos(8.\pi/7)$. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

III- 4) Retrouvez l'équation du troisième degré de racine $\cos(2.\pi/7)$. $\boxed{\bullet 1 \text{ pt.}\bullet}$

---

IV- 1) En repartant de "$\cos(2.\pi/7)$ est racine de $Q_\mu$", montrez que $\cos^2(\pi/7)$ est racine de $64.X^3 - 80.X^2 + 24.X - 1$. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

IV- 2) Déduisez l'équation de degré 3 dont les racines sont $1/\cos^2(\pi/7)$, $1/\cos^2(2.\pi/7)$ et enfin $1/\cos^2(3.\pi/7)$. *(l'équation ne saurait être $(x - 1/\cos^2(\pi/7)).(x - 1/\cos^2(2.\pi/7)).(x - 1/\cos^2(3.\pi/7))$ ni sa forme juste développée...)* $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

IV- 3) Trouvez alors l'équation de degré 3 dont les racines sont $\tan^2(\pi/7)$, $\tan^2(2.\pi/7)$ et $\tan^2(3.\pi/7)$. *(même remarque qu'au dessus)* $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

IV- 4) Prouvez alors $\tan^2(\pi/7) + \tan^2(2.\pi/7) + \tan^2(3.\pi/7) = 21$. $\boxed{\bullet 1 \text{ pt.}\bullet}$

IV- 5) Calculez $\displaystyle\sum_{k=0}^{7} \tan^2(k.\pi/7)$. $\boxed{\bullet 1 \text{ pt.}\bullet}$

---

V- 1) **On suppose que** $\cos(\pi/7)$ **est rationnel,** de la forme $p/q$ avec $p$ et $q$ premiers entre eux. Montrez alors : $8.p^3 = 4.p^2.q + 4.p.q^2 - q^3$. $\boxed{\bullet 1 \text{ pt.}\bullet}$ Déduisez que $q$ divise 8 et montrez que $p$ divise 1. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$ Donnez la liste des valeurs possibles de $p/q$ et concluez : $\cos(\pi/7)$ est irrationnel. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

(V- 2) On suppose que $\cos(\pi/7)$ est racine d'une équation du second degré à coefficients entiers. Montrez qu'alors le polynôme $P_\mu$ admet au moins une racine rationnelle. Concluez.) question non posée ici

---

VI- 1) On pose : $\alpha = \dfrac{4+\sqrt{5}}{10}$. Calculez $Q_\mu(5/8)$ ainsi que $Q_\mu(\alpha)$ et donnez le signe de chacune de ces deux quantités. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

Montrez $|Q_\mu(\alpha)| \leqslant \dfrac{1}{800}$. $\boxed{\bullet 1 \text{ pt.}\bullet}$

VI- 2) Montrez que $Q'_\mu$ et $Q_\mu$ sont croissantes sur $[1/2, \sqrt{2}/2]$. $\boxed{\bullet 2 \text{ pt.}\bullet}$

VI- 3) Triez les cinq réels $1/2$, $\alpha$, $\cos(2.\pi/7)$, $\sqrt{2}/2$ et $5/8$ par ordre croissant. $\boxed{\bullet 3 \text{ pt.}\bullet}$

VI- 4) Montrez : $\dfrac{1}{800} \geqslant Q_\mu(\alpha) - Q_\mu(\cos(2.\pi/7)) = \displaystyle\int_{\cos(2.\pi/7)}^{\alpha} Q'_\mu(t).dt \geqslant 6.(\alpha - \cos(2.\pi/7))$.

Déduisez que $\alpha$ est une "très bonne" approximation de $\cos(2.\pi/7)$ par excès à $10^{-3}$ près.

| MPSI 2/2013 | 62 points | $DS01$ |
|---|---|---|

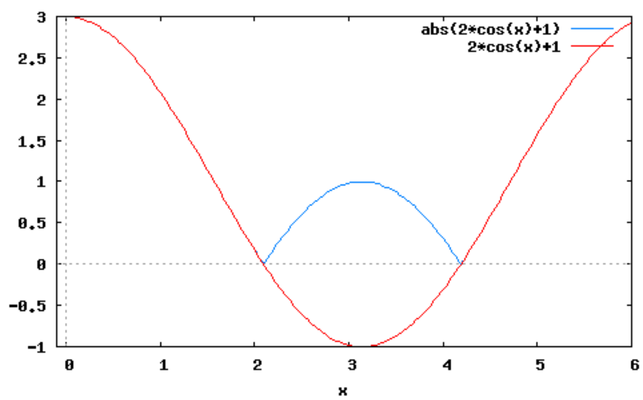
**DS01** • Intégrales comme $\int_0^2 |x^2+(a-1).x-a|.dx$ • MPSI 2/2013

Pour prouver à l'élève qui invente stupidement la formule $\displaystyle\int_a^b |f(t)|.dt = \Big[|F(t)|\Big]_{t=a}^{t=b}$, un contre-exemple devrait suffire.
Prenons la fonction sinus, entre 0 et $\pi$. On connaît : $\displaystyle\int_0^\pi |\sin(t)|.dt = \int_0^\pi \sin(t).dt = \Big[-\cos(t)\Big]_{t=0}^{t=\pi} = 2$
*(voyez le géométriquement comme une arche de sinusoïde, c'est évident et mieux qu'un calcul de primitive).*
En revanche, on a $\Big[|-\cos(t)|\Big]_{t=0}^{t=\pi} = 0$.

On peut éventuellement comprendre qu'un élève ayant juste le niveau du baccalauréat *(formule contradictoire par essence)* commette cette erreur, parce qu'il n'aura pas été formé à voir l'intégrale comme une aire algébrique.
En revanche, si sa formation scientifique est bien faite *(ou s'il a l'âme des sciences en lui)*, c'est bel et bien un contre-exemple qui lui permettra de comprendre son erreur, et non pas de creux verbiages.

---

Pour calculer $\displaystyle\int_0^\pi |1+\cos(2.t)|.dt$, il faut se représenter l'application $x \longmapsto 1+2.\cos(x)$, qui varie entre $-1$ et 3. Il faut ensuite visualiser quand elle coupe l'axe des abscisses et change de signe *(en $2.\pi/3$ et $4.\pi/3$)*, redresser la partie négative pour en faire au contraire une contribution positive dans le calcul d'intégrale.

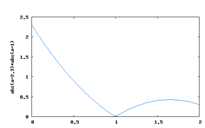
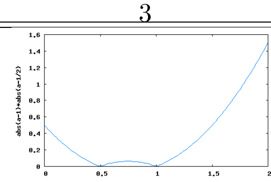
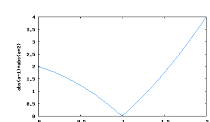



C'est par la relation de Chasles qu'on s'en sort ensuite :
$$\int_0^\pi |1+2.\cos(t)|.dt = \int_0^{2.\pi/3} (1+2.\cos(t)).dt + \int_{2.\pi/3}^{4.\pi/3} -(1+2.\cos(t)).dt + \int_{4.\pi/3}^{2.\pi} (1+2.\cos(t)).dt$$
On intègre alors simplement en $t+2.\sin(t)$, au signe près (ce qui joue un rôle énorme), et on trouve :
$$\boxed{\int_0^\pi |1+2.\cos(t)|.dt = \frac{2.\pi}{3} + 4.\sqrt{3}}$$

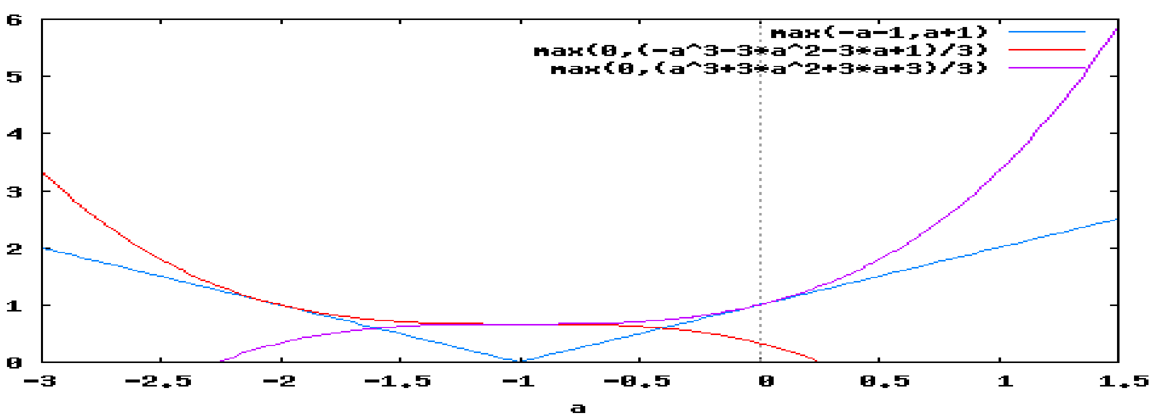
**DS01** • Calcul de $\int_0^2 |x^2+(a-1).x-a|.dx$. • MPSI 2/2013

L'apogée de cet exercice est bien dans le calcul de $\displaystyle\int_0^2 |x^2+(a-1).x-a|.dx$ *(noté $I_a$)* pour chaque $a$ de $[-3,3]$.
Il faut déjà visualiser $x \longmapsto |x^2+(a-1).x-a|$ pour chaque $a$ de notre intervalle, mais pour $x$ variant juste de 0 à 2.

Chaque $x \longmapsto |x^2 + (a-1).x - a|$ *(appelé $f_a$)* est un trinôme du second degré *(parabole)*, qui s'annule et change de signe en ses racines. Si racines il a.
Et justement, il en a. Si on se fatigue à calculer son discriminant, on trouve $(a-1)^2 + 4.a$ c'est à dire $(a+1)^2$. Les deux racines sont 1 et $-a$. Ce polynôme se factorise en $(x-1).(x+a)$.
Pour $x$ de 0 à 2, il peut changer une ou deux fois de signe. Tout se discute suivant $-a$ :
• $a \leqslant -2$ : le trinôme en $x$ ne change de signe qu'en 1 :
$I_a = \int_0^1 (x^2 + (a-1).x - a).dx - \int_1^2 (x^2 + (a-1).x - a).dx = -1 - a$
• $-2 \leqslant a \leqslant -1$ : le trinôme en $x$ change de signe en 1 puis en $-a$ :
$I_a = \int_0^1 (x^2 + (a-1).x - a).dx - \int_1^{(} -a)(x^2 + (a-1).x - a).dx + \int_{-a}^2 (x^2 + (a-1).x - a).dx = \frac{1 - 3.a - 3.a^2 - a^3}{3}$
• $-1 \leqslant a \leqslant 0$ : le trinôme en $x$ change de signe en $-a$ puis en 1 :
$I_a = \int_0^{-a} (x^2 + (a-1).x - a).dx - \int_{-a}^1 (x^2 + (a-1).x - a).dx + \int_1^2 (x^2 + (a-1).x - a).dx = \frac{3 + 3.a + 3.a^2 + a^3}{3}$
• $0 \leqslant a$ : le trinôme en $x$ ne change de signe qu'en 1 :
$I_a = -\int_0^1 (x^2 + (a-1).x - a).dx + \int_1^2 (x^2 + (a-1).x - a).dx = a + 1$
On résume :

| $a$ | avant $-2$ | $-2$ | de $-2$ à $-1$ | $-1$ | de $-1$ à 0 | 0 | après 0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_a$ | $-1-a$ | 1 | $\frac{1 - 3.a - 3.a^2 - a^3}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3 + 3.a + 3.a^2 + a^3}{3}$ | 1 | $a+1$ |
| |  | | | |  | |  |

On peut ensuite tracer un graphe plus ou moins approximatif :




---

**DS01** • Décomposition de 20!. • MPSI 2/2013

Le nombre 20! est un entier non nul, il se décompose en produit de facteurs. Mais avant tout, on le dénompose en produit de facteurs :
20! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20.
Et chacun de ces facteurs se décompose lui même :

| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2^{18}$ | | | 2 | | $2^2$ | | 2 | | $2^3$ | | 2 | | $2^2$ | | 2 | | $2^4$ | | 2 | | $2^2$ |
| $3^8$ | | | | 3 | | | 3 | | | $3^2$ | | | 3 | | | 3 | | | $3^2$ | | |
| $5^4$ | | | | | | 5 | | | | | 5 | | | | | 5 | | | | | 5 |
| $7^2$ | | | | | | | | 7 | | | | | | | 7 | | | | | | |
| $11^1$ | | | | | | | | | | | | 11 | | | | | | | | | |
| $13^1$ | | | | | | | | | | | | | | 13 | | | | | | | |
| $17^1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | 17 | | | |
| $19^1$ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | 19 | |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

On déduit : $\boxed{20! = 2^{18}.3^4.5^2.7^2.11.13.17.19}$

---

**DS01** • L'équation $x^2 + a.x + 2 = 4.i$ de racine $1 + 3.i$. • MPSI 2/2013

On exige donc : $(1 + 3.i)^2 + a.(1 + 3.i) + 2 = 4.i$. On sépare variable et constantes numériques : $a.(1 + 3.i) = 4.i - 2 - (1 - 9 + 6.i)$.

On simplifie : $\boxed{a = \dfrac{6 - 2.i}{1 + 3.i} = -2.i}$

L'équation est donc $x^2 - 2.i.x + 2 - 4.i = 0$.
Si on se laisse influencer par une fibre trop calculatoire, on calcule le discriminant : $(2.i)^2 - 4.(2 - 4.i) = -4 - 8 + 16.i = 4.(4.i - 3)$.
On trouve une racine carrée de ce discriminant en résolvant $a^2 - b^2 = -3$, $a^2 + b^2 = 5$ et $2.a.b = 4$. On trouve : $(1 + 2.i)^2 = -3 + 4.i$.
Les solutions de l'équation sont $\boxed{1 + 3.i \text{ et } -1 - i}$

Ne pouvait on pas aller plus vite ? Mais si !
L'équation s'écrit $x^2 - s.x + p = 0$ avec $s$ la somme des racines et $p$ leur produit. On tient déjà une racine, et l'autre est $2.i - (1 + 3.i)$.

---

**DS01** • L'équation de racine $\cos(\pi/7)$. • MPSI 2/2013

On rappelle : $\cos(3.\theta) = 4.\cos^3(\theta) - 3.\cos(\theta)$.
On peut le retrouver ainsi : $2.\cos(3.\theta) = (e^{i.\theta})^3 + (e^{-i.\theta})^3 = (c + i.s)^3 + (c - i.s)^3 = 2.c^3 - 6.c.s^2$ par la formule du binôme puis $2.\cos(3.\theta) = 2.c^3 - 6.c.(1 - c^2)$.
On peut aussi développer en $\cos(2.\theta).\cos(\theta) - \sin(2.\theta).\sin(\theta) = (c^2 - s^2).c - 2.s.c.s$ et on remplace $s^2$ par $1 - c^2$.

---

On fait ensuite le même genre de calculs.
Ou plus efficacement : $\cos(4.\theta) + \cos(2.\theta) = 2.\cos(3.\theta).\cos(\theta)$ par transformation de sommes en produits. On remplace ensuite par $2.c^2 - 1$ et $4.c^3 - 3.c$.
Ou alors on dit tout de suite que c'est du cours : $2.\cos^2(2.\theta) - 1 = 2.(2.c^2 - 1)^2 - 1$.

---

Dans le cas particulier de $\theta$ égal à $\pi/7$ et en posant $c = \cos(\pi/7)$, on trouve :
• $\cos(4.\pi/7) + \cos(3.\pi/7) = 8.c^4 - 8.c^2 + 1 + 4.c^3 - 3.c$.
Mais dans le même temps, on constate : $\cos\left(\dfrac{4.\pi}{7}\right) = \cos\left(\pi - \dfrac{3.\pi}{7}\right) = -\cos\left(\dfrac{3.\pi}{7}\right)$.
Il nous reste donc $8.c^4 - 8.c^2 + 1 + 4.c^3 - 3.c = 0$ comme demandé.

$\cos(\pi/7)$ est donc bien une des quatre racines de ce polynôme $8.X^4 - 8.X^2 + 1 + 4.X^3 - 3.X$.
Mais la suite nous incite à factoriser nous même ce polynôme :

$8.X^4-8.X^2+1+4.X^3-3.X=(X+1).(8.X^3-4.X^2-4.X+1)$.
Comment deviner ceci ? En posant a priori $8.X^4-8.X^2+1+4.X^3-3.X=(a.X+b).(8.X^3-4.X^2-4.X+1)$ puis en déterminant $a$ et $b$. Ou en essayant des racines évidentes. Ou en comprenant que l'équation $\cos(4.\theta)+\cos(3.\theta)=0$ admet pour racine $\theta=\pi$ donc pour solution en $\cos(\theta)$ la valeur $-1$.

Or, $\cos(\pi/7)$ ne vaut pas $-1$. Il n'annule donc pas $X+1$ et doit se reporter sur l'autre facteur :
$\boxed{8.\cos^3(\pi/7)-4.\cos^2(\pi/7)-4.\cos(\pi/7)+1=0}$

**DS01** • L'équation de racine $\cos(2.\pi/7)$. • MPSI 2/2013

Le complexe $e^{2.i.\pi/7}$ *(nomme $\varepsilon$)* existe et a pour module 1. On sait où le placer sur le cercle trigonométrique.

La somme $\displaystyle\sum_{k=-3}^{3}(e^{2.i.\pi/7})^k$ est une série géométrique de raison $\varepsilon$ *(différente de* 1*)*, de premier terme $\varepsilon^{-3}$ et de terme à venir $\varepsilon^4$. Elle vaut donc $\dfrac{\varepsilon^{-3}-\varepsilon^4}{1-\varepsilon}$.

*Retenez la formule* $\dfrac{(premier\_terme\_ecrit)-(premier\_terme\_a\_venir)}{1-raison}$ *à l'exclusion de toute autre formule. Oubliez vos décomptes de termes et autres.*

Or, ici on obtient $\dfrac{e^{-6.i.\pi/7}-e^{8.i.\pi/7}}{1-e^{2.i.\pi/7}}$. Mais on a immédiatement $-\dfrac{6.\pi}{7}=\dfrac{8.\pi}{7}\quad mod\quad 2.\pi$. Le numérateur est donc nul par périodicité.

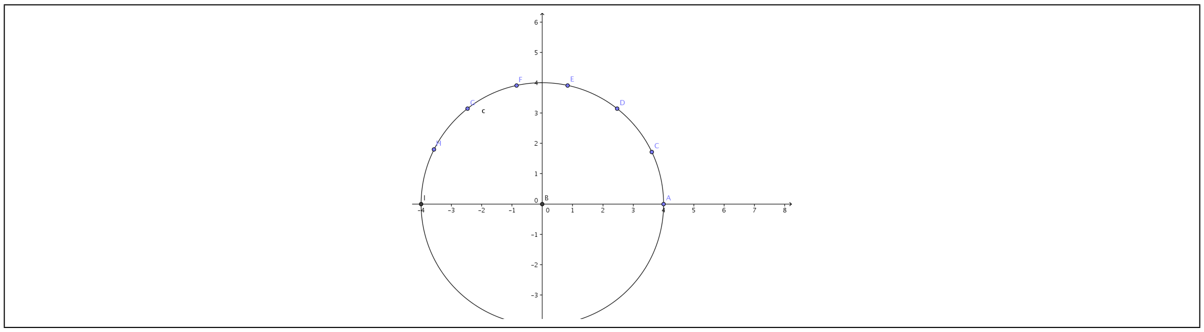
On a donc bien $\boxed{\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}+1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3=0}$

*On peut voir dans ceci le fait que le centre de gravité de l'heptagone régulier soit le centre du cercle trigonométrique.*

En regroupant deux à deux les termes, on a donc : $2.\cos(3.2.\pi/7)+2.\cos(2.2.\pi/7)+2.\cos(2.\pi/7)+1=0$.
En remplaçant encore $\cos(2.\theta)$ et $\cos(3.\theta)$ par $4.c^3-3.c$ et $2.c^2-1$, on a alors :
$2.(4.c^3-3.c)+2.(2.c^2-1)+2.c+1=0$ en ayant posé $c=\cos(2.\pi/7)$ le court temps de cette démonstration. On développe et on a la formule $8.c^3+4.c^2-4.c-1=0$ comme demandé :
$\boxed{Q_\mu=8.X^3+4.X^2-4.X-1}$ en passant en variable formelle de polynôme.

**DS01** • Sommes $\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^4$ et $\varepsilon^3+\varepsilon^5+\varepsilon^6$. • MPSI 2/2013

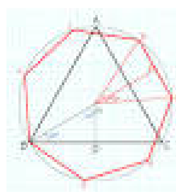
On peut positionner les six sommets de $\varepsilon$ à $\varepsilon^6$ sur le cercle trigonométrique.
Déjà, on calcule la somme $a+b$ qui contient les six termes de $\varepsilon$ à $\varepsilon^6$. Leur somme est encore une série géométrique, de premier terme $\varepsilon$, de terme à venir $\varepsilon^7$ et de raison $\varepsilon$. Elle vaut donc $\dfrac{\varepsilon-1}{1-\varepsilon}$ puisque $\varepsilon^7$ vaut 1.
On a donc $\boxed{a+b=-1}$
*On a encore utilisé la série géométrique. Pour ceux qui ne connaissent pas la formule, on utilise l'indication :*
$(1-\varepsilon).(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^6)=1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^6-\varepsilon-\ldots-\varepsilon^7=1-\varepsilon^7=0$
*Or, comme $1-\varepsilon$ est non nul, on a nécessairement $(1+\varepsilon+\ldots+\varepsilon^6)=0$, et effectivement $\varepsilon+\ldots+\varepsilon^6=-1$.*



On développe aussi : $a.b$ est formé de neuf termes :
$(\varepsilon^4+\varepsilon^6+\varepsilon^7)+(\varepsilon^5+\varepsilon^7+\varepsilon^8)+(\varepsilon^7+\varepsilon^9+\varepsilon^{10})$
On regroupe les trois termes de valeur 1 (c'est $\varepsilon^7$). On profite de $\varepsilon^7=1$ pour réduire les six autres "modulo 7 sur l'exposant". On retrouve la somme $\varepsilon+\ldots+\varepsilon^6$, de valeur $-1$.
On a donc $\boxed{a.b=2}$

---

Ayant $a+b=-1$ et $a.b=2$, on déduit que $a$ et $b$ sont les deux racines de l'équation $x^2+x-1=0$ d'iconnue complexe $x$.

On trouve $\boxed{a=\dfrac{1+i.\sqrt{7}}{2} \text{ et } b=\dfrac{1-i.\sqrt{7}}{2}}$ 

On retrouve que $a$ et $b$ sont conjugués, ce qu'on savait déjà géométriquement.
Mais est-ce le bon choix ? N'aurait on pas le contraire : $a=\dfrac{1-i.\sqrt{7}}{2}$ et $b=\dfrac{1+i.\sqrt{7}}{2}$ ? C'est sur le signe de la somme $\sin(2.\pi/7)+\sin(4.\pi/7)+\sin(8.\pi/7)$ que porte la justification.
Un aperçu sur le cercle trigonométrique nous confirme qu'on a fait le bon choix : $|\sin(8.\pi/7)|=\sin(\pi/7)\leqslant\sin(2.\pi/7)$ et $\sin(4.\pi/7)$ est positif.

En extrayant donc partie réelle et partie imaginaire dans $a$, on a donc :
$$\boxed{\cos\left(\frac{2.\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4.\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{8.\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{6.\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{10.\pi}{7}\right)+\sin\left(\frac{12.\pi}{7}\right)=\frac{\sqrt{7}}{2}}$$

---

On pose encore $c=\cos(2.\pi/7)$ et on trouve $c+(2.c^2-1)+(8.c^4-8.c^2+1)+\dfrac{1}{2}=0$.
On a donc un polynôme de degré 4 dont $c$ est racines : $16.X^4-12.X^2+2.c+1$.

On en voulait un de degré 3. C'est donc qu'il y a une racine en trop : $16.X^4-12.X^2+2.c+1=(c.X+d).(8.X^3+4.X^2-4.X-1)$ avec $c=2$ et $d=-1$.
Comme $c$ ne vaut pas $1/2$, il est racine du polynôme "divisé" $8.X^3+4.X^2-4.X-1$, celui qu'on appelle $Q_\mu$.

**DS01** • Vers le calcul de $\tan^2(\pi/7)+\tan^2(2.\pi/7)+\tan^2(3.\pi/7)$. • MPSI 2/2013

On reprend avec "$\cos(2.\pi/7)$ est racine de $8.X^3+4.X^2-4.X-1$".
On traduit : $8.\cos^3(2.\pi/7)+4.\cos^2(2.\pi/7)-4.\cos(2.\pi/7)-1=0$.
On remplace $\cos(2.\pi/7)$ par $2.\cos^2(\pi/7)-1$.
Avec des notations allégées pour aller plus vite : $8.(2.c^2-1)^3+4.(2.c^2-1)^2-4.(2.c^2-1)-1=0$.

On développe avec la formule du binôme (exposants 2 et 3) : $64.c^6 - 80.c^4 + 24.c^2 - 1 = 0$.
On a bien l'équation bicarrée de degré 6 proposée, et $c^2$ est racine de l'équation $64.C^3 - 80.C^2 + 24.C - 1 = 0$ d'inconnue réelle $C$.

Peut on dire la même chose de $\cos^2(2.\pi/7)$ et $\cos^2(3.\pi/7)$.
Il faut pour cela se convaincre (et convaincre le lecteur) que les deux autres racines de $Q_\mu$sont aussi $\cos(4.\pi/7)$ et $\cos(6.\pi/7)$.

Or, d'où venait le polynôme $Q_\mu$ ? D'une suite de questions commençant par $\sum_{k=-3}^{k=3} \varepsilon^k = 0$ avec $\varepsilon = e^{2.i.\pi/7}$. Mais ce résultat est valable aussi pour $\varepsilon = e^{4.i.\pi/7}$ et $\varepsilon = e^{6.i.\pi/7}$.
La conclusion est donc aussi valable.
On peut donc reprendre sommairement les mêmes étapes et arriver à $64.X^3 - 80.X^2 + 24.X - 1$ a pour racines $\cos^2(\pi/7)$, $\cos^2(2.\pi/7)$ et $\cos^2(3.\pi/7)$.

---

Avec nos notations, on part encore de $64.C^3 - 80.C^2 + 24.C - 1 = 0$. On divise par $C^3$ (non nul) : $64 - 80/C + 24/C^2 - 1/C^3 = 0$. On déduit que $1/\cos^2(\theta)$ est racine de $\boxed{64 - 80.X + 24.X^2 - X^3}$ pour $\theta$ égal à $\pi/7$, $2.\pi/7$ et $3.\pi/7$.

---

On repart de $\dfrac{1}{\cos^6(\theta)} - \dfrac{24}{\cos^4(\theta)} + \dfrac{80}{\cos^2(\theta)} - 64 = 0$ pour les trois valeurs de $\theta$ déjà indiquées.
On remplace $\dfrac{1}{\cos^2(\theta)}$ par $1 + \tan^2(\theta)$ et on développe donc, avec encore des notations allégées : $(1+t^2)^3 - 24.(1+t^2)^2 + 80.(1+t^2) - 64 = 0$. On aboutit bel et bien à $t^6 - 21.t^4 + 35.t^2 - 7 = 0$.

Les trois racines de $T^3 - 21.T^2 + 35.T - 7$ sont $\tan^2(\theta)$ pour les trois valeurs de $\theta$ déjà citées ($k.\pi/7$ pour $k$ de 1 à 3). Ce sont bien trois réels distincts (croissance stricte de la tangente), donc on a les trois racines du polynôme.
Or, en identifiant avec $(T-a).(T-b).(T-c)$, on retrouve que la somme des trois racines est $-21$ (relations coefficients/racines).

On résume : $\boxed{\tan^2(\pi/7) + \tan^2(2.\pi/7) + \tan^2(3.\pi/7) = 21}$

On prolonge en ajoutant deux termes nuls : $\tan^2(0.\pi/7)$ et $\tan^2(7.\pi/7)$. On retrouve ensuite les mêmes termes $\tan^2(6.\pi/7) + \tan^2(5.\pi/7) + \tan^2(4.\pi/7) = 21$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées sur le cercle trigonométrique.
Si vous ne comprenez pas ce que je veux dire, on utilise $\tan(\theta) = -\tan(\pi - \theta)$, et on efface les signes par élévation au carré.

On a donc cette fois $\boxed{\sum_{k=0}^{7} \tan^2(k.\pi/7) = 42}$

**DS01** • Irrationnalité de $\cos(\pi/7)$. • MPSI 2/2013

On suppose donc que $\cos(\pi/7)$ s'écrit $p/q$. Or, il est racine du premier polynôme annulateur de l'énoncé : $8.X^3 - 4.X^2 - 4.X + 1$. On a donc : $8.\left(\dfrac{p}{q}\right)^3 - 4.\left(\dfrac{p}{q}\right)^2 - 4.\left(\dfrac{p}{q}\right) + 1$. On multiplie tout par $q^3$ qui est non nul, et on a $8.p^3 - 4.p^2.q - 4.p.q^2 + q^3 = 0$.
On bascule : $8.p^3 = 4.p^2.q + 4.p.q^2 - q^3 = q.(4.p^2 + 4.p.q - q^2)$. Le second membre est un multiple de $q$ puisque $(4.p^2 + 4.p.q - q^2)$ est entier.
Le premier membre l'est donc aussi.
Mais comme $p$ et $q$ sont premier entre eux (aucun diviseur commun sinon la fraction serait réductible),

c'est donc que tous les facteurs de $q$ sont dans l'entier 8.
On reformule : $q$ divise 8.
Ceci ne nous laisse guère de choix : $q$ vaut 1, 2, 4 ou 8.

Dans le même temps, $q^3 = -8.p^3 + 4.p^2.q + 4.p.q^2 = p.(4.p.q + 4.q^2 - 8.p^2)$. L'entier $q^3$ est donc un multiple de $p$. Or, $p$ et $q$ n'ont aucun facteur commun. Donc $p$ et $q^3$ ne devraient avoir aucun facteur commun. C'est donc que $p$ doit diviser 1. La seule solution est $p = 1$ *(au signe près)*.
On peut dire aussi que si $k$ est un facteur premier qui divise $p$, il doit être présent dans $q^3$. Or, comme $p$ et $q$ sont premiers entre eux, $k$ est absent de $q$ et de $q^3$. La seule solution est donc $k = 1$ puis $p = 1$.

Les seuls rationnels possibles sont donc 1, 1/2, 1/4 et 1/8 ou leurs opposés.
On les teste un par un dans l'équation. Aucun n'est solution *(de toutes façons, aucun ne peut correspondre à $\cos(\pi/7)$, compris entre 1/2 et 1 strictement...)*.

Ce petit raisonnement par l'absurde se termine : $\cos(\pi/7)$ est irrationnel.

**DS01** • Travail avec $Q\Big(\dfrac{4+\sqrt{5}}{10}\Big)$ et $Q(5/8)$. • MPSI 2/2013

On calcule sans grande inventivité : $Q_\mu\Big(\dfrac{5}{8}\Big) = \dfrac{5^3}{8^2} + \dfrac{4.5^2}{8^2} - \dfrac{4.5}{8} - 1 = \dfrac{125 + 100 - 160 - 64}{8^2} = \dfrac{1}{64}$ (c'est peu !)
Plus lourd : $\Big(\frac{4+\sqrt{5}}{10}\Big)^3 = \frac{124+53.\sqrt{5}}{1000}$, $\Big(\frac{4+\sqrt{5}}{10}\Big)^2 = \frac{210+80.\sqrt{5}}{1000}$ et ainsi de suite jusqu'à $Q_\mu\Big(\dfrac{4+\sqrt{5}}{10}\Big) = \dfrac{43.\sqrt{5} - 96}{125}$.
Ce nombre est il positif, négatif ? Et est il "grand" ou "petit" ?
Par quantité conjuguée : $\dfrac{43.\sqrt{5} - 96}{125} = \dfrac{43^2.5 - 96^2}{125.(43.\sqrt{5} + 96)} = \dfrac{29}{125.(43.\sqrt{5} + 96)}$.
On a donc $Q_\mu\Big(\dfrac{4+\sqrt{5}}{10}\Big) > 0$.
On a aussi $Q_\mu\Big(\dfrac{4+\sqrt{5}}{10}\Big) \leqslant \frac{30}{125.(100+100)} \leqslant \dfrac{1}{800}$. Ce réel est vraiment très petit...

---

On dérive une fois ou deux : $Q'_\mu = 24.X^2 + 8.X - 4$, $Q_\mu" = 48.X + 8$.
$Q_\mu"$ est positive sur notre intervalle. Donc, $Q'_\mu$ est croissante.
Or, en 1/2, $Q'_\mu$ vaut 6 et est positif. Par croissance, $Q'_\mu$ est positive sur $[1/2, \sqrt{2}/2]$.
Par théorème, $Q_\mu$ est croissante sur $[1/2, \sqrt{2}/2]$.
Or, $Q_\mu(1/2)$ vaut $-1$ et est négatif.
De même, $Q_\mu(\sqrt{2}/2)$ vaut 1 (étonnant, non ?) et est positif.

On affine : $Q_\mu$ est croissante et change de signe sur $[1/2, \sqrt{2}/2]$.
De plus, on a calculé et comparé s'il le fallait : $0 \leqslant Q_\mu(\alpha) \leqslant Q_\mu(5/8)$.
On précise même : $Q_\mu(\cos(2.\pi/7)) = 0 \leqslant Q_\mu(\alpha) \leqslant Q_\mu(5/8)$.
Comme les trois réels sont "visiblement" entre 1/2 (c'est $\cos(\pi/3)$) et $\sqrt{2}/2$ (c'est $\cos(\pi/4)$), on a, par croissance de $Q_\mu$ (ou de sa fonction réciproque locale" : $\cos(2.\pi/7) \leqslant \alpha \leqslant 5/8$.
On redit ce qu'on a dit et prouvé sur cet intervalle d'étude :

$$\boxed{\frac{1}{2} \leqslant \cos\Big(\frac{2.\pi}{7}\Big) \leqslant \alpha \leqslant \frac{5}{8} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

---

Pour affiner ce résultat et savoir avec quelle précision on calcule $\cos(2.\pi/7)$ en prenant $\alpha$, on suit le

raisonnement indiqué dans le sujet :
$Q_\mu(\alpha) = Q_\mu(\alpha) - Q_\mu(\cos(2.\pi/7))$ car $\cos(2.\pi/7)$ est racine du polynôme ;
$\dfrac{1}{800} \geqslant Q_\mu(\alpha) = Q_\mu(\alpha) - Q_\mu(\cos(2.\pi/7))$ en reprenant un calcul déjà fait
$\dfrac{1}{800} \geqslant Q_\mu(\alpha) - Q_\mu(\cos(2.\pi/7)) = \displaystyle\int_{\cos(2.\pi/7)}^{\alpha} Q'_\mu$ en utilisant $F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b F'(t).dt$
$\dfrac{1}{800} \geqslant Q_\mu(\alpha) - Q_\mu(\cos(2.\pi/7)) \geqslant (\alpha - \cos(2.\pi/7)).Q'(1/2)$ en regardant l'intégrale comme une aire et en minimisant $Q'_\mu$ par sa valeur en $1/2$ qui est 6.

---

On divise par 6 : la différence $\alpha - \cos(2.\pi/7)$ est positive, mais plus petite que $\dfrac{1}{6.800}$. On majore encore, et on a donc bien $0 \leqslant \alpha - \cos(2.\pi/7) \leqslant 1/4800 \leqslant 10^{-3}$.

| MPSI 2/2013 | 62 points | *DS*01 |
|---|---|---|

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Vendredi 4 octobre | $DS02$ |
|---|---|---|

## MPSI 2/2013 — EXERCICES — $DS02$

◇3 Prouvez par récurrence sur $n$ : $\prod_{k=1}^{n}(k^k).k! = (n!)^{n+1}$. •2 pt.•

Un élève propose la démonstration visuelle suivante :

| **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | **2** | **3** | **4** | **5** |
| 1 | 2 | **3** | **4** | **5** |
| 1 | 2 | 3 | **4** | **5** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | **5** |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

Expliquez. •2 pt.•

---

♣4 On pose : $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Déterminez le cardinal de $\{(x, y, z) \in E^3 | x \neq y \neq z\}$. •2 pt.• Déterminez le nombre triplets faits de trois éléments distincts de $E$. •1 pt.•

---

♡1 L'application $2.\cos^6 + 2.\sin^6 - 3.(\cos^4 + \sin^4)$ est facile à représenter graphiquement une fois qu'on a simplifié. Alors faites le ! •3 pt.•

---

◇4 Calculez $Arccos(\sin(123.\pi/17))$. •2 pt.•

---

♡2 Rappelez la définition de "$f$ est injective de $E$ dans $F$". •1 pt.• Démontrez que $(a, b) \longmapsto (a^2 + 3.b, 2.a^2 + 5.b)$ est une application injective de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$ (n'oubliez rien...). •2 pt.• Est elle surjective de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}^2$ ? •1 pt.•

57 points — 57 points

## MPSI 2/2013 — ARITHMÉTIQUE — $DS02$

On pose : $A = \{2.a^2 + 3.b^2 | (a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{\alpha^2 + 6.\beta^2 | (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2\}$.

♠2 Déterminer $A \cap [0, 30]$ et $B \cap [0, 30]$. •3 pt.•

♠3 Montrez, pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $n \in A \Leftrightarrow 2.n \in B$. *(pour un des deux sens, vous pourrez déjà démontrer que $\alpha$ est pair si vous prenez les mêmes notations que moi).* •3 pt.•

♠4 Montrez aussi $n \in B \Leftrightarrow 2.n \in A$. •2 pt.•

---

♠5 Montrez que pour tout $\alpha$ de $\mathbb{N}$, l'entier $\alpha^2$ est congru 0, 1 ou 4 modulo 8 *(pour ceux qui n'ont pas pris Spé Maths l'an dernier, écrivez $\alpha$ sous la forme $4.q + r$ avec $r$ entier entre 0 et 3).* •2 pt.•

♠6 Déduisez que 2013 n'est pas dans $B$. •2 pt.•

---

♠7 Développez pour $(a, b, c, d)$ dans $\mathbb{R}^4$ $(a.c+6.b.d)^2+6.(b.c-a.d)^2$ ainsi que $(a^2+6.b^2).(c^2+6.d^2)$. Déduisez que $B$ est stable par multiplication. •3 pt.•

♠8 Montrez similairement que pour tout couple $(p, q)$ de $A \times A$, l'entier $p.q$ est dans $B$. •3 pt.•

♠9 Montrez enfin que pour tout couple $(p, q)$ de $A \times B$, l'entier $p.q$ est dans $A$ (indication : calculez $|\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}.b|^2.|\alpha + i.\sqrt{6}.\beta|^2$ et $\left|(\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}.b).(\alpha + i.\sqrt{6}.\beta)\right|^2$). •3 pt.•

.../...

♠10 On veut montrer que 2013 n'est pas dans $A$.
Montrez que si 2013 était de la forme $2.a^2 + 3.b^2$ alors $a$ et $b$ seraient impairs. •2 pt.•
Déduisez alors que 502 serait de la forme $2.p.(p+1) + 3.q.(q+1)$. •1 pt.•
Montrez que $3.q.(q+1)$ est toujours multiple de 6. •1 pt.•
Déduisez que $p$ est d'une des deux formes suivantes : $6.k+1$ ou $6.k+4$. •2 pt.•
Terminez le raisonnement : 2013 n'est pas dans $A$. •3 pt.•

---

♠11 Bonus : écrivez un programme Python ou un organigramme qui teste si un entier (pas trop grand) est dans $A$. •4 pt.•

34 points — 34 points

| MPSI 2/2013 | **Arctan(1/2)** | $DS02$ |
|---|---|---|

VII- 1) Dans tout l'exercice qui suit, on note $\alpha$ l'angle $Arctan(1/2)$. Montrez : $\frac{\pi}{8}\alpha \leqslant \frac{\pi}{6}$. •2 pt.•

VII- 2) Calculez $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$. •2 pt.•

---

VIII- 1) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on note : $t_n = \tan(n.\alpha)$ *(sans se poser pour l'instant de question sur l'existence).* Calculez $t_n$ pour $n$ de 0 à 4. •2 pt.•

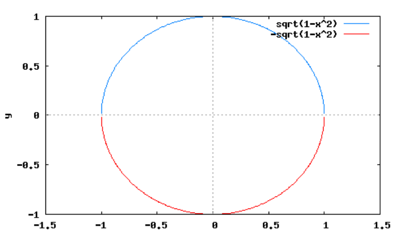
VIII- 2) Trouvez l'application $f$ vérifiant $\forall\ n \in \mathbb{N},\ t_{n+1} = f(t_n)$. Montrez que chaque $t_n$ (si il existe) est bien rationnel. •2 pt.• Calculez $\tan(\alpha/2)$ et montrez qu'elle n'est pas rationnelle. •1 pt.• Montrez que $\tan(\alpha/4)$ n'est pas rationnelle. •1 pt.•

VIII- 3) Trouvez les deux solutions $s$ et $s'$ de l'équation $f(x) = x$ *(dans $\mathbb{C}$ s'il le faut).* •1 pt.• On pose alors $v_n = \frac{t_n - s}{t_n - s'}$ [1]. Montrez que $v$ est une suite géométrique dont vous préciserez la raison. •2 pt.•

VIII- 4) Calculez alors $v_n$ et $t_n$ pour tout $n$. •2 pt.•

---

IX- 1) Pour tout $n$, on pose $a_n = (3+4.i)^n$. Montrez pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $\Re e(a_n) = 3 \quad mod \quad 5$ et $\Im m(a_n) = 4 \quad mod \quad 5$. •2 pt.•
IX- 2) Déduisez pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $5^n - (3+4.i)^n \neq 0$ et $5^n + (3+4.i)^n \neq 0$. •2 pt.•
IX- 3) Déduisez que $\alpha$ n'est pas de la forme $\frac{p.\pi}{q}$ avec $p$ et $q$ entiers. •2 pt.• Vous définissez les points d'affixes $z_n = e^{i.n.\alpha}$ et vous les reliez les uns après les autres...Le polygône (éventuellement étoilé) se referme-t-il ? •2 pt.•




19 points — 19 points

| MPSI 2/2013 | 131 points | $DS02$ |
|---|---|---|

[1](je sais, il y a deux possibilités suivant qui vous prenez pour $s$ et qui vous prenez pour $s'$, je corrigerai votre copie en tenant compte du choix que vous aurez fait, qui peut remplacer $v_n$ par $1/v_n$)

**DS02** • La formule $\prod_{k=1}^{n}(k^k).k! = (n!)^{n+1}$. • MPSI 2/2013

Pour tout entier naturel $n$, on note $P_n$ la proposition $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k^k).k! = (n!)^{n+1}$ qui dépend bien de $n$ et nullement de $k$ ($k$ est la variable muette qui bouge de 1 à $n$).

On valide $P_1$ et $P_2$ : $\displaystyle\prod_{k=1}^{1}(k^k).k! = 1^1.1 = 1!^2$ et ensuite $\displaystyle\prod_{k=1}^{2}(k^k).k! = (1^1.1).(2^2.2) = 2^3 = (2!)^3$.

On suppose ensuite, pour un $n$ donné : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k^k).k! = (n!)^{n+1}$.

On a alors pour objectif : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k^k).k! = ((n+1)!)^{n+2}$.

Justement, on calcule : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k^k).k! = \Big(\prod_{k=1}^{n}(k^k).k!\Big).\Big((n+1)^{n+1}.(n+1)!\Big)$.

Par hypothèse de récurrence, ceci devient $\displaystyle\prod_{k=1}^{n+1}(k^k).k! = (n!)^{n+1}.(n+1)^{n+1}.(n+1)!$.

On regroupe les deux termes d'exposant $n+1$ en $\big(n!.(n+1)\big)^{n+1}$ qui devient $((n+1)!)^{n+1}$.
On le multiplie encore par un nouveau facteur $n+1$ et on aboutit à $((n+1)!)^{n+2}$.
C'est ce que l'on souhaitait. On a donc établi $P_n \Rightarrow P_{n+1}$ pour tout $n$. L'hérédité s'achève, et le résultat est établi par récurrence.

---

On doit ensuite rédiger la démonstration visuelle de l'élève, et déjà la comprendre.
Le grand tableau sera en toute généralité fait de $n+1$ lignes et $n$ colonnes. Toutes les lignes sont identiques : $1, 2, 3, \ldots n$.
Le produit de tous les éléments du tableau vaut $n!$ pour chaque ligne, et comme il y a $n+1$ lignes, le grand produit de toutes les cases vaut $(n!)^{n+1}$.
C'est bon signe.

Reste à retrouver $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(k!).k^k$ dans ce produit de tous les termes.

On doit pour ce faire découper le tableau d'une manière plus intelligente. Visuellement, on découpe avec des équerres de cette forme :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| . | . | . | **4** | . |
| . | . | . | **4** | . |
| . | . | . | **4** | . |
| . | . | . | **4** | . |
| 1 | 2 | 3 | 4 | . |
| . | . | . | . | . |

Pour être précis :
• la ligne $k+1$ de la colonne 1 à la colonne $k$
• la colonne $k$ de la ligne 1 à la ligne $k$

Le produit en ligne va donner $k!$. Le produit en colonne vaut $k^k$.
On a donc le produit des $(k!).(k^k)$ pour $k$ de 1 à $n$.

Ayant calculé de deux façons le même produit, il y a égalité des deux quantités.

**DS02** • Dénombrement de $\{(x,y,z)\in E^3 | x\neq y\neq z\}$. • MPSI 2/2013

Si on a le courage, on donne déjà la liste de tous les éléments de $E^3$. Il y en a $4^3$ (quatre choix pour $x$, quatre pour $y$ et quatre pour $z$, tous indépendants).
Il reste à en exclure quelques uns. Ceux pour lesquels on a $x = y$ ou $y = z$. On doit donc exclure les $(y,y,z)$ (il y en a $4^2$), mais aussi les $(x,y,y)$. Pour ceux là, on choisit $x$ avec quatre choix puis $y$ avec quatre choix aussi.
On aboutit (à tort) à $4^3 - 4^2 - 4^2$.
En effet, on n'a pas fini, car de cette façon, on a exclu deux fois les éléments de la forme $(y,y,y)$ (une fois par $(y,y,z)$ avec $z = y$ et une fois par $(x,y,y)$ avec $x = y$). On en a exactement 4 dont la liste peut être donnée (c'est utile ?).
Bilan : $4^3 - 2.4^2 + 4$, et on trouve $\boxed{36}$

---

*Autre approche, par arbre.*
On a quatre choix pour $x$. Pour chacun d'entre eux, il reste trois choix pour $y$ *(puisqu'il n'a pas le droit d'être égal à $x$)*. On en est à un arbre à douze branches. Mais ensuite, il faut choisir $z$, différent de $y$ *(et $x$ n'a aucun effet)*, d'où trois choix encore.
Total : 4.3.3, ce qui fait encore 36.

*On accepte donc ici par exemple $(1,3,1)$ puisqu'on a $1\neq 3\neq 1$.*

---

Si on veut trois éléments $x$, $y$ et $z$ tous distincts, c'est encore un arbre qui permet de conclure :
• quatre choix pour $x$
• trois choix pour $y$, différent de $x$
• deux choix pour $z$ différent de $x$ et de $y$.
On aboutit à 4.3.2 c'est à dire $\boxed{24}$
*On a du exclure des éléments comme $(1,3,1)$ déjà cité tout à l'heure.*

Cet exercice a pour objectif de vous inviter à écrire "*tous différents*" quand vous voulez parler d'éléments tous différents, plutôt que de bricoler des formules pseudo-mathématiques sans aucun doutes fausses.
On cite au passage : le symbole $=$ est transitif, ce que n'est pas le symbole $\neq$. En effet, $(a\neq b \text{ et } b\neq c)$ n'entraine pas $a\neq c$.

**DS02** • L'application $2.\cos^6 + 2.\sin^6 - 3.(\cos^4 + \sin^4)$. • MPSI 2/2013

Cette application n'est pas très jolie à première vue. Mais on peut espérer une simplification.
On la calcule en quelques points pour avoir une idée. Que ce soit en 0, en $\pi/6$, en $\pi/4$, on trouve $-1$. Il est inutile de chercher e $\pi/3$ et $\pi/2$ par symétrie des rôles. Et après, la périodicité et la parité permettent de conclure.
On se dit qu'on va prouver que cette fonction est constante égale à $-1$.

On peut passer par les exponentielles complexes :
$$2.\Big(\frac{e^{i.t}+e^{-i.t}}{2}\Big)^6 + 2.\Big(\frac{e^{i.t}-e^{-i.t}}{2.i}\Big)^6 - 3.2.\Big(\frac{e^{i.t}+e^{-i.t}}{2}\Big)^4 - 3.2.\Big(\frac{e^{i.t}-e^{-i.t}}{2.i}\Big)^4$$
On remplace $i^6$ par $-1$ et $i^4$ par 1, on développe par la formule du binôme, les termes en exposant négatif se simplifient deux à deux, et au final, il ne reste que $-1$.

On peut aussi poser $\cos^2 = c^2$ et $\sin^2 = (1-c^2)$, puis remplacer et développer. Au final, dans $4.c^6 + 4.(1-c^2)^3 - 3.(c^4 + (1-c^2)^2)$ les $c^6$ s'en vont, de même que les $c^4$ et les $c^2$.

On peut aussi dériver, simplifier au maximum la dérivée après factorisation par $12.s.c$ et trouver 0. On remonte sur une fonction constante dont la valeur est connue en 0.

**DS02** • Le réel $Arccos(\sin(123.\pi/17))$. • MPSI 2/2013

Le sinus existe, il est entre $-1$ et 1 *(on ne sait pas trop où)*, on peut donc l'asimiler à une longueur, et calculer son arcsinus.

Mais ce qu'on sait simplifier, c'est $Arccos(\cos(\theta))$ *(et encore, pour $\theta$ entre 0 et $\pi$)*.

On va dnc se ramener dans un intervalle moins lointain, par péridicité : $\sin\left(\frac{123.\pi}{17}\right) = \sin\left(7.\pi + \frac{4.\pi}{17}\right) = -\sin\left(\frac{4.\pi}{17}\right)$ *(les multiples de $2.\pi$ s'en vont, et l'addition de $\pi$ crée un déphasage d'un demi tour, d'où le signe moins)*.

On doit encore en faire un cosinus, par la formule $\cos(\theta + \pi/2) = -\sin(\theta)$ : $\sin\left(\frac{123.\pi}{17}\right) = \cos\left(\frac{25.\pi}{34}\right)$.

La mesure angulaire étant entre 0 et $\pi$, on peut écrire sans crainte

$$\boxed{Arccos\Big(\sin\left(\frac{123.\pi}{17}\right)\Big) = Arccos\Big(\cos\left(\frac{25.\pi}{34}\right)\Big) = \frac{25.\pi}{17}}$$

**DS02** • L'application $(a, b) \longmapsto (a^2 + 3.b, 2.a^2 + 5.b)$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}^2$. • MPSI 2/2013

L'injectivité de $f$ de $E$ dans $F$, c'est $\forall\ (x, y) \in E^2,\ \big((f(x) = f(y)) \Rightarrow (x = y)\big)$.

On prend ici deux couples de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ : $(a, b)$ et $(\alpha, \beta)$. On suppose qu'ils ont la même image : $\left\{\begin{array}{ccccc} a^2 & +3.b & = & \alpha^2 & +3.\beta \\ 2.a^2 & +5.b & = & 2.\alpha^2 & +5.\beta \end{array}\right\}$. L'objectif est $a = \alpha$ et $b = \beta$ *(égalité des couples)*.

On effectue une combinaison *(condition nécessaire)* : $2.(ligne\ 1) - ligne\ 2$ et il reste $b = \beta$.

On reporte dans la première égalité, on simplifie : $a^2 = \alpha^2$. On déduit $a = \alpha$ ou $a = -\alpha$. Mais comme $a$ et $\alpha$ sont positifs *(dans $\mathbb{N}$)*, la seule solution est $a = \alpha$.

L'injectvité est prouvée.

---

La surjectivité n'est pas acquise, car par exemple $(1, 1)$ n'a pas d'antécédent. On le prouve par l'absurde :

le seul antécédent possible $(a, b)$ de $(1, 1)$ devrait vérifier $\left\{\begin{array}{cccc} a^2 & +3.b & = & 1 \\ 2.a^2 & +5.b & = & 1 \end{array}\right\}$. Par combinaisons $(2.L_1 - L_2)$, on arrive à $b = 1$ puis en reportant : $a^2 = -2$. Et là, franchement, j'ai un doute...

---

**DS02** • $A = \{2.a^2 + 3.b^2 | (a, b) \in \mathbb{N}^2\}$ et $B = \{2.\alpha^2 + 3.\beta^2 | (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2\}$. • MPSI 2/2013

*Ces deux ensembles sont formés d'entiers plus ou moins étranges.* Pour en dresser la liste des premiers éléments, on fait varier $a$ et $b$ entre 0 et 5, tout en sachant qu'on va déborder de l'intervalle $[0, 30]$. On ne garde donc que les éléments plus petits que 30 (en ne remplissant pas les cases inutiles) :

| $2.a^2 + 3.b^2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 8 | 18 | * | * | * |
| 1 | 3 | 5 | 11 | 21 | * | * | * |
| 2 | 12 | 14 | 20 | 30 | * | * | * |
| 3 | 27 | 29 | * | * | * | * | * |
| 4 | * | * | * | * | * | * | * |
| 5 | * | * | * | * | * | * | * |
| 6 | * | * | * | * | * | * | * |

puis

| $a^2 + 6.b^2$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | * |
| 1 | 6 | 7 | 10 | 15 | 22 | * | * |
| 2 | 24 | 25 | 28 | * | * | * | * |
| 3 | * | * | * | * | * | * | * |
| 4 | * | * | * | * | * | * | * |
| 5 | * | * | * | * | * | * | * |
| 6 | * | * | * | * | * | * | * |

On dresse le bilan : $\boxed{\begin{array}{l} A = \{0,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 11,\ 12,\ 14,\ 18,\ 20,\ 21,\ 27,\ 29,\ 30, \ldots\} \\ \text{et } B = \{0,\ 1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 15,\ 16,\ 22,\ 24,\ 25,\ 28, \ldots\} \end{array}}$

On est sûr de n'avoir rien oublié par ce crible systématique $(2.a^2 + 3.b^2 \leqslant 30 \Rightarrow (a \leqslant 6\ et\ b \leqslant 6)$. On ne trouve rien de particulier à première vue.

**DS02** • Equivalence $n \in A \Leftrightarrow 2.n \in B$. • MPSI 2/2013

*On commence par le sens $n \in A \;\Rightarrow\; 2.n \in B$.*
On prend donc un élément $n$ dans $A$. On l'écrit $2.a^2 + 3.b^2$ avec ma et $b$ entiers, c'est tout ce qu'on peut dire sur lui. L'objectif est d'écrire $2.n$ sous la forme $\alpha^2 + 6.\beta^2$.
Or, on a : $2.n = 4.a^2 + 6.b^2 = (2.a)^2 + 6.b^2$.
On pose alors $\alpha = 2.a$ (entier) et $\beta = b$ (entier) et $2.n$ est bien dans $B$.

*Pour ceux qui savent déjà manipuler les matrices :* $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

---

Cette fois, on suppose que $2.n$ est de la forme $\alpha^2 + 6.\beta^2$ *(et on veut écrire $n$ sous la forme $2.a^2 + 3.b^2$ avec $a$ et $b$ entiers à déterminer).*
Mais on peut alors écrire : $\alpha^2 = 2.n - 6.\beta^2$. On en déduit que $\alpha^2$ est pair. On déduit alors par élimination que $\alpha$ ne peut pas être impair (le carré d'un impair est impair : $(2.k+1)^2 = 2.(2.k^2 + 2.k) + 1$), et est donc pair.
En tant qu'entier pair, il s'écrit $2.\gamma$ pour un certain entier $\gamma$.
On reporte : $2.n = (2.\gamma)^2 + 6.\beta^2$. On simplifie par 2 : $n = 2.\gamma^2 + 3.\beta^2$. Le couple $(a, b)$ cherché est donc de la forme $(\gamma, \beta)$.

*On notera que ce résultat ne dit rien sur les éléments impairs de $B$.*
*En revanche, il nous renseigne sur les éléments pairs de $B$. Il faut et il suffit que leur moitié soit dans $A$. Ceci se voit sur les listes des premiers éléments de $A$ et $B$. par exemple, avec 2, 3, 5, 8 et 11 dans $A$, on trouve 4, 6, 10, 16 et 22 dans $B$.*
*Les élèves qui auront trouvé des ensembles $A$ et $B$ ne réponsant pas à ce critère (alors même qu'ils l'auront démontré) risqueront de se voir sanctionnés pour incohérence.*

*Remarque : les élèves prenant le mini-problème de haut pourront traiter d'abors les questions de stabilité $(p, q) \in A \times A \;\Rightarrow\; p.q \in B$ et se débarasser ensuite de cette petite question en notant $2 \in A$.*

**DS02** • Equivalence $n \in B \Leftrightarrow 2.n \in A$. • MPSI 2/2013

*On a encore deux sens. La rédaction pourra être allégée.*
On prend $n$ dans $B$ et on l'écrit $\alpha^2 + 6.\beta^2$. On calcule alors :
$2.n = 2.\alpha^2 + 12.\beta^2 = 2.\alpha^2 + 3.(2.\beta)^2$ et c'est fini : $2.n$ est dans $A$.

---

Réciproquement, on prend $n$ tel que $2.n$ s'écrive $2.a^2 + 3.b^2$.
On constate que $3.b^2$ est donc pair (c'est $2.(n - a^2)$).
Là encore, c'est par élimination qu'on déduit que $b$ ne peut pas être impair et est donc pair. On l'écrit $b = 2.\beta$ et on reporte : $2.n = 2.a^2 + 3.(2.\beta)^2$. On simplifie : $n = a^2 + 6.\beta^2$ et on reconnaît : $n \in B$.

*Remarque : en mettant en boucle les deux résultats précédents, on a : $(n \in A) \;\Rightarrow\; (2.n \in B) \;\Rightarrow\; (4.n \in A)$. Mais je vais bien considérer que ce n'est pas un scoop : $4.n = 2.(2.a)^2 + 3.(2.b)^2$.*

**DS02** • Congruences modulo 8. • MPSI 2/2013

On prend un entier naturel $a$. Son reste de division par 4 est un entier entre 0 inclus et 4 exclu. On a donc quatre congruences possibles. Pour chacune, on développe le carré puis on le réduit modulo 8. Le caractère répétitif de la méthode conduit tout naturellement à dresser un tableau. Enfin, ça devrait vous sembler naturel, pour la communication, si vous voulez devenir ingénieur ou professeur.

| $n$ | $4.q+0$ | $4.q+1$ | $4.q+2$ | $4.q+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | $16.q^2$ | $16.q^2+8.q+1$ | $16.q^2+16.q+4$ | $16.q^2+24.q+9$ |
| $n^2 \quad mod \quad 8$ | 0 | 1 | 4 | 1 |

On voit donc bien que ce carré modulo 8 ne peut valoir que 0, 1 ou 4.

---

C'est encore avec un tableau que l'on rédige la question des valeurs de $2.a^2+3.b^2$ et $a^2+6.b^2$ modulo 8 *(sachant que l'addition et la multiplication sont compatibles avec les congruences)* :

| $2.a^2+3.b^2$ | 0 | 1 | 4 | $\leftarrow a^2 \quad mod \quad 8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 0 | |
| 1 | 3 | 5 | 3 | |
| 4 | 4 | 6 | 4 | |
| $b^2 \quad mod \quad 8 \uparrow$ | | | | |

et

| $a^2+6.b^2$ | 0 | 1 | 4 | $\leftarrow a^2 \quad mod \quad 8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 4 | |
| 1 | 6 | 7 | 2 | |
| 4 | 0 | 1 | 4 | |
| $b^2 \quad mod \quad 8 \uparrow$ | | | | |

On voit que les éléments de $B$ sont donc congrus à 0, 1, 2, 4, 6 ou 7 modulo 8.
Or, 2013 est congru à 5 modulo 8 (c'est $251.8+5$).
Il ne peut donc pas être dans $B$.

*Remarque : la valeur 5 fait partie de la liste des valeurs autorisées pour être dans $A$. Mais ceci ne prouve pas du tout que 2013 soit dans $A$. Peut être même que c'est un autre critère de congruence qui va l'éliminer.*

**DS02** • Stabilité multiplicative de $B$. • MPSI 2/2013

On développe comme demandé :
$(a.c+6.b.d)^2+6.(b.c-a.d)^2 = a^2c^2+6.b^2.c^2+6.a^2.d^2+36.b^2.d^2$
$(a^2+6.b^2).(c^2+6.d^2) = a^2c^2+6.b^2.c^2+6.a^2.d^2+36.b^2.d^2$
On trouve deux fois la même quantité.

---

On prend deux éléments de $B$ qu'on nomme $p$ et $q$ et qu'on écrit $a^2+6.b^2$ et $c^2+6.d^2$.
Leur produit est alors, en vertu des lignes ci dessus :
$p.q = (a^2+6.b^2).(c^2+6.d^2) = (a.c+6.b.d)^2+6.(b.c+a.d)^2$.
Quitte à poser $\alpha = a.c+6.b.d$ et $\beta = |b.c-a.d|$, l'entier $p.q$ est de la forme $\alpha^2+6.\beta^2$ et est dans $B$.

**DS02** • "Anti-stabilité" de $A$. • MPSI 2/2013

On prend $p$ et $q$ cette fois ci de la forme $2.a^2+3.b^2$ et $2.c^2+3.d^2$. Leur produit est :
$p.q = 4.a^2.c^2+6.a^2.d^2+6.b^2.c^2+9.b^2.d^2$.
On voudrait l'écrire $\alpha^2+6.\beta^2$ avec $\alpha$ et $\beta$ à bien choisir.
On sent venir une chose comme $\alpha^2 = (2.a.c\pm\ldots)^2$ pour avoir le bon compte de $a^2.c^2$ et $\beta^2 = (a.d+b.c)^2$.
Dans $6.\beta^2$, on a $12.a.b.c.d$ en trop, et c'est avec $\alpha^2 = (2.a.c-3.b.d)^2$ qu'on les compense.
On rédige alors en posant : $\alpha = |2.a.c-3.b.d|$ et $\beta = a.d+b.c$ et on vérifie bien : $p.q = \alpha^2+6.\beta^2$.
Le produit $p.q$ est dans $B$.

*Remarque : on pouvait aussi prendre $\alpha = 2.a.c+3.b.d$ et $\beta = |a.d-b.c|$, simple histoire de passage au conjugué dans les formules qui vont venir.*

**DS02** • Stabilité croisée de $A$ et $B$. • MPSI 2/2013

*On va aboutir au tableau suivant :*

| | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| $A$ | $B$ | $A$ |
| $B$ | $A$ | $B$ |

.

On prend cette fois deux éléments $p$ et $q$ d'écritures respectives $2.a^2+3.b^2$ et $\alpha^2+6.\beta^2$. Leur produit est $p.q = 2.a^2.\alpha^2+3.\alpha^2.b^2+12.a^2.\beta^2+18.b^2.\beta^2$.
On veut le mettre sous une forme $2.c^2+3.d^2$. On peut tâtonner un peu comme ci dessus avec

$2.(a.\alpha \pm \ldots)^2 + 3.(b.\alpha \pm \ldots)^2$.
On peut aussi suivre le détour astucieux par le plan complexe :
• $p$ est le carré du module de $\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}.b$
• $q$ est le carré du module de $\alpha + i.\sqrt{6}.\beta$
• $p.q$ est le produit du carré des modules, donc ...
• $p.q$ est le carré du module du produit $(\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}.b).(\alpha + i.\sqrt{6}.\beta)$
Or, précisément : $(\sqrt{2}.a + i.\sqrt{3}.b).(\alpha + i.\sqrt{6}.\beta) = \sqrt{2}.(a.\alpha - 3.b.\beta) + i.\sqrt{3}.(b.\alpha + 2.a.\beta)$.
On a donc tout naturellement alors : $p.q = 2.(a.\alpha - 3.b.\beta)^2 + 3.(b.\alpha + 2.a.\beta)^2$.
On tient nos deux entiers $c$ et $d$ pour écrire $p.q = 2.c^2 + 3.d^2$.

*Remarque : ce détour par les complexes pouvait aussi guider par exemple pour la stabilité de $B$ : $(a+i.\sqrt{6}.b).(c+i.\sqrt{6}.d)$.*

**DS02** • Non appartenance de 2013 à $A$. • MPSI 2/2013

On suppose donc que 2013 s'écrit $2.a^2 + 3.b^2$ avec $a$ et $b$ entiers.

On ressort le tableau

| $2.a^2+3.b^2$ | 0 | 1 | 4 | $\leftarrow a^2 \quad mod \quad 8$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 2 | 0 | |
| 1 | 3 | 5 | 3 | |
| 4 | 4 | 6 | 4 | |
| $b^2 \quad mod \quad 8 \uparrow$ | | | | |

Or, 2013 est congru à 5 modulo 8 (c'est $251 \times 8 + 5$). La seule cas possible est donc $a^2 = 1 \quad mod \quad 8$ et $b^2 = 1 \quad mod \quad 8$.

On remonte donc à

| $n$ | $4.q+0$ | $4.q+1$ | $4.q+2$ | $4.q+3$ |
|---|---|---|---|---|
| $n^2$ | $16.q^2$ | $16.q^2+8.q+1$ | $16.q^2+16.q+4$ | $16.q^2+24.q+9$ |
| $n^2 \quad mod \quad 8$ | 0 | 1 | 4 | 1 |

On déduit que $a$ (ainsi que $b$) est d'une des deux formes $4.q+1$ ou $4.q+3$. Bref, il est impair, et $b$ aussi.

---

Comme $a$ est impair, on l'écrit $2.p+1$, "de même" pour $b$ qu'on écrit $2.q+1$. On remporte alors : $2.(2.p+1)^2 + 3.(2.q+1)^2 = 2013$.
On simplifie $8.p^2 + 8.p + 2 + 12.q^2 + 12.q + 3 = 2013$. On efface 5 de chaque côté et on divise justement par 4 : $2.p^2 + 2.p + 3.q^2 + 3.q = 502$.

---

On regarde ensuite les quantités comme $p.(p+1)$ suivant la valeur de $p$ modulo 6 :

| $p \quad mod \quad 6$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p+1 \quad mod \quad 6$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| $p.(p+1) \quad mod \quad 6$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |

Le nombre "quasi-triangulaire" $p.(p+1)$ vaut 0 ou 2 modulo 6.
En multipliant par 3, on a toujours un multiple de 6.

*Plus intelligent : $\dfrac{p.(p+1)}{2}$ est entier (c'est $1+2+\ldots+p$). On multiplie par 6 et on a un multiple de 6.*

---

On repart de $2.p^2 + 2.p + 3.q^2 + 3.q = 512$ qu'on étudie modulo 6 : $2.p^2 + 2.p + 0 = 4 \quad mod \quad 6$.

On déduit que $p.(p+1)$ ne peut pas être égal à 0 modulo 6.

On relit le tableau

| $p \quad mod \quad 6$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p+1 \quad mod \quad 6$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| $p.(p+1) \quad mod \quad 6$ | 0 | 2 | 0 | 0 | 2 | 0 |

et on déduit que $p$ est congru à 1 ou 4 modulo 6.

C'est ce qu'on demande : de la forme $6.k+1$ ou $6.k+4$.

---

On traite le premier cas : $p$ s'écrit $6.k+1$.
On reporte dans $2.p^2+2.p+3.q^2+3.q=512$ et on trouve après simplification $24.k^2+12.k+q.(q+1)=166$.
On majore alors tout de suite : $k$ est égal à 0, 1 ou 2.

On étudie cas par cas :

| $k$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| équation | $q^2+q=166$ | $q^2+q=130$ | $q^2+q=46$ |
| | $q$ non entier | $q$ non entier | $q$ non entier |

Cette voie ne conduit à rien. Il n'y a pas de solution.

---

On traite le premier cas : $p$ s'écrit $6.k+4$.
On reporte dans $2.p^2+2.p+3.q^2+3.q=512$ et on trouve après simplification $24.k^2+36.k+q.(q+1)=154$.
On étudie de même les trois valeurs possibles pour $k$. Aucune ne conduit à $q$ entier *(non détaillé ici)*.

Aucun des cas ne conduit à une solution.
Il n'y a pas de solution.
Le raisonnement par l'absurde se termine : 2013 ne peut pas être dans $A$.
*D'autres preuves étaient possibles. On peut d'ailleurs caractériser les éléments de $A$ et de $B$ en fonction de leur décomposition en produit de facteurs premiers.*

---

**DS02** • Premiers calculs sur $Arctan(1/2)$. • MPSI 2/2013

Cette mesure angulaire existe, caractérsée par $\tan(\alpha)=1/2$ et $-\pi/2<\alpha<\pi/2$.
Mais on peut ensuite majorer : $\frac{1}{2}\leqslant=\frac{\sqrt{3}}{3}=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$. On passae à l'arctangente *(croissante)* : $Arctan(1/2)\leqslant Arctan(\tan(\pi/6))=\pi/6$.
Au fait, on doit justifier $\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{3}}{3}$ en écrivant le produit en croix $3<2.\sqrt{3}$ qu'on justifie auparavant par élévation au carré : $9<12$.

C'est par un raisonnement du même type qu'on va justifier la majoration $\alpha>\frac{\pi}{8}$. Leurs tangentes valent $\frac{1}{2}$ et... $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$. Il faut donc ici connaître son cours : $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$ qui donne ici : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2}/2}{1+\sqrt{2}/2}=\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}.(2-\sqrt{2})}{(2)^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{2}-1$.
On calcule donc la différence $\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1=\frac{3-2.\sqrt{2}}{2}$ et cette fois, 3 l'emporte sur $2.\sqrt{2}$.

---

*Oui, ce que j'ai fait ici est du travail de cochon, puisque tout est rédigé à l'envers, dans le sens de la prospection.*
*La vraie rédaction sera celle ci :*
$9>8$ *donc* $3>2.\sqrt{2}$ *par passage à la racine sur ces réels positifs*
*on déduit* $\frac{1}{2}>\sqrt{2}-1$ *par calcul de la différence*
*or,* $\tan(\pi/8)$ *vaut* $\sqrt{2}-1$ *(par application de la formule* $\tan(x/2)=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$*)*
*on a donc* $\frac{1}{2}>\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *et on peut conclure* $\alpha>\pi/8$ *par croissance de l'arctangente sur* $\mathbb{R}$.

**DS02** • Calcul des premiers sinus, cosinus et tangentes. • MPSI 2/2013

On utilise la formule $\dfrac{1}{\cos^2} = 1+\tan^2$ *(Pythagore, c'est tout)* pour déduire : $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1+\dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4}$.
Comme $\alpha$ est dans $]0, \pi/2[$, son cosinus est positif, et on trouve donc : $\cos(\alpha) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.
*Oubliez l'argument de signe, et vous perdez les points...*
Par application de la formule de définition même $\sin = \tan.\cos$ on trouve : $\sin(\alpha)\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ qu'on écrira aussi $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

---

On développe ensuite : $\tan(2.\alpha) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4}{3}$.

On recommence : $\tan(3.\alpha) = \dfrac{\tan(2.\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(2.\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{\frac{4}{3}+\frac{1}{2}}{1-\dfrac{2}{3}} = \dfrac{11}{2}$.

On réitère : $\tan(4.\alpha) = \dfrac{\tan(3.\alpha)+\tan(\alpha)}{1-\tan(3.\alpha).\tan(\alpha)} = \dfrac{\frac{11}{2}+\frac{1}{2}}{1-\dfrac{11}{4}} = -\dfrac{24}{7}$ (ou par $\tan(2.(2.\alpha))$ si on préfère.

On résume :

| $\cos(\alpha)$ | $\sin(\alpha)$ | $\tan(0.\alpha)$ | $\tan(\alpha)$ | $\tan(2.\alpha)$ | $\tan(3.\alpha)$ | $\tan(4.\alpha)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $2/\sqrt{5}$ | $1/\sqrt{5}$ | $0$ | $1/2$ | $4/2$ | $11/2$ | $-24/7$ |

*Penserez vous enfin à présenter les choses de façon lisible et rapide avec des tableaux ?*

**DS02** • L'application d'itération $f$. • MPSI 2/2013

Par définition *(et généralisation de ce qu'on a compris ci dessus)* :
$t_{n+1} = \tan(n.\alpha+\alpha) = \dfrac{t_n+t_1}{1-t_n.t_1} = \dfrac{2.t_n+1}{2-t_n}$ en ayant multiplié numérateur et dénominateur par 2.
L'application $f$ est donc l'homographie $\boxed{x \longmapsto \frac{2.x+1}{2-x}}$

---

Par récurrence sur $n$ déjà initialisée, chaque $t_n$ est dans $\mathbb{Q}$.
On initialise en relisant le tableau plus haut.
On suppose ensuite pour un entier $n$ que $t_n$ est rationnel. Mais alors $\dfrac{2.t_n+1}{2-t_n}$ est rationnel par stabilité de $\mathbb{Q}$ par multiplication, addition et division *($(\mathbb{Q}, +, .)$ est un corps)*.

---

On sait directement :$\tan(\alpha/2) = \dfrac{1-\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \dfrac{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{1/\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2$.
La présence de $\sqrt{5}$ fait de ce réel un irrationnel.

---

Calcule-t-on ensuite $\tan(\alpha/4)$ ? Non. On nous demande juste de prouver qu'elle n'est pas rationnelle.
On fait un raisonnement par l'absurde : si $\tan(\alpha/4)$ était un rationnel $\tau$ alors $\dfrac{2.\tau}{1-\tau^2}$ serait aussi rationnel. Or, il s'agit de $\tan(\alpha/2)$ qui est irrationnel.

Cette preuve par l'absurde est quand même plus simple que le calcul explicite $\tan(\alpha/4) = \dfrac{\sqrt{10-4.\sqrt{5}}-1}{\sqrt{5}-2}$ suivi de l'affirmation sans preuve "c'est un irrationnel".
D'autant qu'on a vu dans le test de rentrée que $\sqrt[3]{7+5.\sqrt{2}}+\sqrt[3]{7-5.\sqrt{2}}$ était rationnel, égal à 2.

**DS02** • La suite auxillaire $(v_n)$. • MPSI 2/2013

On trouve les deux points fixes complexes de $f$ en résolvant $f(x)=x$ :
$\left(\dfrac{2.x+1}{2-x}=x\right)\Leftrightarrow\left(2.x+1=2.x-x^2 \text{ et } x\neq 2\right)$
Les deux points fixes sont $i$ et $-i$.

---

On pose donc $v_n=\dfrac{t_n-i}{t_n+i}$ *(ou le contraire).*
On remplace, pour $n$ donné :

$$v_{n+1}=\frac{t_{n+1}-i}{t_{n+1}+i}=\frac{\dfrac{2.t_n+1}{2-t_n}-i}{\dfrac{2.t_n+1}{2-t_n}+i}=\frac{2.t_n+1-2.i+i.t_n}{2.t_n+1+2.i-i.t_n}=\frac{(2+i).t_n+(1-2.i)}{(2-i).t_n+(1+2.i)}$$

On tient à y retrouver $\dfrac{t_n-i}{t_n+i}$. On factorise : $v_{n+1}=\frac{(2+i).t_n+(1-2.i)}{(2-i).t_n+(1+2.i)}=\dfrac{(2+i).(t_n-i)}{(2-i).(t_n+i)}=\dfrac{2+i}{2-i}.v_n$.
On identifie bien une suite géométrique de raison $\dfrac{2+i}{2-i}$ qu'on écrit même $\dfrac{3+4.i}{5}$ *(vous y reconnaissez le triplet pythagoricien $(3,4,5)$ ? vous avez raison).*

Pour le choix $v_n=\dfrac{t_n+i}{t_n-i}$, les calculs sont à peu près les mêmes, mais la raison devient l'inverse c'est à dire $\dfrac{3-4.i}{5}$.

**DS02** • Formule explicite pour $v_n$ et $t_n$. • MPSI 2/2013

La suite $v$ est géométrique. Son premier terme se calcule : $v_0=\dfrac{0-i}{0+i}=-1$.
On a donc par récurrence immédiate : $v_n=-\left(\dfrac{3+4.i}{5}\right)^n$.

On résout alors $-\left(\dfrac{3+4.i}{5}\right)^n=\dfrac{t_n-i}{t_n+i}$ et on extrait $\tan(n.Arctan(1/2))=t_n=i.\dfrac{1-\left(\dfrac{3+4.i}{5}\right)^n}{1-\left(\dfrac{3+4.i}{5}\right)^n}$ *(c'est bien un réel, rassurez vous).*

On peut même multiplier numérateur et dénominateur par $5^n$ : $\boxed{t_n=i.\dfrac{5^n-(3+4.i)^n}{5^n+(3+4.i)^n}}$

*Avec l'autre choix de $s$ et $s'$, on aboutit à $t_n=i.\dfrac{(3-4.i)^n-5^n}{(3-4.i)^n+5^n}$ et c'est bien la même formule, en dépit des apparences.*

**DS02** • Congruences sur $(3+4.i)^n$. • MPSI 2/2013

On calcule les premières valeurs de $a_n$ :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | $3+4.i$ | $-7+24.i$ | $-117+44.i$ | $-527-336.i$ |
| $a_n \quad mod \quad 5$ | $3+4.i$ | $3+4.i$ | $3+4.i$ | $3+4.i$ |

On semble bien avoir la propriété voulue. On va la prouver par récurrence sur $n$. Pour rendre la proposition facile à prouver, on écrit $a_n=(3+4.i)^n=\alpha_n+i.\beta_n$. Déjà, $\alpha_n$ et $\beta_n$ sont toujours entiers. On initialise : $\alpha_1=3$ et $\beta_1=4$.
Si l'on suppose pour un certain rang $n$ que l'on a $\alpha_n$ de la forme $5.c_n+3$ et $\beta_n$ de la forme $5.d_n+4$ (avec $c_n$ et $d_n$ entiers).
On multiplie : $a_{n+1}=(5.c_n+3+i.(5.d_n+4)).(3+4.i)$. On isole partie réelle et imaginaire :
$\alpha_{n+1}=15.c_n-20.d_n+9-16$ et $\beta_{n+1}=20.c_n+15.d_n+12+12$
On réduit modulo 5 : $\alpha_{n+1}=9-16=3 \quad mod \quad 5$ et $\beta_{n+1}=12+12=4 \quad mod \quad 5$.
La prorpriété est héréditaire.

On étudie $5^n + (4+3.i)^n$ modulo 5. Il vaut $3+4.i$, et pas $0+0.i$. Il ne peut donc pas être nul.
De même, $5^n - (4+3.i)^n$ vaut $2+i$ modulo 5 et ne s'annule donc jamais.

---

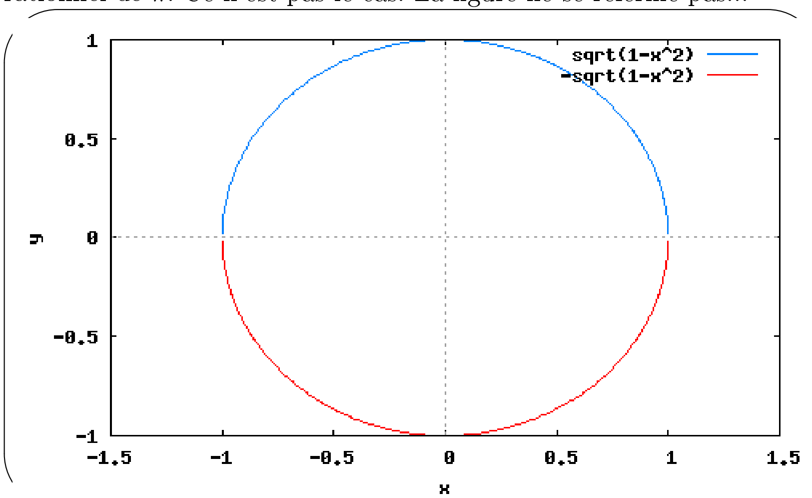
Le rationnel $t_n$, égal à $t_n = i.\dfrac{5^n - (3+4.i)^n}{5^n + (3+4.i)^n}$ est donc toujours défini et jamais nul.

---

Serait il possible que $\alpha$ soit un multiple rationnel de $\pi$, de la forme $p.\pi/q$.
Si tel était le cas (raisonnement par l'absurde), on aurait $\tan(q.\alpha) = \tan(p.\pi) = 0$.
Or, $t_q$ ne s'annule que pour $q$ égal à 0.

---

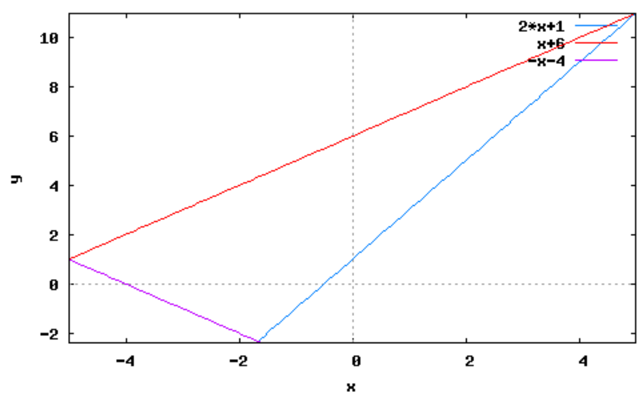
Pour que le "polygône" ou "étoile" d'angle au centre $\alpha$ se referme, il faudrait que $\alpha$ soit un multiple rationnel de $\pi$. Ce n'est pas le cas. La figure ne se referme pas...



MPSI 2/2013 **TRIANGLE** $DS03$

On considère dans le plan un *(vrai)* triangle de sommets $A$, $B$ et $C$. On utilise les notations habituelles : les angles orientés aux sommets sont $\alpha$ *(en $A$)*, $\beta$ *(en $B$)* et $\gamma$ *(en $C$)*; les côtés sont notés $a$, $b$ et $c$ *(avec $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$)* et le demi périmètre $\dfrac{a+b+c}{2}$ est noté $p$. L'aire est notée $\mathbb{A}$.

On introduit une notations en plus : $3.\varphi = Arccos\Big(1 - \dfrac{54.\mathbb{A}^2}{p^4}\Big)$.




X- 1) Montrez : $\cos(\alpha) = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2.b.c}$. •1 pt.•

X- 2) Déduisez : $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}{2.b.c}$. •2 pt.•

X- 3) Retrouvez la formule dite “de Heron” : $\mathbb{A} = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$. •1 pt.•

XI- 1) Soient $u$ et $v$ deux réels positifs. On définit les vecteurs $\begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ \sqrt{v} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{v} \\ \sqrt{u} \end{pmatrix}$ ; en considérant leur produit scalaire, déduisez $2.\sqrt{u.v} \leqslant u + v$. •1 pt.•

XI- 2) Montrez alors : $\sqrt{\dfrac{\mathbb{A}}{\sqrt{3}}} \leqslant \dfrac{\sqrt{(p-a).p/3} + \sqrt{(p-b).(p-c)}}{2} \leqslant \dfrac{p-a+p-b+p-c+\dfrac{p}{3}}{4}$. •2 pt.•

XI- 3) Prouvez l'inégalité “isopérimétrique” : $\mathbb{A} \leqslant \dfrac{p^2}{3.\sqrt{3}}$ puis l'existence de $\varphi$. •2 pt.• Peut on avoir égalité dans l'inégalité isopérimétrique ? •1 pt.•

XII- 1) Montrez : $-1 \leqslant \dfrac{3.a-p}{2.p} \leqslant 1$ et $4.(p-b).(p-c) \leqslant a^2$. •3 pt.•

XII- 2) Déduisez l'existence de $Arccos\Big(\dfrac{3.a-p}{2.p}\Big)$ (noté $\theta$), et $\cos(3.\theta) \leqslant 1 - \dfrac{54.\mathbb{A}^2}{p^4}$. •3 pt.•

XII- 3) Déduisez alors $Max(a, b, c) \leqslant p.\dfrac{1+2.\cos(\varphi)}{3}$. •2 pt.•

MPSI 2/2013 **COURS/EXERCICES** $DS03$

♡3 $\alpha$ est un réel fixé. On pose : $a_n = 10^{-n}.[\alpha.10^n]$ pour tout $n$. Explicitez $a_n$ pour $n$ de 0 à 5 pour $\alpha$ égal à $\pi$. •1 pt.•

Montrez : $a_n \leqslant \alpha < a_n + 10^{-n}$ pour tout $n$. •1 pt.• Retrouvez que $a_n$ tend vers $\alpha$ quand $n$ tend vers l'infini en revanant à la définition $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists N_{\epsilon \dots}$. •2 pt.•

---

♣5 Parmi les anagrammes de 123456789, combien sont des multiples de 12 ? •3 pt.•
Quelle est la somme de tous ces anagrammes ? •3 pt.•

---

♠12 Calculez au moins deux des trois sommes suivantes $\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=n}^{k=N}\frac{1}{k}\Big)$, $\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=n}^{k=N}\frac{1}{N}\Big)$ et $\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{k=n}^{k=N}\frac{1}{n}\Big)$. •5 pt.• (et plus ?)

| MPSI 2/2013 | $\cos(\pi/5)$ | $DS03$ |
|---|---|---|

◇5 On pose $c = \cos(\pi/5)$. Montrez que $c$ est racine de l'équation $T_3(x) + T_2(x) = 0$ d'inconnue réelle $x$. •1 pt.•

◇6 Déduisez : $c = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. •2 pt.•
On pose alors $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_{n+1} = M.U_n$. Calculez $U_n$ pour $n$ de 0 à 5. •1 pt.•

◇7 En écrivant $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ vérifiez : $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1} = (-1)^n$ et déduisez que $\dfrac{p_n}{q_n}$ est toujours un rationnel d'écriture irréductible *(qu'on va noter $u_n$)*. •3 pt.•

◇8 Trouvez l'homographie $\varphi$ vérifiant $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout $n$, et cherchez en l'unique point fixe positif (c'est à dire : résolvez $\varphi(x) = x$). •2 pt.• Etudiez les variations de $\varphi$ sur $[0,\ +\infty[$. •1 pt.•

◇9 Déduisez pour tout $n$ : $u_{2.n} < u_{2.n+2} < c < u_{2.n+3} < u_{2.n+1}$ *(utilisez la monotonie de $\varphi$)* et $u_{2.n+1} - u_{2.n} = \dfrac{1}{q_{2.n}.q_{2.n+1}}$. •3 pt.•
Montrez : $p_n \geqslant 4^{n-1}$ et $q_n \geqslant 4^{n-1}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$. •1 pt.•
Pour quel rang $u_{2.n}$ et $u_{2.n+1}$ sont ils des approximations de $c$ à $10^{-5}$ près ? •2 pt.•

---

◇10 Trouvez une matrice $D$ diagonale *(de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$)* ayant même trace et même déterminant que $M$. •1 pt.• Trouvez alors $P$ de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & * \end{pmatrix}$ vérifiant $M.P = P.D$. •1 pt.•

◇11 Calculez alors $D^n$ puis $M^n$ pour tout $n$. •3 pt.• Exprimez alors $p_n$ et $q_n$ pour tout $n$. •2 pt.•

---

◇12 On définit : $g = x \longmapsto \dfrac{4.x^2+1}{8.x-2}$. Montrez $g(c) = c$ et calculez $g'(c)$.

◇13 On définit la suite $b$ par $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = g(b_n)$ pour tout $n$. Ecrivez la formule de Taylor avec reste intégrale d'ordre 2 *(c'est le reste qui sera en g")* pour $g$ entre $c$ et $x$. •1 pt.• Déduisez, en notant $M$ un majorant de $|g"|$ sur $[1/2,\ 1]$ : $|b_{n+1} - c| \leqslant M.|b_n - c|^2$. •2 pt.•

◇14 Déduisez : $|b_n - c| \leqslant M^{2^n-1}.|1-c|^{2^n}$ pour tout $n$. •2 pt.• *(ceci permet de dire que la suite $(b_n)$ converge vite vers $c$ en doublant à peu près le nombre de décimales correctes à chaque étape)*

| MPSI 2/2013 | 192 points | $DS03$ |
|---|---|---|

La notation $[x]$ désigne la partie entière de $x$. On pourra utiliser : $\ln(10) \simeq \dfrac{5}{3}.\ln(4)$ et même le justifier. La trace d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ c'est $a + d$ et son déterminant, c'est $a.d - b.c$.

**DS03** • Deux formules de Heron. • MPSI 2/2013

La première formule est la célèbre formule de Euclide-Heron, ou théorème de Pythagore généralisé : $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos(\alpha)$.
On la (re)-trouve en écrivant $a^2 = BC^2 = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) = BA^2+AC^2+2.\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC}$.

On isole ensuite $\cos(\alpha)$, quitte à diviser par $b.c$ supposé non nul.

---

On doit déduire la valeur du sinus. On utilise la relation $\sin(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}$ *(par définition, $\alpha$ (comme $\beta$ et $\gamma$) est entre 0 et $\pi$, son sinus est donc positif).*
Sous la racine, on a donc $\dfrac{4.b^2.c^2 - (b^2+c^2-a^2)}{4.b^2.c^2}$. Son numérateur est après légère simplification $2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$, formule étonamment symétrique dans les rôles finalement.

On doit comparer à $\dfrac{(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)}{8}$ dans laquelle vous aurez reconnu $p.(p-a).(p-b).(p-c)$ en exploitant $p = (a+b+c)/2$.
On n'y va pas par quatre chemins, on développe $(a+b+c).(-a+b+c).(a-b+c).(a+b-c)$ en $((b+c)^2-a^2).(a^2-(b-c)^2)$ puis $-a^4+a^2.((b+c)^2-(b-c)^2)-(b^2-c^2)^2$.
On retrouve vite $2.a^2.b^2 + 2.a^2.c^2 + 2.b^2.c^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

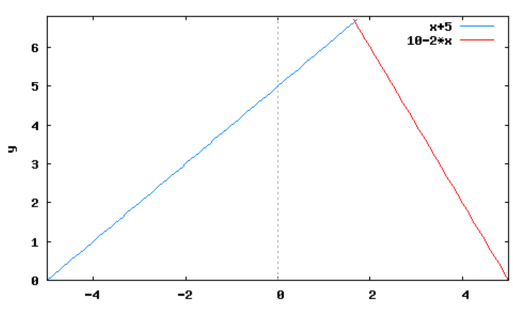
On a donc bien $\sin(\alpha) = \dfrac{\sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}}{2.b.c}$ en ayant sorti à nouveau $2.b.c$ du dénominateur.

---

*On notera au passage qu'on retrouve facilement alors la relation classique $\dfrac{\sin(\alpha)}{a} = \dfrac{\sin(\beta)}{b} = \dfrac{\sin(\gamma)}{c}$ que l'on obtenait par un autre chemin. Cette quantité est par ailleurs égale à $\dfrac{1}{2.R}$ où $R$ est le rayon du cercle inscrit dans le triangle.*

---

On regarde alors le triangle en "le posant sur sa base $[A, B]$". Cette base a pour longueur $c$. Sa hauteur est alors $CH$ de mesure $b.\sin(\alpha)$ en utilisant les relations dans le triangle rectangle $(AHC)$ *(c'est aussi $a.\sin(\beta)$ mais on arrête de tourner autour de la relation écrite quelques lignes plus haut).*




On reporte sans tarder le sinus de la formule précédente, et on trouve la célèbre formule de Tapon : $Aire = \sqrt{p.(p-a).(p-b).(p-c)}$ qui est bien homogène *(le demi périmètre $p$ est une longueur).*
*On prend au passage la peine de vérifier que $p-a$ est positif. C'est $(b+c-a)/2$ et l'inégalité triangulaire donne bien $a \leqslant b+c$. Il en va de même pour $p-b$ et $p-c$.*
C'est la formule de Héron ! Héron, petit ! Pas Tapon !

**DS03** • L'inégalité isopérimétrique $\mathbb{A} \leqslant q^2/\sqrt{27}$. • MPSI 2/2013

On définit deux vecteurs dans le plan : $\begin{pmatrix} \sqrt{u} \\ \sqrt{v} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \sqrt{v} \\ \sqrt{u} \end{pmatrix}$. Leur produit scalaire vaut $2.\sqrt{u}.\sqrt{v}$.
Mais c'est aussi le produit des normes fois le cosinus de l'angle qui les sépare. Or, tous deux ont pour norme $\sqrt{(\sqrt{u})^2 + (\sqrt{v})^2}$ que l'on simplifie en $\sqrt{u+v}$ *(u et v sont positifs)*. Quant au cosinus de l'angle, il est plus petit que 1.
On a donc bien : $2.\sqrt{u.v} \leqslant \sqrt{u+v}.\sqrt{u+v}.1$. On trouve l'inégalité de comparaison des moyennes : $\sqrt{u.v} \leqslant \dfrac{u+v}{2}$ *(géométrique ⩽ arithmétique)*.
On la prouve aussi par développement de $(\sqrt{u} - \sqrt{v})^2$, mais c'est toujours bien de varier...

---

Pour arriver à $\sqrt{\dfrac{\mathbb{A}}{\sqrt{3}}} \leqslant \dfrac{\sqrt{(p-a).p/3} + \sqrt{(p-b).(p-c)}}{2}$, on prend $u = \sqrt{p.(p-a)/3}$ et $v = \sqrt{(p-b).(p-c)}$ *(vérifiez : $u.v = \mathbb{A}/\sqrt{3}$)*.
Pour arriver à $\dfrac{\sqrt{(p-a).p/3} + \sqrt{(p-b).(p-c)}}{2} \leqslant \dfrac{p-a+p-b+p-c+\dfrac{p}{3}}{4}$, on applique encore la majoration des moyennes
∘ une fois à $u = p - a$ et $v = p/3$
∘ une fois à $u = p - b$ et $v = p - c$

Par transitivité, on a donc $\sqrt{\dfrac{\mathbb{A}}{\sqrt{3}}} \leqslant \dfrac{p-a+p-b+p-c+\dfrac{p}{3}}{4}$.

Or, $a + b + c$ vaut $2.p$. Le membre de droite se simplifie donc en $\dfrac{4.p/3}{4}$ de valeur $\dfrac{p}{3}$.

En reprenant, on a donc $\sqrt{\dfrac{\mathbb{A}}{\sqrt{3}}} \leqslant \dfrac{p}{3}$ et en élevant au carré *(réels positifs)*, on a $\mathbb{A} \leqslant p^2.\sqrt{3}/9$ qui donne $\mathbb{A} \leqslant p^2/\sqrt{27}$.

---

On élève encore au carré : $\mathbb{A}^2/p^4$ est plus petit que $1/27$. On multiplie par 54 : $54.\mathbb{A}^2/p^4 \leqslant 2$. On rappelle aussi le signe : $0 \leqslant 54.\mathbb{A}^2/p^4 \leqslant 2$. On soustrait à 1 : $1 - 0 \geqslant 1 - 54.\mathbb{A}^2/p^4 \geqslant 1 - 2$.
Le réel $1 - 54.\mathbb{A}^2/p^4$ est entre $-1$ et 1, on peut remonter à son arccosinus.

---

Comment avoir égalité ? En ayant des égalités dans chacune des majorations. Or, on utilisé trois fois l'inégalité de comparaison des moyennes. Il faudrait donc avoir égalité à chaque fois : $p - a = p/3$ et $p - b = p - c$. On trouve $a = b = c = 2.p/3$.
On pense donc "naturellement" au triangle équilatéral.
On a alors $p = 3.a/2$ et $\mathbb{A} = \dfrac{a.a.\sin(\pi/3)}{2}$ *(base fois hauteur)*. On a alors bien $\mathbb{A}^2 = p^4/27$.

**DS03** • Deux inégalités. • MPSI 2/2013

• On commence par $-1 \leqslant \dfrac{3.a-p}{2.p} \leqslant 1$. Il y a deux inégalités, on va donc calculer deux différences : $1 - \dfrac{3.a-p}{2.p}$ et $\dfrac{3.a-p}{2.p} + 1$. Il s'agit de prouver que les deux sont positives.
∘ On a déjà $1 - \dfrac{3.a-p}{2.p} = \dfrac{3.(p-a)}{2.p}$. Le dénominateur est positif, et le numérateur se réduit à $3.(b+c-a)/2$, positif par inéglité triangulaire se lisant simplement $BC \leqslant BA + AC$.
∘ On a ensuite $\dfrac{3.a-p}{2.p} + 1 = \dfrac{3.a+p}{2.p}$ avec $a$ et $p$ positifs.
On note qu'on a même finalement $-\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{3.a-p}{2.p} \leqslant 1$.

• On calcule ensuite : $a^2-4.(p-b).(p-c)=a^2-(a-b+c).(a+b-c)$.
On développe par identité remarquable en $a^2-(a^2-(b-c)^2)$ de valeur $(b-c)^2$, donc positive.
La différence est positive, on a la majoration demandée.

**DS03** • L'angle $\theta = Arccos((3.a-p)/(2.p))$. • MPSI 2/2013

Comme la mesure $\dfrac{3.a-p}{2.p}$ est entre $-1$ et 1, on peut extraire un arccosinus, compris entre 0 et $\pi$.
On calcule ensuite : $\cos(3.\theta)=4.\cos^3(\theta)-3.\cos(\theta)$ *(c'est du cours)*.
On remplace : $\cos(3.\theta)=4.\left(\frac{3.a-p}{2.p}\right)^3-3.\frac{3.a-p}{2.p}=\frac{(3.a-p).((3.a-p)^2-3.p^2)}{2.p^3}$.
On effectue alors la différence $1-\dfrac{54.\mathbb{A}^2}{p^4}-\cos(3.\theta)=27.\dfrac{a^2.p^2-a^3.p-4.\mathbb{A}^2}{p^4}$. On aimerait qu'elle soit positive. Tout se limite au signe du numérateur $a^2.p.(p-a)-4.\mathbb{A}^2$.
Si on pense à remplacer $\mathbb{A}^2$ par $p.(p-a).(p-b).(p-c)$, ce numérateur devient $p.(p-a).(a^2-4.(p-b).(p-c))$.
Or, en début de partie, on a prouvé $4.(p-b).(p-c)\leqslant a^2$.
Finalement, ce numérateur est bien positif.

On a donc bien établi : $\cos(3.\theta)\leqslant 1-\dfrac{54.\mathbb{A}^2}{p^4}$.
Avec nos notations, ceci devient $\cos(3.\theta)\leqslant\cos(3.\varphi)$.
Or, $3.\varphi$ est dans $[0,\pi]$ *(c'est un arcosinus)*, de même que $3.\theta$ ( ?)

On est donc sur un intervalle où le cosinus est une application décroissante.
On déduit donc, dans l'autre sens : $3.\theta\geqslant 3.\varphi$, puis $\theta\geqslant\varphi$.
Comme ensuite $\theta$ et $\varphi$ sont dans $[0,\pi]$, en repassant au cosinus, on trouve : $\cos(\theta)\leqslant\cos(\varphi)$.
En remplaçant $\cos(\theta)$ par sa valeur, on trouve $\dfrac{3.a-p}{2.p}\leqslant\cos(\varphi)$.
Par produit en croix, on déduit : $3.a-p\leqslant 2.p.\cos(\varphi)$ puis $a\leqslant p.\dfrac{1+2.\cos(\varphi)}{3}$.
Mais, par symétrie des rôles, on peut montrer de la même façon : $b\leqslant p.\dfrac{1+2.\cos(\varphi)}{3}$ et $c\leqslant p.\dfrac{1+2.\cos(\varphi)}{3}$
*(les trois côtés a, b et c ont des rôles symétriques, et le second membre ne que du triangle et pas de l'ordre de citation des commets et/ou côtés).*
Comme les trois côtés sont majorés par ce même réel, leur maximum *(égal à l'un des trois)* l'est aussi.

*J'accepte de comprendre cette formule et sa démonstration (assez peu connues), mais je ne saisis pas ce que représente géométriquement cat angle "d'excentricité" noté $\varphi$.*

**DS03** • Approximations décimales $10^{-n}.[10^n.\alpha]$. • MPSI 2/2013

On multiplie $\alpha$ par $10^n$ : on déplace donc la virgule de $n$ places vers la droite. On prend la partie entière : on efface ce qu'il y a derrière l'actuelle virgule. On divise par $10^n$ : on remet la virgule à sa place. On vient donc de couper tous les chiffres à partir du $n^{ieme}$ rang derrière la virgule.
On commence par un exemple avec "$\alpha=\pi$". On a ainsi : $a_3=\dfrac{[1000.\pi]}{1000}=\dfrac{[31415,926\ldots]}{1000}=\dfrac{31415}{1000}=$ 3,1415. On résume :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 3 | 3,1 | 3,14 | 3,141 | 3,1415 | 3,14159 |

*Petit rappel :* QUE J'AIME À FAIRE CONNAÎTRE CE NOMBRE UTILE AUX SAGES, IMMORTEL ARCHIMÈDE...
*Je laisse le soin à J.U. de nous trouver une phrase plus sympathique pour retenir les décimales de $\pi$*

*et une pour les décimales de e.*

---

On rappelle la propriété de la partie entière : "$[x] \leqslant x < [x]+1$ et $[x] \in \mathbb{Z}$" pour tout réel $x$ *(on descend pour trouver $[x]$, mais en montant, on aurait $[x]+1$).*
On a donc pour tout $n$ : $[10^n.\alpha] \leqslant 10^n.\alpha < [10^n.\alpha]+1$.
On multiplie par $10^{-n}$ *(strictement positif)* : $a_n \leqslant \alpha < a_n + 10^{-n}$.

---

On veut ensuite prouver : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
On se donne $\varepsilon$, et on veut contrôler $|a_n - \alpha|$ par $\varepsilon$.
Or, par l'inégalité précédente, $|a_n - \alpha|$ est entre 0 et $10^{-n}$. On va donc se contenter d'exiger *("au pire")* : $10^{-n} \leqslant \varepsilon$.
En passant aux logarithmes et en divisant : $n \geqslant \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(10)}$.
On pose donc : $\boxed{N_\epsilon = \left[\frac{\ln(1/\epsilon)}{\ln(10)}\right] + 1}$ et on vérifie :
$n \geqslant N_\epsilon\ \Rightarrow\ n \geqslant \dfrac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(10)}\ \Rightarrow\ n.\ln(10) \geqslant \ln(1/\varepsilon)\ \Rightarrow\ 10^n \geqslant 1/\varepsilon\ \Rightarrow\ 10^{-n} \leqslant \varepsilon\ \Rightarrow\ |a_n - \alpha| \leqslant 10^{-n} \leqslant \varepsilon$

**DS03** • Anagrammes de 123456789. • MPSI 2/2013

On a déjà vu que tous sont des multiples de 3 *(somme des chiffres)*.
Pour être un multiple de 12, il faut et il suffit d'être un multiple de 4. Le critère, c'est que les deux derniers chiffres soient eux même un multiple de 4. Explication : $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9}$ est égal à $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}.100 + \overline{a_8a_9}$ et 100 est déjà un multiple de 4.
On donne la liste des fins possibles parmi les vingt cinq multiples de 4 en éliminant ceux qui s'écrivent avec deux fois le même chiffre ou avec un 0 : 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96. On en trouve seize.
Pour chacune de ces fins, on peut compléter avec sept chiffres en amont, choisis dans la liste des sept chiffres qui restent. On a donc à chaque fois 7! choix.
La résultat final est $\boxed{16.7!}$

On veut les sommer tous. Pour comprendre on le fait avec les anagrammes de 123 et on pose en colonne :

| | | |
|---|---|---|
| **1** | **2** | **3** |
| **1** | **3** | **2** |
| **2** | **1** | **3** |
| **2** | **3** | **1** |
| **3** | **1** | **2** |
| **3** | **2** | **1** |

Dans chaque colonne, on trouve chaque chiffre exactement deux fois. La somme sur chaque colonne est $2.(1+2+3)$, c'est à dire 12. On a donc 12 unités, 12 dizaines et 12 centaines. On résume : $12.(1+10+100)$ ce qui donne 1332.
Avec les neuf chiffres, on trouve dans chaque colonne la quantité $1+2+3\ldots+9$ présente exactement 8! fois (ce qui fait 9! lignes). On a donc 8!.45 paquets de 1, de 10, de 100 jusqu'à $10^8$.
On somme : 8!.45.111111111. Ce nombre vaut ... une horreur.

---

Autre approche. Chacun des nombres est de la forme $a_0 + a_1.10 + a_2.10^2 + \ldots + a_9.10^9$ où $[a_0,\ a_1, \ldots, a_9]$ est la liste $[1,\ 2, \ldots,\ 9]$ sous l'effet d'une permutation. La somme finale est donc $\displaystyle\sum_{a \in S_9} a_0 + a_1.10 + a_2.10^2 + \ldots + a_9.10^9$ où $S_9$ désigne l'ensemble des 9! permutations de la liste $[1,\ 2, \ldots,\ 9]$.
On sépare $\displaystyle\sum_{a\in S_9} a_0 + 10.\sum_{a\in S_9} a_1 + 10^2.\sum_{a\in S_9} a_2 + \ldots + 10^9.\sum_{a\in S_9} a_9$.

Par symétrie des rôles, chaque somme $\sum_{a\in S_9} a_k$ est la même, et vaut justement $8!.(1+2+3+\ldots+9)$.

---

Dernière approche : on regroupe chaque permutation avec sa permutation "miroir à 10", par exemple 436759821 avec 674351289. Quand on les additionne, on trouve 1111111110 (dix chiffres).
Quand on regroupe ainsi deux à deux, on a $9!/2$ couples de somme $111111111.10$. On retrouve bien le même entier $\boxed{\dfrac{9!.10.1111111111}{2} = \dfrac{10.9}{2}.8!.1111111111}$

**DS03** • Trois sommes en $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{k=N}\frac{1}{\ldots}$. • MPSI 2/2013

Chacune de ces sommes existe et est faite de... d'un certain nombre de termes qui dépend juste de l'entier naturel $N$ *($n$ bouge de 1 à $N$ et pour chaque $n$, $k$ bouge de $n$ à $N$)*.

On regarde donc déjà le nombre de termes, par exemple pour $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k}$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $n=N$ | | | | | $1/N$ |
| $\ldots$ | | | | $\ldots$ | $\ldots$ |
| $n=3$ | | | $1/3$ | $\ldots$ | $1/N$ |
| $n=2$ | | $1/2$ | $1/3$ | $\ldots$ | $1/N$ |
| $n=1$ | $1/1$ | $1/2$ | $1/3$ | $\ldots$ | $1/N$ |
| | $k=1$ | $k=2$ | $k=3$ | $\ldots$ | $k=N$ |

On a $1+2+\ldots+(N-1)+N$ éléments, c'est à dire $\dfrac{N.(N+1)}{2}$ termes.

---

Pour la somme $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{N}$, tous les termes sont égaux (de valeur $1/N$). La somme vaut donc $\dfrac{1}{N}.\dfrac{N.(N+1)}{2}$ *(terme fois nombre de termes)* : $\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{N} = \frac{N+1}{2}}$

---

Pour la somme $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k}$, on voit un certain nombre de termes tous égaux, par groupes.
Il n'y a qu'un terme de valeur 1 *(c'est $n=1$ et $k=1$)*.
Il y a deux termes égaux à $1/2$ *(pour $n=1$ puis $n=2$)*. Leur somme vaut 1.
Il y a trois termes égaux à $1/3$ *(pour $n$ de 1 à 3)*. Leur somme vaut 1.
Plus généralement, pour un $i$ fixé, on a $i$ termes égaux à $1/i$ *(un pour chaque $n$ de 1 à $i$)*. On a encore 1.
Au total, en ayant donc mieux agencé la double somme, on a $N$ termes de valeur 1, soit $\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} = N}$

---

*Comme on ne nous demande que deux des trois sommes, on s'arrête.*

Mais on peut aussi tenter notre chance avec $\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{n}$. Pour chaque $n$ donné, la somme $\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{n}$ est faite de $N-n+1$ termes de valeur commune $1/n$, donc de somme $\dfrac{N+1-n}{n}$.

On somme de 1 à $N$ *($N$ donné)* : $\sum_{n=1}^{N}\Big(\dfrac{N+1}{n}-1\Big)$.

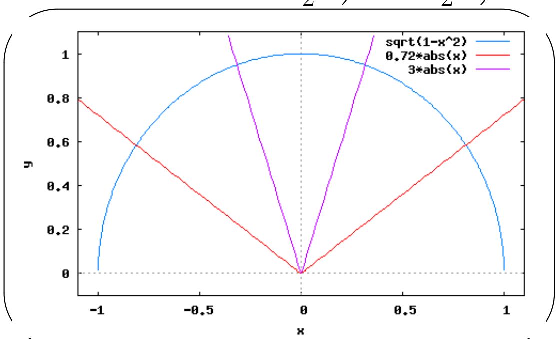
On sépare en deux sommes : $\sum_{n=1}^{N}\frac{N+1}{n}$ de valeur $(N+1).\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$ et $\sum_{n=1}^{N}1$ de valeur $N$ *(nombre de termes)*.

On peut conclure : $\boxed{\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{n}=(N+1).H_N-N}$ où $H$ est la série harmonique $H_p=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}$.

---

**DS03** • L'équation Tchebytchevienne de racine $\cos(\pi/5)$. • MPSI 2/2013

On doit juste vérifier $T_3(\cos(\pi/5))+T_2(\cos(\pi/5))=0$ pour s'assurer que $c$ est bien racine de $T_3+T_2$. Or, le premier membre de l'égalité ci dessus est $\cos(3.\pi/5)+\cos(2.\pi/5)$. Géométriquement, ces deux quantités sont bien opposées, et de somme nulle. Sinon, on fait appel à la formule $\cos(p)+\cos(q)=2.\cos(\frac{p+q}{2}).\cos(\frac{p-q}{2})$, et on trouve $2.\cos(\pi/2).\cos(\ldots)$ et ce produit est bien nul.




---

On sait donc que $c$ est une des racines de $(4.X^3-3.X)+(2.X^2-1)$.

On nous invite à vérifier alors que $c$ est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

*La mauvaise démarche, c'est de vérifier que* $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *est bien racine de ce polynôme.*

En effet, ceci prouvera juste que vous savez calculer et que $c$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ont en commun d'être racines de ce polynôme. Mais de là à pouvoir les identifier.

*J'ai alors deux arguments possibles.*

• le polynôme admet pour racine évidente $-1$ *(issue aussi de considérations géométriques)*. On factorise en $(X+1).(4.X^2-2.X-1)$. Comme $\cos(\pi/5)$ ne vaut pas $-1$, il est racine de $4.X^2-2.X-1$. Or, cette équation a deux racines de signes opposées, et $c$ est positif *(géométrie)*. C'est donc lui l'unique racine positive : $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

• on peut aussi dire que $T_3+T_2$ admet trois racines de produit 1 *(formules de Viète)*. Or, $-1$ est déjà racine. Il s'ensuit que les deux autres racines sont de signes opposés. $c$ est alors égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ *(unique racine positive non entière)*.

**DS03** • Suite $U_{n+1}=M.U_n$. • MPSI 2/2013

On calcule les premiers termes : $U_0=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $U_1=\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $U_2=\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$, $U_3=\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}$, $U_4=\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}17\\21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}72\\89\end{pmatrix}$ et enfin $U_5=$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 72 \\ 89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 305 \\ 377 \end{pmatrix}$.

On résume lisiblement :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 4 | 17 | 72 | 305 |
| | 1 | 1 | 5 | 21 | 89 | 377 |

---

Avec nos notations, on a $p_{n+1} = 3.p_n + q_n$ et $q_{n+1} = 4.p_n + q_n$, plus l'initialisation $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$ *(puis $p_1 = 1$ et $q_1 = 1$)*.
On calcule : $p_1.q_0 - p_0.q_1 = 1$. La récurrence visant à prouver $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1} = (-1)^n$ est initialisée.

Supposons qu'à un certain rang $n$, on a $p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1} = (-1)^n$. On calcule alors $p_{n+2}.q_{n+1} - p_{n+1}.q_{n+2}$ en y remplaçant $p_{n+2}$ et $q_{n+2}$, puis $p_{n+1}$ et $q_{n+1}$ par leurs valeurs :
$p_{n+2}.q_{n+1} - p_{n+1}.q_{n+2} = (3.p_{n+1} + q_{n+1}).(4.p_n + q_n) - (3.p_n + q_n).(4.p_{n+1} + q_{n+1})$
On développe et simplifie, et il reste... $p_n.q_{n+1} - p_{n+1}.q_n$. On y reconnaît l'opposé de la formule de rang $n$, et on trouve donc $-(-1)^n$.
On a donc bien obtenu $p_{n+2}.q_{n+1} - p_{n+1}.q_{n+2} = (-1)^{n+1}$.
La formule est prouvée par récurrence sur $n$.

---

La formule "$p_{n+1}.q_n - p_n.q_{n+1}$ vaut 1 au signe près" est une identité de Bézout entre $p_n$ et $q_n$ *(coefficients $q_{n+1}$ et $p_{n+1}$)*.
Elle prouve donc que $p_n$ et $q_n$ sont premiers entre eux.
Pour qui aurait oublié cette conséquence directe des identités de Bézout, je vous le refais. On suppose qu'un certain entier $d$ divise à la fois $p_n$ et $q_n$. On écrit donc $p_n = d.a_n$ et $q_n = d.b_n$ avec $a_n$ et $b_n$ entiers. On calcule : $1 = |p_{n+1}.p_n - q_{n+1}.q_n| = d.|b_n.p_{n+1} - a_n.q_{n+1}|$. On déduit que $k$ divise 1 ; la seule possibilité est $k = 1$.

---

Les deux entiers étant premiers entre eux, l'écriture du rationnel est irréductible.

**DS03** • Homographie $x \longmapsto \frac{3.x+1}{4.x+1}$. • MPSI 2/2013

On écrit : $u_{n+1} = \dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \dfrac{3.p_n + q_n}{4.p_n + q_n} = \dfrac{3.\dfrac{p_n}{q_n} + 1}{4.\dfrac{p_n}{q_n} + 1} = \dfrac{3.u_n + 1}{4.u_n + 1}$.

On pose donc : $\boxed{\varphi = x \longmapsto \dfrac{3.x + 1}{4.x + 1}}$ *(homographie de matrice associée $M$)*.

---

On résout ensuite $x = \dfrac{3.x + 1}{4.x + 1}$ de domaine $\mathbb{C} - \{-1/4\}$. Par produit en croix, on arrive à l'équation $4.x^2 = 2.x + 1$. On la résout et on trouve $\dfrac{1 - \sqrt{5}}{4}$ et $\dfrac{1 + \sqrt{5}}{4}$. "Par hasard", $c$ est l'une des racines.

---

Sinon, on dérive et on trouve : $\varphi' = x \longmapsto \dfrac{-1}{(4.x + 1)^2}$ de signe négatif sur l'intervalle $[0, +\infty[$. L'application $\varphi$ est donc décroissante sur $[0, +\infty[$.

**DS03** • Formule $u_{2.n+1} < u_{2.n+3} < c < u_{2.n+2} < u_{2.n}$. • MPSI 2/2013

On va démontrer cette formule par récurrence sur $n$. On a justement calculé les premiers termes de la suite $u$ : $[0,\ 1,\ \frac{4}{5},\ \frac{17}{21}]$. On prouve rapidement : $0 < \dfrac{4}{5} < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} < \dfrac{17}{21} < 1$.
On a juste besoin de $16 < 5 + 5.\sqrt{5}$ *(par $11^2 \leqslant 5^2.5$)* et $21 + 21.\sqrt{5} < 68$ (par $21^2.5 < 47^2$, de peu).

Ensuite, on suppose pour un rang $n$ : $u_{2.n} < u_{2.n+2} < c < u_{2.n+3} < u_{2.n+1}$. On veut aboutir à la même formule au rang $n + 1$.

Or, comme tous ces réels sont positifs, on peut utiliser la décroissance de $\varphi$ :
$\varphi(u_{2.n}) > \varphi(u_{2.n+2}) > \varphi(c) > \varphi(u_{2.n+3}) > \varphi(u_{2.n+1})$
Par lein entre la suite $u$ et l'homographie $h$, et par invariance de $c$ par $\varphi$ :
$u_{2.n+1} > u_{2.n+3} > c > u_{2.n+4} > u_{2.n+2}$
On applique encore $\varphi$ : $\varphi(u_{2.n+1}) < \varphi(u_{2.n+3}) < \varphi(c) < \varphi(u_{2.n+4}) > \varphi(u_{2.n+2})$.
On reconnaît cette fois : $u_{2.n+2} < u_{2.n+4} < c < u_{2.n+5} < u_{2.n+3}$.
C'est ce qu'on attendait au rang $n+1$. Le principe de récurrence permet de conclure.

---

On calcule la différence $u_{2.n} - u_{2.n+1}$ : $u_{2.n+1} - u_{2.n} = \dfrac{p_{2.n+1}}{q_{2.n+1}} - \dfrac{p_{2.n}}{q_{2.n}} = \dfrac{q_{2.n}.p_{2.n+1} - p_{2.n}.q_{2.n+1}}{q_{2.n}.q_{2.n+1}}$
Le numérateur vaut 1 par la récurrence vue plus haut.

**DS03** • Minoration $p_n \geqslant 4^{n-1}$ et $p_n \geqslant 4^{n-1}$. • MPSI 2/2013

Pour $n$ égal à 1, cette double minoration est une égalité. On a initialisé la récurrence.
On suppose qu'à un rang $n$, on a $p_n \geqslant 4^{n-1}$ et $q_n \geqslant 4^{n-1}$.
On calcule : $p_{n+1} = 3.p_n + q_n \geqslant 3.4^{n-1} + 4^{n-1} = 4.4^{n-1} = 4^{(n+1)-1}$ et de même
$q_{n+1} = 4.p_n + q_n \geqslant 4.4^{n-1} + 4^{n-1} = 5.4^{n-1} \geqslant 4^{(n+1)-1}$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

---

On voudrait avoir $u_{2.n} < c < u_{2.n+1}$, à $10^{-5}$ près. Il suffit donc d'exiger $u_{2.n+1} - u_{2.n} \leqslant 10^{-5}$. Or, on a déjà $u_{2.n+1} - u_{2.n} = \dfrac{1}{q_{2.n}.q_{2.n+1}} \leqslant \dfrac{1}{4^{2.n-1}.4^{2.n}} = 4^{1-4.n}$.
On va donc demander $4^{1-4.n} \leqslant 10^{-5}$, c'est à dire $4^{4.n} \geqslant 10^5/4$.
On demande explicitement : $n \geqslant \dfrac{5.\ln(10) - \ln(4)}{4.\ln(4)}$.
Application numérique : avec $\ln(10) \simeq 5.\ln(4)/3$, on trouve $\dfrac{5.5-3}{4.3}$ ce qui nous conduit à 2.
On a donc $\boxed{\dfrac{72}{89} < u_4 < \cos(\pi/5) < u_5 = \dfrac{305}{377} \text{ avec une précision de } \dfrac{1}{89.377}}$
On doit justifier $\ln(10) \simeq \dfrac{5}{3}.\ln(4)$ par $3.\ln(10) \simeq 5.\ln(4)$. Il s'agit de $\ln(1000)$ et $\ln(1024)$ !

**DS03** • Diagonalisation de $M$. • MPSI 2/2013

La trace de la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ vaut 4 et son déterminant $-1$.
La matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ a pour trace $a+b$ et déterminant $a.b$.
On impose donc somme et produit : $a$ et $b$ sont les deux racines de l'équation $\lambda^2 - 4.\lambda - 1 = 0$ d'inconnue $\lambda$ et de racines $2+\sqrt{5}$ et $2-\sqrt{5}$.
On fait un choix : $D = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
On a alors par récurrence évidente sur $n$ : $\boxed{D^n = \begin{pmatrix} (2+\sqrt{5})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{5})^n \end{pmatrix}}$
On trouve $P$ en résolvant $M.P = P.D$ : $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{pmatrix}$.
On prendra donc : $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+\sqrt{5} & -1-\sqrt{5} \end{pmatrix}$ puis $P^{-1} = \dfrac{1}{2.\sqrt{5}}.\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} & 1 \\ \sqrt{5}-1 & -1 \end{pmatrix}$.
Par récurrence déjà vue en T.D., on montre $M = P.D.P^{-1}$ et $M^n = P.D^n.P^{-1}$ *(télescopage*

$(P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1})\dots(P.D.P^{-1}))$.
On effectue avec courage le calcul de $M^n$ :

$$\boxed{\frac{1}{2.\sqrt{5}}.\begin{pmatrix} (1+\sqrt{5}).(2+\sqrt{5})^n+(\sqrt{5}-1).(2-\sqrt{5})^n & (2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n \\ 4.(2+\sqrt{5})^n-4.(2-\sqrt{5})^n & (\sqrt{5}-1).(2+\sqrt{5})^n+(\sqrt{5}+1).(2-\sqrt{5})^n \end{pmatrix}}$$

---

On isole alors $p_n$et $q_n$ en multipliant $M^n$ par $U_0$ *(puisque par récurrence évidente sur $n$ on a $U_n = M^n.U_0$, ou par suite géométrique de raison à gauche $M$) :*

$$\boxed{p_n = \frac{(2+\sqrt{5})^n-(2-\sqrt{5})^n}{2.\sqrt{5}} \text{ et } q_n = \frac{(\sqrt{5}-1).(2+\sqrt{5})^n+(1+\sqrt{5}).(2-\sqrt{5})^n}{2.\sqrt{5}}}$$

---

*On notera que ces quantités sont quand même des entiers. Vous pouvez vous en convaincre en regardant par exemple $p_7$. Dans $(2+\sqrt{5})^7$, on a des $2^{7-k}.(\sqrt{5})^k$ et aussi dans $(2-\sqrt{5})^7$ mais avec quelques changements de signes. Et justement, pour $k$ pair, les termes se simplifient entre eux ($\binom{7}{4}.2^3.5^2$ avec son opposé), tandis que pour $k$ impair, les termes s'ajoutent ($\binom{7}{3}.2^4.5.\sqrt{5}$ deux fois). Il ne reste qu'un terme en "entier (pair) fois $\sqrt{5}$", et la division par $2.\sqrt{5}$ donne bien $p_7 \in \mathbb{N}$. C'est classique et à retenir pour certains concours.*

**DS03** • L'application $x \longmapsto \frac{4.x^2+1}{8.x-2}$. • MPSI 2/2013

Cette application est définie sur $]1/4,\ +\infty[$ et elle y est dérivable *(autant de fois qu'on veut)*. On calcule $g(c) - c$ avec l'objectif de la nullité de cette différence *(bien meilleure méthode que tout bricolage par prétendues équivalences qui partirait de la conclusion ou calcul de $g(c)$ sans objectif précis)* :

$$\boxed{g(c) - c = \frac{4.c^2+1}{8.c-2} - c = \frac{4.c^2+1-8.c^2+2.c}{8.c-2} = \frac{1+2.c-4.c^2}{8.c-2}}$$

On trouve bien 0 car $c$ est racine de $4.X^2 - 2.X - 1$ et pas de $8.X - 2$.
*Oui, il était inutile de tartiner des $\sqrt{5}$ partout comme un gros bourrin qui ne sait que calculer et pas raisonner et anticiper.*

---

On dérive : $g' = x \longmapsto \dfrac{8.(4.x^2+1) - 8.x.(8.x-2)}{(8.x-2)^2}$. On trouve $g'(x) = \dfrac{8.x^2-4.x-2}{(4.x-1)^2}$ pour tout $x$ et $\boxed{g'(c) = 0}$ pour $c$.

---

Comme demandé on écrit la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre 2 pour $g$ entre $c$ et $x$ :
$g(x) = g(c+(x-c)) = g(c) + (x-c).g'(c) + (x-c)^2.\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} (1-t).g"(c+t.(x-c)).dt$
et, en tenant compte des propriétés communes de $g$ et $c$ :
$g(x) = c + (x-c)^2.\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} (1-t).g"(c+t.(x-c)).dt$

---

On écrit cette formule pour $x$ égal à $b_n$ :
$b_{n+1} = g(b_n) = c + (b_n-c)^2.\displaystyle\int_{t=0}^{t=1} (1-t).g"(c+t.(b_n-c)).dt$
On passe de l'autre côté, on passe à la valeur absolue, on majore :

$\boxed{|b_{n+1}-c| = (b_n-c)^2.\left|\displaystyle\int_0^1 (1-t).g"(c+t.(b_n-c)).dt\right| \leqslant (b_n-c)^2.1.M}$ *(longueur de l'intervalle fois majorant brutal de la fonction).*
On a bien $|b_{n+1}-c| \leqslant M.|b_n-c|^2$.

---

Quitte à avoir admis la question précédente, on peut alors faire une récurrence sur $n$ qui va rapporter quelques points.
On initialise : $|b_0 - c| = |1-c| \leqslant M^{2^0-1}.|1-c|^{2^0}$ (en rappelant $2^0 = 1$).

On suppose vrai à un certain ordre $n$ donné : $|b_n - c| \leqslant M^{2^n-1}.|1-c|^{2^n}$.

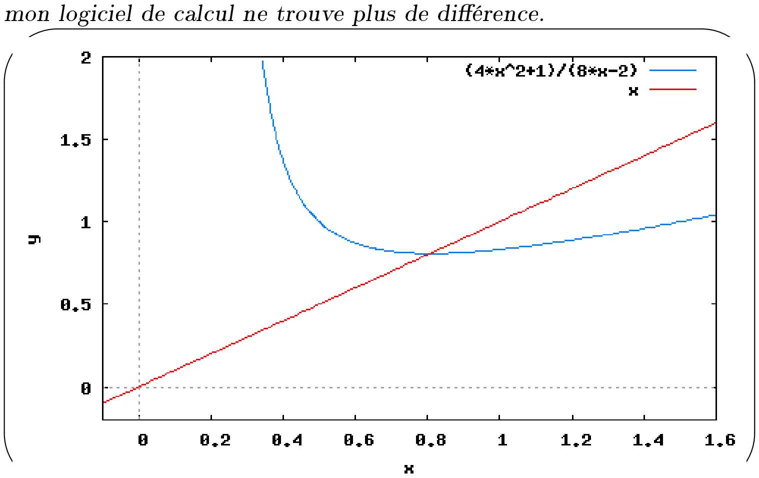
On écrit : $|b_{n+1} - c| \leqslant M.|b_n - c|^2 \leqslant M.\Big(M^{2^n-1}.|1-c|^{2^n}\Big)^2$.

On développe ce majorant en $M.M^{(2^n-1).2}.|1-c|^{2^n.2}$ puis en $M^{2^{n+1}-1}.|1-c|^{2^{n+1}}$.
La seule difficulté est de ne pas commettre d'erreur sur $(a^n)^p = a^{n.p}$ et $a^n.a^p = a^{n+p}$. C'est évident, mais on voit tant d'élèves finir par écrire des absurdités fatales...

Le résultat est prouvé par récurrence sur $n$.
*C'est alors ce qu'on appelle une convergence de type quadratique. Un classique très fort.*
*Je vous laisse vous convaincre que "en gros" le nombre de décimales exactes double à chaque itération.*

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 0 | 1 | $\frac{4}{5}$ | $\frac{17}{21}$ | $\frac{72}{89}$ |
| | 0 | 1 | $0,8$ | $0,809524\ldots$ | $0,808988\ldots$ |
| $b_n$ | 1 | $\frac{5}{6}$ | $\frac{17}{21}$ | $\frac{1597}{1974}$ | $\frac{1762289}{2178309}$ |
| | 1 | $0,833333\ldots$ | $0,809524\ldots$ | $0,80901722\ldots$ | $0,809016994375\ldots$ |

*Et la "vraie valeur" de* $\cos(\pi/5)$ *est* $0,809016994375\ldots$. *La coïncidence avec* $b_4$ *se fait à* $10^{-14}$ *près ! Au delà, mon logiciel de calcul ne trouve plus de différence.*




MPSI 2/2013 | 192 points | $DS03$

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Vendredi 29 novembre

# $DS04$

MPSI 2/2013

## Un jeu de hasard.

$DS04$

XIII- 1) Le jeu : une piste de $n+1$ cases, numérotées de 0 à $n$ (c'est logique). Vous démarrez de la case 0. Vous lancez un dé, autant de fois qu'il le faut, et vous avancez à chaque fois du nombre de cases indiquées par le dé. Vous gagnez cinq euros si vous terminez sur la case $n$ et vous perdez un euro si vous dépassez cette case.
Montrez que le jeu se termine assurément soit par votre victoire soit par votre défaite. •1 pt.•

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O | 1 | 2 | 3 | ... | ... | $n$ |

On note $p_n$ la probabilité que vous gagniez *(et $G_n$ votre gain moyen (positif ou négatif))*.

Justifiez le tableau suivant : •6 pt.•

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_n$ | 1 | 1/6 | 7/36 | 49/216 | 343/1296 | |
| $G_n$ | 5 | 0 | 1/6 | | | 1105/1296 |

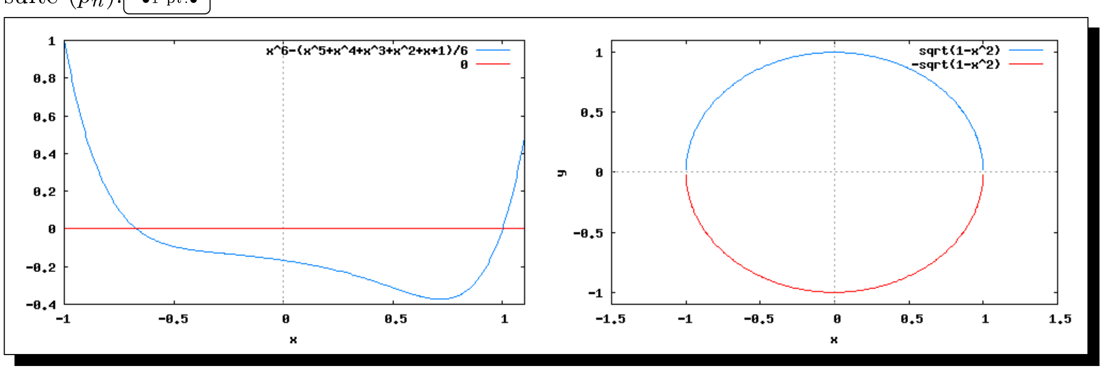
XIII- 2) Montrez : $p_{n+6} = \dfrac{p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + p_{n+3} + p_{n+4} + p_{n+5}}{6}$ pour tout entier naturel $n$. *(en étudiant le résultat de votre premier lancer de dé)* •1 pt.•
Cette formule est elle cohérente pour $n$ négatif ? •1 pt.•

---

XIV- 1) Pour tout $n$ on pose alors $U_n = \begin{pmatrix} p_n \\ p_{n+1} \\ \vdots \\ p_{n+5} \end{pmatrix}$ *(vecteur colonne de taille 6)*. Trouvez la matrice $M$ carrée de taille 6 sur 6 vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ pour tout $n$ *(elle est assez simple, avec un bon nombre de 0)*. •2 pt.•
XIV- 2) Exprimez alors $U_n$ à l'aide de $M$, $U_0$ et $n$. •1 pt.•

---

- 1) On note $Q$ le polynôme $6.X^6 - X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1$. Montrez qu'il admet une racine réelle positive très simple $r_0$ et posez la division euclidienne de $Q$ par $X - r_0$. •2 pt.•
- 2) Montrez que $r_0$ est la seule racine positive de $Q$. •1 pt.•
- 3) Montrez que $Q$ admet une seule racine réelle négative $r_1$ et qu'elle est comprise entre $-1$ et $1/2$. *(on pourra montrer : $6.(r_1)^7 - 7.(r_1)^6 + 1 = 0$ et l'utiliser)* •3 pt.•
- 4) Montrez que les suites géométriques de raison $r_1$ vérifient la même relation de récurrence que la suite $(p_n)$. •1 pt.•




---

- 1) Soit $r$ une racine non réelle de $Q$ *(qu'on écrit sous forme polaire $\rho.e^{i.\theta}$)*. Montrez : $6.\rho^6 < \rho^5 + \rho^4 + \rho^3 + \rho^2 + \rho + 1$. Déduisez : $\rho < 1$. •3 pt.•

- 2) En notant $r_0$ à $r_5$ les six racines de $Q$, indiquez suivant la valeur de $k$ la limite de $(r_k)^n$ quand $n$ tend vers l'infini. •1 pt.•

---

- 1) On note $D$ la matrice diagonale de taille 6 sur 6 dont les termes diagonaux sont les $r_k$ *(les indices vont de* 0 *à* 5 *comme en Python)*. Explicitez la limite de $D^n$ quand $n$ tend vers l'infini. •1 pt.•
- 2) On note $P$ la matrice carrée de taille 6 dont le terme de ligne $i$ et colonne $k$ est $(r_k)^i$ *(les indices vont de* 0 *à* 5*, je le répète)*. Vérifiez : $M.P = P.D$. •3 pt.•
- 3) On admet alors que $P$ est inversible. Exprimez $U_n$ à l'aide de $P$, $D$ et $n$. •1 pt.•
- 4) Déduisez la limite de $U_n$ quand $n$ tend vers l'infini. •3 pt.•
- 5) Déduisez la limite de $p_n$ et $G_n$quand $n$ tend vers l'infini. •2 pt.•

94 points — 94 points

## MPSI 2/2013 — Irrationalité de $e$. — $DS04$

Pour tout entier naturel $n$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^t.t^n.dt$. Calculez $I_n$ pour $n$ de 0 à 5. Trouvez en intégrant par parties la relation de récurrence qui lie $I_n$ et $I_{n+1}$. (rappel : $\displaystyle\int_a^b u'.v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$) •4 pt.•

On pose $G = \{a + b.e \mid (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrez que $G$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$ contenant tous les $I_n$. •2 pt.•

Montrez : $0 < I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ pour tout $n$. •1 pt.•

On suppose que $e$ est rationnel, d'écriture irréductible $\dfrac{p}{q}$. Déduisez alors $\dfrac{1}{q} < I_n$ pour tout $n$. Concluez. •3 pt.•

10 points — 10 points

## MPSI 2/2013 — Exercices — $DS04$

♡4 Soit $(a_n)$ une suite réelle. Quantifiez "$(a_{2.p})$ converge vers $\alpha$ quand $p$ tend vers l'infini". Quantififez "$(a_{2.q+1})$ converge aussi vers $\alpha$ quand $q$ tend vers l'infini". •1 pt.•
Déduisez sous ces hypothèses que $(a_n)$ converge aussi vers $\alpha$ quand $n$ tend vers l'infini. •2 pt.•

---

♠13 On crée tous les entiers $abc$ avec $a$, $b$ et $c$ dans $\{1, 2, 5, 6, 7\}$. Combien y en a-t-il ? •1 pt.• Que vaut leur somme ? •2 pt.• Que vaut la somme de leurs carrés ? •4 pt.•
Ecrivez un script Python *(ou pseudo-langage de programmation)* qui fera ce travail à votre place. •3 pt.•

---

♢15 Soit $E$ l'ensemble des entiers de 0 à 16. Vérifiez que $\sigma = (a \longmapsto a^3 \quad mod \quad 17)$ est bien une permutation de $E$ (avant de calculer toutes les images, montrez peut être $\sigma(17-k) = 17 - \sigma(k)$).
Décomposez la en produit de cycles de supports disjoints.
Résolvez $\sigma^n = Id$ d'inconnue entière $n$.

---

♣6 Donnez le nombre de zéros à la fin de l'écriture décimale de $\displaystyle\prod_{1\leq i\leq j\leq k\leq 5} 2^i.3^j.5^k$. •4 pt.•

17 points — 17 points

MPSI 2/2013 — 252 points — $DS04$

**DS04** • Convergence de $(a_{2.p})$ et $(a_{2.q+1})$. • MPSI 2/2013

On quantifie les deux hypothèses :
• $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\ P_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N},\ (p \geqslant P_\epsilon)\ \Rightarrow\ |u_{2.p} - \alpha| \leqslant \varepsilon$
• $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\ Q_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall q \in \mathbb{N},\ (q \geqslant Q_\epsilon)\ \Rightarrow\ |u_{2.q+1} - \alpha| \leqslant \varepsilon$

On a alors un objectif :
$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists\ N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geqslant N_\epsilon)\ \Rightarrow\ |u_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$
Il faut construire la machine $\varepsilon \longmapsto N_\epsilon$, connaissant les deux machines $P$ et $Q$.
On se donne $\varepsilon$ strictement positif. On veut obtenir $|a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$.
On va distinguer deux cas suivant la parité de $n$ :
• $n$ pair : on écrit $n = 2.p$ ; il suffit d'exiger $p \geqslant P_\epsilon$ c'est à dire $n \geqslant 2.P_\epsilon$
• $n$ impair : on écrit $n = 2.p + 1$ ; il suffit d'exiger $q \geqslant Q_\epsilon$ c'est à dire $n \geqslant 2.Q_\epsilon + 1$
Comme on recouvre ainsi tous les cas, il suffit d'avoir la double exigence : $n \geqslant 2.P_\epsilon$ et $n \geqslant 2.Q_\epsilon + 1$.
On propose donc : $\boxed{N_\epsilon = Max(2.P_\epsilon,\ \ 2.Q_\epsilon + 1)}$ et on vérifie $n \geqslant N_\epsilon\ \ \Rightarrow\ \ |a_n - \alpha| \leqslant \varepsilon$ en passant par deux côtés de la rue possibles suivant la parité de $n$ et en présentant comme laissez-passer $n \geqslant N_\epsilon \geqslant 2.P_\epsilon$ ou $n \geqslant N_\epsilon \geqslant 2.Q_\epsilon + 1$ suivant qu'on est sur le trottoir pair ou impair.

**DS04** • Suite d'intégrales $(I_n)$. • MPSI 2/2013

On calcule la première : $\displaystyle\int_0^1 e^t.dt = \Big[e^t\Big]_{t=0}^{t=1} = e - 1$.
On ne calcule pas tout de suite les suivantes. On cherche la relation de récurrence, en intégrant donc par parties.
$I_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 e^t.t^{n+1}.dt = \Big[e^t.t^{n+1}\Big]_{t=0}^{t=1} - (n+1).\int_0^1 e^t.t^n.dt$ en ayant pris $\left\{\begin{array}{ccc} e^t & \leftarrow & e^t \\ t^{n+1} & \rightarrow & (n+1).t^n \end{array}\right.$.
On trouve $I_{n+1} = e - (n+1).I_n$. On les calcule alors de proche en proche sans effort :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $I_n$ | $e-1$ | $1$ | $e-2$ | $6-2.e$ | $9.e-24$ | $120-44.e$ |

**DS04** • Le groupe $\{a + b.e | (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. • MPSI 2/2013

Les éléments de cet ensemble sont bien dans $\mathbb{R}$ : $G \subset \mathbb{R}$.
Le neutre est 0 obtenu sous la forme $0 + 0.e$ : $0 \in G$.
Si l'on prend deux éléments de $G$ qu'on note $\alpha$ et $\beta$, on peut calculer leur différence. On commence par écrire $\alpha$ et $\beta$ sous la forme $a+b.\sqrt{2}$ et $c+d.e$ avec $a$, $b$, $c$ et $d$ entiers. Leur différence est $(a-c)+(b-d).e$ avec $a - c$ et $b - d$ entiers. Elle est dans $G$.
On a bien un sous-groupe de $(\mathbb{R},\ +)$.

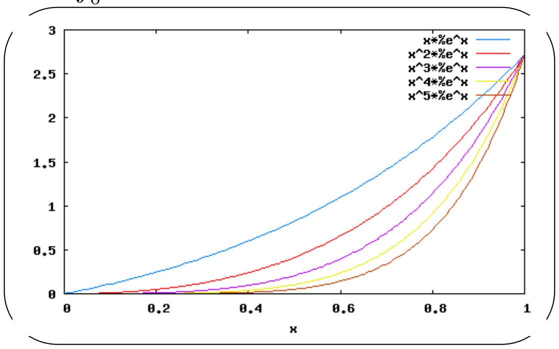
Rappel : écrire qui est l'opposé d'un élément de $G$ ne prouve rien si vous ne démontrez pas que cet opposé est bien dans $G$.

---

Par récurrence sur $n$, on montre que chaque $I_n$ est dans $G$. C'est vrai aux premiers rangs comme l'atteste le tableau encadré plus haut.
Ensuite, on suppose que $I_n$ est dans $G$ pour un certain entier naturel $n$ donné. On écrit alors : $I_{n+1} = e - (n+1).I_n$. L'élément $(n+1).I_n$ est dans $G$ par stabilité multiplicative, puis $e - (n+1).I_n$ par stabilité soustractive.
Le principe de récurrence permet de conclure.

**DS04** • Majoration $I_n \leqslant e/(n+1)$. • MPSI 2/2013

La mauvaise idée : la récurrence sur $n$ sous unique prétexete qu'il y a un entier $n$ dans la formule.
On regarde simplement cet encadrement géométriquement :
• la fonction sous le signe somme est positive, l'intervalle d'intégration est dans le bon sens : l'intégrale est une aire positive
• pour tout $t$ de $[0,\ 1]$, $e^t$ est plus petit que $e$, et $t^n.e^t$ est dnc plus petit que $t^n$ ; on majore donc $I_n$ par $e.\int_0^1 t^n.dt$ dont la valeur est tout naturellement $e/(n+1)$.




**DS04** • Raisonnement par l'absurde. • MPSI 2/2013

On suppose donc que $e$ est rationnel, de la forme irréductible $p/q$.
On écrit $I_n$ sous la forme $a_n + b_n.e$ avec $a_n$ et $b_n$entiers.
On remplace : $I_n = a_n + b_n.\dfrac{p}{q} = \dfrac{a_n.q + b_n.p}{q}$.
Ce rationnel est positif, son numérateur est donc positif. Mais il est même strictement positif, son numérateur est donc strictement positif. Mais comme il est entier, il vaut au moins 1.
On a donc bien $I_n \geqslant \dfrac{1}{q}$.

Encore une fois, pas de récurrence, même si il y a un entier dans la formule.

---

On colle bout à bout les inégalités : $\dfrac{1}{q} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ pour tout $n$. Et dans cette formule, $p$ et $q$ sont fixés, mais on peut faire tendre $n$ vers l'infini. Dès que $n$ a d'ailleurs atteit la valeur $p$, on aboutit à $\dfrac{1}{q} \leqslant \dfrac{p}{q.(p+1)}$ qui donne même $p+1 \leqslant p$, ce qui est assez contradictoire.

Ceci termine ce raisonnement par l'absurde du à J.Wattiez, professeur de notre M.P.S.I.1. C'est donc que $e$ ne peut pas s'écrire $p/q$. Il est irrationnel.

---

**DS04** • Produit $\prod_{1\leq i\leq j\leq k\leq 5} 2^i.3^j.5^k$. • MPSI 2/2013

Dans le produit $\displaystyle\prod_{1\leq i\leq j\leq k\leq 10} 2^i.3^j.5^k$ il n'y a que des facteurs 2, des facteurs 3 et des facteurs 5.
Attention toutefois au nombre de facteurs. Il est imposant *(35 comme on va le voir)*.
Cet entier s'écrit $2^a.3^b.5^c$.
C'est la conjonction de facteurs 2 et de facteurs 5 qui donneront un 10 qui se matérialisera par un 0 au bour de l'écriture décimale.
Les facteurs 10 seront donc présents $Min(a,\ c)$ fois.
On est donc obligé de compter les facteurs 2 et les facteurs 5.
• Pour les facteurs 5 :

∘ $5^1$ intervient dans le seul produit $2^1.3^1.5^1$
∘ $5^2$ intervient dans les produits $2^1.3^1.5^2$, $2^1.3^2.5^2$ et $2^2.3^2.5^2$,
∘ $5^3$ intervient dans les produits $2^1.3^1.5^3$, $2^1.3^2.5^3$, $2^1.3^3.5^3$, $2^2.3^2.5^3$, $2^2.3^3.5^3$ et enfin $2^3.3^3.5^3$
∘ $5^4$ est dans les produits $2^i.3^j.5^4$ avec $i \leqslant j \leqslant 4$, ce qui fait dix termes
∘ $5^5$ est dans les produits $2^i.3^j.5^5$ avec $i \leqslant j \leqslant 5$ (partie triangulaire d'un tableau de taille 5 sur 5), il y a quinze termes.
Au total, l'exposant de 5 est : (1.1) + (3.2) + (6.3) + (10.4) + (15.5), ce qui fait 140. (attention, 5 intervient souvent avec un grand exposant).

Mais ce calcul s'avère inutile, puisque l'exposant de 2 est moindre et va dicter sa loi.

| terme | forme | nombre total | contribution |
|---|---|---|---|
| $2^1.3^j.5^k$ | $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 5$ | 15 | $2^{15}$ |
| $2^2.3^j.5^k$ | $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 5$ | 10 | $2^{20}$ |
| $2^3.3^j.5^k$ | $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 5$ | 6 | $2^{18}$ |
| $2^4.3^j.5^k$ | $4 \leqslant j \leqslant k \leqslant 5$ | 3 | $2^{12}$ |
| $2^5.3^j.5^k$ | $5 \leqslant j \leqslant k \leqslant 5$ | 1 | $2^5$ |

Au total, notre entier est de la forme $2^{70}.3^b.5^{140}$ *(et $b$ vaut 105 pour qui est intéressé).*

On l'écrit $10^{70}.3^{105}.5^{70}$ et il se termine par $\boxed{\text{soixante dix 0}}$ pour un total *(non demandé)* de trois cent quatre vingt dix chiffres.

**DS04** • Les entiers $abc$ avec $a$, $b$ et $c$ dans $\{1, 2, 5, 6, 7\}$. • MPSI 2/2013

On a cinq choix pour $a$, cinq pour $b$ et autant pour $c$. Ces choix sont indépendants. On a donc 5.5.5 choix au final, ce qui fait 625 entiers. On peut se permettre d'en donner la liste, de 111 à 777.

On veut les additionner. On pose une grande addition, de six cent vingt cinq lignes, et on somme la colonne des unités. On y trouve des 1, des 2, des 5, des 6 et des 7, tous en égale quantité. Combien de chaque ? Vingt cinq *(pour bien avoir $5 \times 25$ lignes)*. Cette somme des unités vaut donc $(1 + 2 + 5 + 6 + 7) \times 25$. Evidemment, ceci va créer une retenue. Mais qu'importe.
Pour la colonne des dizaines, on a le même total. Mais comme ce sont des dizaines, sa contribution à la somme est $(1 + 2 + 5 + 6 + 7) \times 25 \times 10$.

Il en va de même pour les centaines, d'où un grand total de $\boxed{(1 + 2 + 5 + 6 + 7) \times 25 \times 111}$ de valeur 58 275 tous calculs faits *(et sans faute).*

---

Une autre façon de le prouver : nos nombres sont de la forme $100.a + 10.b + c$. On les somme $\sum_{(a,b,c)\in L^3} 100.a + 10.b + c$ où $L$ est la liste $\{1, 2, 5, 6, 7\}$. On sépare en $100.\sum_{(a,b,c)\in L^3} a + 10.\sum_{(a,b,c)\in L^3} b + \sum_{(a,b,c)\in L^3} c$. Chacune des sommes est du même modèle, on calcule $\sum_{(a,b,c)\in L^3} a$ qui vaut $\sum_{(b,c)\in L^3} \left(\sum_{a\in L} a\right)$. La somme entre parenthèses vaut $1 + 2 + 5 + 6 + 7$. Et on effectue ensuite vingt cinq sommes de ce type *(c'est le $\sum_{b\in L}\sum_{c\in L}$ et aussi le 25 de la première méthode)*. On retrouve 111.25.21.

---

Pour la somme des carrés, il vaut mieux faire usage de la méthode précédente :
$SC = \sum_{(a,b,c)\in L^3} (100.a + 10.b + c)^2$.
On développe et sépare par linéarité en
$$10^4.\sum_{(a,b,c)} a^2 + 10^2.\sum_{(a,b,c)} b^2 + \sum_{(a,b,c)} c^2 + 2000.\sum_{(a,b,c)} a.b + 200.\sum_{(a,b,c)} a.c + 20.\sum_{(a,b,c)} b.c$$

On a deux modèles de sommes à calculer.

• Le modèle $\sum_{(a,b,c)} a^2$ est comme $\sum_{(a,b,c)} a$, mais juste avec $1^2+2^2+5^2+6^2+7^2$ *(valeur* $115$*)* en lieu et place de $1+2+5+6+7$.

• Le modèle $\sum_{(a,b,c)} a.b$ donne $\sum_{c\in L}\Big(\sum_{(a,b)\in L^2} a.b\Big)$, et le contenu de la parenthèse donne, par "indépendance" $\Big(\sum_{a\in L} a\Big).\Big(\sum_{b\in L} b\Big)$ c'est à dire $21^2$. On n'oubliera pas les compteur $c$ qui multiplie tout par 5.

On fusionne : $\boxed{SC = (10^4+10^2+1).25.115 + 2.(1000+100+10).5.21^2}$

Tous calculs faits : 29 529 885

---

Pour créer ces nombres, on va imbriquer des boucles `for`. Si il s'agissait de créer des nombres $abc$ à partir des chiffres 0, 1, 2, 3 et 4 on se contenterait de

```
for a in range(5) :
...for b in range(5) :
......for c in range(5) :
.........print(100*a+10*b+c)
```

Hélàs, ici, il faut prendre nos entiers dans une liste qui saute le 3 et le 4 et ne commence pas à 0 *(Jacques vous dira que pour sauter le* 3 *il faut ne pas manquer de fric).*

On va donc introduire une liste $L$ comme dans les calculs formels : `L=[1,2,5,6,7]` et prendre `100*L[a]+10*L[b]+L[c]` à la place de `100*a+10*b+c`.

Ensuite, il n'y a plus qu'à ajouter ce nombre à la somme des entiers, ajouter son carré à la somme des carrés, et passer au suivant.

Ah, si, un détail, on n'oublie pas d'initialiser les sommes à 0 :

```
somme, sommecarres, compteur = 0, 0, 0
L=[1, 2, 5, 6, 7]
for a in range(5) :
...for b in range(5) :
......for c in range(5) :
.........n=100*L[a]+10*L[b]+L[c]
.........somme+=n
.........sommecarres+=n*n
.........compteur+=1
print(compteur, somme, sommecarres)
```

**DS04** • Une permutation sur l'ensemble des entiers de 0 à 16. • MPSI 2/2013

Chaque fois qu'on prend un entier $k$ entre 0 et 16, on peut calculer son cube *(même si c'est long)*, et le réduire modulo 17. On obtient par définition même de cette réduction un entier entre 0 et 16. Notre application va bien de $E$ dans $E$.

Reste à voir si elle est bijective. On va peut être se contenter de calculer les dix sept images, et vérifier que chaque entier y est présent une fois et une seule. On commence

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $n^3$ | 0 | 1 | 8 | 27 | 64 | |
| $\sigma(n)$ | 0 | 1 | 8 | 10 | 13 | |

, mais déjà ces premiers calculs sont lourds. Pour 5 on doit réduire sans erreur 125 modulo 17 : $125 = 17\times 7+6$. Pour 6 est ce que je craque avec $6^3 = 216$ ? Non ! J'ai $6^3 = 2^3.3^3 = 8.10 \quad mod \quad 17 = 12$. On essaye donc de profiter de ce qui a été fait avant.

De plus, on lit la remarque : $(17-k)^3 = 17^3 - 3.17^2.k + 3.17.k^2 - k^3$. On réduit modulo 17 et il reste $-k^3$ ou même $-\sigma(k)$. Pour ne pas trainer de nombres négatifs : $(17-k)^3 = 17-\sigma(k) \quad mod \quad 17$.

On reformule : l'image du complément à 17 est le complément à 17 de l'image.

Sur un exemple : $\sigma(14) = \sigma(17-3) = -\sigma(3) = -10 = 17-10 = 7$ (le tout modulo 17 évidemment).

Bref, une fois qu'on a la moitié du tableau, on complète par "complément à 17".

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(k)$ | 0 | 1 | 8 | 10 | 13 | 6 | 12 | 3 | 2 | 15 | 14 | 5 | 11 | 4 | 7 | 9 | 16 |

Chaque entier est présent une fois et une seule dans la liste des images, on a bien une bijection.

---

La décomposition en produit de cycles se fait sans plus d'efforts que d'habitude :

$\boxed{\sigma = \overrightarrow{(2,\ \ 8)} \circ \overrightarrow{(3,\ \ 10,\ \ 14,\ \ 7)} \circ \overrightarrow{(4,\ \ 13)} \circ \overrightarrow{(5,\ \ 6,\ \ 12,\ \ 11)} \circ \overrightarrow{(9,\ \ 15)} \circ \overrightarrow{(0)} \circ \overrightarrow{(1)} \circ \overrightarrow{(16)}}$

J'ai fait du zèle en précisant même les monocycles.

*Sinon, je rappelle qu'on peut mettre ces cycles dans l'ordre qu'on veut* (supports disjoints), *et commencer chaque cycle par l'élément que l'on veut :* $\overrightarrow{(3,\ 10,\ 14,\ 7)} = \overrightarrow{(10,\ 14,\ 7,\ 3)}$ *par exemple.*

---

Pour aboutir à $\sigma^n = Id$, il faut et il suffit que chacun des cycles donne l'identité sur son support. Pour les monocycles, pas de problème. Pour les bicycles, il faut et il suffit que l'exposant soit pair. Pour les quadricycles, on aboutit à des multiples de 4 *(qui sont donc pairs)*. On peut conclure : $\boxed{\sigma^n = Id \Leftrightarrow n \in 4.\mathbb{N}}$ *(multiples de* $4$*)*.

---

**DS04** • Premiers calculs de $p_n$ et $G_n$. • MPSI 2/2013

La piste est de longueur $n$. A chaque fois qu'on lance le dé, on avance d'au moins une cas *(sauf si c'est le troisième dé de Efron)*. En au plus $n$ étapes, on a atteint ou dépassé la case $n$, et le jeu est fini par votre victoire ou votre échec.

On notera que si au lieu d'un dé on lançait une pièce *(pile j'avance d'une case, face je reste sur place)*, il y aurait une probabilité non nulle qu'en $N$ étapes, on n'ait toujours pas bougé...

---

• Pour la piste de longueur nulle, il suffit de ne pas lancer le dé pour être déjà arrivé sur la case $n = 0$. On gagne donc avec probabilité 1 et le gain est bien de cinq euros.

• Pour la piste de longueur 1, tout est dit dès le premier lancer. Il faut et il suffit d'obtenir 1 pour gagner *(toute autre valeur fait dépasser la case finale et donc fait perdre)*. La probabilité de gagner est donc $1/6$.

Le gain est de 5 dans un cas sur six et $-1$ dans cinq cas sur six. La moyenne des gains *(ou espérance)* est donc $5.\frac{1}{6} + (-1).\frac{5}{6}$. On trouve bien 0.

• Pour la pise de longueur 2, il y a deux façons de gagner :

-tirer un 2 au premier lancer *(probabilité* $\frac{1}{6}$*)*

-tirer un 1 puis un autre 1 *(probabilité* $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}$*)*

Ces deux événements incompatibles ont une probabilité totale de $\frac{7}{36}$ *(perte :* $\frac{29}{36}$*)*.

Le gain est alors $5.\frac{1}{36} + (-1).\frac{29}{36}$ de valeur $\frac{1}{36}$.

Une formule générale pour le gain :

-avec probabilité $p_n$ on gagne 5

-avec probabilité $1 - p_n$ on gagne $-1$ *(façon de parler algébrique)*

La moyenne pondérée est donc $5.p_n - 1.(1 - p_n)$ : $\boxed{G_n == 6.p_n - 1}$

• Pour une piste de longueur 3, on va regarder suivant le premier tirage :

-plus que 3 : perdu

-exactement 3 : gagné avec probabilité $\frac{1}{6}$

-exactement 2 : il faut ensuite un 1 : probabilité $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}$
-exactement 1 : on peut ensuite soit tirer un 2 *(probabilité* 1/6*)* soit tirer un 1 puis un 1 *(probabilité* 1/36*)* : probabilité $\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}$
On somme et on arrive bien à $\frac{49}{216}$ *(*216 *c'est* $6^3$*)*.

• Pour une piste de longueur 4 : on crée finalement un arbre avec comme première branche le premier lancer
-plus que 5 : perdu
-4 : on gagne : probabilité $\frac{1}{6}$
-3 : on gagne en poursuivant avec la branche 1 : probabilité $\frac{1}{6^2}$
-2 : on gagne avec les branches 2 et $1-1$ : probabilité $\frac{1}{6}.\frac{7}{36}$
-1 : il reste à parcourir une piste de longueur 3 : probabilité $\frac{1}{6}.p_3$
La probabilité totale est $\frac{343}{6^4}$.
La calcul de gain en découle : $\frac{127}{216}$

• Pour une piste de longueur 5, on s'inspire de la suite. On regarde en fonction du premier lancer :

| premier lancer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | piste 4 | piste 3 | piste 2 | piste 1 | gagné | perdu |
| probabilité | $p_4/6$ | $p_3/6$ | $p_2/6$ | $p_1/6$ | 1 | 0 |

On somme et on trouve : $p_n=\frac{2401}{7776}$ et $G_n=\frac{1105}{1296}$ *(positif)*.

On peut résumer avec les branches
[1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 2], [1, 1, 2, 1], [1, 2, 1, 1], [2, 1, 1, 1], [1, 1, 3], [1, 3, 1], [3, 1, 1], [1, 2, 2], [2, 1, 2], [2, 2, 1], [3, 2], [2, 3], [1, 4], [4, 1], [5]

Ceux qui avaient la formule calculant $G_n$ à l'aide de $p_n$ pouvaient remonter.

• Un tableau simlaire donne $p_6=\frac{16\ 807}{66\ 656}$ et permet de calculer $G_6$ *(positif encore)*.

**DS04** • La formule de récurrence. • MPSI 2/2013

On doit parcourir une piste de longueur $n+6$. Le jet du premier dé nous permet d'avancer, et de regarder alors la piste qu'il nous reste à parcourir et la probabilité associée :

| lancer | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| proba | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 | 1/6 |
| piste restante | n-1 | n-2 | n-3 | n-4 | n-5 | n-6 |
| proba de la branche | $p_{n-1}/6$ | $p_{n-2}/6$ | $p_{n-3}/6$ | $p_{n-4}/6$ | $p_{n-5}/6$ | $p_{n-6}/6$ |

On somme ces événements incompatibles et on met le $\frac{1}{6}$ en facteur de la somme des $p_{n-k}$.

Pour $n$ négatif, cette formule est quand même encore cohérente, à condition de considérer : $p_{-1}=p_{-2}=p_{-3}=p_{-5}=0$.
C'est d'ailleurs elle qui m'a servi à rédiger la première question, en considérant qu'effectivement un tirage trop élévé au premier dé conduit à des branches nulles.

**DS04** • Calcul vectoriel. • MPSI 2/2013

Je donne directement la réponse :

$$U_{n+1}=\begin{pmatrix} p_{n+1}\\ p_{n+2}\\ p_{n+3}\\ p_{n+4}\\ p_{n+5}\\ p_{n+6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{n+1}\\ p_{n+2}\\ p_{n+3}\\ p_{n+4}\\ p_{n+5}\\ (p_n+\ldots+p_{n+5})/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1\\ 1/6&1/6&1/6&1/6&1/6&1/6\end{pmatrix}.\begin{pmatrix} p_n\\ p_{n+1}\\ p_{n+2}\\ p_{n+3}\\ p_{n+4}\\ p_{n+5}\end{pmatrix}$$

Les 1 juste au dessus de la diagonale sont là pour décaler les indices.
La ligne de 1/6 correspond à la formule de récurrence qui donne le nouveau venu à l'aide des précédents.

Par récurrence immédiate *(non conduite ici)* ou en invoquant une suite géométrique de raison matricielle $M$, on a $U_n = M^n.U_0$.

Il reste encore à calculer $M^n$, peut être en diagonalisant...
Mais il faut encore trouver qui vont être les termes diagonaux de la matrice $D$ et ensuite qui il faudra mettre dans la matrice $P$.
On va devoir utiliser un polynôme associé à la matrice $M$ et à notre problème de chaîne de Markov.

**DS04** • Le polynôme $6.X^6 - X^5 - X^4 - X^3 - X^2 - X - 1$. • MPSI 2/2013

Oncalcule $Q(1) = 6 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 - 1 = 0$.
On pose la division : $Q(X) = (X - 1).(6.X^5 + 5.X^4 + 4.X^3 + 3.X^2 + 2.X + 1)$.
Si $r$ est une racine de $Q$ autre que 1, alors on a $6.r^5 + 5.r^4 + 4.r^3 + 3.r^2 + 2.r + 1 = 0$ par intégrité.
Mais si $r$ est positif, la somme $6.r^5 + 5.r^4 + 4.r^3 + 3.r^2 + 2.r + 1$ est strictement positive et ne peut être nulle.
Ce raisonnement par l'absurde prouve que la seule racine réelle positive est 1.

---

On calcule : $Q(-1) = 6 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 = 6$ et $Q(0) = -1$.
Par le théorème des valeurs intermédiaires, $Q$ s'annule au moins une fois entre $-1$ et 0.
On affine : $Q(-1/2) = -9/16$. C'est donc entre $-1$ et $1/2$ qu'on peut localiser une racine.

---

Unicité de la racine réelle négative.
L'équation s'écrit $6.x^6 = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$ soit encore $6.x^6 = \dfrac{1 - x^6}{1 - x}$ puis enfin par produit en croix : $6.x^7 - 7.x^6 + 1 = 0$.
L'application auxilliaire $x \longmapsto 6.x^7 - 7.x^6 + 1$ est négative en $-1$, psotive en 0 et surtout, elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}^-$.
En effet, sa dérivée n'est autre que $x \longmapsto 42.(x^6 - x^5)$ avec $x^6$ positif et $-x^5$ aussi.
Par croissance stricte, cette application ne peut s'annuler qu'une fois sur $[-1,\ 0]$, et c'est au point $r_1$.

---

On considère alors une suite de raison $r_1$ : $u_n = u_0.(r_1)^n$ pour tout $n$. On calcule alors $\dfrac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + u_{n+5}}{6}$ (objectif : $u_{n+6}$).
On factorise cette somme $\dfrac{u_0.(r_1)^n}{6}.\Big(1 + r_1 + (r_1)^2 + (r_1)^3 + (r_1)^4 + (r_1)^5\Big)$.
Or, $r_1$ est racine de $Q$ donc $Q(r_1) = 0$ puis $1 + r_1 + (r_1)^2 + (r_1)^3 + (r_1)^4 + (r_1)^5 = 6.(r_1)^6$.
On remplace, on simplifie par 6 : $\dfrac{u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + u_{n+4} + u_{n+5}}{6} = u_0.(r_1)^n.(r_1)^6 = u_{n+6}$.
La suite vérifie la même relation de récurrence.

**DS04** • Racines complexes. • MPSI 2/2013

Soit $r$ une racine complexe de $Q$. On a donc $6.r^6 - \sum_{k=0}^{5} r^k = 0$, et donc $6.r^6 = r^5 + r^4 + r^3 + r^2 + r + 1$.

On passe au module : $6.\rho^6 = |1+r+r^2+r^3+r^4+r^5| \leqslant 1+\rho+\rho^2+\rho^3+\rho^4+\rho^5$ *(inégalité triangulaire que je traiterai même de polygonale)*.

On a l'inégalité demandée, mais elle semble rester large.

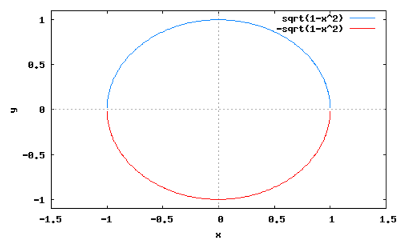
Toutefois, pour qu'elle puisse être une égalité, il faudrait que $1$, $r$, $r^2$ et ainsi de suite soient colinéaires. Mais alors $r$ serait réel *(comme* $1$*)*. C'est justement le cas qu'on a décéidé de mettre de côté.

---

Repartant de $6.\rho^6 \leqslant 1 + \rho + \ldots + \rho^7$ on cherche à estimer $\rho$ et à le localiser par rapport à 1. On regarde l'application différence : c'est $Q$ (sur $[0,\ +\infty[$. Elle est négative en 0, nulle en 1, où elle devient positive. La condition $Q(\rho) < 0$ se traduit immédiatement par $\rho < 1$.

C'est amusant de voir que l'étude sur $\mathbb{R}$ a des répercussions sur l'étude sur $\mathbb{C}$.

On localise donc les racines comme suggéré dans l'énoncé :




Le logiciel SciLab que vous pratiquerez après Python pour les calculs donne la liste des racines dans $\mathbb{C}$ en valeur approchée :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $-0,3756 + 0,5701.i$ | $0,2941 + 0,6683.i$ | |
| $-0,6703$ | | | 1 vraie valeur |
| | $-0,3756 - 0,5701.i$ | $0,2941 - 0,6683.i$ | |

---

On prend donc une des racines $r_k$ et on l'élève à la puissance $n$.

Si il s'agit de $r_0$, on trouve $1^n$ c'est à dire 1, de limite 1.

Si il s'agit de $r_1$, la suite géométrique de raison $r_1$ strictement plus petite que 1 en valeur absolue tend vers 0.

Si il s'agit d'une des autres racines *(complexes non réelles)*, on l'écrit $\rho_k.e^{i.\theta_k}$ et on a $(\rho_k)^n.e^{i.n.\theta_k}$. Le complexe $e^{i.n.\theta_k}$ reste borné de module 1 et le réel $(\rho_k)^n$ tend vers 0. La suite $((r_k)^n)$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.

On résume : les cinq suites $((r_k)^n)$ *(pour $k$ autre que* $0$*)* tendent vers 0, et $(r_0)^n)$ est constante égale à 1.

**DS04** • Relation $M.P = P.D.$ • MPSI 2/2013

On écrt tout le contenu de la matrice $D$ et de la matrice $P$ puis on effectue le produit $P.D$ :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_5 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & (r_3)^3 & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & (r_3)^4 & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & (r_3)^5 & (r_4)^5 & (r_5)^5 \end{pmatrix} \qquad P.D = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & (r_3)^3 & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & (r_3)^4 & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & (r_3)^5 & (r_4)^5 & (r_5)^5 \\ 1 & (r_1)^6 & (r_2)^6 & (r_3)^6 & (r_4)^6 & (r_5)^6 \end{pmatrix}$$

*Chaque $r_k$ de la diagonale de $D$ sert à multiplier une colonne par $r_k$. Et comme cette colonne est déjà une*

*“suite géométrique”, elle le reste, avec juste un décallage.*
On calcule ensuite $M.P$ :

| | |
|---|---|
| | $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & . & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 & . & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & . & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & . & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & . & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & . & (r_4)^5 & (r_5)^5 \end{pmatrix}$ |
| $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$ | $M.P = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & . & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & . & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & . & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & . & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & . & (r_4)^5 & (r_5)^5 \\ \star & * & * & . & * & * \end{pmatrix}$ |

Les 1 juste au dessus de la diagonale servent justement à décaller vers le bas.

Mais il reste le problème de la dernière ligne du produit $M.P$ (issu de la dernière ligne de $M$ avec les colonnes de $D$. Il s'agit de sommes du type $\dfrac{1 + r_k + (r_k)^2 + (r_k)^3 + (r_k)^4 + (r_k)^5}{6}$. Mais comme les $r_k$ sont racines de $Q$ ces moyennes valent $\dfrac{6.(r_k)^6}{6}$.
On a donc bien $M.P = P.D$ pour les trente six termes de ces matrices produits.

---

On déduit alors $M = P.D.P^{-1}$ en multipliant à droite par $P^{-1}$ *(inversibilité)*.
Par concaténation maintenant classique, on a $M^n = P.D^n.P^{-1}$.
On explicite :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & (r_3)^3 & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & (r_3)^4 & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & (r_3)^5 & (r_4)^5 & (r_5)^5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (r_1)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (r_2)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (r_3)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (r_4)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (r_5)^n \end{pmatrix} .P^{-1}$$

On fait tendre $n$ vers l'infini :

$$M^n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 & r_5 \\ 1 & (r_1)^2 & (r_2)^2 & (r_3)^2 & (r_4)^2 & (r_5)^2 \\ 1 & (r_1)^3 & (r_2)^3 & (r_3)^3 & (r_4)^3 & (r_5)^3 \\ 1 & (r_1)^4 & (r_2)^4 & (r_3)^4 & (r_4)^4 & (r_5)^4 \\ 1 & (r_1)^5 & (r_2)^5 & (r_3)^5 & (r_4)^5 & (r_5)^5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1}$$ puisque les raisons sont plus petites que 1 en valeur absolue.

On simplifie en $M^n \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .P^{-1}$. Il ne va rester que la première ligne de $P^{-1}$ répétée six fois (imaginez les colonnes qui tombent sur les lignes : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a" & b" & c" \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}$).

Pour trouver ensuite $p_n$, on regarde $U_n = M^n.U_0$ et même $M^{n+6}.U_{-6}$. Pourquoi cette formule ? Parce que $U_{-6}$ est un vecteur dont toutes les composantes sont nulles sauf une qui vaut 1. Le produit de la matrice limite (notée abusivement $M^\infty$) par ce vecteur colonne donne alors le dernier terme de la ligne de $M^\infty$ répété six fois.

La valeur limite de $p_n$ est donc ce coefficient issu de la matrice $P^{-1}$ en ligne 1 colonne 6 (ou ligne 0 colonne 5 avec les conventions pythoniennes).

C'est un déterminant de taille 5 issu de la matrice $P$ si l'on en croit les formules du cours.

On trouve alors $0,285714$ à $10^{-6}$ près, en utilisant un logiciel de calcul scientifique.

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | 252 points | $DS04$ |

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Vendredi 20 décembre

$DS05$

MPSI 2/2013 **POLYGONES** $DS05$

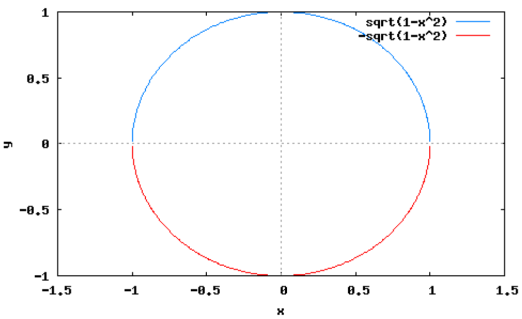
- 1) Dans le plan affine euclidien usuel, on considère le cercle unité *(lieu des points $M$ vérifiant $OM = 1$)*. Pour $n$ fixé, on y dispose $n$ points formant un polygône convexe régulier à $n$ sommets notés $A_0$ à $A_{n-1}$ et évrifiant donc $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-2}A_{n-1} = A_{n-1}A_0$. On note alors $P_n$ le produit $\prod_{i \neq j} A_iA_j$.

En quelle unité se mesure $P_n$ ? •1 pt.•

Complétez le tableau :

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | | | | | |

en explicitant les diverses mesures $A_iA_j$. Peut on définir $A_1$ ? •7 pt.•




- 2) On suppose que $A_0$ a pour affixe 1. Donnez les affixes $a_k$ de chacun des $A_k$. Identifiez les polynômes $\prod_{0 \leq k < n} (X - a_k)$ et $\prod_{1 \leq k < n} (X - a_k)$. •3 pt.• Déduisez la valeur de $\prod_{1 \leq k < n} (1 - a_k)$ et de $\prod_{1 \leq k < n} A_0A_k$. •2 pt.•
- 3) Calculez alors $P_n$. •2 pt.•
*(exercice inspiré par Jean Cornillon, professeur de Spé PC en nos murs vénérables)*

---

- 4) On place cette fois huit points $S_0$ à $S_7$ sur la sphère de rayon 1 formant un cube. Calculez $\prod_{i \neq j} S_iS_j$. •3 pt.•

18 points ——— 18 points

- 1) $n$ est un entier donné. On pose $r = e^{2.i.\pi/n}$. On note $V$ la matrice de taille $n$ sur $n$ de terme général (ligne $l$, colonne $k$) $r^{l.k}$. Donnez $V_n$, $\det(V_n)$, $Tr(V_n)$ et $(V_n)^2$ pour $n$ décrivant $\{1, 2, 3, 4\}$ *(pour le déterminant de $V_4$, je vous conseille des combinaisons sur les colonnes)*. •5 pt.•
- 2) Calculez les termes de première colonne et première ligne de $(V_n)^2$. •2 pt.•
- 3) Rappelez la formule qui calcule le terme général $c_i^k$ du produit de deux matrices. Montrez que le terme général $c_i^k$ du produit $(V_n)^2$ est la somme d'une série géométrique que vous calculerez. •3 pt.•
- 4) Calculez le déterminant de $(V_n)^2$. Retrouvez le module de $\det(V_n)$. •2 pt.•

---

- 1) On rappelle que le déterminant de la matrice de VanDerMonde $V(a_0, \ldots a_{n-1})$ est $\prod_{i<j} (a_j - a_i)$.

Reliez les deux parties de ce problème. •2 pt.•

14 points ——— 14 points

MPSI 2/2013 **EXERCICES** $DS05$

$\diamond 16$ Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$ dont les coefficients sont tous entiers. Montrez que son déterminant est entier. On suppose que les $a_i^i$ sont impairs et que les $a_i^k$ sont pairs pour $k$ différent de

$i$. Montrez que $\det(A)$ est impair. $A$ est-elle inversible ? •3 pt.•

◇17 On note $\Omega_n$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$ dont les coefficients diagonaux sont des entiers pairs et les autres des entiers impairs. Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\Omega_3$ mais n'est pas inversible. •1 pt.•

◇18 Montrez que $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est dans $\Omega_5$. Est elle inversible ? Montrez qu'il existe dans $\Omega_{2.n+1}$ des matrices inversibles. •3 pt.•

◇19 Montrez que les éléments de $\Omega_{2.n}$ ont tous un déterminant impair. •2 pt.•

---

♣7 Un élève propose la définition suivante pour un groupe commutatif $(G, *)$ :
$\forall (a,b,c) \in G^3,\ (a * b \in G),\ a * (b * c) = (b * a) * c,\ \exists e \in G,\ a * e = a$ et $\forall a \in G,\ \exists \alpha \in G,\ a * \alpha = e$.
Montrez que sa définition est équivalente à la bonne définition. •2 pt.•

---

♠14
Soit $f$ une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(x+1)/3$ pour tout $x$. Montrez par récurrence que $f$ est alors dérivable autant de fois qu'on veut. •2 pt.•

Montrez pour tout $x$ et tout $n$ : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k.f(k)}{3^k.k!} + \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}.n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f(n+1+t.x).dt$ •3 pt.•

♠15 Montrez qu'il existe deux valeurs de $\alpha$ telles que l'application $x \longmapsto e^{\alpha.x}$ vérifie notre équation presque différentielle. •3 pt.•
*(Exercice emprunté à J-C.Jacquens, vénérable professeur de MP*)*

19 points — 19 points

## MPSI 2/2013 — Dé à cinq faces — $DS05$

On imagine qu'on dispose d'un dé à cinq faces équilibré. Ses faces sont numérotées de 1 à 5. On effectue un tirage (variable aléatoire notée $X$). Calculez son espérance, sa variance. Calculez $E(X^3)$ et $E(X^4)$. •2 pt.•

---

Mais finalement, le dé n'est pas si équilibré. On mesure : $E(X) = \frac{29}{12}$, $E(X^2) = \frac{29}{4}$, $E(X^3) = \frac{305}{12}$, $E(X^4) = \frac{397}{4}$. Calculez la variance de la variable aléatoire $X$. Calculez $P(X = 5)$ *(probabilité de tirer* 5*)*. •4 pt.•

MPSI 2/2013 — 309 points — $DS05$

**DS05** • Premiers calculs de $P_n$. • MPSI 2/2013

Le réel positif $P_n$ est un produit de longueurs. Il se mesure en $mtres^N$ où $N$ est le nombre de termes du produit. On compte les indices : il y a $n$ indices $i$ possibles et pour chaque valeur de $i$, il y a $n-1$ valeurs de $j$ possibles. Le nombre $P_n$ est donc en $m^{n.(n-1)}$.

---

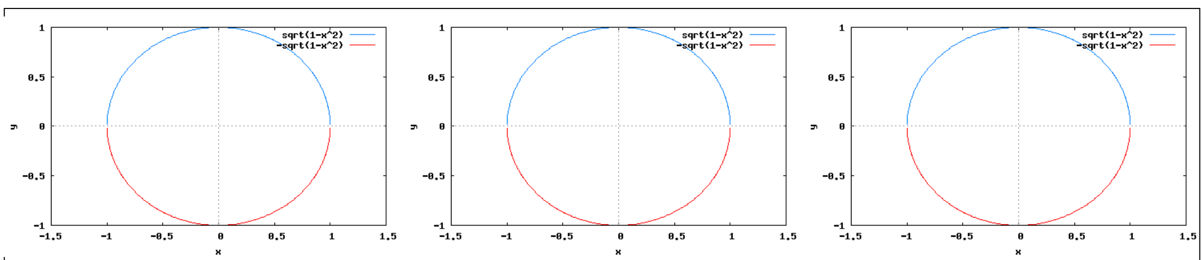
• Le cas $n = 2$ est plus du domaine de la logique que de la géométrie. Il n'y a que deux sommets. Comme ils forment un "poly"gone régulier, c'est qu'ils sont diamétralement opposés. On a donc $A_0A_1 = 2$ *(un diamètre)*. On calcule : $P_2 = A_1A_2.A_2A_1 = 4$.

---

• Le cas $n = 3$ est celui du triangle équilatéral. La longueur du côté de ce triangle circonscrit au cercle unité est $\sqrt{3}$. On la retrouve par triangle isocèle. Ou alors par $|1 - e^{2.i.\pi/3}|$.
Les longueur $A_iA_k$ avec $i \neq k$ valent toutes $\sqrt{3}$. On les compte six fois *(trois choix pour $i$ et deux pour $j$)*. On a alors $P_3 = (\sqrt{3})^6 = 27$.

---

• Pour $n = 4$ on a un carré. Sa diagonale vaut 2 *(points diamétralement opposés)*. Son côté vaut alors $\sqrt{2}$ *(c'est $IJ$ dans un cas particulier où $A_0$ est en $I$)*.
On compte quatre cas où $A_iA_k$ vaut 2. On compte huite cas où $A_iA_k$ vaut $\sqrt{2}$ : $A_0A_1$, $A_1A_2$, $A_2A_3$, $A_3A_0$, $A_0A_3$, $A_3A_2$, $A_2A_1$, $A_1A_0$.
Le produit $P_4$ vaut $2^4.(\sqrt{2})^8$ c'est à dire $2^8$. Ou même $4^4$.




---

• Pour $n$ égal à 6, on a un hexagone régulier. Il y a des côtés, de longueur 1. Il y a des "petites diagonales" de longueur $\sqrt{3}$ *(côtés du triangle équilatéral)*. Il y a de grandes diagonales de longueur 2.
On compte douze côtés *(six en fait, mais chacun est compté dans deux sens)*. On compte aussi douze petites diagonales *(six sommets, deux à partir de chaque sommet)*. On compte enfin six grandes diagonales.
Le bilan est $1^{12}.(\sqrt{3})^{12}.2^6$. On calcule : $6^6$.

---

• On termine avec le cas de l'octogone. Il y a huit sommets $A_i$. Depuis chaque sommet, il part
○ deux côtés de longueur $\sqrt{2-\sqrt{2}}$.
○ deux mini-diagonales de longueur $\sqrt{2}$ *(le retour de $IJ$)*
○ deux diagonales de longueur $\sqrt{2+\sqrt{2}}$
○ un diamètre de longueur 2.
Pour chaque sommet $A_k$ : $\prod_{i\neq k} A_kA_j = (\sqrt{2-\sqrt{2}})^2.(\sqrt{2})^2.(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2.2$.
Ce nombre vaut $(4-2).2.2$ c'est à dire 8.
Comme il y a huit sommets ce produit est lui même élevé à la puissance 8. On trouve $P_8 = 8^8$.
J'ai obtenu la longueur des "diagonales" inattendues par de la trigonométrie sur $\cos(\pi/8)$. Ou alors, j'ai mesuré la distance de $(1,\ 0)$ à $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, puis de $(1,\ 0)$ à $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Je résume :

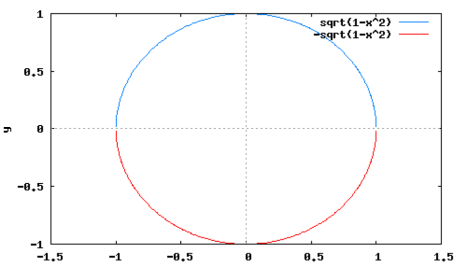
| $n$ | 2 | 3 | 4 | 6 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_n$ | $2^2 = 4$ | $3^3 = 27$ | $4^4 = 256$ | $6^6 = 46656$ | $8^8 =$ | |

On conjecture $P_n = n^n$.
*Sachez toutefois que l'on ne l'a prouvé que pour quelques valeurs de $n$. Et rien ne permet à ce stade de généraliser la formule, sauf la volonté de certains de se comporter comme des individus sans formation scientifique.*

$A_1$ devient une question de pure logique. Il n'y a qu'un point : $A_0$ *(joli polygone)*. Il n'y a alors aucun côté $A_iA_j$ avec $j$ différent de $i$.
Le produit est vide. Et un produit vide est initialisé à 1 (comme une somme vide s'initialise à 0, neutre additif).
On a donc aussi $A_1 = 1^1$.

**DS05** • Des affixes pour les sommets. • MPSI 2/2013

Le point $A_0$ est 1. Les autres points sont de module 1 et d'argument multiple de $2.\pi/n$ pour espacer régulièrement.
On a donc $A_k = e^{2.i.k.\pi/n}$ avec $k$ de 0 à $n-1$.




Le polynôme $\prod_{k=0}^{n-1}(X - a_k)$ est le polynôme unitaire dont les racines sont les $a_k$. On le connaît dans l'autre sens. C'est $X^n - 1$.
Si l'on regarde $\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)$, il manque la racine 1. Le polynôme est donc $\dfrac{X^n - 1}{X - 1}$ pour bien avoir ses $n-1$ racines.
La formule de la série géométrique *(utilisée dans un sens inhabituel)* se retourne en $X^{n-1}+X^{n-2}+\ldots+1$ *(de degré $n-1$ effectivement)*.

On prend alors $X$ égal à 1 : $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - a_k) = 1^{n-1} + 1^{n-2} + \ldots + 1$. Comme cette somme contient $n$ termes, on a $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - a_k) = n$.

On passe au module *(module du produit, produit des modules)* : $\prod_{k=1}^{n-1}|1 - a_k| = |n|$ soit encore : $\left|\prod_{k=1}^{n-1}(1 - e^{2.i.k.\pi/n})\right| = n$

**DS05** • Produit des longueurs. • MPSI 2/2013

Pour $A_0$ on reconnaît qu'on vient de prouver : $\prod_{k=1}^{n-1} A_0A_k = n$.

De plus, par simple rotation d'angle $2.\pi/n$, on aussi $\prod_{k\neq 1} A_1A_k = n$, puis encore par rotation pour tout $j$ : $\prod_{k\neq j} A_jA_k = n$.

On effectue le produit de tous ces produits, et on a $\prod_{j=0}^{j=n}\Big(\prod_{k\neq j} A_jA_k\Big) = n^n$. Et ce premier membre n'est autre que le produit cherché de toutes les "diagonales" et côtés.

On a donc bien $\boxed{\prod_{j\neq k} A_jA_k = n^n}$ pour tout $n$.

**DS05** • Un cube dans la sphère unité. • MPSI 2/2013

On prend donc un cube et on mesure toutes les longueurs des côtés et diagonales plus ou moins grandes. On commence par le cube de côté 1 parce que c'est plus facile. Et on mesure les côtés, petites et grandes diagonales :

| | arête | petite diagonale | grande diagonale |
|---|---|---|---|
| longueur | 1 | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| nombre | 24 | 24 | 8 |
| contribution | $1^{24}$ | $2^{12}$ | $3^4$ |

Il y a bien douze arêtes *(quatre pour le carré de base, quatre pour le carré du haut et quatre pour relier les carrés entre eux)*. Mais chacune compte une fois par sommet.
Les petites diagonales sont les diagonales des faces, de longueur $\sqrt{2}$ *(diagonale d'un carré unité)*, et il y en a douze *(deux par faces)*, mais chacune est comptée deux fois suivant orientation ($S_jS_k = S_kS_j$).
Les grandes diagonales ont pour longueur $\sqrt{3}$ *(soit avec un triangle rectangle de côté* $1$ *et* $\sqrt{2}$*, soit avec la distance de* $(0,0,0)$ *à* $(1,1,1)$*)*. Il en part une de chaque sommet.

On vérifie : on a compté 56 longueurs. Et c'est justement 8.7. Huit choix pour le sommet $S_i$ et sept choix pour le sommet $S_j$.

Le grand produit vaut $1^{24}.2^{12}.3^4 = 331776$ si on y tient.
*Simplement, il ne correspond pas au bon cube. On a pris ici le cube de côté* $1$*. Il va flotter dans la sphère de rayon* $1$*. Il faut le dilater dans un certain rapport.*
*Oui, mais lequel ?*
Simple ! Si le cube est inscrit sur la sphère de rayon 1, alors sa grande diagonale relier deux points diamétralement opposés, c'est à dire à distance 2. Il faut donc passer de $\sqrt{3}$ à 2, par homothétie de rapport $2/\sqrt{3}$.

| | arête | petite diagonale | grande diagonale |
|---|---|---|---|
| longueur | $2/\sqrt{3}$ | $2.\sqrt{2}/\sqrt{3}$ | 2 |
| nombre | 24 | 24 | 8 |
| contribution | $2^{24}/3^{12}$ | $2^{36}/3^{12}$ | $2^8$ |

Le réel cherché vaut $\boxed{2^{68}/3^{24}}$ et il se mesure en $m^{56}$.

On pouvait aussi repartir de $2^{12}.3^4$ et multiplier par $(2/\sqrt{3})^{56}$ par homogénéité. *Je réfléchis à la généralisation de cet exercice en dimension* $n$*.*

**DS05** • Les matrices $V_n$. • MPSI 2/2013

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $r$ | 1 | $-1$ | $j$ | $i$ |
| $V_n$ | $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ |
| $\det(V_n)$ | 1 | $-2$ | $-3.i.\sqrt{3}$ | $-16.i$ |
| $tr(V_n)$ | 1 | 0 | $i.\sqrt{3}$ | $2+2.i$ |
| $(V_n)^2$ | $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ |

Seuls les déterminants posent problème.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & j & j^2 \\ 0 & j^2 & j \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} j & j^2 \\ j^2 & j \end{vmatrix} = 3.(j^2 - j) = 3.(-\sqrt{3}.i)$$

en additionnant toutes les colonnes sur la première, en développant et en rappelant qui est $j$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4.\begin{vmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -i & 0 \end{vmatrix} = 8.\begin{vmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{vmatrix}$$

par combinaisons du type $C_2 = C_2 + C_0$, $C_3 = C_3 + C_1$, $C'_3 = C'_3 + C'_2$ et développement en colonnes.

On peut aussi calculer $\det((V_4)^2)$ par la matrice $(V_4)^2$ et se poser la question du signe.

**DS05** • Calcul de $(V_n)^2$. • MPSI 2/2013

De tête $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ 1 & r^2 & r^4 & \dots & r^{2.n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & r^{2.n-2} & \dots & r^{\cdots} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ 1 & r^2 & r^4 & \dots & r^{2.n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & r^{2.n-2} & \dots & r^{\cdots} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots \\ 0 & . & . & \dots & . \end{pmatrix}$.

Le $n$ en position $(0,0)$ (indexation du reptile) est simplement une somme de $n$ termes égaux à $1 \times 1$.

Les termes nuls de la première ligne sont issus de sommes du type $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} r^{l.k}$ dans lequels on reconnaît une série géométrique $\dfrac{1-(r^l)^n}{1-r^l}$. Or, $r^{l.n}$ est égal à $(r^n)^l$ donc à 1.

Chacun de ces termes est donc bien nul. De même pour les termes de la première colonne.

---

La formule générale est $c_i^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_i^j.b_j^k$.

Dans le cas de notre matrice $V_n$ avec elle même, on calcule une horreur telle que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} r^{i.j}.r^{j.k}$.

On la reformule en $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \left(r^{i+k}\right)^j$.

On reconnapit bien une série géométrique de premier terme 1 et de raison $r^{i.k}$.

Sa somme vaut $\dfrac{1-(r^{i+k})^n}{1-r^{i+k}}$. On étudie le numérateur $1-(r^n)^{i+k} = 1-1^{i+k} = 0$.

Bref, cette somme est systématiquement nulle.

Il faut quand même se méfier d'un cas : celui où la raison de la suite vaut 1. On doit donc traiter à part le cas $i+k=n$ ou $i+k=0$.
Le cas $i+k=0$ a déjà été traité, c'est le terme de position $(0,0)$.
De plus, $i+k$ ne peut pas atteindre ou dépasser $2.n$.
Il nous reste donc les uniques cas $k=n-i$. Pour eux, la raison vaut 1. Tous les termes de la somme sont égaux. Il y en a $n$ et le terme de position $(i,\ n-i)$ de la matrice $(V_n)^2$ vaut $n$.

On remplit donc $(V_n)^2$ avec des 0 et des $n$ : $\boxed{(V_n)^2=\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

*On retrouve bien le résultat que l'on pouvait conjecturer avec les petites dimensions.*
On calcule alors le déterminant de $(V_n)^2$ en remettant les colonnes dans l'ordre pour obtenir une matrice diagonale.
On garde la première colonne, et on permute les suivantes deux à deux : $C_1 <-> C_{n-1}$, $C_2 <-> C_{n-2}$ et plus généralement $C_k <-> C_{n-k}$ *(facile à expliciter avec une indexation de 0 à $n-1$).*
Combien d'échanges ? Tout dépend de la parité de $n$ et plutôt de celle de $n-1$.
Pour $n-1$ pair : $(n-1)/2$ changements de signes.
Pour $n-1$ impair : $(n-2)/2$ changements de signes *(voyez sur $(V_4)^2$).*
Une fois que la matrice est diagonale, on effectue le produit des termes diagonaux : $n^n$.

On peut conclure proprement suivant la valeur de $n$ modulo 4 :

| $n \quad mod \quad 4$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $\det((V_n)^2)$ | $-n^n$ | $n^n$ | $n^n$ | $-n^n$ |

La propriété de morphisme du déterminant donne alors $(\det(V_n))^2=-n^n$. Il reste donc une ambigüité sur le signe. Mais tant qu'on se contente du module : $\boxed{|\det(V_n)|=n^{n/2}=(\sqrt{n})^n}$

**DS05** • Le lien entre nos deux parties. • MPSI 2/2013

La matrice $V_n$ est une matrice de VanDerMonde, associée à la liste $[1,\ r,\ r^2,\ \dots r^{n-1}]$. la valeur absolue de son déterminant est donc $\left|\prod_{0\leq i<j<n}(r^j-r^i)\right|$.
Si on passe au carré, par symétrie des rôles, on a $\left|\prod_{j\neq i}(r^j-r^i)\right|$ et même $\prod_{j\neq i}|r^j-r^i|$.
On reconnaît alors géométriquement $\prod_{j\neq i}A_iA_j$ où les $A_k$ sont les sommets du polygone convexe régulier.

**DS05** • Un groupe commutatif. • MPSI 2/2013

On doit prouver deux choses :
• un groupe abélien obéit à cette quantification
• une structure obéissant à cette définition est un groupe abélien
On suppose que $(G,*)$ est un groupe abélien.
On a alors le caractère interne. On a la présence du neutre. On a les symétriques. Il manque la formule $a*(b*c)=(b*a)*c$. On l'a par associativité et commutativité :
$a*(b*c)=(a*b)*x=(b*a)*c$.

Pour l'autre sens, on prend un ensemble vérifiant les quelques propriétés de l'énoncé. Il faut alors vérifier qu'on a bien un groupe abélien. On a déjà "loi interne".
Dans $\exists e \in G,\ \forall a \in G,\ a * e = a$, on identifie l'existence d'un enutre à droite.
Pour $a$ et $b$ donnés, on a alors $a*(b*e) = (b*a)*e$ par cas particulier $c = e$. On profite de la neutralité de $e$ : $a*(b) = (b*a)$.
La loi est commutative.
On se donne alors $a$, $b$ et $c$. On a alors $a*(b*c) = (b*a)*c = (a*b)*c$ avec la commutativité démontrée plus haut.
On revient sur le neutre à droite $e$. Comme on a établi la commutativité, il est aussi neutre à gauche.
De même, chaque élément a un symétrique à droite, donc aussi à gauche.

*La seule vraie difficulté dans un tel exercice : comprendre ce qu'il faut prouver.*

---

**DS05** • Applications $f'(x) = f(x+1)/3$. • MPSI 2/2013

On ne sait pas encore s'il existe des applications vérifiant $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x+1)/3$ mais on va travailler dessus.
On suppose que $f$ vérifie cette propriété. Elle est alors nécessairement dérivable pour pouvoir parler de $f'(x)$.
Mais alors $x \longmapsto f(x+1)/3$ est à son tour dérivable, comme composée. On en déduit que $f'$ est dérivable. On reconnaît que $f$ est deux fois dérivable.

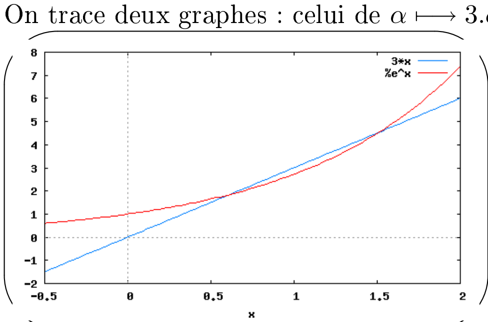
On va montrer par récurrence sur $n$ déjà initialisée que $f$ est au moins $n$ fois dérivable.
Supposons que $f$ soit $n$ fois dérivable. Alors $x \longmapsto f(x+1)/3$ est $n$ fois dérivable. Par identification, $f'$ est $n$ fois dérivable. Et ceci signifie que $f$ est $n+1$ fois dérivable.

Par principe de récurrence, $f$ est dérivable au moins $n$ fois pour tout $n$. De plus, on a $f^{(n)}(x) = \dfrac{f(x+n)}{3^n}$ par récurrence sur $n$ aussi.

On écrit alors la formule de Taylor avec reste intégrale pour $f$ entre 0 e $x$ à l'ordre $n$ :
$$f(0+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0).x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(0+t.x).dt$$
Il ne reste plus qu'à remplacer les $f^{(k)}$ par des translatées.

---

On prend l'application $x \longmapsto e^{\alpha.x}$ et on la dérive : $x \longmapsto \alpha.e^{\alpha.x}$. On doit l'identifier avec $x \longmapsto \dfrac{e^{\alpha.x}.e^{\alpha}}{3}$.
La condition nécessaire et suffisante est $e^{\alpha}/3 = \alpha$.
On se demande si il existe des valeurs de $\alpha$ vérifiant cette relation.
Aucune ne nous saute aux yeux, sauf cas de bluff idiot.
Alors quoi ? Il n'y aurait pas de réel $\alpha$ vérifiant $e^{\alpha} = 3.\alpha$ ?
On trace deux graphes : celui de $\alpha \longmapsto 3.\alpha$ et l'exponentielle.



On comprend qu'il y aura une intersection.
Reste à le prouver proprement *(pléonasme)*. On définit l'application différence : $x \longmapsto e^x - 3.x$. Elle est positive en 0. En 1 elle est négative. En 2 elle est redevenue positive. Par théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins deux solutions $\alpha$.

---

**DS05** • Un dé à cinq faces. • MPSI 2/2013

Si le dé est équilibré, alors avec des notations évidentes : $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = \dfrac{1}{5}$ *(toutes les faces sont équiprobables et la somme des probabilités vaut* 1*)*. On calcule les diverses espérances :

| $E(X)$ | $E(X^2)$ | $E(X^3)$ | $E(X^4)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{1+2+3+4+5}{5}$ | $\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5}$ | $\frac{1^3+2^3+3^3+4^3+5^3}{5}$ | $\frac{1^4+2^4+3^4+4^4+5^4}{5}$ | |
| 3 | 11 | 45 | 979/5 | |

On déduit la variance : $E(X^2) - E(X)^2 = 11 - 3^2 = 2$.

---

Mais le dé n'est pas équilibré *(et pour cause, vous connaissez un solide régulier à cinq faces ?)*. Les probabilités ne sont pas forcémet égales. On a donc cinq inconnues $p_1$ à $p_5$ *(entre* 0 *et* 1 *évidemment)*.
L'espérance est alors $p_1.1 + p_2.2 + p_3.3 + p_4.4 + p_5.5$.
Et en toute généralité, l'espérance de la puissance $n^{ieme}$ vaut $p_1.1^n + p_2.2^n + p_3.3^n + p_4.4^n + p_5.5^n$.
En assemblant les résultats, on a un système de plusieurs équations de ce type, qu'on transcrit matriciellement : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 5^4 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 29/12 \\ 29/4 \\ 305/12 \\ 397/4 \end{pmatrix}$.
Pour le résoudre et retrouver les probabilités, il suffit d'inverser la matrice de VanDerMonde ici présente *(oui, c'en est une)*
Le rappel *(cité dans l'exercice Cornillonesque)* nous permet de calculer son déterminant *(non nul)* :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (2-1) | (3-1) | (4-1) | (5-1) |
| | (3-2) | (4-2) | (5-2) |
| | | (4-3) | (5-3) |
| | | | (5-4) |

. Il vaut 288 ou $2^5.3^2$ si vous préférez *(je préfère)*.

Les formules de Cramer nous permettent alors de récupérer $p_5$ dernière inconnue de la liste :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 29/12 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 29/4 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 305/12 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 397/4 \end{pmatrix} /288$$

Pour calculer ce gros déterminant, on demande un joker. Ou alors, on se lance avec courage, en multipliant d'abord la dernière colonne par 12 *(il faudra alors diviser le déterminant final par* 12 *par multilinéarité)* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 29 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 & 87 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 & 305 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 & 1191 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 8 & 15 & 75 \\ 0 & 7 & 26 & 63 & 293 \\ 0 & 15 & 80 & 255 & 1179 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 3 & 8 & 15 & 75 \\ 7 & 26 & 63 & 293 \\ 15 & 80 & 255 & 1179 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 17 \\ 0 & 2 & 6 & 24 \\ 0 & 12 & 42 & 174 \\ 0 & 50 & 210 & 924 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & 24 \\ 12 & 42 & 174 \\ 50 & 210 & 924 \end{vmatrix} = 2.2.2. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 6 & 21 & 87 \\ 25 & 105 & 462 \end{vmatrix} = 8. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 12 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 30 & 162 \end{vmatrix} = 8.3.3. \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 10 & 54 \end{vmatrix}$$

Notre déterminant *(bon, j'assume : "mon déterminant")* vaut $2^5.3^2$.

On le divise par 12 comme promis et par le dénominateur $2^5.3^2$. Il reste : $\boxed{p_5 = \dfrac{1}{12}}$

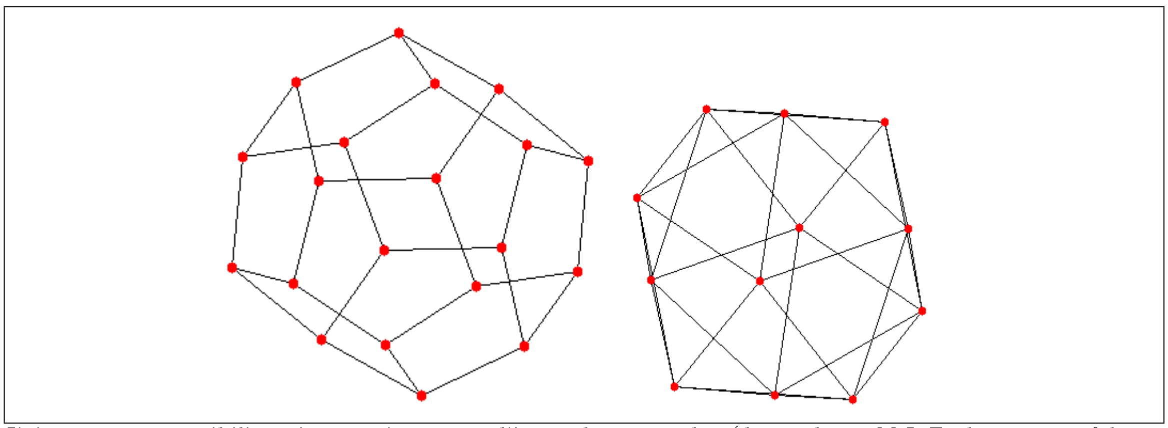
Généreusement je vous offre les autres :

| $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $p_4$ | $p_5$ |
|---|---|---|---|---|
| 1/4 | 1/3 | 1/4 | 1/12 | 1/12 |

*Les valeurs tombent juste, mais c'est normal, c'est moi qui les ai fixées au départ. Comme toujours, le professeur prend l'exercice à l'envers.*

---

<u>Question subsidiaire non posée :</u> puis-je vraiment fabriquer un tel dé ?
Réponse : oui, et sans effort. Il existe un célèbre solide pythagoricien qui a douze faces *(pentagonales)* équiprobables. C'est l'icosaèdre. Vous le connaissez, c'est l'ancien modèle de poubelle verte dans les rues pour les verres usagés. Ou c'est un dé parfois livré dans des jeux un peu spécifiques *(jeux de rôles...)*.
Vous avez alors douze faces, équiprobables. Vous ne les numérotez pas de 1 à 12, mais de la sorte : [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5].
*Je vous laisse calculer chacune des probabilités, comme* $p_1 = 3 \times \dfrac{1}{12}$.



J'ai une autre possibilité, si vous n'avez pas d'icosaèdre en poche *(demandez à M.L.F. de nous en fabriquer un...)*. Prenez un dé à six faces et une pièce *(équilibrée)*. L'espace d'état est alors des couples $(d,\ p)$ avec $d$ dans $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ et $d$ dans $\{P,\ F\}$. Il est de cardinal 12. On peut donc décider en fonction des tirages :

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 4 |
| $F$ | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 |

par exemple.

*Je vous laisse réfléchir si vous avez plutôt deux dés à six faces.*

---

Et pour un dé à cinq faces équilibré ? Prenez le dodécaèdre, autre solide pythagoricien à vingt faces triangulaires. Les vingt faces sont équiprobables. Il suffit alors de leur attribuer des valeurs de 1 à 5, chacune étant attribuée à quatre faces.

MPSI 2/2013 | 309 points | $DS05$

MPSI 2/2013 **EXERCICES** $DS06$

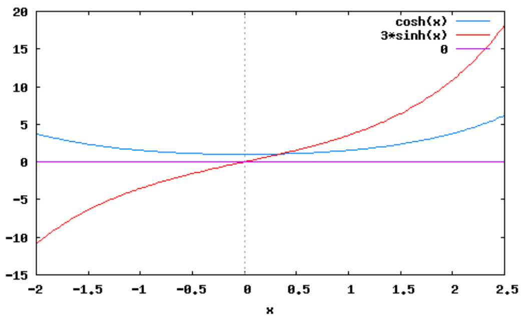
♡5 Résolvez $y"_t + 2.y'_t + 2.y_t = \cos(t)$ avec conditions initiales $y_0 = 0$ et $y'_0 = 0$. •3 pt.•

---

♡6 Résolvez l'équation différentielle $(t+1).(t+2).y'_t + t.y_t = t$ d'inconnue $y$ fonction de $t$ sur $[0,\ +\infty[$ avec condition initiale $y_0 = 0$. •3 pt.•

---

♡7 En quels points se croisent les graphes de $ch$ et $3.sh$ ? •2 pt.•




14 points —— 14 points

♣8 Je suis un professeur sadique *(vous le saviez)*. Vous êtes prêts à sortir de la salle, rangés par ordre alphabétique. Mais je ne laisse sortir qu'un éleève sur deux, et je renvoie l'autre en fin de queue. C'est ainsi que Marwa sort, mais Soundariya va se placer derrière Clara, Clémentine sort, et AAA va derrière Soundariya, et ainsi de suite.
Ma question : quel sera le/la dernier(e) élève qui sortira ? •3 pt.•

♣9 Seconde question : si vous vouliez être dernier à sortir, par qui aurais je du commencer dans l'ordre alphabétique ? •1 pt.•

♣10 Question subsidiaire : écrivez un programme Python ou pseudo-langage qui sur une liste `L` donnée de longueur `n` détermine le dernier élément à sortir. •4 pt.•
*Je tiens à votre disposition une liste alphabétique des élèves pourtant analphabètes.*

8 points —— 8 points

♠16 Le retour de l'homme ivre *(celui qui se déplace dans le plan en avaçant de 1 à chaque étape dans une des quatre direction $\overrightarrow{i}, -\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, -\overrightarrow{j}$).*
On veut savoir si l'homme ivre va revenir à sa case de départ après 100 étapes *(nombre pair, comme vu dans un devoir précédent)*. Montrez que c'est équivalent au fait de dire que son déplacement contient autant de vecteurs $\overrightarrow{i}$ que de vecteurs $-\overrightarrow{i}$ et autant de vecteurs $\overrightarrow{j}$ que de vecteurs $-\overrightarrow{j}$. •1 pt.•

♠17 Déduisez qu'il y a $\sum_{0\leq h\leq 50}\binom{100}{2.h}.\binom{2.h}{h}.\binom{100-2.h}{50-h}.1$ chemins de cent étapes revenant à l'origine. •2 pt.•

♠18 Montrez que cette somme vaut $\binom{100}{50}.\sum_{h=0}^{50}\binom{50}{h}^2$. •1 pt.•

♠19 En pensant à chercher le coefficient de $X^{50}$ dans $(1+X)^{50}.(1+X)^{50}$, montrez que la probabilité de retour à l'étape 100 est $\binom{100}{50}^2/4^{100}$. •2 pt.•

♠20 Une formule de Spé dit que l'on "peut remplacer" $n!$ pour $n$ "grand" par $\left(\frac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.\pi.n}$ (en fait, c'est une histoire de suites équivalents, rien de plus). Simplifiez alors la probabilité obtenue. •1 pt.•

MPSI 2/2013 **SUITES** $DS06$

- 1) On considère une suite récurrente du type $u_{n+1} = a.u_n + b$ avec $u_0$ donné.
Trouvez $\alpha$ pour que la suite $v$ définie par $v_n = u_n + \alpha$ pour tout $n$ soit géométrique *(raison ?)*. •1 pt.•
Trouvez alors la forme générale de $v_n$ puis de $u_n$ en fonction de $a$, $b$, $n$ et $u_0$. •1 pt.•

---

- 1) On considère deux suites récurrentes $u$ et $v$ avec $u_0$ et $v_0$ donnés et $\left\{\begin{array}{rcrr} u_{n+1} & = & 2.u_n & -v_n \\ v_{n+1} & = & 3.u_n & +6.v_n \end{array}\right.$ pour tout $n$. Trouvez la matrice $M$ de taille 2 vérifiant $U_{n+1} = M.U_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ pour tout $n$. •1 pt.•
- 2) Diagonalisez $M$ sous la forme $P.D.P^{-1}$. •1 pt.•
- 3) Déduisez la forme de $M^n$, $U_n$ puis $u_n$ et $v_n$ pour tout $n$. •1 pt.• Si l'on impose $v_0 = 1$ et constate $v_{10} = 0$, pouvez vous retrouver $u_0$ ? •1 pt.•
- 4) La méthode de Terminale suggère de trouver $\alpha$ pour que $(u_n + \alpha.v_n)$ soit géométrique. Complétez et expliquez le lien. •2 pt.•

---

- 1) Cette fois, on a une simple suite réelle $u$ avec $u_0$ nul. Mais à chaque étape, on tire à pile ou face *(pièce équilibrée)* ; si on obtient pile, alors $u_{n+1} = -2.u_n$ et si on obtient face, alors $u_{n+1} = u_n + 3$.
Quelles sont les valeurs possibles de $u_3$, quelle sont son espérance et sa variance ? •2 pt.• Calculez la probabilité que $u_4$ soit nul. •1 pt.•
- 2) Montrez que pour tout $n$, $u_n$ est un entier relatif. Quelle est la probabilité $p_n$ qu'il soit pair ? *(trouvez la relation de récurrence sur $p_n$ et la formule explicite)* •3 pt.•
- 3) Pour $n$ donné, on note $s_n$ la somme des $u_n$ et $c_n$ la somme de leurs carrés.
Montrez : $s_{n+1} = 3.2^n - s_n$.Montrez : $c_{n+1} = 5.c_n + 6.s_n + 9.2^n$. •2 pt.•
- 4) On pose $U_n = \begin{pmatrix} s_n \\ c_n \\ 2^n \end{pmatrix}$. Trouvez $M$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = M.U_n$. •1 pt.•
- 5) Pour diagonaliser $M$, il faut trouver $D$ *(diagonale)* et $P$ *(inversible)* vérifiant $M.P = P.D$. Pour trouver $D$, un indice : $M$ et $D$ ont même trace et même déterminant, de même que $Com(M)$ et $Com(D)$. Pour trouver $P$, attention, vous pourrez prendre deux coefficients égaux à 1 sur la première ligne, mais un autre sera nul... •4 pt.•
- 6) Calculez $M^n$, puis $s_n$ et $c_n$ pour tout $n$. Trouvez l'espérance et la variance de $u_n$. •3 pt.•
- 7) Déterminez pour tout $n$ le minimum et le maximum de la variable aléatoire $u_n$. •2 pt.•

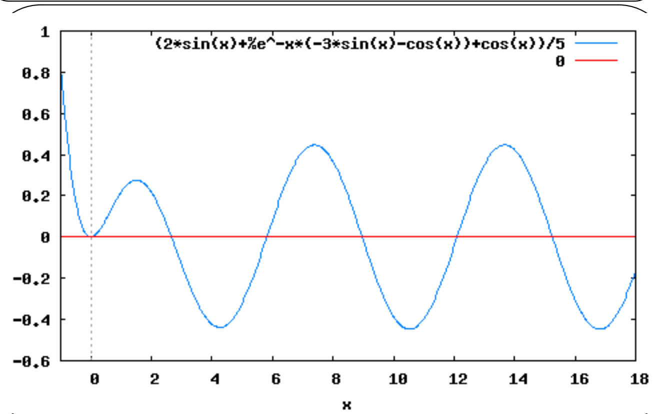
MPSI 2/2013 358 points $DS06$

**DS06** • L'équation différentielle $y"_t + 2.y'_t + 2.y_t = \cos(t)$ avec condition aux bornes. • MPSI 2/2013

Réflexe : on identifie une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, à second membre simple, à résoudre sur $\mathbb{R}$. L'espace des solutions est un espace affine de dimension 2.
L'équation homogène est $z"_t + 2.z'_t + 2.z_t = 0$.
L'équation caractéristique est $\lambda^2 + 2.\lambda + 2 = 0$.
Le spectre est complexe à valeurs propres conjuguées : $-1+i$ et $-1-i$.
Les solutions complexes sont de la forme $\alpha.e^{(-1+i).t} + \beta.e^{(-1-i).t}$.
Les solutions réelles sont de la forme $e^{-t}(a.\cos(t) + b.\sin(t))$ avec a et $b$ dépendant des conditions initiales.
On cherche une solution particulière dans $Vect(\cos,\ \sin)$ par analogie. On trouve $\dfrac{\cos(t) + 2.\sin(t)}{5}$ *(vérifiez si vous ne me croyez pas).*

Les solutions de l'équation avec second membre sont de la forme
$t \longmapsto e^{-t}.(A.\cos(t) + B.\sin(t)) + \dfrac{\cos(t) + 5.\sin(t)}{5}$
Le calcul de $y$ et $y'$ en 0 conduit au système $a + \dfrac{1}{5} = 0$ et $-a + b + \dfrac{2}{5} = 0$. On résout et il reste

$$\boxed{t \longmapsto e^{-t}.\frac{-\cos(t) - 3.\sin(t)}{5} + \frac{\cos(t) + 2.\sin(t)}{5}}$$

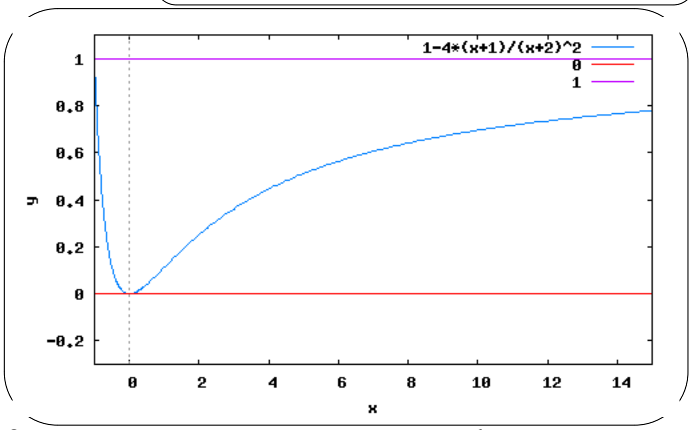



**DS06** • L'équation différentielle $(t+1).(t+2).y'_t + t.y_t = t$ avec condition en 0. • MPSI 2/2013

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus, avec un second membre, à résoudre sur un ensemble sur lequel le coefficient devant $y'$ ne s'annule pas. Les solutions forment un espace affine de dimension 1.
On la met sous forme de Cauchy-Lipschitz : $y'_t + \dfrac{t}{(t+1).(t+2)}.y_t = \dfrac{t}{(t+1).(t+2)}$ sur $[0,\ +\infty[$.
On pose $a_t = \dfrac{t}{(t+1).(t+2)}$ que l'on veut intégrer. Il faut pour cela la décomposer en éléments simples : $\dfrac{t}{(t+1).(t+2)} = \dfrac{-1}{t+1} + \dfrac{2}{t+2}$ *(méthode des pôles).*
On intègre en $\ln(t+2)^2 - \ln(t+1)$ *(valable sur* $[0,\ +\infty[$*).*
On place un signe moins et on passae à l'exponentielle : $e^{-\ln(2+t)^2 + \ln(1+t)} = \dfrac{1+t}{(2+t)^2}$.

L'espace vectoriel des solutions homogènes est engendré par cette application.

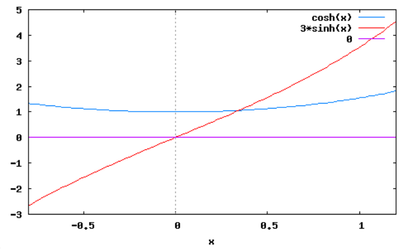
Il reste à trouver une solution particulière : 1 directement.
Les solutions sont donc de la forme $t \longmapsto 1 + a.\dfrac{1+t}{(2+t)^2}$ avec $\alpha$ à déterminer en fonction des conditions initiales.
Celles ci nous donnent $a = -4$.
On résume : $\boxed{y_t = 1 - \dfrac{4.(1+t)}{(2+t)^2} \text{ valable sur } [0,\ +\infty[}$




On pouvait aussi utiliser la méthode du facteur intégrant :
$z_t = y_t.e^{2.\ln(2+t)-\ln(1+t)} = \dfrac{y_t.(2+t)^2}{1+t}$.
On dérive : $z'_t = \dfrac{((2+t)^2.y'_t + 2.(2+t).y_t).(1+t) - y_t.(2+t)^2}{(1+t)^2} = \dfrac{(1+t).(2+t)^2.y'_t + (2+t).t.y'_t}{(1+t)^2}$.
On simplifie grâce à l'équation différentielle en $\dfrac{(2+t).t}{(1+t)^2}$.
On doit intégrer ce $t \longmapsto \dfrac{t^2+2.t}{t^2+2.t+1}$ qui s'écrit $t \longmapsto 1 - \dfrac{1}{t^2+2.t+1}$ et même $t \longmapsto 1 - \dfrac{1}{(t+1)^2}$.
On intègre en $t \longmapsto t + \dfrac{1}{t+1} + \alpha$ avec $\alpha$ dépendant des conditions initiales. Il vaut en fait $-1$ car $z_0 = 4.y_0 = 0$.
On remonte à $y$ en multipliant par $\dfrac{(1+t)}{(2+t)^2}$ et on trouve $y_t = (t + \dfrac{1}{t+1} - 1).\dfrac{(1+t)}{(2+t)^2}$ soit encore
$\boxed{t \longmapsto \dfrac{t^2}{(t+1)^2}}$
*C'est bien la même que plus haut.*

**DS06** • L'équation $ch(x) = 3.sh(x)$. • MPSI 2/2013

Les deux applications sont défines en tout point.
On revient à la forme exponentielle : $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = 3.\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. On simplifie et regroupe : $4.e^{-x} = 2.e^x$.
On multiplie par $e^x$ : $2 = e^{2.x}$.




On passe au logarithme et on a une unique solution : $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{2}}$

**DS06** • Une file d'attente interminable. • MPSI 2/2013

La file d'attente des élèves n'est pas si interminable. Toutes les deux étapes, un élève sort. En une centaine d'étapes, j'aurai donc fait sortir tout le monde.
Ensuite, l'essentiel n'est pas la liste des élèves en elle-même, mais les indices. On part donc avec une liste indexée de 1 à 47 *(on ne sera pas Pythonien sur ce coup là)*.
On commence donc avec la file $[1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ 47]$.
Ce sont les élèves d'indices impairs qui sortent, puisque la première élève de la liste est sortante. Les élèves restant dans la salle sont donc $[2,\ 3,\ 4,\ \dots,\ 47]$ *(Marwa sort)* puis $[3,\ 4,\ \dots,\ 47,\ 2]$ *(je renvoie Soudariya en fin de file)*, puis $[4,\ 5,\ \dots,\ 47,\ 2]$ *(Clémentine sort)*, puis $[5,\ \dots,\ 47,\ 2,\ 4]$ et ainsi de suite.

Après un parcours de liste, il reste les élèves pairs : $[2,\ 4,\ 6,\ \dots 46]$. Comme 'élève 47 vient de sortir *(parité)*, je renvoie une fois de plus Soundariya en fin de file *(je lui en veux)* : $[4,\ 6,\ \dots 46,\ 2]$. Cette fois, Alex peut sortir : $[6,\ 8,\ \dots,\ 46,\ 2]$, mais Léa reste dans la salle.
Bref, cette fois, ce sont les multiples de 4 qui sortent. Et il reste les nombres de la forme $4.k+2$ : $[2,\ 6,\ 10,\ \dots 46]$.

Comme l'élément 46 est resté en classe *(c'est Jacques)*, Soundariya peut enfin sortir. Et l'élément 6 reste *(c'est Léa)*. On garde donc cette fois les $8.p+6$. Et on aboutit à la liste $[6,\ 14,\ 22,\ 30,\ 38,\ 46]$.
Comme l'élément 46 reste, c'est au tour de 6 de sortir. Et la nouvelle liste sera finalement $[14,\ 30,\ 46]$.
14 peut enfin sortir, 30 reste, 46 sort.

$\boxed{\text{And the winner is l'élève 30. C'est Guirec}}$

---

Si il a bien traité cette première question, il a la réponse directe à la suivante : garder l'ordre alphabétique.

Sinon, il vous suffit de vous placer en position 30 sur la liste, et donc de me demander de commencer trente places avant votre rang *(modulo 47 évidemment)*.

---

Le programme Python se fera sur un modèle récursif. On fournit une liste et un indicateur qui indique si le premier de la liste sort ou reste. On parcourt la liste en effaçant un élément sur deux de la liste *(ou en recopiant l'autre élément sur deux dans une nouvelle liste)* et en créant un clignotant qui indique qui sort et qui reste.

```
def elimine(L, il_sort) :
....if len(L) == 1 :
........print(L) #on affiche le dernier élève si la liste n'a plus qu'un élément...
....else :
........LL, clign = [], il_sort #on crée une liste vide et initialise le clignotant
........for elt in L : #on parcourt la liste L du début à la fin
............if not(clign) : #on teste si je suis gentil ou méchant
................LL.append(elt) #l'élève s'insère dans la nouvelle liste
................clign = not(clign) #on fait clignoter
........print(LL, clign) #pour voir la nouvelle liste
```

```
........elimine(LL, clign) #on relance, avec la nouvelle liste deux fois plus courte
```

Il ne reste plus qu'à créer la liste des élèves :

```
MPSI2 = [i+1 for i in range(47)]
print(MPSI2)
elimine(MPSI2, True) #True car Marwa sort
```

---

Sinon, il y a la version lente :

```
Liste = [i+1 for i in range(47)]
premier_sort = True
while len(Liste)>1 : #tant qu'il reste au moins deux élèves
....if premier_sort : #suivant mon "humeur"
........Liste.pop(0) #on efface le premier terme de la liste
....else :
........Liste.append(Liste.pop(0)) #on extrait le terme d'indice 0 et on le rejette en fin de liste
....premier_sort = not(premier_sort) #on fait clignoter
```

**DS06** • Le retour de l'homme ivre. • MPSI 2/2013

Un déplacement en $n$ étapes de l'ivrogne est représenté par un mot de longueur $n$ : $A_1A_2\dots A_n$ où chaque lettre $A_k$ est l'une des quatre suivantes : $D$, $G$, $B$, $H$ *(droite gauche, bas, haut)*. Son déplacement est alors une somme de vecteurs $\overrightarrow{u}$ avec la correspondance

| D | G | B | H |
|---|---|---|---|
| $\overrightarrow{i}$ | $-\overrightarrow{i}$ | $\overrightarrow{j}$ | $-\overrightarrow{j}$ |

.

Le déplacement total est donc $n_D.\overrightarrow{i} - n_G.\overrightarrow{i} + n_H.\overrightarrow{j} - n_B.\overrightarrow{j}$ où $n_D$, $n_G$, $n_H$ et $n_B$ comptent le nombre d'occurence de chaque lettre de direction.
On a bien sûr une information : $n_D + n_G + n_B + n_H = n$ *(car il ne reste jamais statique et avance bien d'une unité à chaque étape)*.
La condition de retour à l'étape 100 est donc $(n_D - n_G).\overrightarrow{i} + (n_H - n_B).\overrightarrow{j} = \overrightarrow{0}$. par liberté de la base canonique on aboutit au jeu d'équations : $n_B = n_H$ et $n_D = n_G$ plus toujours $2.n_B + 2.n_G = 100$.

---

On passe à l'étape dénombrement. On va noter $h$ le nombre de déplacements horizontaux vers la droite *(c'est $n_D$)*. Il y a alors $2.h$ deplacements horizontaux et $100 - 2.h$ déplacements verticaux.

Il faut alors choisir dans le mot de 100 lettres les $2.h$ emplacements pour les déplacements horizontaux. On a le premier facteur $\binom{100}{2.h}$
Une fois ce choix effectué, il faut dans ces $2.h$ emplacements choisir de manière indépendante les $h$ emplacements des lettres $D$. On multiplie par le nouveau facteur $\binom{2.h}{h}$.
Il reste $100 - 2.h$ cases, et parmi celles ci, il faut choisir les $50 - h$ lettres $B$ *(la moitié des emplacements)*. On a un facteur $\binom{100-2.h}{50-h}$. Les derniers emplacements sont à remplir par des $H$, il n'y a plus de choix pour eux.

Pour saisir avec $n = 10$. On choisit $h = 3$. On décide des six cases pour les horizontaux : $[.,.,-,-,-,.,-,.,-,-]$, puis parmi ces cases on choisit trois $D$ : $[.,.,D,-,-,.,D,.,-,D]$. On complète les $G$ sans choix possible : $[.,.,D,G,G,.,D,.,G,D]$. Dans les quatre cases libres, on place deux $B$ : $[B,.,D,G,G,B,D,.,G,D]$. On complète sans choix possible par les $H$ : $[B,H,D,G,G,B,D,H,G,D]$. La promenade est bouclée.

On n'oublie pas ensuite de sommer sur les valeurs possibles de $h$ *(de 0 à 50)*. On aboutit à la somme de l'énoncé $\boxed{\sum_{0\leq h\leq 50}\binom{100}{2.h}.\binom{2.h}{h}.\binom{100-2.h}{50-h}}$

On simplifie chaque terme de cette somme en revenant à la définition des coefficients binomiaux : $\displaystyle\sum_{0\leq h\leq 50}\frac{100!}{(100-2.h)!.(2.h)!}.\frac{(2.h)!}{h!.h!}.\frac{(100-2.h)!}{(50-h)!.(50-h)!}$.

On simplifie ce qu'on peut $\displaystyle\sum_{0\leq h\leq 50}\frac{100!}{1}.\frac{1}{h!.h!}.\frac{1}{(50-h)!.(50-h)!}$.

On introduit artificiellement $50!.50!$ : $\displaystyle\sum_{0\leq h\leq 50}\frac{100!}{(50!)^2}.\frac{(50!)^2}{h!.h!.(50-h)!.(50-h)!}$.

On sort $\dfrac{100!}{(50!)^2}$ par linéarité : $\displaystyle\binom{100}{50}.\sum_{0\leq h\leq 50}\left(\frac{(50!)}{h!.(50-h)!}\right)^2$. On reconnaît bien $\displaystyle\binom{100}{50}.\sum_{h=0}^{50}\binom{50}{h}^2$.

---

On doit calculer la somme des carrés des binomiaux sur une ligne. C'est du cours... Ou plutôt un T.D. classique.
On considère le produit $(1+X)^{50}.(X+1)^{50}$ qu'on développe par la formule du binôme : $\displaystyle\Big(\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}.X^p\Big).\Big(\sum_{q=0}^{50}\binom{50}{q}.X^{50-q}\Big)$, puis par la formule qui développe un produit de deux sommes : $\displaystyle\sum_{\substack{p\leq 50\\ q\leq 50}}\binom{50}{p}.\binom{50}{q}.X^{50+p-q}$.

Mais ce produit n'est autre que $(1+X)^{100}$ qui se développe en $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}.X^k$.

Si maintenant on identifie entre les deux expressions le coefficient de $X^{50}$ *(car la famille $(1, X, X^2, \dots X^{100})$ est libre, n'hésitons pas à le dire)* :
dans la somme simple c'est $\dbinom{100}{50}$ et dans l'autre c'est $\displaystyle\sum_{p=q}\binom{50}{p}.\binom{50}{q}$ *(pour avoir $50+p-q=50$).*

On a donc : $\displaystyle\binom{100}{50}=\sum_{p=0}^{50}\binom{50}{p}^2$ *(la somme des carrés d'une ligne de triangle se retrouve au milieu de la ligne deux fois plus loin).*

On reporte et notre nombre de chemins vaut $\boxed{\dbinom{100}{50}^2}$

La formule générale est $\binom{2.n}{n}^2$ pour dénombrer les chemins qui reviennent à l'origine en $2.n$ étapes.

---

Or, il y a $4^{100}$ chemins de longueur 100 *(quatre lettres à choisir à chaque étape de manière indépendante).*

La probabilité de retour à l'origine se mesure par la proportion de chemins favorables : $\dfrac{\dbinom{100}{50}^2}{4^{100}}$.

On remplace par la définition factorielle : $\dfrac{(100!)^2}{(50!)^4.4^{100}}$.

---

On fait usage de la formule de Stirling qui approxime la factorielle par $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2.n.\pi}$ :
$\dfrac{(100^{100})^2.2.\pi.100}{(e^{100})^2}.\dfrac{(e^{50})^4}{(50^{50})^4.(2.\pi.50)^2}.\dfrac{1}{4^{100}}$
On applique les règles de calcul algébrique telles que $(a^b)^c=a^{b.c}$ *(et c'est paradoxalement là dessus que bien des élèves perdent leurs points de manière totalement impardonnable)* : $\dfrac{100^{200}}{50^{200}.4^{100}}.\dfrac{100}{2.\pi.50^2}$.

On poursuit et termine : $\boxed{\frac{1}{\pi.50}}$ serait une bonne approximation de notre probabilité.
Je confirme : vraie valeur $0,006334$ à $10^{-6}$ près, valeur de Stirling : $0,006366$ à $10^{-6}$ près.

**DS06** • Suites $u_{n+1} = a.u_n + b$. • MPSI 2/2013

On suppose donc $u_{n+1} = a.u_n + b$ pour tout $n$. On pose $v_n = u_n + \alpha$ et donc
$v_{n+1} = u_{n+1} + \alpha = a.u_n + b + \alpha = a.(v_n - \alpha) + b + \alpha$.
Pour que cette suite soit géométrique, on pose $a.\alpha = b + \alpha$ et on alors $v_{n+1} = a.v_n$. La réponse est donc : $\boxed{\alpha = \frac{b}{a-1}}$

*On émet une réserve : si $a$ vaut 1, on ne peut pas définir $\alpha$.*
Une fois effectué ce choix, on a immédiatement $v_n = a^n.v_0$ pour tout $n$. On remplace : $u_n = a^n.(u_0 + \alpha) - \alpha$ pour tout $n$.
On remplace : $\boxed{u_n = a^n.u_0 + \frac{a^n - 1}{a-1}.b}$ *(formule qu'on retrouve aussi par remplacement direct : $u_1 = a.u_0+b$, $u_2 = a.(a.u_0+b)+b = a^2.u_0+(a+1).b$ et ainsi de suite : $u_n = a^n.u_0+(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+1).b$)*
Pour $a$ égal à 1, on a directement $u_n = u_0 + n.b$ *(suite arithmétique).*

**DS06** • Suites récurrentes croisées. • MPSI 2/2013

La formule $\left\{\begin{array}{lcll} u_{n+1} & = & 2.u_n & -v_n \\ v_{n+1} & = & 3.u_n & +6.v_n \end{array}\right.$ devient $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. La matrice est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, elle a pour trace 8 et déterminant 15. Si une matrice diagonale $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ a la même trace et le même déterminant, alors $a$ et $b$ sont les racines de $X^2 - 8.X + 15$ *(il y a même équivalence).*
Le choix se porte sur $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. On trouve $P$ en tatonnant : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.
Par les récurrences évidentes : $U_n = M^n.U_0 = P.D^n.P^{-1}.U_0$.
On a donc : $\boxed{\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \frac{1}{2}.\begin{pmatrix} 3^{n+1} - 5^n & 3^n - 5^n \\ 3.(5^n - 3^n) & 3.5^n - 3^n \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}}$ *(on vérifie la forme de $M^n$ pour 0 et 1).*
On extrait : $u_n = \frac{3^n.(3.u_0 + v_0) - 5^n.(u_0 + v_0)}{2}$ et $v_n = \frac{-3^n.(3.u_0 + v_0) + 5^n.3.(u_0 + v_0)}{2}$

---

L'énoncé indique : $v_0 = 1$ et $v_{10} = 0$. On a donc $0 = \frac{-3^{10}.(3.u_0 + 1) + 5^{10}.3.(u_0 + 1)}{2}$. On isole : $\boxed{u_0 = \frac{5^{10} - 3^{10}}{3^{11} - 3.5^{10}}}$

---

La méthode "Terminale" nous fait poser $a_n = u_n+\alpha.v_n$. On a alors $a_{n+1} = (2.u_n-v_n)+\alpha.(3.u_n+6.v_n) = (2 + 3.\alpha).u_n + (6.\alpha - 1).v_n$.
On aimerait y retrouver un multiple de $u_n + \alpha.v_n$. Le facteur multiplicatif sera alors $2 + 3.\alpha$ et on va imposer : $6.\alpha - 1 = (2 + 3.\alpha).\alpha$ pour bien avoir $u_{n+1} + \alpha.v_{n+1} = (2 + 3.\alpha).(u_n + \alpha.v_n)$.
On trouve deux valeurs de $\alpha$ possibles, racines de l'équation $3.\alpha^2 - 4.\alpha + 1 = 0$ *(comme il y avait deux valeurs propres...).*
On résout : on trouve que $\alpha$ vaut 1 ou 1/3.
Les raisons de la suite géométrique $a$ sont alors 5 et 3.
On a donc : $\left\{\begin{array}{lcll} u_n + v_n & = & 5^n & (u_0 + v_0) \\ u_n + v_n/3 & = & 3^n & (u_0 + v_0/3) \end{array}\right.$. On reconnaît ici $Q.U_n = D^n.Q.U_0$ où $Q$ est une matrice de passage.

Il ne reste plus qu'à résoudre *(c'est l'inversion de $P$).*

**DS06** • La suite qui évolue en fonction d'un tirage de pièce. • MPSI 2/2013

On a cette fois affaire à une suite $u_{n+1} = \left\{ \begin{array}{ll} 2.u_n & si\ pile \\ u_n - 3 & si\ face \end{array} \right.$. Elle est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ ou $g(u_n)$. En fonction du tirage, on peut obtenir $u_n = f \circ f \circ g \circ \ldots \circ f(u_0)$.
Pour les premières valeurs on fait pousser un arbre *(vers le bas)* :

| | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | 0 | | | | | | | | | 0 |
| | | | | 0 | | | | | | | | 3 | | | | | 3 |
| | | 0 | | | | 3 | | | | -6 | | | | 6 | | | 3 |
| | 0 | | 3 | | -6 | | 6 | | 12 | | -3 | | -12 | | 9 | | 9 |
| 0 | 3 | -6 | 6 | 12 | -3 | -12 | 9 | -24 | 15 | 6 | 0 | 24 | -9 | -18 | 12 | | 15 |

Les deux dernières lignes correspondent à la somme des valeurs et la somme des carrés des valeurs.
On note qu'à la $n^{ieme}$ branche, il y a $2^n$ cases *(les valeurs dans ces cases ne sont pas forcément différentes, comme on le constate).*

Pour répondre à la question posée :
$u_3$ peut prendre les valeurs de cette liste réorodonnée $[-12,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ 12]$.
Sa valeur moyenne *(ou espérance)* est $(-12-6-3+0+3+6+9+12)/8$ c'est à dire $9/8$.
La somme des carrés vaut 459. On estime alors la variance : $\dfrac{459}{8} - \left(\dfrac{9}{8}\right)^2$.

La probabilité $P(u_4 = 0)$ vaut $\dfrac{2}{16}$.

**DS06** • Parité de $u_n$. • MPSI 2/2013

Par récurrence sur $n$, chaque $u_n$ est un entier relatif. C'est vrai au rang 0. Si $u_n$ est entier, alors $-2.u_n$ et $u_n + 3$ le sont aussi, d'où l'hérédité.
Plus intéressant, on note $p_n$ la probabilité que $u_n$ soit pair. La probabilité qu'il soit impair est évidemment $1 - p_n$.
On mesure les premières valeurs : $p_0 = 1$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 3/4$, $p_3 = 5/8$.
On cherche la formule de récurrence avec un arbre

| probabilité | $u_n$ | $u_{n+1}$ si "pile" | $u_{n+1}$ si "face" | | probabilité |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $-2.u_n$ pair | | pair | $p_n/2$ |
| $p_n$ | pair | | $u_n + 3$ impair | impair | $p_n/2$ |
| | | $-2.u_n$ pair | | pair | $(1-p_n)/2$ |
| $1 - p_n$ | impair | | $u_n + 3$ pair | pair | $(1-p_n)/2$ |

On somme : $\boxed{p_{n+1} = \dfrac{p_n}{2} + \dfrac{1-p_n}{2} + \dfrac{1-p_n}{2} = 1 - \dfrac{p_n}{2}}$

On ne peut pas s'arrêter là, il faut calculer explicitement $p_n$. Et il n'y a pas à inventer quoi que ce soit, c'est une suite récurrente du type $p_{n+1} = a.p_n + 1$. On suit donc la démarche du premier exercice. On cherche le point fixe, et on définit donc $q_n = p_n - \dfrac{2}{3}$. On constate : $q_{n+1} = -q_n/2$. Par récurrence immédiate : $q_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n.q_0$.

On remplace $q_0$ par $1/3$, on ajoute : $\boxed{p_n = \dfrac{(-1)^n}{2^n.3} + \dfrac{2}{3}}$

*On vérifie pour $n$ petit, y compris $p_4 = 11/16$.*

On a calculé les premières valeurs de $c_n$ et $s_n$.
Il faut $\frac{p}{t}$rouver la relation de récurrence. On note $u_{n,k}$ pour $k$ de 1 à $2^n$ les valeurs de $u_n$. Les valeurs de $u_{n+1}$ sont alors les $-2.u_{n,k}$ et les $u_{n,k}+3$. On somme : $s_{n+1} = \sum_{k\leq 2^n} \Big((-2.u_{n,k}) + (u_{n,k}+3)\Big)$. Par linéarité, on trouve $s_{n+1} = -\sum_{k\leq 2^n} u_{n,k} + 3.\sum_{k\leq 2^n} 1$, et par définition, on reconnaît : $s_{n+1} = -s_n + 3.2^n$.

Sinon, avec une vision plus probabiliste : $E(u_{n+1}) = E\Big(\frac{(-2.u_n)+(n_n+3)}{2}\Big) = -E(u_n) + \frac{3}{2}.E(1) = \frac{3}{2} - E(u_n)$.
Il ne reste plus qu'à multiplier par $2^n$ *(nombre de situations possibles)* pour retrouver la formule plus haut.

---

Pour la somme des carrés, la diférence de méthode est minime : $c_{n+1} = \sum_{k\leq 2^n} \Big((-2.u_{n,k})^2 + (u_{n,k}+3)^2\Big)$.
On développe et sépare : $c_{n+1} = 5.\sum_{k\leq 2^n} (u_{n,k})^2 - 6.\sum_{k\leq 2^n} u_{n,k} + 9.\sum_{k\leq 2^n} 1$. On aboutit bien à $c_{n+1} = 5.c_n + 6.s_n + 9.2^n$.

---

On prend l'initiative du calcul matriciel :
$\begin{pmatrix} s_{n+1} \\ c_{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s_n + 3.2^n \\ 6.s_n + 5.c_n + 9.2^n \\ 2.2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} s_n \\ c_n \\ 2^n \end{pmatrix}$. La matrice cherchée est donc
$$\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$
On calcule sa trace : 6. On calcle son déterminant en développant par rapport à la dernière ligne : $2.\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -10$.

On calcule sa comatrice $\begin{pmatrix} 10 & -12 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -15 & 27 & -5 \end{pmatrix}$. Sa trace vaut 3 et son déterminant 100.
Remarque : on n'avat pas besoin de calculer son déterminant, puisque on sait par le cours : $\det(Com(M)) = \det(M)^{n-1}$. Donc, on pouvait se contenter des trois termes diagonaux puisque seule la trace nous intéresse.
On ait de même avec $\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ de trace $\alpha+\beta+\gamma$, de déterminant $\alpha.\beta.\gamma$ et de comatrice $\begin{pmatrix} \beta.\gamma & 0 & 0 \\ 0 & \alpha.\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha.\beta \end{pmatrix}$. On aboutit aux informations suivantes :

| $\alpha+\beta+\gamma$ | $\alpha.\beta+\alpha.\gamma+\alpha.\beta$ | $\alpha.\beta.\gamma$ |
|---|---|---|
| 6 | 3 | $-10$ |

Les formules de Viète nous conduisent au polynôme $X^3 - 6.X^2 + 3.X - 10$, dont une racine assez évidente est $-1$. On le factorise en $(X+1).(X^2 - 7.X + 10)$. Les trois valeurs propres sont $-1$, 2 et 5 *(déjà présentes sur la diagonale de $M$ mais c'est là une simple histoire de hasard).*

On propose donc $\boxed{D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}$ ou toute autre permutation.

La résolution purement numérique de $M.P = P.D$ donne rapidement ici $\boxed{P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

Des récurrences dont nous sommes coutumiers permettent de conclure : $M^n = P.D^n.P^{-1}$ avec $D^n$ toujours diagonale.

Les calculs donnent au final : $\boxed{M^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 2^n + (-1)^{n+1} \\ 5^n + (-1)^{n+1} & 5^n & (-1)^n - 5.2^n + 4.5^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}$ *(qu'on aurait pu obtenir par récurrence si l'on avait gardé son âme de Terminale).*
On vérifie cette formule pour $n$ petit.
On applique sur cette matrice le vecteur $U_0$ qui est simple : ${}^t(0,\ 0,\ 1)$.
On extrait $s_n$ et $c_n$. En divisant par $2^n$ on trouve l'espérance.
Enfin, avec $\dfrac{c_n}{2^n} - \left(\dfrac{s_n}{2^n}\right)^2$ on extrait la variance. Les $2^n$ sont justifiés par équiprobabilité dans un arbre binaire.

| $s_n$ | $c_n$ | espérance | variance |
|---|---|---|---|
| $2^n + (-1)^{n+1}$ | $4.5^n + (-1)^n - 5.2^n$ | $1 - \left(\dfrac{-1}{2}\right)^n$ | $4.5^n - 6 + 3.(-1/2)^n - (1/4)^n$ |

Autant on pouvait comprendre la valeur de l'espérance, autant la valeur de la variance me laisse dubitatif.
Pour l'espérance, on pouvait se dire que l'on passait de $u_n$ à $u_{n+1}$ en moyenne par $u_{n+1} = \dfrac{(-2.u_n) + (u_n + 3)}{2}$, suite récurrente linéaire de traitement classique.

**DS06** • Minimum et maximum de $u_n$. • MPSI 2/2013

On calcule les premiers couples $Min,\ Max$ :

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $Max$ | 0 | 3 | 6 | 12 | 24 |
| $Min$ | 0 | 0 | $-6$ | $-12$ | $-24$ |

On comprend vite que hormis pour les deux premiers rangs qui sont à part, on aura $Min = -Max$ et $Max = 2^{n-1}.3$.
On le prouve par récurrence déjà initialisée pour $n = 2$ par exemple.
On suppose qu'à un certain rang $n$ les valeurs de $u_n$ sont entre $2^{n-1}.3$ et son opposé *(valeurs atteintes).* Si $u_{n+1}$ est égal à $-2.u_n$ il est entre $2.2^{n-1}.3$ et son opposé *(valeurs atteintes).* Sinon, il est entre $(2^{n-1} + 1).3$ et $(1 - 2^{n-1}).3$. Mais ce nouvel intervalle est inclus dans le précédent *(en tout cas pour $n$ plus grand que 2).*
Ne reste donc que le nouvel intervalle $u_{n+1} \in [-2^n.3,\ 2^n.3]$, bornes atteintes.

MPSI 2/2013 — 358 points — $DS06$

| | | |
|---|---|---|
| Charlemagne<br>MPSI-2 / 2013 | Vendredi 14 février | $DS07$ |

## MPSI 2/2013 — SINUS ET DENSITÉ — $DS07$

- 1) Une partie $A$ de $\mathbb{R}$ est dite "dense dans $\mathbb{R}$" si tout réel est limite d'au moins une suite de points de $A$. Quantifiez cette définition *(avec des $\forall$, $\exists$ et autres)*. •1 pt.•
- 2) Montrez que $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ et aussi $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$. •2 pt.•
- 3) Montrez qu'une partie finie de $\mathbb{R}$ ne peut pas être dense dans $\mathbb{R}$. •1 pt.•
- 4) Montrez que toute partie de $\mathbb{R}$ contenant une partie dense dans $\mathbb{R}$ est elle même dense dans $\mathbb{R}$. •1 pt.•
- 5) Montrez qu'une partie $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout intervalle $[\alpha,\ \beta]$ de $\mathbb{R}$ *(avec $\alpha<\beta$)* contient au moins un point de $A$. •4 pt.•
- 6) Montrez que si $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors les ensembles $A\Delta\{0\}$, $2.A$ et $A+1$ sont denses dans $\mathbb{R}$ *(on rappelle : $d.A+b=\{d.a+b \mid a\in\mathbb{R}\}$)*. •3 pt.•
- 7) Montrez que si $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ et $f$ surjective et continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors $f(A)$ est dense dans $\mathbb{R}$. •2 pt.•

---

- 1) On admet pour ce petit problème : $\pi$ est irrationnel *(c'est à dire ne peut pas s'écrire $p/q$ avec $p$ et $q$ entiers)*. On définit $s_n=\sin(n)$ et $c_n=\cos(n)$ pour tout $n$. Montrez que $n\longmapsto c_n$ est injective de $\mathbb{N}$ dans $[-1,\ 1]$. Est elle surjective ? •2 pt.•
- 2) On veut montrer que tout intervalle de $[-1,\ 1]$ *(aussi petit soit il, s'il n'est pas réduit à un point)* contient une infinité de points de la suite. On se donne $\varepsilon$ strictement positif. Montrez qu'il existe $N$ vérifiant $\dfrac{1}{N}\leqslant\varepsilon$. •1 pt.•
- 3) On considère alors la liste des $c_{2.n}$ pour $n$ de $0$ à $2.N^2$. On la trie par ordre croissant $1<c_{2.\sigma(0)}<c_{2.\sigma(1)}<\ldots<c_{2.\sigma(2.N^2)}\leqslant 1$ *(justifiez les inégalités strictes)*. Calculez la somme des $c_{2.\sigma(k+1)}-c_{2.\sigma(k)}$ pour $k$ de $0$ à $2.N^2-1$. Déduisez par l'absurde qu'il existe $k$ vérifiant $c_{2.\sigma(k+1)}-c_{2.\sigma(k)}<\dfrac{2}{N^2}$. Montrez qu'il existe deux entiers $p$ et $q$ vérifiant $0<|s_p.s_q|<\dfrac{1}{N^2}$. •3 pt.•
- 4) Déduisez qu'il existe au moins un entier $n$ vérifiant $0\neq|s_n|<\dfrac{1}{N}\leqslant\varepsilon$. •2 pt.•
- 5) Ecrivez un script `Python` qui détecte le premier indice $n$ non nul vérifiant $|\sin(n)|\leqslant 10^{-3}$. •2 pt.•
- 6) Montrez qu'il existe aussi $n'$ vérifiant $0\neq|s_{n'}|<|s_n|/2<|s_n|<\dfrac{1}{N}\leqslant\varepsilon$. •2 pt.•

---

- 1) On suppose donc qu'on a un entier $K$ vérifiant $0<\sin(K)<10^{-3}$. On pose alors $\gamma=Arcsin(\sin(K))$. On va montrer que tout intervalle de $[0,\ 1]$ de longueur $10^{-3}$ contient au moins un terme de la suite $(\sin(n))$. Montrez pour tout $x$ de $[0,\ \pi/2]$ : $2.x/\pi\leqslant\sin(x)\leqslant x$. •2 pt.•
- 2) On se donne $[\alpha,\ \alpha+\gamma]$ inclus dans $]0,\ 1[$. Montrez que $\{p\in\mathbb{N} \mid \sin(p.\gamma)>\alpha\}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide. On note $P$ son plus petit élément. Montrez alors $\sin(P.\gamma)<\alpha+\gamma$. •3 pt.•
- 3) Déduisez alors $\exists k\in\mathbb{N},\ \sin(k)\in[\alpha,\ \alpha+\gamma]$. •2 pt.•

---

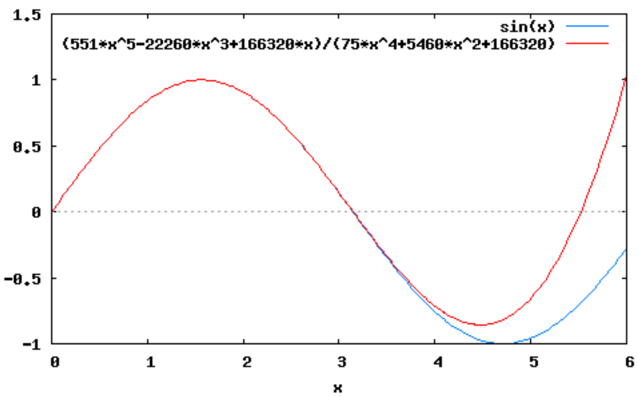
- 1) Ecrivez un script `Python` qui détecte le premier indice $n$ tel que l'écriture décimale $\sin(n)$ commence par $0,696969$. •2 pt.•

61 points — 61 points

## MPSI 2/2013 — SINUS ET PADÉ — $DS07$

On veut définir l'approximante de Padé du sinus au voisinage de 0 c'est à dire une fraction rationnelle

$\dfrac{a.x+b.x^3+c.x^5}{1+\alpha.x^2+\beta.x^4}$ telle que la différence $\sin(x) - \dfrac{a.x+b.x^3+c.x^5}{1+\alpha.x^2+\beta.x^4}$ soit un $o(x^n)$ quand $x$ tend vers 0 avec $n$ le plus grand possible (condition (C)).




Rappelez la formule de Taylor d'ordre 10 pour le sinus entre 0 et $x$. Déduisez le développement limité d'ordre 10 du sinus en 0. •2 pt.•

Montrez que la condition (C) est équivalente à $(1+\alpha.x^2+\beta.x^4).\sin(x) - (a.x+b.x^3+c.x^5) = o(x^n)$ quand $x$ tend vers 0. •1 pt.•

Ecrivez le système linéaire d'inconnue $(a, b, c, \alpha, \beta)$ qui donne $(1+\alpha.x^2+\beta.x^4).\sin(x) - (a.x+b.x^3+c.x^5) = o(x^{10})$ et calculez son déterminant. Déduisez l'existence d'une unique solution. •3 pt.•

6 points — 6 points

MPSI 2/2013 **EXERCICES** *DS*07

◇20 Montrez pour tout $n$ strictement plus grand que 1 qu'il existe une unique solution strictement positive à l'équation $x^n = \sin(x)$ d'inconnue réelle $x$ *(il vous faudra peut être étudier des variations jusqu'au deuxième ordre).* •2 pt.•

◇21 On note $a_n$ cette solution. Montrez que la suite $a$ est monotone et convergente. •2 pt.•

◇22 Montrez que sa limite est nécessairement égale à 1. •2 pt.•

◇23 On pose alors $u_n = 1 - a_n$. Donnez un équivalent de $u_n$ sous la forme $\alpha.n^d$ avec $\alpha$ et $d$ à déterminer. •3 pt.•

---

♣11 En $MPSI\pi$, on sait maintenant que le trinome (Claude, Dominique, Camille) est fait d'un garçon et deux filles. Les trois élèves ont choisi leur $TIPE$ au hasard avec une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que les trois aient choisi le même $TIPE$ ? Si je vous dis que j'ai vu au moins un des membres du trinôme en maths, quelle est la probabilité que les autres fassent physique ? Si je vous dis que le garçon fait physique, quelle est la probabilité que les deux autres fassent maths ? •5 pt.•

---

♠21 On définit $f = x \longmapsto Arctan(2.x) - Arctan(x)$. Donez un développement asymptotique à l'infini de $f$ sous la forme $f(x) = a.x+b+c/x+d/x^2+o(1/x^2)$ quand $x$ tend vers l'infini positif. •3 pt.•

---

♡8 Soit $f$ solution de l'équation $(t^2-1).y'_t + t.y_t = t$. Calculez $f(0)$ sachant qu'on a aussi $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t).dt = 0$. •3 pt.•

20 points — 20 points

MPSI 2/2013 419 points *DS*07

**DS07** • Parties denses dans $\mathbb{R}$. • MPSI 2/2013

Tout élément de $\mathbb{R}$ est limite d'au moins une suite d'éléments de $A$ :
$\forall a \in \mathbb{R},\ \exists (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_\epsilon\ \Rightarrow\ |u_n - a| \leqslant \varepsilon$

---

• Tout réel $a$ est limite d'une suite d'éléments de $a$ : la suite constante égale à $a$ lui même.

• Tout réel $a$ est limite d'une suite de rationnels : les $[10^n.a]/10^n$ *(approximation décimale par défaut, qui vérifie* $[10^n.a]/10^n \leqslant a \leqslant 10^{-n} + [10^n.a]/10^n$*).*

• Tout réel $a$ est limite d'une suite d'irrationnels : les $[10^n.a]/10^n + \pi.10^{-n}$ *(on ajoute aux approximations décimales un irrationnel qui tend vers* $0$*, on trouve un irrationnel).*

---

On doit montrer que toute partie $B$ de $\mathbb{R}$ contenant une partie $A$ dense ans $\mathbb{R}$ est elle aussi dense dans $\mathbb{R}$ *(déjà, on nomme les objets dont on parle, ça rend la chose plus facile à démontrer).*
On suppose donc que tout point $a$ de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de points $(u_n)$ de $A$.
On veut montrer que tout $a$ de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite de points de $B$. Mais comme $A$ est inclus dans $B$, la suite $(u_n)$ de points de $A$ est aussi une suite de points de $B$ et c'est fini.
*La vision d'ensemble éventuellement poussiéreux mais présent un peu partout dans* $\mathbb{R}$ *est bonne mais ne permet pas de faire des démonstrations.*

---

On prend une partie finie de $\mathbb{R}$ faite de $N$ points, même avec $N$ "très grand". On note $\alpha$ le plus grand de ces réels *(toute partie finie de* $\mathbb{R}$ *admet un plus grand élément).* On prend alors $a = \alpha + 1$. Toute suite $(u_n)$ d'éléments de $A$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \alpha$. Même si elle converge, sa limite est inférieure ou égale à $\alpha$ et ne peut donc pas valoir $a$.
Il existe au moins un réel qui n'est limite d'aucune suite de $A$.

**DS07** • Equivalence avec $A \cap [\alpha,\ \beta] \neq \emptyset$. • MPSI 2/2013

*On doit démontrer deux sens. C'est déjà bien d'avoir compris ce qu'il fallait prouver.*
Premier sens : de "dense" à "intersection non vide".
On prend une partie $A$ qui est dense. On suppose donc que tout réel $a$ est limite d'une suite de points de $A$ *(on garde l'hypothèse en tête mais on ne tape pas dessus).*
On prend alors deux réels $\alpha$ et $\beta$ avec $\alpha < \beta$. On doit alors montrer qu'il y a au moins un point de $A$ dans cet intervalle.
On considère alors le milieu $(\alpha+\beta)/2$ qu'on met dans le rôle de $a$ dans l'hypothèse. On sait qu'il existe une suite de points de $A$ qui tend vers ce milieu. Mais alors pour $n$ assez grand *(*$n \geqslant N_{(\beta-\alpha)/2}$ *pour être précis avec des notations naturelles),* $u_n$ est entré dans $[\alpha,\ \beta]$. Et $u_n$ est bien un point de $A$.
*On se dit qu'il doit même y avoir une infinité de points de* $A$ *dans* $[\alpha,\ \beta]$.

---

On passe à l'autre sens.
On prend une partie $A$ qui rencontre tout intervalle de la forme $[\alpha,\ \beta]$ *(c'est l'hypothèse, valable pour tout couple* $(\alpha,\ \beta)$*, qui ne sont donc pas fixés, mais exploitables comme on veut).*
Il faut montrer que tout point $a$ est limite d'une suite de points de $A$.
Pour chaque $n$ on prend le segment $[a,\ a + 2^{-n}]$. C'est lui qu'on appelle $[\alpha,\ \beta]$. On sait alors qu'il contient au moins un point de $A$ qu'on note $u_n$ *(il peut dépendre du choix de n évidemment).*
On a alors, en faisant varier $n$, une suite de points de $A$ qui vérifie $a \leqslant u_n \leqslant a + 2^{-n}$. Par théorème d'encadrement, la suite $u_n$converge vers $a$.

---

*Cette question n'était pas d'une difficulté extrème. Il suffisait de bien poser les hypothèses.*
*Là où elle va me permettre de faire un tri sérieux entre les élèves :*
• *ceux qui auront bien bâti un raisonnement comme celui ci dessus : excellents*
• *ceux qui ne se seront pas risquè sur la question : correct*
• *ceux qui auront cru traiter la question en enfilant des pseudo raisonnements sans aucun rapport avec la question : inquiétants.*

**DS07** • Translatés d'une partie dense. • MPSI 2/2013

On suppose que $A$ est dense, il faut montrer que $2.A$ l'est aussi.
On doit donc prouver que tout élément $a$ de $\mathbb{R}$ est limite d'une suite d'éléments de $2.A$ c'est à dire d'éléments de la forme $2.u_n$ avec $u_n$ dans $A$.
Il suffit, pour $a$ donné, d'appliquer l'hypothèse de densité de $A$ à l'éléments $a/2$ (réel ni plus quelconque ni moins que $a$). Il est limite d'une suite de points $u_n$ de $A$. Par multiplication par 2, $a$ est bie limite des $u_{2.n}$.

---

Pour $A+1$, on se donne $a$ dans $\mathbb{R}$. On sait que $a-1$ est limite d'une suite $(u_n)$ d'éléments de $A$. On ajoute 1 : $a$ est limite d'une suite d'éléments $(u_n+1)$ qui sont tous dans $A+1$.

---

Pour $A\Delta\{0\}$, on distingue deux cas.
○ Si 0 n'est pas dans $A$, alors $A\Delta\{0\}$ n'est autre que $A\cup\{0\}$. En tant que partie contenant une partie dense, cet ensemble reste dense.

○ Si 0 est dans $A$, on est donc amené à l'enlever. Il faut montrer que tout réel est limite d'une suite de points de $A-\{0\}$.
On se donne un réel $\alpha$. On sait déjà qu'il est limite d'une suite $(a_n)$ de points de $A$.
• Si cette suite ne contient pas l'élément 0, c'est une suite d'éléments de $A-\{0\}$ et c'est gagné.
• Si cette suite ne contient qu'un nombre fini de termes égaux à 0, on les élimine. On sait en effet qu'une suite de limite $\alpha$ continue à converger si on modifie un certain nombre de termes de la suite.
• Si cette suite contient une infinité de termes nuls, alors c'est que sa limite est nulle (car tout une suite extraite se trouve déjà à converger vers 0 en étant même constante).
Il nous reste donc à prouver que 0 est quand même limite d'une suite de points de $A$. Pour celà, on pose pour tout $p$ $\alpha=1/p$. C'est un réel, il est donc limite d'une suite $(a_{p,n})_{n\in N}$ de points de $A$ *(une suite pour chaque valeur de p d'où le double indice)*. Par définition de la limite, à partir d'une certain rang $N_{1/p}$ *(qui dépend de la suite elle même)*, on a $|a_{p,n}-\alpha|\leqslant 1/p$.
Mais alors, on a $|a_{p,N_{1/p}}|\leqslant \left|a_{p,N_{1/p}}-\frac{1}{p}\right|+\frac{1}{p}\leqslant\dfrac{2}{p}$.
Par théorème d'encadrement, cette suite de points de $A$ converge vers 0.

**DS07** • Image d'une partie dense par une surjection continue. • MPSI 2/2013

On suppose donc $A$ dense et $f$ continue et surjective. L'ensemble $f(A)$ est fait des images de tous les éléments de $A$.
On doit donc montrer que tout réel $\beta$ est la limite d'une suite d'éléments de $f(A)$.
Comme $\beta$ est dans $\mathbb{R}$ et $f$ surjective, il existe au moins un réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha)=\beta$. Par denstité de $A$ dans $\mathbb{R}$ *(vu comme axe des abscisses)*, il existe une suite de points $(a_n)$ de $A$ qui converge vers $\alpha$.
On considère alors la suite $(f(a_n))$. C'est une suite d'éléments de $f(A)$ par définition même *(images d'éléments de A)*. Par continuité de $f$ en tout point *(en particulier en $\alpha$)*, la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(\alpha)$ c'est à dire justement vers $\beta$.

**DS07** • Premières études sur la suite $(c_n)$. • MPSI 2/2013

Cette suite est bien définie. Pour ce qui est de l'injectivité, il faut donc la voir comme une application

de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On peut même préciser effectivement de $\mathbb{R}$ dans $[-1,\ 1]$.
On prend deux indices $p$ et $q$ et on suppose $c_p = c_q$. Il faut arriver à $p = q$. On traduit : $\cos(p) = \cos(q)$.
On a alors deux possibilités (liées à la parité et à la périodicité du cosinus) :
• $p = q \quad mod \quad 2.\pi$
• $p = -q \quad mod \quad 2.\pi$
On les traduit : il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $p = q + 2.k.\pi$ ou il existe $h$ dans $\mathbb{Z}$ vérifiant $p + q = 2.h.\pi$.
Si votre réponse ne contient pas ce “il existe $k$ entier”, c'est que vous n'avez toujours rien compris aux variables, donc aux maths.
Le premier cas conduit à $\pi = \dfrac{p+q}{2.h}$ qui est en contradiction avec “$\pi$ est irrationnel”.
Le premier cas conduit à la même contradiction $\pi = \dfrac{p-q}{2.k}$ ou $p = q + 0.2.\pi$.
Comme c'est la seule possibilité une fois éliminé l'impossible : $p = q$.

La suite est bien injective, l'application cos de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ ne prend jamais deux fois la même valeur.

---

Pour la surjectivité, on s'en sort par un argument de cardinal : les $cos(p)$ sont aussi nombreux que les entiers *(cardinal dénombrable)* tandis que $[-1,\ 1]$ est aussi “peuplé” que $\mathbb{R}$ *(cardinal non dénombrable)*. Il ne peut y avoir égalité.
Sinon, on montre que les valeurs 0 et $-1$ ne peuvent être atteintes.
En effet, il est impossible d'avoir un entier $p$ de la forme $(2.k + 1).\pi$ avec $k$ entier, toujours par irrationnalité de $\pi$.
De même, il est impossible d'avoir un couple d'entiers $(p,\ k)$ vérifiant $p = 2.k.\pi + \pi/2$.
Bref, il y a des valeurs non atteintes dans $[-1,\ 1]$.

*Mais on va voir que la suite réussit quand même à “placer des termes partout ou presque”, c'est à dire qu'elle forme un esemble “dense dans $[-1,\ 1]$).*

**DS07** • Densité autour de 0. • MPSI 2/2013

On se donne $\varepsilon$ strictement positif. On gagne alors un point en disant que pour $N$ égal à $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ on a $\dfrac{1}{N} \leqslant \varepsilon$.

La liste des $c_{2.n}$ pour $n$ de 0 à $2.N^2$ est alors une liste de $2.N^2 + 1$ réels de $[-1,\ 1]$ tous distincts *(injectivité prouvée à la question précédente)*.
On a vu d'illeurs que la valeur $-1$ n'était pas atteinte dans cette liste. En revanche, la valeur 1 l'est.
Comme l'ordre sur $\mathbb{R}$ est total, cette liste peut être ordonnée du plus petit au plus grand. C'est ce que fait la permutation d'indices $\sigma$.
*Pour certains élèves, comprendre que c'est juste trier les éléments et formuler la chose proprement est au delà de leurs forces. Il faudrait pourtant commencer à voir dans les mathématiques un langage et pas juste un instrument de calcul.*
*Pour saisir, avec $N$ égal à 2, on prend les $\cos(p)$ avec $p$ de 0 à 8. On en calcule les valeurs :*

| $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos(p)$ à $10^{-2}$près | 1 | $-0,416$ | $-0,654$ | $0,960$ | $-0,146$ | $-0,839$ | $0,844$ | $0,137$ | $-0,958$ |

On trie indexe :

| $p$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma(p)$ | 8 | 5 | 2 | 1 | 4 | 7 | 6 | 3 | 0 |
| | $-0,958$ | $-0,839$ | $-0,654$ | $-0,416$ | $-0,146$ | $0,137$ | $0,844$ | $0,960$ | 1 |

---

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2.N^2-1} c_{2.\sigma(k+1)} - c_{2.\sigma(k)}$ est télescopique et se résume à $c_{2.\sigma(2.N^2)} - c_{2.\sigma(0)}$. Elle se simplifie en $1 - c_{2.\sigma(0)}$ et on ne peut guère dire mieux.

Cependant, on peut déduire que cette somme est majorée par 2 puisque $c_{2.\sigma(0)}$ est un cosinus, donc compris entre $-1$ et 1 *(vraisemblablement "proche de $-1$")*.

---

Or, cette somme est faite de $2.N^2$ termes.
Si ils étaient tous plus grand que $2/N^2$, leur somme dépasserait 4.
Par contraposée, l'un au moins est plus petit que $2/N^2$.
*L'idée : quand vous placez $K$ points dans un intervalle de longueur $\lambda$, il y en a au moins deux qui sont à moins de $\lambda/K$ l'un de l'autre. Certains élèves racontent ça en disant que "au pire, ils sont régulièrement espacés, et les intervalles sont de longueur $\lambda/K$, et sinon au moins un des intervalles est plus court". mais c'est cette notion de "au pire" qui ne peut pas faire une démonstration mathématique. sauf en TIPE quand on s'adresse alors à un public élargi.*

---

On a donc au moins un indice $k_0$ vérifiant $0 < c_{2.\sigma(k_0+1)} - c_{2.\sigma(k_0)} \leqslant 2/N^2$ *(le strictement positif est dû à la stricte croissance de la suite des $c_{2.\sigma(i)}$, elle même issue de l'injectivité)*.
On traduit : $0 < \cos(2.r) - \cos(2.s) \leqslant 2/N^2$ en décrétant d'appeler $r$ et $s$ les deux entiers distincts $\sigma(k_0)$ et $\sigma(k_0+1)$.
Mais alors, il suffit de faire un peu de trigonométrie : $0 < 2.\sin(s+r).\sin(s-r) \leqslant \dfrac{2}{N^2}$.
On divise par 2 et on reconnaît $0 < |s_p.s_q| < 1/N^2$ en notant $p$ et $q$ les deux entiers $s+r$ et $s-r$ (les valeurs absolues sont là pour rendre $p$ et $q$ positifs si $s-r$ est négatif).

---

Le produit des deux réels $s_p$ et $s_q$ est plus petit que $1/N^2$. C'est que l'un au moins est plus petit que $1/N$.
*Si ça ne vous semble pas évident, faites un raisonnement par l'absurde. Si les deux dépassent $1/N$, leur produit dépasse $1/N^2$. Bref, quand un produit est petit, c'est que au moins un des facteurs l'est.*
Et en plus, ce sinus est non nul, puisque le produit ne l'est pas.

On a donc détecté un indice qui rend $\sin(n)$ plus petit que $\varepsilon$.
Et ce, pour n'importe quel $\varepsilon$, aussi petit soit il (mais $n$ dépend de $\varepsilon$ évidemment).

**DS07** • Programme Python. • MPSI 2/2013

On va calculer des sinus, tant que $\sin(n)$ est plus grand que $10^{-2}$.
On sent venir la boucle `while`. On est assuré par la théorie de sortir de cette boucle. Et on en sortira quand justement on aura atteint un $n$ convenable.

```
from math import sin #il faut charger la fonction sinus
n = 1 #il faut initialiser n
while abs(sin(n)) > 0.001 :
....n +=1
print(n) #c'est bon, on a trouvé le bon n
```

*Remarque : comme un idiot, j'avais initialisé $n$ à 0. Mon programme m'a vite donné une réponse.*

Pour information

| $\lvert\sin(n)\rvert \leqslant \rightarrow$ | 0,1 | 0,01 | 0,001 | 0,0001 | 0,00001 | 0,000001 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| premier indice non nul | 22 | 22 | 355 | 355 | 208341 | 1146408 |

---

Je vous offre aussi "le premier entier tel que $\sin(n)$ commence par 0,696969". Il faut et suffit cette fois que $\sin(n)$ soit entre 0,696969 et 0,696970. On teste en étudiant la distance au milieu de l'intervalle.

```
from math import sin
n = 1
while abs(sin(n)-0.6969695)) > 0.0000005 :
....n +=1
print(n)
```

On trouve $\boxed{\sin(1473791) = 0,69696944 \text{ à } 10^{-8} \text{ près.}}$

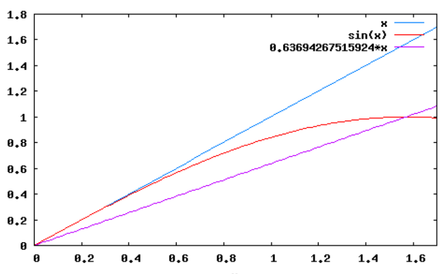
**DS07** • Et même $0 \neq |s_{n'}| < |s_n|/2 < |s_n| < \frac{1}{N} \leqslant \varepsilon$. • MPSI 2/2013

On a déjà $0 \neq << |s_n| < \dfrac{1}{N} \leqslant \varepsilon$ et même $0 \neq < |s_n|/2 < |s_n| < \dfrac{1}{N} \leqslant \varepsilon$.
Il ne reste qu'à recommencer le raisonnement précédent avec $|s_n|/2$ à la place de $\varepsilon$. Même avec cet réel petit (mais non nul), il existe un indice $n'$ vérifiant $|\sin(n')| \leqslant |s_n|/2$.

On comprend qu'en divisant par 2 à chaque fois, et en cherchant l'indice nous faisant passer sous cette barre, on va créer une liste de valeurs entières $n_k$ qui font que la suite des $(\sin(n_k))_k$ va tendre vers 0.

**DS07** • Densité dans un segment $[\alpha,\ \alpha + 10^{-3}]$. • MPSI 2/2013

Il va de soi que la valeur $10^{-3}$ n'est là qu'à titre indicatif, pour ne pas traîner trop de noms de variables.
On montre une inégalité de convexité sur le sinus entre 0 et $\pi/2$, ici par simple étude de variations.
On définit deux applications :
$x \longmapsto x - \sin(x)$ et $x \longmapsto \sin(x) - 2.x/\pi$.
• La première a une dérivée positive (le cosinus est plus petit que 1). Elle est croissante. Etant nulle en 0, elle est positive sur $\mathbb{R}^+$, et a fortiori sur $[0,\ \pi/2]$.
• La deuxième a une dérivée dont le signe n'est pas évident. Mais sa dérivée seconde est négative. C'est donc que sa dérivée décroit. Comme elle est positive en 0 et négative en $\pi/2$, cette dérivée s'annule et change de signe une fois sur $[0,\ \pi/2]$ : d'abord positive, puis négative.
L'application est donc croissante, puis décroissante. Elle fait "un pont". Or, elle est nulle en 0 et en $\pi/2$. Elle reste donc positive sur $[0,\ \pi/2]$.




---

On considère allors l'ensemble des $p$ tels que $\sin(p.\gamma)$ dépasse $\alpha$. C'est une partie de $\mathbb{N}$. Il faut vérifier qu'elle est bien non vide *(ce qui garantira qu'elle aura bien un plus petit élément, comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$)*.
Tant que $p.\gamma$ est plus petit que $\pi/2$ *($p$ plus petit que $\pi/2.\gamma$)*, on a $\sin(p.\gamma) \geqslant 2.\gamma.p/\pi$. Et cette quantité grandit et finit par dépasser $\alpha$.
Le terme majorant $\sin(p.\gamma)$ dépasse alors lui aussi $\alpha$.
Bref, même si $\gamma$ est petit, les quantités $\sin(p.\gamma)$ avancent pas à pas et montent de 0 à 1 *(avant de redescendre)*.

---

On note donc $P$ le plus petit élément de cet ensemble. Premier instant où $\sin(p.\gamma)$ dépasse $\alpha$.
Par définition même : $\sin((P-1).\gamma) \leqslant \alpha < \sin(P.\gamma)$.
Mais que vaut l'écart entre $\sin(P.\gamma)$ et $\sin((P-1).\gamma)$ ? Il vaut $\sin(P.\gamma) - \sin((P-1).\gamma)$ et se majore par $P.\gamma - (P-1).\gamma$ (le sinus est 16lipschitzien). Ce majorant vaut justement $\gamma$.
On a donc : $\sin(P.\gamma) \leqslant \sin((P+1).\gamma) + \gamma \leqslant \alpha + \gamma$.
Finalement, le réel $\sin(P.\gamma)$ est entre $\alpha$ et $\alpha + \gamma$.
*Simplement, quand on avance avec de petits pas comme c'est le cas avec nos $\sin(p.\gamma)$, on finit par mettre le pied dans le segment $[\alpha,\ \alpha + \gamma]$ qui est "trop long".*

---

On a placé un terme $\sin(P.\gamma)$ dans $[\alpha, \alpha + \gamma]$, intervalle "très court".

Mais est-ce un nombre de la forme $\sin(n)$ avec $n$ entier ?
rappelons qu'on a pris $\gamma = Arcsin(\sin(K))$. On n'a évidemment pas $\gamma = K$ comme l'affirmeraient les élèves ayant aussi peu de bon sens que je n'ai de cheveux sur le sommet du crâne.
Simplement, $\gamma$ est congru à $N$ modulo $2.\pi$ (ou alors c'est leur somme qui est un multiple impair de $\pi$).
Dans les deux cas ($\gamma = N + 2.j.\pi$ ou $\gamma = \pi - N + 2.j.\pi$) on a quand même $\sin(P.\gamma) = \sin(P.K)$. Et cette fois, $P.K$ est un entier dont le sinus est etre $\alpha$ et $\alpha + \gamma$.
On a donc à peu près prouvé que tout intervalle de $[-1,\ 1]$ non réduit à un point contient au moins un terme de la suite $(\sin(n))$. L'ensemble image de cette suite est dense dans $[-1,\ 1]$.

---

**DS07** • Encore la $MPSI\pi$ et ses choix d'options. • MPSI 2/2013

On a donc trois élèves qui tirent leur option au hasard. On a immédiatement un arbre à huit feuilles finales équiprobables :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | | | | P | | | Claude |
| M | | P | | | M | | P | Dominique |
| M | P | M | P | M | P | M | P | Camille |
| MMM | MMP | MPM | MPP | PMM | PMP | PPM | PPP | trinome |

Deux des huit feuilles correspondent à "tous ont la même option".
La probabilité est donc de $\frac{2}{8}$ ce qui fait $\boxed{1/4}$

---

On restreint l'univers par une observation : un des trois fait maths. On élimine donc une des cases :

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | | | | P | | | Claude |
| M | | P | | | M | | P | Dominique |
| M | P | M | P | M | P | M | P | Camille |
| MMM | MMP | MPM | MPP | PMM | PMP | PPM | ... | trinome |

On regarde alors dans cet univers réduit les formules où il y a un M et deux P.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | M | | | | P | | | Claude |
| M | | P | | | M | | P | Dominique |
| M | P | M | P | M | P | M | P | Camille |
| MMM | MMP | MPM | MPP | PMM | PMP | PPM | ... | trinome |

La probabilité cherchée est donc $\boxed{3/7}$

---

Cette fois, l'information est "le garçon fait Physique".
On reprend donc l'arbre et on élimine ce qui est hors de notre univers : quatre cases

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ... | | | | P | | | Claude |
| ... | | ... | | | M | | P | Dominique |
| ... | ... | ... | ... | M | P | M | P | Camille |
| ... | ... | ... | ... | PMM | PMP | PPM | PPP | trinome |

Sur ces quatre cases, on regarde les cas favorables : les deux autres font Maths :

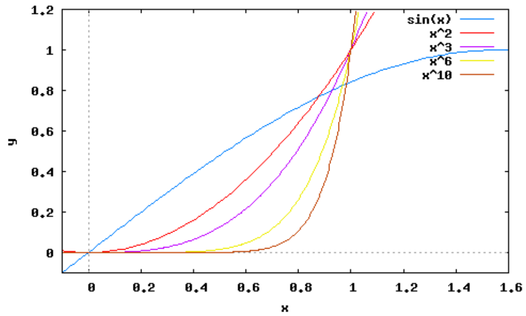
| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | ... | | | | P | | | Claude |
| ... | | ... | | | M | | P | Dominique |
| ... | ... | ... | ... | M | P | M | P | Camille |
| ... | ... | ... | ... | PMM | PMP | PPM | PPP | trinome |

La probabilité est cette fois $\boxed{1/4}$

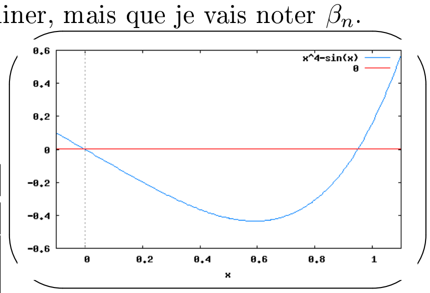
*C'est la probabilité que les deux élèves filles choisissent Maths, l'observation sur le garçon n'a rien apporté sur l'univers des deux filles, par indépendance.*

Ces probabilités conditionnelles ont fait couler beaucoup d'encre, car bon nombre de personnes se trompent si ils ne réfléchissent pas avec des arbres ou tableaux.
Il est fort probable que ce type de question viendra dans les concours.
Et quand je dis "fort probable", c'est avec quelle probabilité ?

Déjà, on sait que 0 est bien solution de l'équation $\sin(x) = x^n$.




Il faut en trouver une autre, et une seule. On va utiliser le théorème de l'homéomorphisme sur $\mathbb{R}^+$ sur une fonction auxiliaire : $\varphi_n = x \longmapsto x^n - \sin(x)$, qui est bien nulle en 0.
Au delà de 1, elle est définitivement positive, car $x^n$ a dépassé 1 tandis que le sinus ne le dépassera jamais.
On va donc restriendre notre étude à $[0,\ 1]$.
Elle est deux fois dérivable, de dérivée seconde $\varphi"_n = x \longmapsto n.(n-1).x^{n-2} + \sin(x)$.
Cette dérivée seconde est positive. La dérivée est donc croissante sur l'intervalle $[0,\ 1]$ *(mot clef "intervalle" à ne pas oublier).*
En 0, cette dérivée vaut $-1$. En 1 elle dépasse 0. Par homéomorphisme, elle s'annule une seule fois, en un point que je ne vais pas déterminer, mais que je vais noter $\beta_n$.



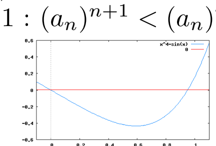

| $x$ | $[0,\ \beta_n[$ | $\beta_n$ | $]\beta_n,\ 1[$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi''_n$ | $+$ | . | $+$ | |
| $\varphi'_n$ | - $\nearrow$ | 0 | $\nearrow$ $+$ | |
| $\varphi_n$ | 0 $\searrow$ - | ? | $+$ $\nearrow$ - | |

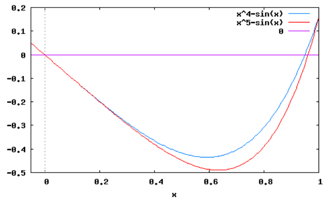
Entre 0 et $\beta_n$, $\varphi'_n$ est négative, car elle croît avant d'atteindre 0. On en déduit que $\varphi_n$ est décroissante.
Comme elle est nulle en 0, par décroissance stricte, elle est strictement négative entre 0 (exclu) et $\beta_n$.
On sait donc que $\varphi_n(\beta_n)$ est négative. Comme $\varphi_n(1)$ est positive, $\varphi_n$ s'annule donc au moins une fois entre $\beta_n$ et 1.
Mais $\varphi'_n$ est maintenant positive, donc $\varphi_n$ est strictement croissante, donc injective.
On a donc bien une unique solution, que l'on peut nommer $a_n$.
*Rappelons que l'équation $1_{\mathbb{Q}}(x) = 0$ a des solutions, mais qu'on ne peut pas dire qu'on note a sa solution...*

*Cette démonstration repose en fait sur la convexité de l'application $\varphi_n$ qui va s'annuler deux fois.*

---

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est bornée *(par 0 et 1)*. On va montrer qu'elle est croissante.
On sait : $\varphi_n(a_n) = 0$ par définition même. On a donc $(a_n)^n = \sin(a_n)$.
On multiplie cette inégalité entre réels positifs par $a_n$ plus petit que 1 : $(a_n)^{n+1} < (a_n)^n = \sin(a_n)$.

On reconnaît alors $\varphi_{n+1}(a_n) < 0$. Par tableau de variations de $\varphi_{n+1}$  on comprend que $a_n$ est avant l'endroit où $\varphi_{n+1}$ s'annule et devient positive. On traduit : $\boxed{a_n \leqslant a_{n+1}}$




La suite $a$ est croissante majorée, elle converge vers son plus petit majorant. Comme 1 est un de ses majorants, sa limite est inférieure ou égale à 1. C'est déjà ça. Et elle est strictement positive puisque plus grande que tous les $a_n$.
Supposons que sa limite $\lambda$ soit strictement plus petite que 1. Comme c'est son plus petit majorant, on a donc $0 \leqslant a_n \leqslant \lambda$ pour tout $n$ et par croissance sur $\mathbb{R}^+$ : $0 \leqslant (a_n)^n \leqslant \lambda^n$.
Par encadrement par cette suite géométrique de raison plus petite que 1, $(a_n)^n$ tend vers 0. Mais comme $(a_n)^n$ vaut $\sin(a_n)$, on a donc $\sin(a_n)$ qui converge vers 0. Mais par continuité du sinus, $\sin(a_n)$ convergeait déjà vers $\sin(\lambda)$ qui lui est non nul.
On tient notre contradiction. Par élimination, la limite $\lambda$ vaut 1.

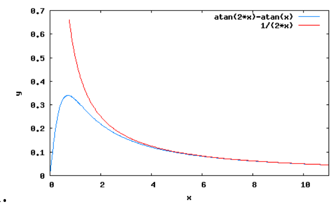
**DS07** • Développement asymptotique de la suite $(a_n)$. • MPSI 2/2013

On pose comme demandé $u_n = 1 - a_n$ pour tout $n$. C'est une suite qui tend vers 0. Mais à quelle vitesse ?
On sait maintenant : $\sin(1 - u_n) = (1 - u_n)^n$.
Le premier membre tend vers $\sin(1)$ *(que je ne connais pas plus que ça)*. le second est une forme indéterminée plus qu'usuelle *($1^\infty$ avec un langage de malpropre)*. C'est cette indétermination qui doit se lever en ayant l'équivalent de $u_n$.
On passe au logarithme sur ces quantités strictement positives : $\ln(\sin(1 - u_n)) = n.\ln(1 - u_n)$. On divise par $n$ : $\dfrac{\ln(\sin(1 - u_n))}{n} = \ln(1 - u_n)$.
Le premier membre est simplement équivalent à $\dfrac{\ln(\sin(1))}{n}$ (le numérateur tend vers une limite non nulle).
Le second membre est équivalent à $-u_n$ *(équivalent $\ln(1+u) \simeq u$ en $0$)*.
Par transitivité, $u_n$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(\sin(1))}{n}$ *(pas de problème de signe, $\ln(\sin(1))$ est négatif)*.
On résume : $\boxed{a_n = 1 + \dfrac{\ln(\sin(1))}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)}$

**DS07** • Développement asymptotique de $Arctan(2.x) - Arctan(x)$. • MPSI 2/2013

Déjà, $f$ est définie sur tout $\mathbb{R}$ et a une limite finie en $+\infty$. C'est la différence $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{2}$ c'est à dire 0.
On a donc $f(x) = 0.x + 0 + o(1)$ quand $x$ tend vers l'infini.

Il faut en connaître davantage. Comme $f(x)$ tend vers 0, $f(x)$ est équivalent à $\tan(f(x))$ quand $x$ tend vers l'infini.
Or, $\tan(f(x)) = \dfrac{\tan(Arctan(2.x)) - \tan(Arctan(x))}{1 + \tan(Arctan(2.x)).\tan(Arctan(x))} = \dfrac{x}{1 + 2.x^2}$.
Quand $x$ tend vers l'infini, cette quantité équivaut à $\dfrac{x}{2.x^2}$ c'est à dire $\dfrac{1}{2.x}$. Par transitivité : $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{2.x}$ quand $x$ tend vers l'infini.




$\boxed{f(x) = 0.x + 0 + \dfrac{1}{2.x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)}$ quand $x$ tend vers l'infini.

---

On en veut plus : on remonte car on est sur un intervalle assez petit pour que tan et $Arctan$ soient mutuellement réciproques : $f(x) = Arctan\Big(\dfrac{x}{1+2.x^2}\Big)$.

Or, on sait : $Arctan(u) = u + o(u^2)$ quand $u$ tend vers 0 *(développement d'une application impaire équivalente à l'identité en* 0*)*.

On a donc : $f(x) = \dfrac{x}{1+2.x^2} + o\Big(\dfrac{x^2}{(1+2.x^2)^2}\Big)$ quand $x$ tend vers l'infini.

Le terme correctif est $o(1/x^2)$ car $\dfrac{x^2}{(1+2.x^2)^2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{4.x^2}$.

Il reste à voir si il reste un terme en $1/x^2$ dans $\dfrac{x}{1+2.x^2}$. On soustrait donc le terme principal : $\dfrac{x}{1+2.x^2} - \dfrac{1}{2.x} = \dfrac{-1}{2.x.(2.x^2+1)}$. Ce terme est équivalent à $\dfrac{-1}{4.x^3}$ et disparaît donc dans $o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$.

Bref, il ne reste plus de terme en $1/x^2$. On s'en serait douté, par imparité.

---

On pouvait aussi traiter l'exercice en posant $x = 1/u$ avec $u$ qui tend vers 0.

On exploitait ensuite la formule $Arctan(x) + Arctan(1/x) = \dfrac{\pi}{2}$ valable pour $x$ positif.

On avait alors $f(x) = -Arctan(u) + Arctan(u/2)$ après élimination des $\pi/2$. On rappelait ensuite le développement limité de l'arctangente en 0 : $Arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$.

On a alors $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{2.x} - \dfrac{7}{24.x^3} + o\Big(\dfrac{1}{x^4}\Big)}$ quand $x$ tend vers l'infini.

---

**DS07** • Approximante de Padé du sinus en 0. • MPSI 2/2013

On rappelle la formule de Taylor :

$\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + \dfrac{x^{11}}{10!}.\displaystyle\int_{t=0}^{t=1}(1-t)^{10}.\sin^{(11)}(t.x).dt$ dans laquelle les dérivées successives ont été calculées en 0.

On majore ensuite le reste : $\Big|\frac{reste}{x^{10}}\Big| \leqslant \dfrac{|x|}{10!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^{10}.|\cos(t.x)|.dt$

On majore le cosinus par 1 : $\Big|\dfrac{reste}{x^{10}}\Big| \leqslant \frac{|x|}{11!}$. Ce quotient tend vers 0 quand $x$ tend vers 0. Le reste est un $o(x^{10})$.

On aboutit comme promis au développement limité :

$\boxed{\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + o(x^{10})}$ quand $x$ tend vers 0.

---

On note $P$ le numérateur de la fraction et $Q$ son dénominateur. On veut donc $\sin(x) - \dfrac{P(x)}{Q(x)} = o(x^n)$ quand $x$ tend vers 0.

On multiplie par $Q(x)$ *(qui est équivalent à* 1 *quand* $x$ *tend vers* 0*)*, et on aboutit à $Q(x).\sin(x) - P(x) = Q(x).o(x^n) = o(x^n)$.

Pour le sens réciproque, on part de $Q(x).\sin(x) - P(x) = o(x^n)$ et on divise par $Q(x)$ qui persiste et continue à tendre vers 1 en 0.

On a bien équivalence.

---

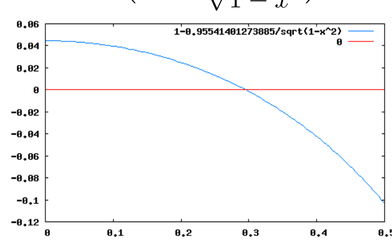
On remplace dans cette exigence le sinus par son développement limité (égalité, puisqu'il y a le petit $o$) :
$(1+\alpha.x^2+\beta.x^4).\Big(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}+o(x^{10})\Big)-(a.x+b.x^3+d.x^5)=o(x^{10})$
On développe en ne gardant que les termes de degré plus petit que 10 puisque le $o(x^{10})$ qui survient naturellement aspire les termes de degré plus élevé.
Il reste après avoir tout ordonné :
$(1-a).x+\Big(\alpha-b-\dfrac{1}{6}\Big).x^3+\Big(\beta-\dfrac{\alpha}{6}-c+\dfrac{1}{120}\Big).x^5+\Big(\dfrac{\alpha}{120}-\dfrac{\beta}{6}-\dfrac{1}{7!}\Big).x^7+\Big(\dfrac{\beta}{120}-\dfrac{\alpha}{7!}+\dfrac{1}{9!}\Big).x^9+o(x^{10})$
On demande que ceci soit un $o(x^{10})$ce qui revient à annuler tous les coefficients. On aboutit à un système que l'on écrit tout de suite sous forme matricielle :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3! & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1/5! & 1/3! \\ 0 & 0 & 0 & 1/7! & -1/5! \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1/3! \\ 1/5! \\ -1/7! \\ 1/9! \end{pmatrix}}$$

On calcule le déterminant de cette matrice qui est certes de taille 5 mais pourvue de nombreux 0. On développe par rapport à la première colonne trois fois de suite. Il reste $\begin{vmatrix} -1/5! & 1/3! \\ 1/7! & -1/5! \end{vmatrix}$ qui vaut $\dfrac{1}{(5!)^2}-\dfrac{1}{3!.7!}$. Ce déterminant est non nul ($\dfrac{11}{302400}$ pour information).
Le système a une unique solution.
On ne nous demande pas de la calculer, tant mieux. Sinon, je vous l'offre après réduction aux dénominateurs communs : $\dfrac{166320.x-22260.x^3+551.x^5}{166320+5460.x^2+75.x^4}+o(x^{10})$.

**DS07** • Equation différentielle $(t^2-1).y'_t+t.y_t=t$. • MPSI 2/2013

On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus, avec un second membre continu aussi. On ne la résoudra que sur $]-1,\ 1[$ afin qu'on puisse la mettre sous forme de Cauchy-Lipschitz. Son espace de solutions est alors un espace affine de dimension 1.
On passe à la forme de Cauchy-Lipschitz : $y'_t+\dfrac{t}{t^2-1}.y_t=\dfrac{1}{t^2-1}$. Avec nos notations usuelles : $a_t=\dfrac{t}{t^2-1}$ a pour primitive $t\longmapsto\dfrac{\ln(t^2-1)}{2}$ ou plutôt $t\longmapsto\dfrac{\ln(1-t^2)}{2}$ vu qu'on travaille sur $]-1,\ 1[$ *(on a pris un intervalle contenant* $0$ *puisque c'est en* $0$ *qu'on veut la solution)*. On met un signe moins, on passe à l'exponentielle :
les solutions homogènes forment l'espace vectoriel $Vect\Big(t\longmapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$.




On trouve une solution particulière : $t\longmapsto 1$.

La solution est donc de la forme $\boxed{t\longmapsto 1+\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-t^2}}}$ avec $\lambda$ qui dépend de la condition "initiale".

La condition est sur l'intégrale de $f$ de 0 à 1/2. Or, on a $\displaystyle\int_0^{1/2} f(t).dt=\frac{1}{2}+\Big[\lambda.Arcsin(t)\Big]_{t=0}^{t=1/2}$. On trouve alors $\frac{1}{2} + \lambda.\frac{\pi}{6} = 0$.

On effectue : $\lambda = -3/\pi$. On trouve alors $\boxed{f(0) = 1 - \frac{3}{\pi}}$

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | `419 points` | $DS07$ |

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Vendredi 21 mars

# $DS08$

MPSI 2/2013

## EXERCICES

$DS08$

$\Diamond 24$ On définit : $f = x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$. Donnez son domaine de définition et ses limites aux bornes. •3 pt.•

$\Diamond 25$ Donnez le développement limité de $f$ en 0 à l'ordre 3 après prolongement continu. •3 pt.•

$\Diamond 26$ Calculez $f'$ et donnez son signe (quitte à isoler son numérateur pour en étudier le sens de variations pour en avoir le signe). •3 pt.•

$\Diamond 27$ De quel intervalle dans quel intervalle $f$ est elle un difféomorphisme ? •1 pt.•

$\Diamond 28$ Donnez le développement limité de $f^{-1}$ en $-1$ à l'ordre 2. •3 pt.•

---

$\clubsuit 12$ Ecrivez un script Python qui, pour une suite d'entiers positifs `L` donnée *(de longueur `len(L)`)* compte combien de fois le maximum est atteint *(exemple : pour `L=[1, 4, 5, 3, 8, 4, 2, 8]` il répondra 2 )*. •3 pt.•

16 points — 16 points

MPSI 2/2013

## EXPONENTIELLES

$DS08$

- 1) Montrez que pour $x$ réel, la suite $\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $e^x$. •1 pt.•

- 2) Pour $x$ et $y$ réels, et $n$ dans $\mathbb{N}^*$ plus grand que $\sqrt{x^2+y^2}$, calculez module et argument de $\left(1+\dfrac{x+i.y}{n}\right)$ et $\left(1+\dfrac{x+i.y}{n}\right)^n$. A quoi sert l'hypothèse $\sqrt{x^2+y^2} \leqslant n$ ? •3 pt.•
Déterminez la limite de $\left(1+\dfrac{x+i.y}{n}\right)^n$ quand $n$ tend vers l'infini. •2 pt.•

- 3) Montrez que pour tout réel $x$ la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ converge vers $e^x$. •2 pt.•

---

- 1) Complétez la matrice $\begin{pmatrix} \star & 2 \\ . & 5 \end{pmatrix}$ *(notée A)* pour que son spectre soit $\{1,\ 3\}$. •1 pt.•
- 2) Complétez $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ \circ & \bullet \end{pmatrix}$ *(notée B)* pour qu'elle admette $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ comme vecteur propres. •1 pt.•
- 3) Diagonalisez $A$ *(vous noterez $P$ votre matrice de passage, et $D$ votre matrice diagonale)*, $B$ et $A+B$. •4 pt.•
- 4) Calculez l'exponentielle de $A$, de $B$ et de $A+B$. A-t-on $e^A.e^B = e^{A+B}$ ? •5 pt.•

- 1) Soit $M$ une matrice vérifiant $A.M = M.A$. Montrez $(P^{-1}.M.P).D = D.(P^{-1}.M.P)$. •1 pt.•
Déduisez que $P^{-1}.M.P$ est diagonale. •1 pt.•
Déduisez que $M$ est diagonalisable. •1 pt.•
Montrez alors $e^A.e^M = e^{A+M}$. •2 pt.•

---

- 1) En travaillant comme un Cauchy[2], montrez que si $M$ et $N$ sont deux matrices varifiant $M.N = N.M$ alors $e^{M+N} = e^M.e^N$. •3 pt.•

[2] c'est à dire en manipulant les sommes comme si c'étaient des sommes finies

- 1) Montrez pour toute matrice $M$ carrée de taille 2 : $M^2+\det(M).I_2 = Tr(M).M$. •1 pt.•
- 2) Déduisez que chaque $M^n$ est dans $Vect(I_2,\ M)$. •1 pt.•
Pouvez vous en déduire $e^M \in Vect(I_2,\ M)$. •1 pt.•

## MPSI 2/2013 FONCTIONS GÉNÉRATRICES $DS08$

Pour cet exercice, on va faire intervenir le calcul polynômial pour des problèmes de probabilité.

♠22 Soit $V$ une variable aléatoire à valeurs dans une partie de $\mathbb{N}$ de 0 à $N$. On note $F_V$ le polynôme $\sum_{k=0}^{N} p_k.X^k$ où on note pour simplifier $p_k$ la probabilité $P(V=k)$. Calculez $F_V(1)$. •1 pt.•
Qui sont $F_V(0)$, $F'_V(0)$, $F_V"(0)/2$ et plus généralement $F_V^{(k)}(0)/k!$ ? •3 pt.•
Qui est $F'_V(1)$ ? •1 pt.•

♠23 Déterminez les racines de $F_V$ quand $V$ est la variable aléatoire “lancer d'un dé équilibré à six faces[3]”. •1 pt.•
Déterminez le polynôme $F_V$ quand $V$ est la variable aléatoire “somme de deux dés équilibrés à six faces” *(avec la même numérotation de* 0 *à* 5*)*. •2 pt.•

♠24 Montrez que si $U$ et V sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $F_{U+V} = F_U.F_V$. •3 pt.•
Les vingt élèves de la $MPSI_\pi$ choisissent leur $TIPE$ au hasard *(décidément)* sans se concerter *(vive l'indépendance)*. Chacun choisit physique avec probabilité $p$ *(et maths avec probabilité* $1-p$ *et non pas* $m$*, d'accord)*. Calculez la fonction génératrice du nombre d'élèves en maths. •3 pt.•

---

♠25 Deux élèves tirent maintenant en toute indépendance chacun un nombre entre 0 et $N$ *(chacun a établi sa loi)*. On aimerait que la variable aléatoire “somme des deux tirages” soit une loi uniforme sur l'ensemble des entiers de 0 à $2.N$.
Montrez que ce n'est possible pas pour $N$ égal à 1. •1 pt.•

Que pensez vous de la situation suivante :

| | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| élève $A$ | 1/2 | 0 | 0 | 1/2 |
| élève $B$ | 1/3 | 1/3 | 1/3 | 0 |

? •2 pt.•

♠26 On s'intéresse au cas $N=5$. Déterminez les racines du polynôme $F_{U+V}$ si le problème “loi uniforme sur $\{0,\ 1,\ \ldots,\ 10\}$” a une solution avec deux variables alétoires $U$ et $V$. •1 pt.•
Montrez que $F_U$ et $F_V$ ont chacun au moins une racine réelle. •1 pt.• Concluez. •1 pt.•

♠27 On note $p_0$ à $p_N$ les probabilités du tirage de l'élève $A$ et $q_0$ à $q_N$ les probabilités de tirage de l'élève $B$. Exprimez $P(U+V=0)$ et $P(U+V=N)$ et $P(U+V=2.N)$ à l'aide des $p_i$ et $q_j$. •2 pt.•
On suppose que la somme suit la loi uniforme sur $\{0,\ 1,\ldots 2.N\}$. Montrez : $P(U+V = N) \geqslant \dfrac{p_0}{(2.N+1).p_N} + \dfrac{p_N}{(2.N+1).p_0}$. •2 pt.•
Montrez pour tout réel $x$ positif : $x+\dfrac{1}{x} \geqslant 2$. •1 pt.•
Déduisez : $P(U+V=N) \geqslant 2.p_N.q_N$. •1 pt.•
Pour quelles valeurs de $N$ notre problème a-t-il une solution. •2 pt.•

MPSI 2/2013 — 493 points — $DS08$

[3]numérotées de 0 à 5 pour faciliter les choses, et pour obéir au Python suprême

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Correction

$DS08$

**DS08** • Script Python. • MPSI 2/2013

*On dispose de fonctions préétablies pour trouver le maximum d'une liste et pour voir si un élément est présent dans une liste. Mais c'est bien triste d'utiliser des modules conçus par d'autres.*

On va procéder en deux temps : on cherche le maximum, puis on compte combien de fois cette valeur est atteinte :

```
max = 0 #les éléments de L sont positifs, le maximum dépassera toujours 0
for elt in L :
....if elt > max :
........max = elt
# max contient le plus grand élément de la liste
compt = 0 #on initialise un compteur
for elt in L :
....if elt = max :
........compt +=1
print(compt) #ou return(compt) si on est dans une procédure
```

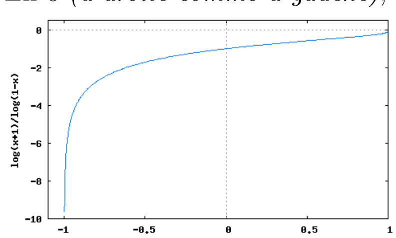
On peut aussi tout faire en une fois :

```
max, compt = 0, 0
for elt in L :
....if elt > max :
........max = elt
........compt = 0
....elif elt == max :
........compt +=1
print(compt)
```

**DS08** • Application $x \longmapsto \ln(1+x)/\ln(1-x)$. • MPSI 2/2013

Pour que $f(x)$ existe, il faut que $1+x$ et $1-x$ soient strictement positifs. Ceci force $x$ à rester entre $-1$ et 1. Mais il faut aussi éviter que $\ln(1-x)$ ne s'annule. On doit aussi éviter 0 : $D_f = ]-1,\ 0[\cup]0,\ 1[$ *(toujours sous forme de réunion d'intervalles).*

En $-1$, le logarithme du numérateur tend vers l'infini négatif, et le dénominateur a une limite strictement positive. Le quotient tend vers $-\infty$.
En 1, c'est le dénominateur qui tend vers l'infini. Le quotient tend donc vers 0 *(par valeur négative si l'on étudie les signes).*
En 0 *(à droite comme à gauche)*, on trouve une limite égale à $-1$ par quotient des équivalents.




---

On effectue deux développements limités d'ordre 4 *(par prudence)* en 0 :

$$f(x)=\frac{x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)}{-x-\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+o(x^4)}=\frac{1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)}{-1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x^3}{4}+o(x^3)}$$ après simplification.

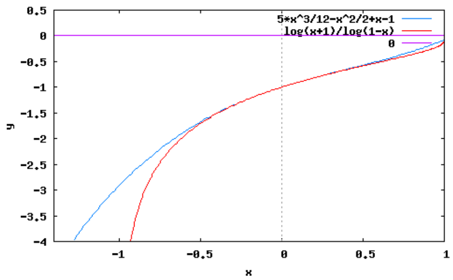
On poursuit le développement par la méthode que l'on préfère :

• division suivant les puissances croissantes,

• composition avec $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+o(u^3)$ puis produit

• formule a priori, produit en croix, identification, système

Bref, on trouve $\boxed{f(x)=-1+x-\dfrac{x^2}{2}+5.\dfrac{x^3}{12}+o(x^3)}$ quand $x$ tend vers 0.




**DS08** • Dérivation, variations de $f$. • MPSI 2/2013

On dérive $f$ sur chacun des deux intervalles :

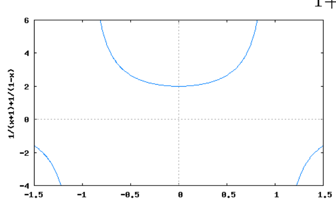
$\boxed{f'=x\longmapsto\dfrac{(1-x).\ln(1-x)+(1+x).\ln(1+x)}{(\ln(1-x))^2.(1-x^2)}}$ après réduction au dénominateur commun.

Le signe de $f'$ est celui de son numérateur $(1-x).\ln(1-x)+(1+x).\ln(1+x)$ qu'on va noter $N$.

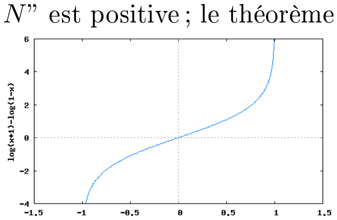
*Son signe n'est cependant pas évident à déterminer.*

On dérive : $N'=x\longmapsto -1.\ln(1-x)-\frac{1-x}{1-x}+1.\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}$. On simplifie en $N'=x\longmapsto \ln(1+x)-\ln(1-x)$.

On rédérive : $N”=x\longmapsto\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}$. Les deux termes sont positifs.



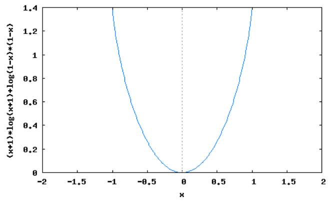

$N”$ est positive ; le théorème des accroissements finis permet de dire que $N'$ est croissante.



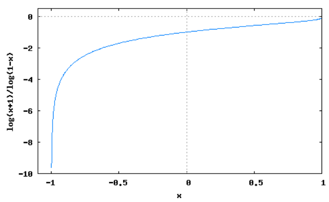

Or, $N'$ est visiblement nulle en 0. Elle est donc négative, puis positive.

Il s'ensuit que $N$ est décroissante, puis croissante.

Or, $N$ est nulle en 0 *(le point où elle atteint son minimum).*



Il s'ensuit qu'elle est positive.
La positivité de $N$ se transmet à $f'$. On déduit que $f$ est croissante sur $]-1,\ 0[$ et sur $]0,\ +\infty[$.



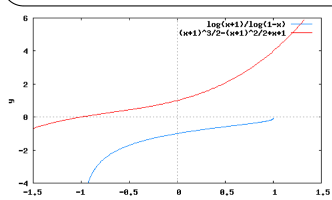
---

La croissance stricte permet de dire qu'on a un homéomorphisme de $]-1,\ 1[$ dans l'intervalle image $]-\infty,\ 0[$.
On cherche si $f'$ s'annule en un point. Ce n'est nulle part le cas. On a donc un difféomorphisme.

---

Ceci garantit l'existence de $f^{-1}$ et même son caractère $C^\infty$. Elle a donc un développement limité en tout point, à tout ordre.
En particulier en $-1$ on peut développer $f^{-1}(-1+h) = 0 + a.h + b.h^2 + o(h^2)$ quand $h$ tend vers 0.
On a en effet $f^{-1}(-1) = 0$ puisque $f(0) = -1$.
On reporte dans le développement de $f$, et on identifie le nouveau développement avec celui de l'identité par unicité du développement limité. On résout le système linéaire obtenu :

$\boxed{f^{-1}(-1+h) = 0 + h - \dfrac{h^2}{2} + o(h^2)}$ quand h tend vers 0.




**DS08** • Exponentielle dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$. • MPSI 2/2013

On commence par le cas des réels. Pour $n$ plus grand que $x$, le réel $1-x/n$ est positif, et on peut revenir à la définition par exponentielle et logarithme : $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \exp(n.\ln(1+x/n)) = \exp\left(x.\dfrac{\ln(1+x/n)}{x/n}\right)$.
Par usage de développement limité, le terme dans l'exponentielle tend vers $x$, et par continuité de l'exponentielle, l'ensemble tend vers $e^x$.

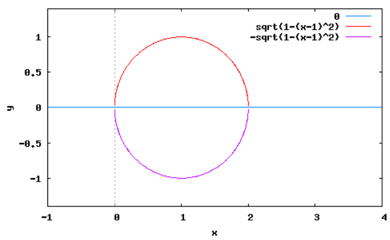
---

On se donne le complexe $x+i.y$. On le divise par $n$, on ajoute 1.
On a un complexe de la forme $\left(1+\dfrac{x}{n}\right) + i.\dfrac{y}{n}$.

Son module est donc $\boxed{\sqrt{1+2.\frac{x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}}}$ Son argument est $\boxed{Arctan\Big(\dfrac{y/n}{1+(x/n)}\Big)}$ si on va vite.

*En effet, la formule* $Arctan\Big(\dfrac{\Im m(z)}{\Re e(z)}\Big)$ *n'est utilisable que dans le demi plan de droite* $\Re e(z) > 0$. *Dans le demi plan de gauche, il faut ajouter* $\pi$. *Je vous invite en effet à calculer l'argument de* $e^{5.i.\pi/4}$ *par cette méthode, et*

*vous trouvez (à tort)* $\pi/4$.
*Il faut donc se méfier des formules trop rapides.*
Mais ici, on dispose justement d'une hypothèse : $n \geqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Le complexe $\dfrac{x+i.y}{n}$ est donc plus petit que 1 en module. Le complexe $1+\dfrac{x+i.y}{n}$ est donc dans le demi plan $\Re e(z)>0$.




---

Quand on élève le complexe à la puissance $n$, le module est élevé à la puissance $n$ et l'argument est multiplié par $n$.
On a donc deux quantités : $\Big(1+2.\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}\Big)^{n/2}$ *(la racine c'est l'exposant* $1/2$*)* et $n.Arctan\Big(\dfrac{y}{n+x}\Big)$.
Les deux quantités sont des formes indéterminées. On les lève par développement limité.
$\Big(1+2.\dfrac{x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}\Big)^n$ est l'exponentielle de $n.\ln(1+u)$ avec $u$ égal à $\dfrac{2.x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}$. On passe à l'équivalent puisque $u$ tend vers 0. On trouve $n.\Big(\dfrac{2.x}{n}+\dfrac{x^2+y^2}{n^2}\Big)$. Cette quantité tend vers $x$. Par continuité de l'exponentielle, le module tend vers $e^x$.

L'argument se traite avec l'équivalent $Arctan(u)\simeq u$ *(en* 0*)*. On a donc $n.\dfrac{y}{n+x}$, et ceci tend vers $y$.

Le module tend vers $e^x$ et l'argument vers $y$. Le complexe tend vers $e^x.e^{i.y}$, c'est à dire exactement $e^{x+i.y}$.
*Le résultat issu de* $\mathbb{R}$ *se généralise à* $\mathbb{C}$.

---

On étudie ensuite la somme partielle de série $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$. Pour certains, c'est la définition de l'exponentielle. Mais ici, l'énoncé sous entend une autre approche. Ne serait ce pas le développement de Taylor de l'exponentielle en 0 ? Il doit bien tendre vers l'exponentielle. Mais ce n'est pas si évident.
Pour tout réel $x$ et tout $n$, on a $\exp(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.\exp^{(k)}(0)+R_n(x)$ où $R_n$ est le reste *(intégrale ou Lagrange)*.
Il faut donc prouver que ce reste tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini *($x$ est fixé)*.
Ce reste s'écrit $\dfrac{x^n}{(n-1)!}.\displaystyle\int_0^1(1-t)^{n-1}e^{t.x}.dt$. On le majore en valeur absolue par $\dfrac{|x|^n}{(n-1)!}.1.e^x$ si $x$ est positif *(on majore* $e^{t.x}$ *par* $e^t$ *et* $(1-t)^n$ *par* 1*)* et $\dfrac{|x|^n}{(n-1)!}.1$ si $x$ est négatif *(cette fois,* $e^{t.x}$ *est plus petit que* 1*)*.
Par croissances comparées, ce majorant tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini.
Par encadrement, le reste tend vers 0.
La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$ tend vers $e^x$.
*Si vous parlez de développement limité et écrivez des* $o(x^n)$*, ne comptez pas sur moi pour vous accorder le moindre point. En effet, c'est une quantité qui tend vers* 0 *quand* $x$ *tend vers* 0*, et* $n$ *y est fixé.*

**DS08** • Matrice $\begin{pmatrix} . & 2 \\ . & 5 \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On impose le spectre. La matrice doit être semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Elles doivent partager la même trace (4) et le même déterminant (3).

La trace impose : $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ & 5 \end{pmatrix}$. Le déterminant impose enfin : $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}}$

---

Pour l'autre matrice, on veut $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ a & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$ pour un $\lambda$ convenable. On trouve immédiatement $\lambda = 4$ puis $7.a + 9.b = 36$.

On poursuit $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ a & b \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mu.\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour un autre $\mu$ qui est alors égal à 2. On a cette fois $a + b = 2$.

On résout le petit système linéaire *(Cramer ou matrice, ou combinaisons)* : $a = -9$ et $b = 11$. On peut conclure : $\boxed{B = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}}$

On vérifie le spectre : $\{4,\ 2\}$ *(les deux valeurs propres $\lambda$ et $\mu$ dans les formules $M.X = \lambda.X$).*

---

On somme les deux matrices : $A+B = \begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -13 & 16 \end{pmatrix}$ a pour trace 10 et déterminant 21 (rapidement : $\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ -13 & 16 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -13 & 16 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -13 & 3 \end{vmatrix} = 3.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 21$).

On trouve les deux valeurs propres par résolution d'une équation du second degré : 3 et 7.

**DS08** • Diagonalisation. • MPSI 2/2013

Il ne reste plus qu'à trouver les trois matrices de passage. Pour $B$, elle est livrée, puisqu'on a les deux vecteurs propres.

| matrice | spectre | $D$ | $P$ | $P^{-1}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ | $\{1,\ 3\}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$ | $\{2,\ 4\}$ | $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9 & -7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -13 & 16 \end{pmatrix}$ | $\{3,\ 7\}$ | $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13 & -9 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ |

*C'est ici le hasard (ou un effort simplificateur de ma part) qui fait que le spectre de $A + B$ soit la somme "terme à terme" du spectre de $A$ et de $B$ (d'ailleurs, pourquoi $(3,\ 7) = (1,\ 3) + (2,\ 4)$ et pas $(3,\ 1) + (2,\ 4)$ ?). De toutes façons, les matrices de passage sont toutes différentes, même si ici le vecteur propre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sert à toutes.*

Au fait, qui a pensé à synthétiser le travail avec un tableau ? Bref, qui fera un bon ingénieur et un bon professeur ?

**DS08** • Calcul d'exponentielles. • MPSI 2/2013

On suit le schéma maintenant bien connu : $e^M = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P.D^k.P^{-1}}{k!} = P.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}.P^{-1}$. Ensuite,

$$e^D = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}.\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}.$$

On effectue les calculs :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $M$ | $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -5 & 7 \\ -9 & 11 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -6 & 9 \\ -13 & 16 \end{pmatrix}$ |
| $e^M$ | $\begin{pmatrix} 2.e-e^3 & e^3-e \\ 2.e-2.e^3 & 2.e^3-e \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 9.e^2-7.e^4 & 7.e^4-7.e^2 \\ 9.e^2-9.e^4 & 9.e^4-7.e^2 \end{pmatrix}$ | $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 13.e^3-9.e^7 & 9.e^7-9.e^3 \\ 13.e^3-13.e^7 & 13.e^7-9.e^3 \end{pmatrix}$ |

Pour le produit $e^A.e^B$, un terme calculé suffit pour avoir tout de suite $\boxed{e^A.e^B \neq e^{A+B}}$

La formule “exponentielle de la somme égale au produit des exponentielles” n'est donc pas valable avec les matrices...

Il y a quand même des cas où la formule est valable.

**DS08** • Cas d'une matrice qui commute avec $A$. • MPSI 2/2013

On écrit es hypothèses : $A = P.D.P^{-1}$ et $M.A = A.M$.
On remplace : $M.P.D.P^{-1} = P.D.P^{-1}.M$. On multiplie à gauche par $P^{-1}$ et à droite par $P$ : $P^{-1}.M.P.D.P^{-1}.P = P^{-1}.P.D.P^{-1}.M.P$. On simplifie par associativité : $P^{-1}.M.P.D = D.P^{-1}.M.P$.
On place des parenthèses : $(P^{-1}.M.P).D = D.(P^{-1}.M.P)$.

*On lit simplement : la matrice $P^{-1}.M.P$ commute avec $D$.*

*On interprète : la commutativité de $M$ et $A$ se transmet à $P^{-1}.M.P$ et $D$ par changement de base.*

---

C'est ensuite l'étape où il faut en revenir aux coefficients. Pour une fois.
On note $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice déplacée $P^{-1}.M.P$. On traduit la commutation : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On effectue : $a = a$ et $3.d = 3.d$ (pas intéressant) et $c = 3.c$ puis $b = 3.b$.
Les réels $a$ et $d$ sont quelconques, mais $b$ et $c$ sont nuls.
La matrice $P^{-1}.M.P$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Elle est diagonale.

La matrice $M$ sécrit alors $P.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.P^{-1}$ en remontant. Elle est donc diagonalisable.

*Mais ce qui est intéressant, c'est qu'elle est “codiagonalisable” avec $A$* (les deux utilisent la même matrice de passage, ce qui n'était pas le cas pour $A$ et $B$).

Evidemment, les élèves qui se seront lancés dans des calculs bruts avec les coefficients de $M$ partout et des systèmes pour exprimer $M.A = A.M$ puis le calcul du polynôme caractéristique auront tout perdu. On leur demande de savoir raisonner, et pas juste d'appliquer des méthodes.

---

Il reste à établir $e^M.e^A = e^{M+A}$.
On note $\Delta$ la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. On a donc $M = P.\Delta.P^{-1}$ puis $M^n = P.\Delta^n.P^{-1}$ pour tout $n$. On effectue des combinaisons :
$e^M = P.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Delta^k}{k!}.P^{-1}$ puis $e^M = P.\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}.P^{-1}$.

De la même façon : $e^A = P.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}.P^{-1}$ puis $e^A = P.\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.P^{-1}$.

On effectue le produit : $e^M.e^A = P.\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}.P^{-1}.P.\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.P^{-1}$.

On simplifie : $e^M.e^A = P.\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & e^3 \end{pmatrix}.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} e^{a+1} & 0 \\ 0 & e^{d+3} \end{pmatrix}.P^{-1}$.

Le terme entre $P$ et $P^{-1}$ n'est autre que l'exponentielle de la matrice diagonale $\begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & d+3 \end{pmatrix}$.

On a donc : $e^M.e^A = P.e^{D+\Delta}.P^{-1}$.

On avait aussi $M + A = P.\Delta.P^{-1} + P.D.P^{-1} = P.(\Delta + D).P^{-1}$.

Par le calcul maintenant répétitif : $e^{M+A} = P.\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\Delta + D)^n}{n!}.P^{-1} = P.e^{D+\Delta}.P^{-1}$.

*Bref, il y a bien égalité. Et tout repose dans le déplacement /changement de base par $P$ et $P^{-1}$.*

**DS08** • Cas de deux matrices permutables. • MPSI 2/2013

On a juste l'hypothèse $M.N = N.M$. L'objectif est $e^M.e^N = e^{M+N}$. Le chemin peut passer par des manipulations rapides sur les sommes.

On calcule $e^{M+N} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(M+N)^n}{n!}$.

On développe par la formule du binôme : $e^{M+N} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}.\Big(\sum_{i+j=n} \frac{n!}{i!.j!} M^i.N^j\Big)$.

On simplifie en $\sum_{n} \sum_{i+j=n} \frac{M^i}{i!}.\frac{M^j}{j!}$.

En face, on a $e^M.e^N = \Big(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{M^i}{i!}\Big).\Big(\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{N^j}{j!}\Big)$.

Il y a bien égalité.

**DS08** • Espace vectoriel $Vect(I_2,\ M)$. • MPSI 2/2013

On pose une matrice avec quatre coefficients qu'on va encore appeler $a$, $b$, $c$ et $d$ par simplicité mais avec lassitude.

On l'élève au carré : $M^2 + \det(M).I_2 = \begin{pmatrix} a^2 + c.b & b.(a+d) \\ c.(a+d) & b.c + d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a.d - b.c & 0 \\ 0 & a.d - b.c \end{pmatrix}$.

On compare avec $(a+d).\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Il y a égalité.

C'est la formule qu'on va appeler "de Cayley Hamilton" : $\boxed{M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_2}$

*Attention, sous cette forme, elle n'est valable qu'en dimension 2. Quand la dimension augmente, il faut ajouter des termes.*

---

On a $M^2 = Tr(M).M - \det(M).I_2$. Comme $Tr(M)$ et $\det(M)$ sont deux réels, on reconnaît : $M^2 \in Vect(M,\ I_2)$.

On avait aussi $M \in Vect(M,\ I_2)$ et $I_2 \in Vect(M,\ I_2)$.

*On sent la récurrence qui s'amorce.*

Pour l'hérédité, on suppose pour un $n$ donné que $M^n$ est de la forme $\alpha_n.M + \beta_n.I_2$.

On multiplie par $M$ : $M^{n+1} = \alpha_n.M^2 + \beta_n.M$. Chacune des deux matrices est dans $Vect(M,\ I_2)$. Leur combinaison y est aussi. La récurrence s'achève.

Si on y tient, on pousse jusqu'au bout :
$M^{n+1} = \alpha_n.(Tr(M).M - \det(M).I_2) + \beta_n.M = (Tr(M).\alpha_n + \beta_n).M - \alpha_n.\det(M).I_2$.
On pose alors $\alpha_{n+1} = Tr(M).\alpha_n + \beta_n$ et $\beta_{n+1} = -\det(M).\alpha_n$. Mais ne tentez pas de calculer de proche en proche les $\alpha_k$ et $\beta_k$ ; vous allez tourner en rond.

---

Chaque $M^n$ est dans $Vect(M,\ I_2)$. Chaque $M^n/n!$ y est aussi et chaque somme $\sum_{k=0}^{n} M^k/k!$ aussi *(stabilité additive)*.
Il ne reste plus qu'à passer à la limite : $e^M$ est une combinaison de $M$ et $I_2$.
*Il ne faut pas en être trop surpris. On est dans $M_2(\mathbb{R})$ qui n'est déjà que de dimension 4. On ne peut pas partir "ailleurs".*

---

**DS08** • Fonctions génératrices. • MPSI 2/2013

Tous les coefficients du polynôme doivent être positifs ou nuls *(un coefficient nul, c'est une valeur non prise par la variable aléatoire)*. La valeur de la fonction $F_V$ en 1 est la somme $\sum_{k=0}^{N} p_k$ et elle vaut 1 *(poids de l'univers entier)*.

On calcule : $F_V(0) = p_0$.
On dérive par linéarité : $F'_V(X) = 0 + \sum_{k=1}^{N} p_k.k.X^{k-1}$ et on calcule en 0 : $F'_V(0) = p_1$.
On redérive : $F_V"(X) = 0 + 0 + \sum_{k=2}^{N} k.(k-1).X^{k-2}$ et on calcule en 0 : $F_V"(0) = 2.p_2$.On dérive $k$ fois la somme $\sum_{i=0}^{N} p_i.X^i$ en séparant en trois paquets :
• les termes de $\sum_{i=0}^{k-1} p_i.X^i$ ont une dérivée $k^{ieme}$ nulle (degré trop faible)
• le terme $p_k.X^k$ se dérive en $p_k.k!.1$ et sa valeur en 0 est égale à $k!.p_k$
• la somme $\sum_{i=k+1}^{N} p_i.X^i$ se dérive en $\sum_{k<i} p_i.\frac{i!}{(i-k)!}.X^{i-k}$ et sa valeur en 0 est nulle (l'exposant de $X$ est strictement positif).
Bref, $F_V^{(k)}(0) = k!.p_k$.
On récupère donc $p_k$ par $P(V = k) = \frac{F_V^{(k)}(0)}{k!}$

---

On reprend la formule dérivée : $F'_V(X) = \sum_{k=0}^{N} k.p_k.X^{k-1}$ et on calcule en 1 : $F'_V(1) = \sum_{k=0}^{N} k.p_k$ (qu'on écrira même $F'_V(X) = \frac{\sum_{k=0}^{N} k.p_k}{\sum_{k=0}^{N} p_k.}$ .
La somme pondérée des $k$, c'est $\boxed{\text{l'espérance de la variable aléatoire}}$

*Je vous laisse réféléchir à l'obtention de la variance, et à sa positivité par convexité de $F_V$ sur $\mathbb{R}^+$.*

**DS08** • Premiers exemples. • MPSI 2/2013

Si on a un tirage aléatoire de dé à six faces numérotés de 0 à 5, alors chaque $p_k$ pour $k$ de 0 à 5 vaut $\frac{1}{6}$. On a donc le polynôme $\dfrac{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5}{6}$. Ses racines sont celles de son numérateur dans lequel on reconnaît la série géométrique $\dfrac{X^6-1}{X-1}$.

Ses racines sont donc celles de $X^6-1$ privées de la racine 1 *(ce qui fera donc bien cinq racines, conformément à son degré).*

On résout $X^6 = 1$ en passant par la forme polaire $\rho^6.e^{6.i.\theta} = 1$ et on aboutit aux racines sixièmes de l'unité : $e^{2.i.k.\pi/6}$ avec $k$ de 1 à 5 *(la valeur 0 est refusée, c'est la racine 1).*

On dresse la liste : $\boxed{e^{i.\pi/3},\ e^{2.i.\pi/3},\ -1,\ e^{4.i.\pi/3} \text{ et } e^{5.i.\pi/3}}$

La réponse se visualise sur le cercle trigoométrique. Et on peut aussi reformuler en $-1$, $j$, $j^2$, $-j$ et $-j^2$.

---

Sans prsumer de la suite, on étudie les probabilités pour la somme de deux dés équilibrés indépendants :

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 5 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

avec trente six cases équiprobables *(mais des valeurs interviennent dans plusieurs cases).* On a donc

$$\boxed{F_{U+V} = \frac{1+2.X+3.X^2+4.X^3+5.X^4+6.X^5+5.X^6+4.X^7+3.X^8+2.X^9+X^{10}}{36}}$$

*(la valeur en 1 est bien 1).* On retrouve que la valeur 5 est a plus probable *(avec des dés numérotés de 1 à 6, on sait bien que la somme 7 est la plus probable, tout joueur de Monopoly le sait bien).*

Mais on peut ensuite comprendre que c'est

$F_{U+V} = \dfrac{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5}{6}.\dfrac{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5}{6}$.

**DS08** • Fonction génératrice d'une somme de variables indépendantes. • MPSI 2/2013

On note $p_i$ les probabilités de la variable aléatoire $U$ *($p_i = P(U=i)$)* et $q_j$ celles de la variable $V$.

On a alors $F_{U+V}(X) = \sum_{k=0}^{N+N} P(U+V=k).X^k$ par définition même *(je préssens quand même des copies d'élèves dans la lune qui n'aurnt sommé que de 0 à $N$ alors que $U+V$ est une variable qui peut aller jusqu'à $2.N$).*

On a aussi $F_U(X).F_V(X) = \sum_{i=0}^{N} p_i.X^i.\sum_{j=0}^{N} q_j.X^j = \sum_{\substack{i\leq N\\ j\leq N}} p_i.q_j.X^{i+j}$ *(par les règles élémentaires et inoubliables du calcul algébrique sur les sommes).*

On veut montrer la coïncidence de ces deux polynômes. On compare dans chacun le coefficient de chaque $X^n$. Dans le premier c'est $P(U+V=k)$ et dans l'autre c'est $\sum_{i+j=k} p_i.q_j$ ou encore $\sum_{i+j=k} P(U=i).P(V=j)$.

Par définition même de la somme de deux variables indépendantes, il y a égalité *(on balaye tous les cas où la somme i+j peut valoir k et on rappelle $P(U = i,\ V = j) = P(U = i).P(V = j)$ par indépendance).*

On a bien $\boxed{F_{U+V} = F_U.F_V}$

Pour sommer deux variables indépendantes, il suffira de multiplier leurs fonctions génératrices.

---

On étudie nos $MPSI_\pi$ et leur choix de $TIPE$ en espérant bien retrouver une loi de Bernoulli *(mais quel Bernoulli ? Jean, Jacques, Daniel ? et si oui, quel Jean, quel Jacques ?).*

Pour chaque élève, on compte 1 si il va en maths et 0 si il va en physique. On a pour chaque élève $P(U_i = 0) = p$ et $P(U_i = 1) = 1 - p$.

La variable aléoatoire qui compte le nombre d'élèves en $TIPE$ de maths est simplement $U_1 + \ldots + U_{20}$.

Comme ces vingt variables sont indépendantes, on trouve la fonction génératrice en effectuant le produit des vingt fonctions génératrices.

Mais chaque fonction génératrice est très simple : $p.X^0 + (1 - p).X^1$ *(la même pour tous).*

On a donc $\boxed{F_S(X) = \Big(p + (1 - p).X\Big)^{20}}$

*La valeur en 1 est cohérente. En dérivant, on trouve $F_S^{(k)} = (1 - p)^k.\dfrac{N!}{(N - k)!}.(p + (1 - p).X)^{N-k}$ (on a un $1 - p$ qui sort à chaque dérivation, par composition).*

*La valeur en 0 est alors $\dfrac{N!}{(N - k)!}.(1 - p)^k.p^{N-k}$.*

*La division par renomalisation donne $\dbinom{N}{k}.p^{N-k}.(1 - p)^k$. C'est bien le célèbre schéma de Bernoulli !*

**DS08** • Somme de deux variables aléatoires devant donner une loi uniforme. • MPSI 2/2013

Pour $N$ égal à 1, chacun des deux élèves tire un nombre égal à 0 ou 1. On va poser pour le premier $p_0$ et $p_1 = 1 - p_0$ puisqu'il n'y a que deux choix. Pour le second, on aura $q_0$ et $1 - q_0$. On dresse un tableau

| | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | s=0, $p = p_0.q_0$ | s=1, $p = (1 - p_0).q_0$ |
| 1 | s=1, $p = p_0.(1 - q_0)$ | s=2, $p = (1 - p_0).(1 - q_0)$ |

.

On veut l'équirépartition des valeurs de 0 à 2 :

$p_0.q_0 = 1/3$, $p_0.(1 - q_0) + (1 - p_0).q_0 = 1/3$ et $(1 - p_0).(1 - q_0) = 1/3$

On aboutit à $p_0.q_0 = 1/3$ et $p_0 + q_0 = 1$ *(la troisième équation n'apporte rien).*

On résout l'équation du second degré $X^2 - 1.X + \dfrac{1}{3} = 0$ d'inconnue $X$, et on trouve des racines non réelles. Pour des probabilités, c'est un peu surprenant et dommage.

Il n'y a donc pas de solution.

---

On passe au modèle avec $N = 3$ proposé par l'énoncé. On dresse encore un tableau :

| | U=0, $p = 1/2$ | U=1, $p = 0$ | U=2, $p = 0$ | U=3, $p = 1/2$ |
|---|---|---|---|---|
| V=0, $p = 1/3$ | S=0, $p = 1/6$ | $p = 0$ | $p = 0$ | S=3, $p = 1/6$ |
| V=1, $p = 1/3$ | S=1, $p = 1/6$ | $p = 0$ | $p = 0$ | S=4, $p = 1/6$ |
| V=2, $p = 1/3$ | S=2, $p = 1/6$ | $p = 0$ | $p = 0$ | S=5, $p = 1/6$ |
| V=3, $p = 0$ | $p = 0$ | $p = 0$ | $p = 0$ | $p = 0$ |

On interprète : la somme $U + V$ est une variable aléatoire de loi uniforme... sur $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

On a presque gagné. Mais seulement presque *(on voulait une loi uniforme sur $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$).*

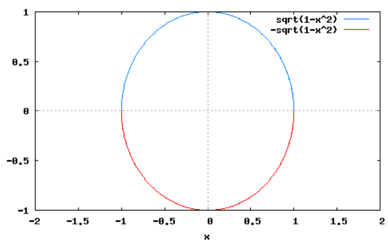
**DS08** • Cas $N = 5$. • MPSI 2/2013

C'est le cas où chaque élève tire un nombre entre 0 et 5. Il peut le faire avec un simple dé. Si le dé n'est pas truqué, on a une loi uniforme sur $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$. La fonction génératrice est alors

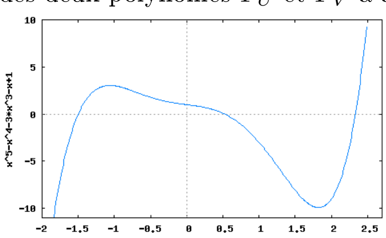
$\dfrac{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5}{6}$. Si le dé est pipé, alors la loi n'est plus uniforme, et la fonction génératrice est un polynôme de degré 5.

On a donc deux fonctions génératrices $F_U$ et $F_V$ de degré 5 chacune (ou moins si comme dans le cas précédent la valeur 5 ne sort jamais chez l'un des deux élèves).
La fonction génératrice de la somme est $F_U.F_V$ comme démontré/indiqué plus haut dans l'énoncé.
Comme on veut qu'elle soit uniforme, on demande donc :
$F_U.F_V(X) = \dfrac{1+X+X^2+X^3+X^4+X^5+X^6+X^7+X^8+X^9+X^{10}}{11}$.
D'ores et déjà, comme ce polynôme est de degré 10, il faut que chaque polynôme soit de degré 5 *(c'est normal, pour que la somme atteingne* 10*, il faut que chacune atteigne* 5*).*

On cherche comme demandé les racines de ce polynôme qui n'est autre que $\dfrac{X^{11}-1}{11.(X-1)}$. On trouve les racines onzième de l'unité, sauf la racine 1 qui est cele qui annule le dénominateur : $e^{2.i.k.\pi/11}$ avec $k$ de 1 à 10 (dix racines comme le demande le degré de $F_{U+V}$).
On place ces racines sur le cercle trigonométrique. Aucune n'est réelle. Elles sont deux à deux conjuguées.




En revanche, chaque polynôme $F_U$ et $F_V$ est un polynôme à coefficients réels de degré exactement égal à 5 comme précisé.
En appliquant la forme forte du thèorème des valeurs intermédiaires, avec les limites à l'infini, chacun des deux polynômes $F_U$ et $F_V$ a au moins une racine réelle.




Leur produit $F_U.F_V$ a donc au moins une racine réelle *(et même deux, sauf si on ne compte que comme* 1 *une éventuelle racine double).*

Ce polynôme ne peut donc être notre $\dfrac{1+X+X^2+\ldots+X^{10}}{11}$ attendu *(racines non réelles).*
On tient notre contradiction. Il est impossible d'avoir deux fonctions génératrices de produit donnant la loi uniforme sur $\{0,\ 1,\ \ldots 10\}$.

**DS08** • Démonstration générale sans fonctions génératrices. • MPSI 2/2013

On suppose données les deux variables aléatoires $U$ et $V$, avec liste de probabilités $[p_0, \ldots p_N]$ pour l'une et $[q_0, \ldots q_N]$ pour l'autre.
On calcule les probabilités pour la somme :
• $P(U+V=0) = P(U=0, V=0) = P(U=0).P(V=0) = p_0.q_0$

• $P(U+V=2.N)=P(U=N,V=N)=P(U=N).P(V=N)=p_N.q_N$
On a utilisé le fait que les deux variables sont positives, plus petites que $N$ (ce qui ne laisse qu'une possibilité à chaque fois) et indépendantes (d'où le produit).
Pour que la somme vaille $N$, on a $N+1$ possibilités, de $(U=0,V=N)$ jusqu'à $(U=N,V=0)$. On trouve donc :
• $P(U+V=N)=\sum_{k=0}^{N}P(U=k,V=N-k)=\sum_{k=0}^{N}p_k.q_{N-k}$
(partition de l'événement, puis indépendance des variables).

| $P(U+V=0)$ | $P(U+V=N)$ | $P(U+V=2.N)$ |
|---|---|---|
| $p_0.q_0$ | $p_0.q_N+p_1.q_{N-1}+\ldots+p_N.q_0$ | $p_N.q_N$ |

Oui, il est judicieux de résumer par un tableau.

---

On isole les deux termes extrèmes dans $P(U+V)=N$, les autres sont positifs *(probabilités)* :
$P(U+V=N)\geqslant p_0.q_N+p_N.q_0+0$.
On suppose que la loi de la somme est uniforme sur $\{0,\ldots 2.N\}$.
On a donc : $p_0.q_0=\dfrac{1}{2.N+1}=p_N.q_N$.
On remplace $q_0$ et $q_N$ : $P(U+V=N)=p_0.\dfrac{1}{(2.N+1).p_N}+p_N.\dfrac{1}{(2.N+1).p_0}$.
C'est la minoration demandée.

---

La minoration $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$ pour $x$ positif est un classique qu'on obtient aisément par une étude de variations. L'application $x\longmapsto x+\dfrac{1}{x}$ admet un minimum en 0 par dérivation, et ce minimum vaut 2.

*J'ai d'autres preuves, jolies (certain(e)s vont dire "quel intérêt du moment qu'une méthode calculatoire marche, c'est bon"; d'autres vont se délecter de ces variantes, et se distinguer des éléments pour PSI en visant MP*).*

•₁ L'équation de racines positives $x$ et $1/x$ s'écrit $Z^2-(x+1/x).Z+1=0$ *(produit des racines égal à 1)*. Comm ses deux racines sont réelles, son discriminant est positif : $(x+1/x)^2-4\geqslant 0$. On bascule, on passe aux racines, et c'est bon.

•₂ La moyenne arithmétique de $x$ et $1/x$ vaut $\dfrac{x+1/x}{2}$. Leur moyenne géométrique vaut 1, et elle est plus petite que la moyenne arithmétique.

•₃ On a $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\geqslant 0$. On développe, simplifie et on a la formule.

•₄ On pose $x=\tan(\alpha)$ (en définissant $\alpha=Arctan(x)$). On a alors $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}+\dfrac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}=\dfrac{1}{\cos(\alpha).\sin(\alpha)}=\dfrac{2}{\sin(2.\alpha)}\geqslant 2$ puisque le dénominateur est entre 0 et 1.

---

On applique cette inégalité au cas $x=p_0/p_N$ *(réel strictement positif)*. On a alors $P(U+V=N)\geqslant\dfrac{1}{2.N+1}.2$.
cette probabilité ne peut donc pas valoir $1/(2.N+1)$.
On tient notre contradiction.
**On ne peut donc pas obtenir une loi uniforme sur $\{0,1,\ldots 2.N\}$ comme somme de deux lois indépendantes sur $\{0,\ 1,\ldots N\}$.**
*Cette démonstration est due à Pavl Halmos.*

| MPSI 2/2013 | 493 points | $DS08$ |
|---|---|---|

MPSI 2/2013 **PROBLEME** $DS09*$

Les différentes parties de ce problème sont totalement indépendantes.

- 1) Montrer qu'une matrice $M$ à $q$ colonnes et $p$ lignes est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs non nuls $U$ et $V$ vérifiant $M = U.^tV$ *(de quels formats sont alors $U$ et $V$)* ? •2 pt.•

MPSI 2/2013 **RANG 1 et PROBABILITES** $DS09*$

- 1) On se donne deux variables aléatoires à valeurs entières $X$ et $Y$ ($X$ dans $[1, \dots p]$ et $Y$ dans $[1, \dots q]$). On définit alors la matrice $C$ de terme général $P(X = i \text{ et } Y = k)$ *(ligne $i$ colonne $k$)*.
Déterminez $C$, son rang et son déterminant dans le cas où $X$ et $Y$ sont le résultat du lancer de deux dés indépandants, équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. •2 pt.•
- 2) Déterminez $C$, son rang et son déterminant dans le cas où $X$ et $Y$ sont le résultat du lancer de deux dés indépendants, équilibrés à six faces *(numérotées $[1, 1, 3, 3, 6, 6]$ pour l'un et $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ pour l'autre)*. •2 pt.•
- 3) Déterminez $C$ dans le cas où $X$ et $Y$ comptent le nombre de lettres du nom et du prénom d'un élève tiré de manière uniforme dans la liste suivante :
`Blaise Léa, Chau Laura, Guy Horace, Lenief Louis, Ren Eric, Sehl Romain, Shih Francis, Tinel Xavier, Ung Jacques` et enfin `Vere Clara` [4] *(ici, $p$ vaut 6 et $q$ vaut 7)*. Calculez le rang de cette matrice. •3 pt.• Bonus : calculez la covariance du couple de variables aléatoires $(X, Y)$. •2 pt.•[5]

---

- 4) Montrez que si $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes, alors la matrice $C$ est de rang 1. •2 pt.•

- 5) On suppose réciproquement que $C$ est de rang 1. Montrez par un argument probabiliste que le vecteur $C.Q$ n'est autre que le vecteur de terme général $P(X = i)$ qu'on notera $V_X$ *($Q$ est le vecteur à une colonne et $q$ lignes de terme général 1)*. •2 pt.• Déduisez l'existence de $q$ réels $\mu_k$ tels que les colonnes de $C$ soient $\mu_k.V_X$. •2 pt.• Exprimez les $\mu_k$ à l'aide de la variable aléatoire $Y$. Déduisez que les deux variables aléatoires sont indépendantes. •2 pt.•

77 points —— 77 points

MPSI 2/2013 **HYPERPLANS** $DS09*$

- 1) $n$ est un entier naturel donné, on note $E$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$. Montrez que pour toute matrice $A$ de $E$ l'ensemble $\{M \in E \mid Tr(A.M) = 0\}$ est un hyperplan de $E$ (noté $H_A$). •1 pt.•

- 2) Soient $(H_n)$ une famille d'hyperplans de $E$. Pour tout $n$, on pose $U_n = H_1 \cup H_2 \cup \dots H_n$. Montrez : $E \neq U_1$. Montrez $E \neq U_2$ (on pourra pour une étape prendre un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ dans $H_1 \backslash H_2$, un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ dans $H_2 \backslash H_1$ et s'interroger sur $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$). •2 pt.•
- 3) On suppose pour un certain $n$ : $U_n \neq E$. Montrer que si l'on a $H_{n+1} \subset U_n$ ou $U_n \subset H_{n+1}$ alors on a $E \neq U_{n+1}$. •1 pt.• On suppose maintenant $H_{n+1} \not\subset U_n$ et $U_n \not\subset H_{n+1}$. Justifiez l'existence de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vérifiant $\overrightarrow{u} \in H_{n+1}$, $\overrightarrow{v} \notin H_{n+1}$, $\overrightarrow{u} \notin U_n$, $\overrightarrow{v} \in U_n$. •1 pt.• Montrez alors qu'au moins l'un des $n + 2$ vecteurs $\overrightarrow{u} + k.\overrightarrow{v}$ pour $k$ de 1 à $n + 2$ est hors de $U_{n+1}$ *(vous devrez utiliser le principe des tiroirs)*. •3 pt.•

[4] toute ressemblance avec des personnages exitant ou ayant existé n'est pas fortuite mais n'engage en rien ma responsabilité

[5] la covariance c'est $E(X.Y) - E(X).E(Y)$

- 4) Déduisez que $E$ n'est égal à aucun des $U_p$. •1 pt.•
- 5) Déduisez que pour tout $p$ il existe une droite $\Delta_p$ vérifiant $H_k \oplus \Delta_p = E$ pour tout $k$ de 1 à $p$ (supplémentaire commun). •2 pt.•
- 6) Montrez que l'on peut quand même avoir $E = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ pour trois hyperplans de $(M_2(K), +, .)$ si $K$ est le corps $\{0,\ 1\}$ pour l'addition et la multiplication modulo 2. •3 pt.•

14 points —— 14 points

## MPSI 2/2013 — HYPERPLANS ET RANG n — $DS09*$

- 1) $n$ est un entier naturel au moins égal à 2 et $H$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$. On veut montrer par deux méthodes que $H$ contient au moins une matrice inversible.

Prouvez le si par exemple $H$ est l'ensemble des matrices de trace nulle. •1 pt.•
- 2) **Méthode 1.** Pour tout couple $(i,\ k)$ on note $E_{i,k}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de ligne $i$ et colonne $k$ qui vaut 1 *(matrices de rang 1 formant la base canonique)*. On posera aussi $A = \{E_{i,k} \mid i \leqslant n,\ k \leqslant n,\ i \neq k\}$, $U = \sum_{M \in A} M$, et $J_r = \sum_{i \leq r} E_{i,i}$ *(qui est $J_n$ ?)* et enfin $R = E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$.
- 3) Motrez que $U + I_n$ est de rang 1. •1 pt.•

Résolvez l'équation $(U+I_n).X = X$ d'inconnue $X$ *(vecteur colonne)*. Déduisez que $U$ est inversible. •3 pt.•

Bonus : calculez $\det(U)$ en fonction de $n$. •3 pt.•
- 4) On suppose : $A \subset H$, montrez que $U$ est alors dans $H$. Concluez. •2 pt.•
- 5) On suppose : $A \not\subset H$. Déduisez qu'il existe un couple $(i, k)$ vérifiant $E = H \oplus Vect(E_{i,k})$. Montrez alors que le projeté de $I_n$ sur $H$ parallèlement à $Vect(E_{i,k})$ a pour déterminant 1. Concluez. •3 pt.•

- 6) **Méthode 2.** Montrez que pour tout $A$ l'application $M \longmapsto Tr(A.M)$ (notée $\varphi_A$) est une forme linéaire de $E$. Montrez que l'application $A \longmapsto \varphi_A$ est linéaire et injective de $E$ dans $L(E, \mathbb{R})$. •3 pt.•

Déduisez que toute forme linéaire de $E$ est de la forme $\varphi_A$. •1 pt.•
- 7) Montrez qu'il existe au moins une matrice $A$ de rang supérieur ou égal à 1 vérifiant $H = Ker(M \longmapsto Tr(A.M))$. •2 pt.•
- 8) Montrez qu'il existe un entier $r$, et deux matrices inversibles $P$ et $Q$ vérifiant $A.P = Q.J_r$. •1 pt.•
- 9) Montrez que la matrice $R$ est inversible. •1 pt.• Montrez que $P.R.Q^{-1}$ est dans $H$. Concluez. •2 pt.•

## MPSI 2/2013 — DUALITÉ ET POLYNOMES — $DS09*$

- 1) On note ici $E$ l'espace vectoriel des polynomes de degré inférieur ou égal à 2. Montrez que $(\phi, \psi, \theta)$ est une famille libre de formes linéaires sur $E$ : $\phi = P \longmapsto P(1)$, $\psi = P \longmapsto P'(1)$ et $\theta = P \longmapsto \int_0^1 P(t).dt$. •4 pt.•
- 2) Trouvez $(P, Q, R)$ dans $E$ vérifiant $\phi(P) = 1$, $\phi(Q) = 0$, $\phi(R) = 0$, $\psi(P) = 0$, $\psi(Q) = 1$, $\psi(R) = 0$, $\theta(P) = 0$, $\theta(Q) = 0$ et enfin $\theta(R) = 1$. •3 pt.•
- 3) Ecrivez $P \longmapsto P(0)$ comme combinaison de $\phi$, $\psi$ et $\theta$. •2 pt.•

## MPSI 2/2013 — 558 points — $DS09*$

Cadeau pour Jacques : quelques parapéteries de François Caradec :
La femme de l'archéologue aime les fouilles sérieuses.
Messaline se fait mettre un col de loutre sur la nuque.
Le pape remercie la Duchesse de l'avoir fait mander.
Frotter moi ce lard dit la charcutière, il est bien salé.
Juste une petite frite, mademoiselle Joséphine.

**DS09*** • Forme $U.^tV$ des matrices de rang 1. • MPSI 2/2013

*On doit établir une équivalence, c'est à dire deux implications.*

On suppose que la matrice $M$ est de rang 1. On traduit : ses $q$ colonnes engendrent un espace vectoriel de dimension 1. Elles sont donc toutes dans une droite, c'est à dire colinéaires. On prend alors une de ces colonnes non nulles *(il en existe au moins une sinon la matrice est de rang 0)*. On la note $U$. Les colonnes sont alors de la forme $a_1.U$ jusqu'à $a_q.U$. On note alors $V$ le vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}$, et on vérifie :

$M = \begin{pmatrix} a_1.u_1 & \dots & a_q.u_1 \\ a_1.u_2 & \dots & a_q.u_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1.u_p & \dots & a_q.u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_q \end{pmatrix} = U.^tV$ *(et on rappelle que le vecteur $V$ est non nul, car dans notre description l'un des $a_k$ vaut 1)*

*Attention, ne pas écrire la matrice sous la forme* $\begin{pmatrix} u_1 & \alpha_2.u_1 & \dots & \alpha_q.u_1 \\ u_2 & \alpha_2.u_2 & \dots & \alpha_q.u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_p & \alpha_2.u_n & \dots & \alpha_q.u_p \end{pmatrix}$*. Il se peut en effet que la première colonne soit nulle. Par exemple* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *est de rang 1.*

<u>**Réciproquement,**</u> on suppose que $M$ est de la forme $U.^tV$. Les colonnes de $M$ sont alors toutes proportionnelles *(multiples de $U$)*. L'espace vectoriel engendré est de dimension inférieure ou égale à 1. Et ce ne peut pas être 0. En effet, il existe au moins un terme non nul $u_i$ dans $U$ et un terme non nul $v_k$ dans $V$. Le terme de ligne $i$ et colonne $k$ de $U.^tV$ est alors $u_i.v_k$ et il est non nul *(comme mon corps, le corps des réels est... intègre)*.

**DS09*** • Exemples de matrices pour deux variables aléatoires. • MPSI 2/2013

Si $X$ et $Y$ sont les résultats de deux lancers de dés indépendants, et si les dés sont supposés équilibrés, alors pour tout couple $(i, j)$ *(avec $i$ et $j$ entre 1 et 6)*, on a
$P(X = i\ et\ Y = j) = P(X = i).P(Y = j) = \dfrac{1}{36}$.

On a la matrice de terme général 1/36 : $\boxed{\begin{pmatrix} 1/36 & \dots & 1/36 \\ \vdots & & \vdots \\ 1/36 & \dots & 1/36 \end{pmatrix}}$

**Son rang vaut 1 et son déterminant est nul.**

---

Si il s'agit des dés $[1, 1, 3, 3, 6, 6]$ et $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$, on a cette fois $P(X = i\ et\ Y = j) = P(X = i).P(Y = j) = \dfrac{P(X = i)}{6}$ par indépendance des deux lancers et uniformité du second dé. La matrice est $\boxed{\begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \end{pmatrix}}$

Son rang est 1 et son déterminant est donc aussi nul.

---

Pour la liste des dix élèves, la variable aléatoire “élève” est uniforme : $P(eleve = untel) = \dfrac{1}{10}$. On va donc se retrouver à remplir les cases de la matrice avec des 0 *(si aucun élève n'a i lettres dans son nom et k lettres dans son prénom)* et $1/10$ *(si un élève a i et k lettres)*. La case $(4,5)$ aura pour valeur $2/10$ à cause de “Chau Laura” et “Vere Clara”.

La matrice est alors $\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a = 1/10}$

Elle n'est pas carrée, son déterminant n'existe pas. Les colonnes 1 et 2 ne comptent pas *(de même que les lignes)*. Les colonnes 3 à 7 ne sont pas indépendantes *(la matrice ne peut pas être de rang 5 car elle a au maximum quatre lignes indépendantes)*. Les colonnes 3, 4, 5 et 6 sont indépendantes : $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 2.a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -2.a^4 \neq 0$. **La matrice est de rang 4.**

**Bonus :** le calcul de la covariance. Déjà, on calcule l'espérance de la variable aléatoire “longueur du nom” :

$E(X) = \dfrac{6+4+3+6+3+4+4+5+3+4}{10} = \dfrac{42}{10}$

$E(Y) = \dfrac{3+5+6+5+4+6+7+6+7+5}{10} = \dfrac{54}{10}$

Rappel : liste des noms : `Blaise Léa`, `Chau Laura`, `Guy Horace`, `Lenief Louis`, `Ren Eric`, `Sehl Romain`, `Shih Francis`, `Tinel Xavier`, `Ung Jacques` et `Vere Clara`.

On calcule ensuite l'espérance du produit : $E(X.Y) = \dfrac{6.3+4.5+3.6+6.5+3.4+4.6+4.7+5.6+3.7+4.5}{10} = \dfrac{221}{10}$. La covariance vaut $\boxed{\dfrac{221}{10} - \dfrac{42.54}{100} = -\dfrac{29}{50}}$ *(oui, une covariance a le droit d'être négative, et aussi nulle)*.

**DS09*** • Cas des variables aléatoires indépendantes. • MPSI 2/2013

Si les variables sont indépendantes, le calcul de la matrice est simple :

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1,Y=1) & P(X=1,Y=2) & \dots & P(X=1,Y=q) \\ P(X=2,Y=1) & P(X=2,Y=2) & \dots & P(X=2,Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p,Y=1) & P(X=p,Y=2) & \dots & P(X=p,Y=q) \end{pmatrix} \text{ par définition}$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} P(X=1).P(Y=1) & P(X=1).P(Y=2) & \dots & P(X=1.P(Y=q) \\ P(X=2).P(Y=1) & P(X=2).P(Y=2) & \dots & P(X=2).P(Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p).P(Y=1) & P(X=p).P(Y=2) & \dots & P(X=p).P(Y=q) \end{pmatrix}}$$ par indépendance

$C = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=p) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(Y=1) & P(Y=2) & \dots & P(Y=q) \end{pmatrix}$ la matrice est de rang 1.

---

On suppose cette fois que la matrice est de rang 1, on va montrer que les variables sont indépendantes, c'est à dire $P(X=i, Y=j) = P(X=i).P(Y=j)$ pour tout couple $(i,\ j)$.
Quand on effectue le produit $C.Q$, on somme les colonnes de la matrice $C$. On a plusieurs façons de le voir. La première est lourde, mais correcte : $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_p^1 & c_p^2 & \dots & c_p^q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 + c_1^2 + \dots + c_1^q \\ \dots \\ c_p^1 + c_p^2 + \dots + c_p^q \end{pmatrix}$.
La seconde consiste à dire que l'on calcule l'image du vecteur $\overrightarrow{e_1} + \dots + \overrightarrow{e_q}$, et que chaque colonne est justement l'un des $f(\overrightarrow{e_k})$.
Mais qui sont chacune de ces sommes ? Regardons la $i^{eme}$ :
$c_i^1 + c_i^2 + \dots + c_i^q = P(X=i, Y=1) + P(X=i, Y=2) + \dots + P(X=i, Y=q)$.
Il s'agit alors de la somme d'événements incompatibles ($Y$ ne peut prendre qu'une des valeurs à la fois) qui se regroupent en un seul $P(X=i, Y \in \{1, \dots q\})$ *(on peut parler de partition de l'univers de la variable aléatoire $Y$)*.
Mais comme justement $Y$ pend ses valeurs dans $\{1, \dots q\}$, on ne dit rien avec "$Y \in \{1, \dots q\}$" et on calcule juste $P(X=i)$. On résume :

$$\boxed{\begin{pmatrix} P(X=1, Y=1) & P(X=1, Y=2) & \dots & P(X=1, Y=q) \\ P(X=2, Y=1) & P(X=2, Y=2) & \dots & P(X=2, Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p, Y=1) & P(X=p, Y=2) & \dots & P(X=p, Y=q) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=p) \end{pmatrix}}$$

On a bien le résultat demandé.

*On n'a pour l'instant pas utilisé la propriété "de rang 1". On va le faire.*
On note $C_1$ à $C_q$ les $q$ colonnes de la matrice $C$. On a donc obtenu : $C_1 + \dots + C_q = V_X$.
Mais comme les colonnes sont toutes proportionnelles, elles sont toutes dans une droite engendrée par un vecteur *(que l'on ne notera pas)*. Leur somme y est donc aussi. Et comme cette somme est égale à $V_X$, c'est que le vecteur non nommé est proportionnel à $V_X$. On va donc pouvoir le prendre comme vecteur de base de la droite.
Les colonnes de la matrice $C_1$ à $C_q$ sont donc toutes des multiples de $V_X$. On va noter $\mu_1$ à $\mu_k$.

Il reste à identifier qui sont ces $\mu_k$. On va inverser les rôles des colonnes et des lignes *(et donc des variables $X$ et $Y$)*.
On effectue la somme $L_1 + \dots + L_p$ de toutes les lignes. On calcule donc des sommes comme $P(X=1, Y=k) + P(X=2, Y=k) + \dots + P(X=p, Y=k)$. Par le même argument d'événements incompatibles et de partition de l'univers de la variable aléatoire $X$, on trouve $P(Y=k)$. On en déduit que $L_1 + \dots + L_p$ est le vecteur $(P(Y=1),\ P(Y=2), \dots, P(Y=q))$.
Comme les lignes étaient proportionnelles/colinéaires, leur somme est encore sur la même droite. On en déduit que ces lignes sont proportionnelles à ce vecteur ligne que l'on note ${}^tV_Y$.
On a des réels $\alpha_1$ à $\alpha_p$ vérifiant $L_i = \alpha_i.{}^tV_Y$.

En identifiant les deux résultats obtenus, on a $\alpha_i.P(Y = k) = \mu_k.P(X = i)$ pour tout couple $(i,\ k)$.
En prenant un des indices $i$ vérifiant $P(X = i) \neq 0$, on obtient nécessairement : $\mu_1 = P(Y = 1)$, $\mu_2 = P(Y = 2)$ jusqu'à $\mu_k = P(Y = k)$ *(et le même type de relation sur les $\alpha_i$).*
On résume : la matrice $C$ est finalement simplement $V_X.{}^tV_Y$. On identifie :

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1, Y=1) & P(X=1, Y=2) & \dots & P(X=1, Y=q) \\ P(X=2, Y=1) & P(X=2, Y=2) & \dots & P(X=2, Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p, Y=1) & P(X=p, Y=2) & \dots & P(X=p, Y=q) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1).P(Y=1) & P(X=1).P(Y=2) & \dots & P(X=1.P(Y=q) \\ P(X=2).P(Y=1) & P(X=2).P(Y=2) & \dots & P(X=2).P(Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p).P(Y=1) & P(X=p).P(Y=2) & \dots & P(X=p.P(Y=q) \end{pmatrix}$$

Terme à terme, on a donc pour tout couple $(i,\ k)$ : $\boxed{P(X = i,\ Y = k) = P(X = i).P(Y = k)}$
C'est la définition de l'indépendance des variables.

**DS09*** • Réunions d'hyperplans. • MPSI 2/2013

On rappelle qu'un hyperplan de $(E, +, .)$ est un sous-espace vecteur de $E$ qui a une dimension de moins que $E$ *(ici,* $\dim(E) = n^2$ *et* $\dim(H_k) = n^2 - 1$*).* Il ne peut donc jamais y avoir une égalité du type $E = H_k$.

---

On prend deux hyperplans $H_1$ et $H_2$. La démonstration est calquée sur celle du cours pour "la réunion de deux sous-groupes ne peut pas être un groupe".
On doit éliminer deux cas tout de suite :
• $H_1 \subset H_2$ (alors : $H_1 \cup H_2 = H_2 \neq E$)
• $H_2 \subset H_1$ (alors : $H_1 \cup H_2 = H_1 \neq E$)

On passe donc au dernier cas : $H_1 \not\subset H_2$ et $H_2 \not\subset H_1$. On a alors au moins un vecteur qui est dans $H_1$ sans être dans $H_2$ *(on le note $\overrightarrow{u_1}$)* et au moins un vecteur qui n'est pas dans $H_1$ mais est dans $H_2$ *(on le note $\overrightarrow{u_2}$).* On regarde alors $\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$.
Il ne peut pas être dans $H_1$ *(sinon $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{u_1}) \in H_1$).* Il ne peut pas être dans $H_2$ (sinon $(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) - (\overrightarrow{u_2}) \in H_2$). Or, il est dans $E$.
On a donc au moins un vecteur de $E$ qui n'est ni dans $H_2$ ni dans $H_1$ : $E$ est strictement plus grand que $H_1 \cup H_2$.

---

*On passe à une étape d'hérédité pour la récurrence.*
On suppose donc que la réunion $H_1 \cup \dots H_n$ n'est pas égale à $E$.
Si l'on a $H_{n+1} \subset U_n$ alors on a $U_{n+1} = U_n \neq E$.
Si l'on a $U_n \subset H_{n+1}$ alors on a $U_{n+1} = H_{n+1} \neq E$.

On passe au cas où l'on n'a aucune des deux inclusions :
• l'ensemble $U_n$ déborde de $H_{n+1}$, on peut donc trouver $\overrightarrow{v}$ vérifiant $\overrightarrow{v} \in U_n$ et pourtant $\overrightarrow{v} \notin H_{n+1}$
• l'hyperplan $H_{n+1}$ déborde de la réunion $U_n$, on a alors $\overrightarrow{u}$ vérifiant $\overrightarrow{u} \in H_{n+1}$ et $\overrightarrow{u} \notin U_n$.
On nous invite alors à regarder $n + 2$ vecteurs de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ à $\overrightarrow{u} + (n + 2).\overrightarrow{v}$.
On raisonne par l'absurde.
Si ils sont tous dans $U_{n+1}$, alors chacun de ces $n + 2$ vecteurs est dans l'un des $H_k$ *(pour $k$ de 1 à $n + 1$).* Mais $n + 2$ vecteurs dans $n + 1$ hyperplans donnent un défaut d'injectivité *(c'est là qu'on utilise le principe de Dirichlet).* L'un au moins des $H_k$ contient deux des vecteurs pour des indices distincts :
$\overrightarrow{u} + i.\overrightarrow{v} \in H_k$ et $\overrightarrow{u} + j.\overrightarrow{v} \in H_k$ (avec $i \neq j$)
Par combinaison rapide, on déduit : $\overrightarrow{u} \in H_k$ et $\overrightarrow{v} \in H_k$.
• Si $k$ est égal à $n + 1$, on a la contradiction avec $\overrightarrow{v} \in H_k$.

• Si $k$ est un des indices de 1 à $n$, c'est $\overrightarrow{u} \in H_k \subset U_n$ qui donne la contradiction.

Bref, l'un au moins des $\overrightarrow{u} + i.\overrightarrow{v}$ n'est pas dans $U_{n+1}$, alors même qu'il est dans $E$. C'est donc que $E$ est strictement plus grand que $U_{n+1}$.

---

On a donc prouvé par récurrence sur $n$ *(convenablement initialisée)* qu'aucun des $U_n$ n'est égal à $E$.
Bilan : un $\mathbb{R}$ espace vectoriel ne peut pas être réunion finie d'hyperplans.
*Ce n'est pas avec des plans en nombre fini qu'on va reconstruire* $\mathbb{R}^3$ *juste en les réunissant.*
**Corollaire :** un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ne peut pas être réunion de sous-espaces vectoriels stricts.

On déduit alors pour tout $p$ qu'il existe au moins un vecteur $\overrightarrow{w}$ qui est dans $E - U_p$. Ce vecteur est donc hors de chacun des $H_k$ pour $k$ de 1 à $p$.
Or, dès qu'on a un vecteur $\overrightarrow{w}$ hors d'un hyperplan $H$ de $E$, on peut écrire $E = H \oplus Vect(\overrightarrow{w})$ *(voir interrogation de mardi).*

Le vecteur $\overrightarrow{w}$ définit donc une droite $\Delta_p = Vect(\overrightarrow{w})$ qui est un supplémentaire commun des tous les hyperplans $H_k$ pour $k$ de 1 à $p$.

**DS09*** • Ecriture de $M_2(K)$ comme réunion d'un nombre fini d'hyprplans. • MPSI 2/2013

On travaille ici avec des matrices carrées de taille 2 à coefficients dans $\{0,\ 1\}$. On n'a pas tant de matrices que ça : quatre cases avec chacune deux valeurs. Il n'y a que $2^4$ matrices, telles que $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Je vous offre l'hyperplan des matrices de trace nulle :
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (vérifiez, leur trace est nulle, et il n'y en a pas d'autre)[6].
Il ne manque que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
On les met dans deux autres hyperplan :
• celui des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et celui des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.
Bref, avec ces trois hyperplans (chacun est bien de dimension 3), on reconstruit $E$ tout entier par réunion.

*Pourquoi a-t-on ce phénomène que l'on n'avait pas avec les matrices à coefficients réels ? Parce que ici, on n'a qu'un nombre fini de nombres disponibles. On ne peut donc pas utiliser le principe du pigeonnier avec* $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + 2.\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{u} + 3.\overrightarrow{v}$ *et* $\overrightarrow{u} + 4.\overrightarrow{v}$ *puisque ce sont les mêmes vecteurs qui reviennent à cause des congruences modulo* 2.

**DS09*** • Exemple d'hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$ contenant une matrice inversible. • MPSI 2/2013

L'ensemble des matrices ayant une trace nulle est bien un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de dimension $n^2 - 1$ *(c'est le noyau de la forme linéaire "trace").*
On y trouve au moins une matrice inversible : la matrice $Diag(1, 1 \ldots 1, 1 - n)$ *(matrice diagonale, dont les termes valent* 1 *sauf le dernier qui vaut* $1 - n$*).* Sa trace est nulle *(*$n - 1$ *fois* 1 *et une fois* $1 - n$*).*
Et cette matrice est inversible, puisque son déterminant vaut $1 - n$.

---

[6] vérifiez aussi qu'il est stable par addition et par multiplication par 0 ou 1

La matrice $U$ est somme des $E_{i,k}$ avec $i$ différent de $k$. Elle est donc constituée de 1 partout, sauf sur la diagonale *(car c'est là qu'on a $i = k$)*. En taille 4 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Si on lui ajoute $I_n$, on vient mettre sur la diagonale les 1 qui manquent. On trouve la matrice de terme général 1 dont toutes les colonnes sont égales à la colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. On l'écrit même $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Ecrite ainsi ou décrite par ce qui précède, elle est de rang 1.

On résout alors l'équation $(U+I_n).X = X$ de vecteur colonne inconnu $X$. On trouve que $X$ est l'image d'un vecteur par $U+I$, il est donc dans l'ensemble image engendré par les colonnes. C'est un multiple de $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Mais si on l'écrit $\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$, on aboutit au système $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}$ qui n'a qu'une solution : $x = 0$.

On résume : la seule solution de $(U + I_n).X = X$ est le vecteur nul.
On simplifie : la seule solution de $U.X = 0$ est le vecteur nul.
On traduit : l'application $X \longmapsto U.X$ est injective.
On reconnaît : $U$ est inversible.

*On pouvait y parvenir par d'autres voies. En particulier, on pouvait montrer que le déterminant de $U$ vaut $(-1)^{n-1}.(n-1)$ (ce qui entrainait bien que $U$ est inversible).*

---

Si $A$ est inclus dans $H$, tous les éléments de $A$ sont dans l'hyperplan $H$. mais alors par stabilité, leur somme $U$ est dans $H$.
Et comme $U$ est inversible, on a une matrice inversible dans l'hyperplan $H$.

Il reste à étudier l'autre cas, si $H$ ne contient pas toutes les matrices $E_{i,k}$ avec $i$ différent de $k$.

---

Dans le cas $A \not\subset H$, on traduit : l'une au moins des $E_{i,k}$ n'est pas dans $H$.
Mais alors, on reprend le résultat : quand un vecteur n'est pas dans un hyperplan, il engendre un supplémentaire de cet hyperplan.

On peut donc projeter sur $H$ parallèlement à $Vect(E_{i,k})$ pour ce couple $(i,k)$ avec $i \neq k$ et $E_{i,k}$ hors de $H$.
Quand on projette $I_n$ on obtient un vecteur de la forme $I_n - \lambda.E_{i,k}$ avec $\lambda$ convenable pour projeter *(explicitement, si $\varphi$ est une forme linéaire dont $H$ est le noyau, on projette en $I_n - \dfrac{\varphi(I_n)}{\varphi(E_{i,k})}.E_{i,k}$)*.
Or, comme $i$ est différent de $k$, cette matrice est triangulaire, avec que des 1 sur la diagonale (de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Elle est donc inversible *(on reconnaît même une matrice de Gauss)*.
On tient donc aussi dans ce cas un élément de $H$ *(puisque c'est un projeté sur $H$)* qui est inversible.

**DS09*** • Les hyperplans sous la forme $Ker(M \longmapsto Tr(A.M)$. • MPSI 2/2013

Pour tout $A$, l'application $M \longmapsto Tr(A.M)$ est bien définie *(le produit $A.M$ existe, est une matrice carrée, dont la trace existe)*. Ensuite, cette application est linéaire : $Tr(A.(\alpha.M+\beta.N)) = \alpha.Tr(A.M)+\beta.Tr(A.N)$. On a donc une forme linéaire.
*La partie intéressante est : a-t-on ainsi toutes les formes linéaires ?*

On note donc $\varphi_A$ la forme $M \longmapsto Tr(A.M)$ *(elle dépend bien du choix de $A$)*.
Cette transformation est linéaire : $\varphi_{\alpha.A} = \alpha.\varphi_A$ et $\varphi_{A+B} = \varphi_A + \varphi_B$.
On vérifie : $\varphi_{\alpha.A} = (M \longmapsto Tr(\alpha.A.M)) = (M \longmapsto \alpha.Tr(A.M)) = \alpha.(M \longmapsto Tr(A.M)) = \alpha.\varphi_A$.
On détermine son noyau. On se donne $A$ et on suppose que $\varphi_A$ est la forme linéaire nulle. On suppose donc que pour tout $M$ $\varphi_A(M)$ est nulle : $\forall M \in E,\ Tr(A.M) = 0$. On l'applique au cas particulier $M =^t A$ *(c'est une hypothèse valable pour toutes les matrices, et tant mieux si une seule matrice bien choisie permet déjà de conclure)*. On a alors $Tr(A.^tA) = 0$. Mais cette trace n'est autre que $\sum_{\substack{i\leq n\\k\leq n}} (a_i^k)^2$. Si elle est nulle, c'est que chacun des $a_i^k$ est nul. la matrice $A$ est nulle.
La seule matrice dans le noyau de $Ker(\varphi_A)$ est la matrice nulle.
L'application $A \longmapsto \varphi_A$ est injective.

Mais injective de quoi dans quoi ? De $E$ dans $L(E,\mathbb{R})$. Or, $E$ est de dimension $n^2$. Et $L(E,\mathbb{R})$ est de dimension $\dim(E).\dim(\mathbb{R})$, c'est à dire encore $n^2$.
Par la formule du rang, l'application injective entre deux espaces de même dimension finie est bijective.
Ce qui nous intéresse ici : cette application est surjective. Toute forme linéaire est de la forme $M \longmapsto Tr(A.M)$ pour $A$ bien choisie.

**Bilan :** tout hyperplan en tant que noyau d'une forme linéaire non nulle est de la forme $\{M \mid Tr(A.M) = 0\}$ pour au moins une matrice $A$ non nulle.

**DS09*** • Seconde méthode pour trouver une matrce inversible dans un hyperplan. • MPSI 2/2013

On se donne un hyperplan $H$. Comme on vient de le voir, il est de la forme $Ker(\varphi_A)$ pour $A$ bien choisie.
Mais le **théorème du rang dans sa version matricielle** dit que toute matrice de rang $r$ est équivalente à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$. On change de base dans l'espace de départ : un supplémentaire du noyau et le noyau. On change de base dans l'espace d'arrivée : l'image de la base du supplémentaire et de quoi compléter.
Sur ces bases adaptées, la matrice est $J_r$. Et on fait les changements de base avec des matrices inversibles $P$ et $Q$.
*Ici, il n'y a aucune raison que $P$ et $Q$ entretiennent la moindre relation. On n'est pas en train de diagonaliser.*

On a donc écrit $A$ sous la forme $Q.J_r.P^{-1}$. On reprend donc : $M \in H$ si et seulement si $Tr(Q.J_r.P^{-1}.M) = 0$.

---

On regarde la matrice $R$ de forme propre $R = E_{n,1} + \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1}$. On a $n$ termes égaux à 1 dans la matrice, en lignes $i$, colonne $i+1$ et en ligne $n$ colonne 1. Sommairement : $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Pour prouver l'inversibilité de cette matrice, on e calcule le déterminant par développement par rapport à la première colonne : $\det(R) = (-1)^{n+1}$.

*Ou alors, on reconnaît une matrice de changement de base, par permutation. Ou enfin on donne l'inverse explicite de cette matrice.*

---

On veut montrer que $P.R.Q^{-1}$ est dans $h$. On calcule $Tr(Q.J_r.P^{-1}.(P.R.Q^{-1}))$. On simplifie en $Tr(Q.J_r.R.Q^{-1})$ puis en $Tr(J_r.R.Q^{-1}.Q)$ par propriété habituelle de la trace. On regarde explicitement la matrice $J_r.R$ : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

dans cette nouvelle matrice, les 1 sont hors de la diagonale.
La trace de cette matrice est nulle : $Tr(Q.J_r.P^{-1}.(P.R.Q^{-1})) = 0$.
Ceci signifie que $P.R.Q^{-1}$ est dans $H$.
Mais cette matrice est inversible en tant que produit de matrices inversibles.
On a trouvé dans $H$ au moins une matrice inversible.

**DS09*** • Trois formes linéaires sur $\mathbb{R}_2[X]$. • MPSI 2/2013

On doit déjà vérifier que nos applications vont bien de $E$ dans $\mathbb{R}$. Pour $P$ donné, $P(1)$, $P'(1)$ et l'intégrale existent, et ce sont des réels.
Ensuite, on vérifie la linéarité : $\phi(a.P + b.Q) = a.P(1) + b.Q(1) = a.\phi(P) + b.\phi(Q)$, de même pour les autres par linéarité de la dérivation et de l'intégration.

On doit ensuite prouver la liberté de cette famille. On prend $a$, $b$ et $c$ et on suppose $a.\phi + b.\psi + c.\theta = 0$ *(forme nulle)*. On doit aboutir à la conclusion $a = b = c = 0$.
On traduit l'hypothèse : pour tout $P$ on a $a.P(1) + b.P'(1) + c.\int_0^1 P(t).dt = 0$. On l'applique en particulier à $P = 1$, puis $P = X$ et $P = X^2$ :
$a + 0 + c = 0$, $a + b + c/2 = 0$ et $1 + 2.b + c/3 = 0$.
On résout rapidement ce système et on trouve $a = b = c = 0$ comme promis.
On a bien une famille libre de formes linéaires. C'est donc même une base de l'espace dual de $E$ *(argument de dimensions)*.

---

On cherche $P$, $Q$ et $R$ ayant les bonnes propriétés.
Par exemple $R$ est nulle en 1 et a une dérivée nulle en 1. Il est de la forme $\gamma.(X-1)^2$ (on ne peut pas plus vu que le degré est plafonné à 2). On ajuste $\gamma$ pour que l'intégrale vaille 1 : $R = 3.(X-1)^2$.

Pour $Q$, il se factorise par $(X-1)$. Il est de la forme $(a.X+b).(X-1)$. Pour que sa dérivée vaille 1 en 1 : $(a.X+1-a).(X-1)$.
On ajuste ensuite pour annuler l'intégrale de 0 à 1 : $Q = \dfrac{3.X^2 - 4.X + 1}{2}$.

Pour $P$ on raisonne de même : $P = -3.X^2 + 6.X - 2$.

Je résumé :

| $P(X)$ | $Q(X)$ | $R(X)$ |
|---|---|---|
| $-3.X^2+6.X-2$ | $\dfrac{3.X^2-4.X+1}{2}$ | $3.(X-1)^2$ |

---

On décompose $\Gamma = (P \longmapsto P(0))$ sur cette base.

On écrit tout de suite cette forme comme combinaison $\Gamma = a.\phi + b.\psi + c.\theta$.
Pour aller vite, on calcule $a$, $b$ et $c$ en calculant $\Gamma(P)$, $\Gamma(Q)$ et $\Gamma(R)$ :
$-2 = \Gamma(P) = a.\phi(P) + b.\psi(P) + c.\theta(P) = a$
$1/2 = \Gamma(Q) = a.\phi(Q) + b.\psi(Q) + c.\theta(Q) = b$
$3 = \Gamma(R) = a.\phi(R) + b.\psi(R) + c.\theta(R) = c$
On résume : $\boxed{(P \longmapsto P(0)) = -2.\phi + \dfrac{\psi}{2} + 3.\theta}$

| MPSI 2/2013 | 558 points | $DS09*$ |
|---|---|---|

MPSI 2/2013 **PROBLEME** $DS09$

*Ce problème vient d'un sujet de concours de fin d'année de Sup.*

- 1) On définit : $f(z) = \dfrac{z^2}{z-2.i}$ pour $z$ dans $\mathbb{C}$. Déterminez le domaine de définition $D$ de $f$. •1 pt.•
- 2) Déterminez les racines carrées complexes de $8 - 6.i$. Déterminez les antécédents de $1 + i$ par $f$. •2 pt.•
- 3) Soit $h$ un complexe. Discutez suivant les valeurs de $h$ le nombre d'antécédents de $h$ par $f$. Déterminez l'image $f(D)$ de $D$ par $f$. La fonction $f$ est elle une application surjective de $D$ dans $\mathbb{C}$ ? •3 pt.•
$f$ est elle une application injective de $D$ dans $\mathbb{C}$ ? •1 pt.•

- 1) Soit $g$ l'application définie sur $D$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall z \in D,\ g(z) = |z-2.i|^2.\dfrac{z^2}{z-2.i} + z^3$.
Soit $z$ un complexe appartenant à $D$ de partie réelle $x$ et de partie imbaginaire $y$. Trouvez la partie réelle et la partie imaginaire de $g(z)$ *(l'une des deux sera* $2.x^3 - 2.x.y^2 - 4.x.y$*)*. •2 pt.•
- 2) Soit le plan $P$ rapporté à un repère orthonormé direct $R(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $\Gamma$ l'ensemble des points $M$ du plan d'affixe $z$ telle que $g(z)$ soit un imaginaire pur. Montrez que $\Gamma$ est inclus dans la réunion d'une droite et d'une conique $\mathbb{C}$.[7] •3 pt.•

---

- 1) Soit $a$ un entier naturel. Soit $P_a$ la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R},\ P_a(t) = t^3 - (a^2 + 2.a).t + 2$. Le but de cette partie est de trouver $a$ tel que $P_a$ ait trois racines dans $\mathbb{Z}$. On suppose qu'un tel $a$ existe, on note alors $t_1$, $t_2$ et $t_3$ les trois racines de $P_a$ avec $t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$. Que valent $t_1 + t_2 + t_3$ et $t_1.t_2.t_3$ ? •1 pt.•
- 2) Calculez $P_a(0)$ et déduisez : $t_1 < 0$. •1 pt.•
- 3) Déduisez : $t_1 < 0 \leqslant t_2 \leqslant t_3 \leqslant -t_1$, puis trouvez les valeurs de $t_1$, $t_2$ et $t_3$. •3 pt.•
- 4) Montrez : $P'(t_2) = 0$ puis déduisez la valeur de $a$. •2 pt.•
- 5) Réciproquement, montrez que les valeurs de $a$ conviennent bien. •1 pt.•

---

- 1) Soit $(x,\ y)$ un élément quelconque de $\mathbb{R}^2$. On note $M_{x,y}$ la matrice $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$. On note $\Sigma$ l'ensemble des matrices $M_{x,y}$ quand $x$ et $y$ décrivent $\mathbb{R}$. Quelles relations doivent vérifier $x$ et $y$ pour que $M_{x,y}$ ne soit pas inversible. •1 pt.•
- 2) Calculez $M_{x,y}.M_{-x,y}$. En déduire l'inverse de $M_{x,y}$ quand il existe. •2 pt.•
- 3) $\Sigma$ est-il un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$ ? •1 pt.•
- 4) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = \{A + M_{x,y} \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrez que $J$ est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. Quelle est sa dimension ? Donnez en une base. •3 pt.•
- 5) Démontrez que la multiplication est une loi interne sur $J$. •2 pt.•

---

- 1) Soit $B$ une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$. Soit $\varphi_B$ l'application de $M_2(\mathbb{R})$ qui à la matrice $X$ associe la matrice $\varphi_B(X) = B.X$. Montrez que $\varphi_B$ est un endomorphisme de $(M_2(\mathbb{R}), +, .)$. •2 pt.•
- 2) On suppose ici : $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. $\varphi_B$ est elle surjective ? Est elle bijective ? Déterminez la matrice de $\varphi_B$ dans la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$ *(base* $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$*)*. •3 pt.•

---

[7] ici, la conique sera une hyperbole

- 3) On suppose ici : $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. $\varphi_B$ est elle surjective ? Est elle bijective ? •2 pt.•

68 points — 68 points

MPSI 2/2013 **RANG 1** $DS09$

*Ce petit problème est commun aux deux sujets.*

- 1) Montrer qu'une matrice $M$ à $q$ colonnes et $p$ lignes est de rang 1 si et seulement si il existe deux vecteurs non nuls $U$ et $V$ vérifiant $M = U.^tV$ *(de quels formats sont alors $U$ et $V$)* ? •2 pt.•

---

- 1) On se donne deux variables aléatoires à valeurs entières $X$ et $Y$ ($X$ dans $[1, \dots p]$ et $Y$ dans $[1, \dots q]$). On définit alors la matrice $C$ de terme général $P(X = i \text{ et } Y = k)$ *(ligne $i$ colonne $k$)*.
Déterminez $C$, son rang et son déterminant dans le cas où $X$ et $Y$ sont le résultat du lancer de deux dés indépandants, équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. •2 pt.•
- 2) Déterminez $C$, son rang et son déterminant dans le cas où $X$ et $Y$ sont le résultat du lancer de deux dés indépendants, équilibrés à six faces *(numérotées $[1, 1, 3, 3, 6, 6]$ pour l'un et $[1, 2, 3, 4, 5, 6]$ pour l'autre)*. •2 pt.•
- 3) Déterminez $C$ dans le cas où $X$ et $Y$ comptent le nombre de lettres du nom et du prénom d'un élève tiré de manière uniforme dans la liste suivante :
`Blaise Léa, Chau Laura, Guy Horace, Lenief Louis, Ren Eric, Sehl Romain, Shih Francis, Tinel Xavier, Ung Jacques` et enfin `Vere Clara` [8] *(ici, $p$ vaut 6 et $q$ vaut 7)*. Calculez le rang de cette matrice. •3 pt.• Bonus : calculez la covariance du couple de variables aléatoires $(X, Y)$. •2 pt.• [9]

---

- 4) Montrez que si $X$ et $Y$ sont deux variables indépendantes, alors la matrice $C$ est de rang 1. •2 pt.•

- 5) On suppose réciproquement que $C$ est de rang 1. Montrez par un argument probabiliste que le vecteur $C.Q$ n'est autre que le vecteur de terme général $P(X = i)$ qu'on notera $V_X$ *($Q$ est le vecteur à une colonne et $q$ lignes de terme général 1)*. •2 pt.• Déduisez l'existence de $q$ réels $\mu_k$ tels que les colonnes de $C$ soient $\mu_k.V_X$. •2 pt.• Exprimez les $\mu_k$ à l'aide de la variable aléatoire $Y$. Déduisez que les deux variables aléatoires sont indépendantes. •2 pt.•

MPSI 2/2013 `613 points` $DS09$

[8] toute ressemblance avec des personnages exitant ou ayant existé n'est pas fortuite mais n'engage en rien ma responsabilité

[9] la covariance c'est $E(X.Y) - E(X).E(Y)$

**DS09** • Etude de $f = z \longmapsto \frac{z^2}{z-2.i}$. • MPSI 2/2013

Pour le domaine de définition, on doit juste éviter $z = 2.i$. On a donc $\boxed{D = \mathbb{C} - \{2.i\}}$

*Bêtises possibles : perdre du temps à écrire $z = x + i.y$ alors que les complexes existent sans être obligés de s'écrire $x + i.y$. D'autre part, il fait écrire convenablement "ensemble privé d'un point".*

Pour la résolution de $z^2 = 8 - 6.i$, on pose $z = x + i.y$, on développe et identifie : $x^2 - y^2 = 8$ et $2.x.y = -6$, ainsi que $x^2 + y^2 = \sqrt{8^2 + 6^2}$ (carré du module). On trouve $x^2 = 9$ et $y^2 = 1$. On aboutit à $(3, -1)$ et $(-3, 1)$ en tenant compte des signes. On résume $\boxed{S = \{3 - i,\ -3 + i\}}$ et on vérifie.

*On pouvait rédiger par "on propose on vérifie" dans la mesure où on sait qu'il ne peut y avoir que deux solutions.*

On résout ensuite $\dfrac{z^2}{z - 2.i} = 1 + i$ par produit en croix : $z^2 - (1 + i).z - 2 + 2.i = 0$ (avec $z \neq 2.i$). On calcule le discriminant $\Delta = (1 + i)^2 + 4.(2 - 2.i) = 8 - 6.i$. On extrait les deux racines $\delta = 3 - i$ et $\delta' = -3 + i$. Les deux racines de l'équation sont $\dfrac{(1 + i) + (3 - i)}{2}$ et $\dfrac{(1 + i) - (3 - i)}{2}$. On peut conclure $\boxed{S = \{2,\ i - 1\}}$ (on vérifie avec somme et produit des racines).

*Bêtises possibles : d'oiseuses discussions sur le "signe" du discriminant.*

---

On se donne $h$ et on veut résoudre $z^2 = h.(z - 2.i)$ avec $z$ différent de $2.i$. C'est une équation du second degré en l'inconnue complexe $z$, de discriminant $h^2 - 4.2.i.h$. Un tel discriminant (complexe) a toujours des racines carrées (complexes). On a donc toujours une solution au moins.
L'équation n'aura qu'une solution quand ce discriminant sera nul :
• $h = 0$ unique solution $z = 0$
• $h = 8.i$ unique solution $z = 4.i$
Il faut quand même aussi se méfier des cas où l'équation du second degré admettrait pour solution le complexe $2.i$ qui est refusé initialement. Mais $z = 2.i$ conduit à $z^2 = 0$ qui est incompatible.
Bref, tous les complexes $h$ sont atteints au moins une fois (et en général deux fois).

L'application $\boxed{f \text{ est surjective de } D \text{ dans } \mathbb{C}}$ (toujours préciser de quoi dans quoi).

Pour l'injectivité, on a un contre-exemple immédiat : $f(2) = f(i - 1)$ livré par l'énoncé.
$\boxed{f \text{ n'est pas injective de } D \text{ dans } \mathbb{C}}$

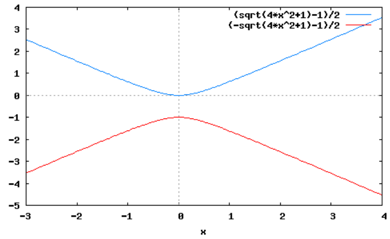
**DS09** • L'application $g = z \longmapsto |z - 2.i|^2.\frac{z^2}{z-2.i} + z^3$. • MPSI 2/2013

*L'erreur à ne surtout pas commettre : il n'y a pas de rapport direct entre $z - 2.i$ et $|z - 2.i|$. On n'a $|z - 2.i|^2 = (z - 2.i).(z + 2.i)$ que dans le cas où $z$ est un réel...*

On doit en revenir aux notations cartésiennes données dans l'énoncé : $g(x + i.y) = (x^2 + (y - 2)^2).\dfrac{x^2 - y^2 + 2.i.x.y}{x + i.(y - 2)} + (x^3 + 3.i.x^2.y - 3.x.y^2 - i.y^3)$
On simplifie $g(x + i.y) = (x^2 - y^2 + 2.i.x.y).(x - i.(y - 2)) + (x^3 + 3.i.x^2.y - 3.x.y^2 - i.y^3)$
On trouve finalement $\boxed{g(x + i.y) = 2.(x^3 - x.y^2 - 2.x.y) + 2.i.(2.x^2.y + x^2 - y^2)}$
La partie réelle est bien celle de l'énoncé.

---

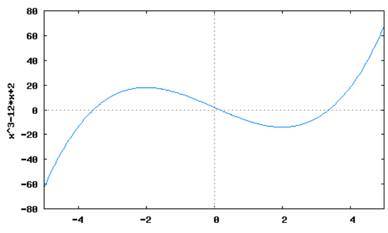
On résout l'équation $\Re e(g(z)) = 0$ c'est à dire $2.x.(x^2 - y^2 - y) = 0$. On trouve la droite d'équation $x = 0$ et la conique d'équation $x^2 = y^2 + y$. C'est une hyperbole.




**DS09** • Polynôme $P_a = X^3 - (a^2 + 2.a).X + 2$. • MPSI 2/2013

On suppose que le polynôme ici unitaire a trois racines. On le factorise $(X - t_1).(X - t_2).(X - t_3)$ et on identifie : $\boxed{t_1.t_2.t_3 = -2 \text{ et } t_1 + t_2 + t_3 = 0}$ *(relations coefficients/racines)*. On a aussi $t_1.t_2 + t_1.t_3 + t_2.t_3 = -a^2 - 2.a$.

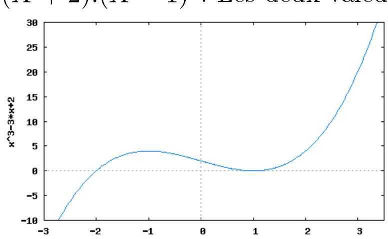
Le polynôme est positif en 0. On en connapit le tableau de variations comme pour tout polynôme de degré 3 à terme dominant $X^3$ : croissant, décroissant, croissant *(ou croissant partout)*.
Par théorème des **valeurs intermédiaires** généralisé entre $-\infty$ et 0, $P_a$ s'annule au moins une fois entre $-\infty$ et 0. Comme $t_1$ est la plus petite des racines, on sait que $t_1$ *(au moins)* est négative.




Comme la somme des racines est nulle, au moins une autre sera positive *(raisonnement par l'absurde)* : $t_3$ est positive.
Comme le produit des racines est négatif, on ne peut pas avoir deux négatives et une positive. Bref : une racine négative et deux racines positives.

Or, le produit des trois racines vaut $-2$. C'est donc que le produit de leurs trois valeurs absolues vaut 2. Et on les a supposées entières. Les seules valeurs admises sont 2 et 1 *(aux signes près)*.
On a les listes suivantes : $[-1, 1, 2]$, $[-2, 1, 1]$. Mais la contrainte "**somme nulle**" élimine la première.
On résume : les trois racines sont $-2$, 1 et 1 *(racine double)*.
Comme 1 est racine double, on a $P_a'(1) = 0$ *(tangente horizontale)*.
Or, $P_a' = 3.X^2 - (a^2 + 2.a)$. On déduit donc nécessairement : $a^2 + 2.a - 3 = 0$. On y parvenait aussi avec $t_1.t_2 + t_1.t_3 + t_2.t_3 = -(a^2 + 2.a)$.
On résout : $\boxed{a = -3 \text{ ou } a = 1}$

Attention, on n'a raisonné que par **conditions nécessaires**. Il se peut que pour ces valeurs de $a$ on n'ait finalement pas tout ce que l'on attendait. Mais on a quand même $P_{-3} = P_1 = X^3 - 3.X + 2 = (X + 2).(X - 1)^2$. Les deux valeurs de $a$ sont correctes.



**DS09** • Etude des matrices $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}$. • MPSI 2/2013

On détecte les matrices non inversibles à la nullité de leur déterminant : $x^2-y^2-2.y=0$. On trouve l'hyperbole déjà croisée au paragraphe I. D'autre part, on constate :

$$\boxed{M_{x,y}.M_{-x,y} = \begin{pmatrix} x-y & y \\ 2 & x+y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -x-y & y \\ 2 & -x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2-x^2+2.y & 0 \\ 0 & y^2-x^2+2.y \end{pmatrix}}$$

Il est alors aisé d'affirmer : $\boxed{(M_{x,y})^{-1} = \dfrac{M_{-x,y}}{y^2-x^2+2.y} \text{ pour } x^2 \neq y^2+2.y}$

*Attention, on a trouvé un inverse à droite. Il faut préciser que pour les matrices carrées, inverse à droite implique inverse à gauche.*

---

L'ensemble $\boxed{\Sigma \text{ n'est pas un espace vectoriel}}$ On n'y trouve pas la matrice nulle *(élément neutre additif)*. De même, on n'a pas de stabilité additive, ni de passage à l'opposé.

*L'énoncé de concours précisait que la réponse devait être argumentée. La seule réponse "non" ne rapporte aucun point.*

---

Les matrices de $J$ sont de la forme $\begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$. Pour montrer que c'est un espace vectoriel, on peut montrer que c'est un sous-espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,.)$ *(présence du neutre, stabilité par combinaisons)*. Mais il y a bien plus simple :

$\boxed{J = Vect(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})}$ c'est donc bien un espace vectoriel, et on a donne tout de suite une base *(les deux matrices dont l'indépendance linéaire est évidente)* et la dimension (2).

Pour la stabilité multiplicative :

| $\times$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |
| $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ |

les plus rapides se contentent d'un tableau et c'est fini ou presque si on a fait la preuve auparavant qu'on est intelligent et pas bluffeur.
Sinon, on effectue

$$\begin{pmatrix} x-y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} u-v & v \\ 0 & u+v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x.u+y.v-x.v-y.u & x.v+y.u \\ 0 & x.v+y.u+x.u+y.v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}$$

avec $a=x.u+y.v$ et $b=x.v+y.u$
On a bien la forme d'une matrice de $J$.

*C'est à mon avis une question pour détecter les vrais élèves. Il y a ceux qui calculent mais ne voient pas ce qu'il faut prouver...*

**DS09** • L'application $X \longmapsto B.X$. • MPSI 2/2013

Pour montrer que $\varphi_B$ est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$, il faut vérifier que $\varphi_B$ va bien de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même : $\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix}$.

Pour la linéarité, c'est la distributivité de la multiplication sur les combinaisons linéaires : $B.(a.M+b.N) = a.B.M+b.B.N$ avec des notations naturelles.

*Qui a encore oublié de démontrer une des deux propriétés ?*

---

Dans le cas particulier $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, on montre que $\varphi_A$ est bijective de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même en précisant tout de suite sa réciproque : $(\varphi_B)^{-1} = \varphi_{(B^{-1})}$. C'est direct.

Sinon, on montre que toute matrice $M$ est l'image d'exactement une matrice : $B^{-1}.M$.
On cacule les images des quatre matrices de la base canonique, qu'on décompose sur la base canonique :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

---

En revanche, pour $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, les matrices de $Im(\varphi_B)$ ont toutes un déterminant nul *(*$\det(\varphi_B(M)) = \det(B.M) = \det(B).\det(M) = 0$*)*.
On n'atteint donc pas toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$ *(par exemple, $I_2$ n'a pas d'antécédent)*. L'application n'est pas surjective de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui même.
Par la formule du rang, elle n'est pas non plus injective *(endomorphisme en dimension finie)*. Sinon, on constate que la matrice nulle et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ont la même image.

---

**DS09** • Forme $U.^tV$ des matrices de rang 1. • MPSI 2/2013

*On doit établir une équivalence, c'est à dire deux implications.*
On suppose que la matrice $M$ est de rang 1. On traduit : ses $q$ colonnes engendrent un espace vectoriel de dimension 1. Elles sont donc toutes dans une droite, c'est à dire colinéaires. On prend alors une de ces colonnes non nulles *(il en existe au moins une sinon la matrice est de rang* $0$*)*. On la note $U$. Les colonnes sont alors de la forme $a_1.U$ jusqu'à $a_q.U$. On note alors $V$ le vecteur $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{pmatrix}$, et on vérifie :

$$M = \begin{pmatrix} a_1.u_1 & \dots & a_q.u_1 \\ a_1.u_2 & \dots & a_q.u_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_1.u_p & \dots & a_q.u_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_q \end{pmatrix} = U.^tV$$ *(et on rappelle que le vecteur $V$ est non nul, car dans notre description l'un des $a_k$ vaut* $1$*)*

*Attention, ne pas écrire la matrice sous la forme* $\begin{pmatrix} u_1 & \alpha_2.u_1 & \dots & \alpha_q.u_1 \\ u_2 & \alpha_2.u_2 & \dots & \alpha_q.u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_p & \alpha_2.u_n & \dots & \alpha_q.u_p \end{pmatrix}$*. Il se peut en effet que la première colonne soit nulle. Par exemple* $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ *est de rang* $1$.

**Réciproquement,** on suppose que $M$ est de la forme $U.^tV$. Les colonnes de $M$ sont alors toutes proportionnelles *(multiples de $U$)*. L'espace vectoriel engendré est de dimension inférieure ou égale à 1. Et ce ne peut pas être 0. En effet, il existe au moins un terme non nul $u_i$ dans $U$ et un terme non nul $v_k$ dans $V$. Le terme de ligne $i$ et colonne $k$ de $U.^tV$ est alors $u_i.v_k$ et il est non nul *(comme mon corps, le corps des réels est... intègre)*.

**DS09** • Exemples de matrices pour deux variables aléatoires. • MPSI 2/2013

Si $X$ et $Y$ sont les résultats de deux lancers de dés indépendants, et si les dés sont supposés équilibrés, alors pour tout couple $(i, j)$ *(avec $i$ et $j$ entre* $1$ *et* $6$*)*, on a
$P(X = i \text{ et } Y = j) = P(X = i).P(Y = j) = \dfrac{1}{36}$.

On a la matrice de terme général $1/36$ : $\boxed{\begin{pmatrix} 1/36 & \dots & 1/36 \\ \vdots & & \vdots \\ 1/36 & \dots & 1/36 \end{pmatrix}}$

**Son rang vaut $1$ et son déterminant est nul.**

---

Si il s'agit des dés $[1,1,3,3,6,6]$ et $[1,2,3,4,5,6]$, on a cette fois $P(X = i \text{ et } Y = j) = P(X = i).P(Y = j) = \dfrac{P(X = i)}{6}$ par indépendance des deux lancers et uniformité du second dé. La matrice est $\boxed{\begin{pmatrix} 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 & 1/18 \end{pmatrix}}$

Son rang est 1 et son déterminant est donc aussi nul.

---

Pour la liste des dix élèves, la variable aléatoire “élève” est uniforme : $P(eleve = untel) = \dfrac{1}{10}$. On va donc se retrouver à remplir les cases de la matrice avec des $0$ *(si aucun élève n'a i lettres dans son nom et k lettres dans son prénom)* et $1/10$ *(si un élève a i et k lettres)*. La case $(4,5)$ aura pour valeur $2/10$ à cause de “Chau Laura” et “Vere Clara”.

La matrice est alors $\boxed{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.a & a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{avec } a = 1/10}$

Elle n'est pas carrée, son déterminant n'existe pas. Les colonnes 1 et 2 ne comptent pas *(de même que les lignes)*. Les colonnes 3 à 7 ne sont pas indépendantes *(la matrice ne peut pas être de rang $5$ car elle a au maximum quatre lignes indépendantes)*. Les colonnes 3, 4, 5 et 6 sont indépendantes : $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & 2.a & a \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 0 & a & 0 \end{vmatrix} = -2.a^4 \neq 0$. **La matrice est de rang $4$.**

**<u>Bonus :</u>** le calcul de la covariance. Déjà, on calcule l'espérance de la variable aléatoire “longueur du nom” :

$E(X) = \dfrac{6+4+3+6+3+4+4+5+3+4}{10} = \dfrac{42}{10}$

$E(Y) = \dfrac{3+5+6+5+4+6+7+6+7+5}{10} = \dfrac{54}{10}$

Rappel : liste des noms : `Blaise Léa`, `Chau Laura`, `Guy Horace`, `Lenief Louis`, `Ren Eric`, `Sehl Romain`, `Shih Francis`, `Tinel Xavier`, `Ung Jacques` et `Vere Clara`.

On calcule ensuite l'espérance du produit : $E(X.Y) = \dfrac{6.3+4.5+3.6+6.5+3.4+4.6+4.7+5.6+3.7+4.5}{10} = \dfrac{221}{10}$. La covariance vaut $\boxed{\dfrac{221}{10} - \dfrac{42.54}{100} = -\dfrac{29}{50}}$ *(oui, une covariance a le droit d'être négative, et aussi nulle)*.

Si les variables sont indépendantes, le calcul de la matrice est simple :

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1,Y=1) & P(X=1,Y=2) & \dots & P(X=1,Y=q) \\ P(X=2,Y=1) & P(X=2,Y=2) & \dots & P(X=2,Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p,Y=1) & P(X=p,Y=2) & \dots & P(X=p,Y=q) \end{pmatrix} \text{ par définition}$$

$$\boxed{C = \begin{pmatrix} P(X=1).P(Y=1) & P(X=1).P(Y=2) & \dots & P(X=1.P(Y=q) \\ P(X=2).P(Y=1) & P(X=2).P(Y=2) & \dots & P(X=2).P(Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p).P(Y=1) & P(X=p).P(Y=2) & \dots & P(X=p).P(Y=q) \end{pmatrix}} \text{ par indépendance}$$

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=p) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P(Y=1) & P(Y=2) & \dots & P(Y=q) \end{pmatrix} \text{ la matrice est de rang 1.}$$

---

On suppose cette fois que la matrice est de rang 1, on va montrer que les variables sont indépendantes, c'est à dire $P(X=i,Y=j) = P(X=i).P(Y=j)$ pour tout couple $(i,\ j)$.

Quand on effectue le produit $C.Q$, on somme les colonnes de la matrice $C$. On a plusieurs façons de le voir. La première est lourde, mais correcte : $\begin{pmatrix} c_1^1 & c_1^2 & \dots & c_1^q \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_p^1 & c_p^2 & \dots & c_p^q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 + c_1^2 + \dots + c_1^q \\ \dots \\ c_p^1 + c_p^2 + \dots + c_p^q \end{pmatrix}$.

La seconde consiste à dire que l'on calcule l'image du vecteur $\overrightarrow{e_1} + \dots + \overrightarrow{e_q}$, et que chaque colonne est justement l'un des $f(\overrightarrow{e_k})$.

Mais qui sont chacune de ces sommes ? Regardons la $i^{eme}$ :

$c_i^1 + c_i^2 + \dots + c_i^q = P(X=i,Y=1) + P(X=i,Y=2) + \dots + P(X=i,Y=q)$.

Il s'agit alors de la somme d'événements incompatibles ($Y$ ne peut prendre qu'une des valeurs à la fois) qui se regroupent en un seul $P(X=i, Y \in \{1,\dots q\})$ *(on peut parler de partition de l'univers de la variable aléatoire $Y$).*

Mais comme justement $Y$ pend ses valeurs dans $\{1,\dots q\}$, on ne dit rien avec "$Y \in \{1,\dots q\}$" et on calcule juste $P(X=i)$. On résume :

$$\boxed{\begin{pmatrix} P(X=1,Y=1) & P(X=1,Y=2) & \dots & P(X=1,Y=q) \\ P(X=2,Y=1) & P(X=2,Y=2) & \dots & P(X=2,Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p,Y=1) & P(X=p,Y=2) & \dots & P(X=p,Y=q) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ \vdots \\ P(X=p) \end{pmatrix}}$$

On a bien le résultat demandé.

*On n'a pour l'instant pas utilisé la propriété "de rang 1". On va le faire.*

On note $C_1$ à $C_q$ les $q$ colonnes de la matrice $C$. On a donc obtenu : $C_1 + \dots + C_q = V_X$.

Mais comme les colonnes sont toutes proportionnelles, elles sont toutes dans une droite engendrée par un vecteur *(que l'on ne notera pas).* Leur somme y est donc aussi. Et comme cette somme est égale à $V_X$, c'est que le vecteur non nommé est proportionnel à $V_X$. On va donc pouvoir le prendre comme vecteur de base de la droite.

Les colonnes de la matrice $C_1$ à $C_q$ sont donc toutes des multiples de $V_X$. On va noter $\mu_1$ à $\mu_k$.

Il reste à identifier qui sont ces $\mu_k$. On va inverser les rôles des colonnes et des lignes *(et donc des*

*variables $X$ et $Y$).*
On effectue la somme $L_1 + \ldots + L_p$ de toutes les lignes. On calcule donc des sommes comme $P(X = 1, Y = k) + P(X = 2, Y = k) + \ldots + P(X = p, Y = k)$. Par le même argument d'événements incompatibles et de partition de l'univers de la variable aléatoire $X$, on trouve $P(Y = k)$. On en déduit que $L_1 + \ldots + L_p$ est le vecteur $(P(Y = 1),\ P(Y = 2), \ldots, P(Y = q))$.
Comme les lignes étaient proportionnelles/colinéaires, leur somme est encore sur la même droite. On en déduit que ces lignes sont proportionnelles à ce vecteur ligne que l'on note ${}^tV_Y$.
On a des réels $\alpha_1$ à $\alpha_p$ vérifiant $L_i = \alpha_i.{}^tV_Y$.

En identifiant les deux résultats obtenus, on a $\alpha_i.P(Y = k) = \mu_k.P(X = i)$ pour tout couple $(i,\ k)$.
En prenant un des indices $i$ vérifiant $P(X = i) \neq 0$, on obtient nécessairement : $\mu_1 = P(Y = 1)$, $\mu_2 = P(Y = 2)$ jusqu'à $\mu_k = P(Y = k)$ *(et le même type de relation sur les $\alpha_i$).*
On résume : la matrice $C$ est finalement simplement $V_X.{}^tV_Y$. On identifie :

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1,Y=1) & P(X=1,Y=2) & \ldots & P(X=1,Y=q) \\ P(X=2,Y=1) & P(X=2,Y=2) & \ldots & P(X=2,Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p,Y=1) & P(X=p,Y=2) & \ldots & P(X=p,Y=q) \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} P(X=1).P(Y=1) & P(X=1).P(Y=2) & \ldots & P(X=1.P(Y=q) \\ P(X=2).P(Y=1) & P(X=2).P(Y=2) & \ldots & P(X=2).P(Y=q) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P(X=p).P(Y=1) & P(X=p).P(Y=2) & \ldots & P(X=p.P(Y=q) \end{pmatrix}$$

Terme à terme, on a donc pour tout couple $(i,\ k)$ : $\boxed{P(X = i,\ Y = k) = P(X = i).P(Y = k)}$
C'est la définition de l'indépendance des variables.

MPSI 2/2013 | 613 points | $DS09$

| Charlemagne MPSI-2 / 2013 | Vendredi 2 mai | $DS10$ |
|---|---|---|

## MPSI 2/2013 — ALGORITHME DE FADDEEV — $DS10$

L'objectif de ce problème est de donner un algorithme simple pour calculer les coefficients du polynôme caractéristique qu'une matrice $A$ carrée de taille $n$ : $P_A(\lambda) = \det(\lambda.I_n - A)$. On établira la validité de cet algorithme par diverses méthodes en petits dimensions, généralisables en plus grandes dimensions.

L'algorithme : on définit la suite de matrices et de réels :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $N_1 = I_n$ | $N_2 = A.N_1 + a_1.I_n$ | $N_3 = A.N_2 + a_2.I_n$ | $\dots$ | $N_n = A.N_{n-1} + a_{n-1}.I_n$ |
| $a_1 = -Tr(A.N_1)$ | $a_2 = -Tr(A.N_2)/2$ | $a_3 = -Tr(A.N_3)/3$ | $\dots$ | $a_n = -Tr(A.N_n)/n$ |

Donnez la formule générale pour $N_k$ et $a_k$. •1 pt.•

## MPSI 2/2013 — Dimension 2 — $DS10$

- 1) Calculez les $N_k$ et les $a_k$ pour une matrice $A$ de taille 2, ainsi que $N_3$. Avez vous bien le polynôme caractéristique ? •2 pt.•

## MPSI 2/2013 — Dimension 3 — $DS10$

- 1) On se donne $A$ de taille 3. Montrez qu'il existe des matrices vérifiant $Com(\lambda.I_3 - A) = \lambda^2.B_2 + \lambda.B_1 + B_0$. Calculez chaque $Tr(B_k)/(k+1)$. Qui est $(\lambda^2.{}^tB_2 + \lambda.{}^tB_1 + {}^tB_0).(\lambda.I_3 - A)$ (à l'aide du polynôme caractéristique de $A$) ? •4 pt.•
- 2) Justifiez que les $a_k$ de l'algorithme de Faddeev sont bien les coefficients du polynôme caractéristique. •3 pt.•
- 3) Qui est $N_4$ ? •1 pt.•

## MPSI 2/2013 — Algorithme — $DS10$

- 1) On suppose que la matrice $A$ est donnée en Python sous forme d'une liste de listes. Ecrivez un script qui vérifie que cette matrice est carrée. •1 pt.•
- 2) Ecrivez la procédure qui calcule la trace d'une matrice. •1 pt.•
- 3) Ecrivez la procédure qui calcule le produit de deux matrices. •1 pt.•
- 4) Ecrivez l'algorithme qui pour une matrice donnée $A$ donne son polynôme caractéristique par l'algorithme de Faddeev. •3 pt.•
- 5) Précisez la complexité en temps et en mémoire du l'algorithme pour une matrice de taille $n$. •1 pt.•

## MPSI 2/2013 — Dimension 4 — $DS10$

- 1) Montrez que deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. •1 pt.•
- 2) Montrer que deux matrices semblables donnent la même liste de coefficients $a_k$ dans l'algorithme de Faddeev. •2 pt.•
- 3) Soit $A$ une matrice de taille 4 qu'on suppose diagonalisable, de spectre $[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4]$. On note $\sigma_1$ à $\sigma_4$ les quatre fonctions symétriques des racines et $S_1$ à $S_4$ les quatre sommes de Newton : $S_k = \sum_{i=1}^{4} (\lambda_i)^k$. Exprimez les coefficients du polynôme caractéristique de $D$ à l'aide des $\sigma_k$. •1 pt.•

Exprimez les $a_k$ de l'algorithme de Faddeev à l'aide des $S_j$ et $\sigma_p$. •3 pt.•

- 4) Montrez que $\dfrac{P'_A(X)}{P_A(X)}$ se décompose en éléments simples sous la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{X-\lambda_i}$. •1 pt.•

- 5) On pose alors $X = 1/u$. Donnez le développement limité d'ordre 4 en $u = 0$ de $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{X-\lambda_i}$ à l'aide des $S_k$. •2 pt.•

- 6) Par produit en croix, retrouvez les formules de Newton qui expriment chaque $S_k$ à l'aide des $S_i$ et des $\sigma_j$ de rangs plus petits. •3 pt.•

- 7) Justifiez que les $a_k$ sont bien les coefficients de $P_A$. •1 pt.•

- 8) Bonus : retrouvez les $S_k$ dans les déterminants de Faddeev : $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$. •4 pt.•

- 9) Si on vous a donné une liste $[\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots,\ \sigma_n]$ écrivez un script Python qui remplit la matrice de taille $n$ dont on a donné la forme en petites dimensions ci-dessus. •2 pt.•

| MPSI 2/2013 | 651 points | $DS10$ |
|---|---|---|

L'algorithme a été initialement mentionné par Urbain Jean Joseph Le Verrier (1840).
Sa démonstration passe le plus souvent par les formules de Newton.
Il en existe aussi une démonstration par exponentielle de matrices et transformation de Laplace.
On notera aussi que si on pousse jusqu'au bout la démonstration, on trouve qu'une ultime matrice est nulle. Et c'est ainsi qu'on démontre le théorème de Cayley-Hamilton : toute matrice est annulée par son polynôme caractéristique. C'est la généralisation de $M^2 - Tr(M).M + \det(M).I_2 = 0_2$ que l'on connaît en dimension 2.

# ФАДДЕЕВ

**DS10** • Formules générales et dimension 2. • MPSI 2/2013

La formule générale est $N_{k+1} = A.N_k + a_k.I_n$ et $a_{k+1} = -Tr(A.N_{k+1})/(k+1)$. Il faut avoir initialisé $N_1$ à $I_n$ (et $A_0$ à 0) et $a_0$à 1.

On prend une matrice de taille 2 : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On suit l'algorithme :

| | | |
|---|---|---|
| $N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $N_2 = \begin{pmatrix} -d & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ | $N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ |
| $a_1 = -(a+d)$ | $a_2 = -Tr\begin{pmatrix} -a.d+b.c & 0 \\ 0 & b.c-a.d \end{pmatrix}/2$ | |

Les coefficients sont $-Tr(A)$ et $det(A)$.

Le polynôme caractéristique est bien, comme il l'a toujours été $\boxed{X^2 - Tr(A).X + \det(A)}$

L'algorithme est correct en dimension 2. *Mais cette démonstration ne permet pas de comprendre pourquoi.*

**DS10** • Cas de la dimension 3. • MPSI 2/2013

La matrice $\lambda.I_3 - A$ est une matrice carrée. On peut en calculer la comatrice (matrice des cofacteurs pondérés).

La matrice dont on part est $\begin{pmatrix} \lambda - a & -a' & -a" \\ -b & \lambda - b' & -b" \\ -c & -c' & \lambda - c" \end{pmatrix}$. Ses cofacteurs sont des déterminants de taille 2 contenant ou non des $\lambda$. Ce seront donc des polynômes en $\lambda$ de degré inférieur ou égal à 2.
S'il s'agit de se montrer précis, seuls les termes diagonaux sont de degré 2, les autres sont de degré 1.
Et même

$$\boxed{\lambda^2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} -b'-c" & b & c \\ a' & -a-c" & c' \\ a" & b" & -a-b' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b'.c" & b".c-b.c" & b.c'-b'.c \\ a".c'-a'.c" & a.c" & a'.c-a.c' \\ a'.b"-a".b' & a".b-a.b" & a.b' \end{pmatrix}}$$

On peut bien séparer chaque polynôme par degré et obtenir les trois matrices ci dessus.

On calcule les traces et on trouve

| $Tr(B_2)/3$ | $Tr(B_1)/2$ | $Tr(B_0)$ |
|---|---|---|
| 1 | $a+b'+c"$ | $a.c" + a.b' + b'.c"$ |

*Ce ne sont pas encore les coefficients du polynôme caractéristique.*

---

Qui peut être ce produit $(\lambda^2.{}^tB_2 + \lambda.{}^tB_1 +{}^t B_0).(\lambda.I_3 - A)$ ? Surtout, on ne développe pas tout.
On note $M$ la matrice $\lambda.I_3 - A$. Ce produit n'est autre que ${}^tCom(M).M$.
Le cours nous assure qu'il s'agit de $\det(M).I_3$.
Or, $\det(M)$ n'est autre que le polynôme caractéristique de $A$.
On a donc $\boxed{(\lambda^2.{}^tB_2 + \lambda.{}^tB_1 +{}^t B_0).(\lambda.I_3 - A) = (\lambda^3 - \sigma_1.\lambda^2 + \sigma_2.\lambda - \sigma_3).I_3}$ en notant les coefficients du polynôme caractéristique comme fonctions symétriques des racines.
Sinon, en ayant noté $\alpha_j$ les coefficients du polynôme caractéristique, on aura $(\lambda^2.{}^tB_2 + \lambda.{}^tB_1 +{}^t B_0).(\lambda.I_3 - A) = (\lambda^3 + \alpha_1.\lambda^2 + \alpha_2.\lambda + \alpha_3).I_3$.

---

On développe de chaque côté et on ordonne comme polynômes en $\lambda$ :
$\lambda^3.{}^tB_2 + \lambda^2.({}^tB_1 -{}^t B_2.A) + \lambda.({}^tB_0 -{}^t B_1.A) -{}^t B_0.A = \lambda^3.I_3 + \lambda^2.\alpha_1.I_3 + \lambda.\alpha_2.I_3 + \alpha_3.I_3$
Comme ce sont des polynômes en $\lambda$ qui sont égaux pour tout $\lambda$, on peut identifier :

| | | | |
|---|---|---|---|
| ${}^tB_2 = I_3$ | ${}^tB_1 -{}^t B_2.A = \alpha_1.I_3$ | ${}^tB_0 -{}^t B_1.A = \alpha_2.I_3$ | $-{}^tB_0.A = \alpha_3.I_3$ |
| $B_2 = I_3$ | ${}^tB_1 = \alpha_1.I_3 + A$ | ${}^tB_0 = \alpha_2.I_3 + \alpha_1.A + A^2$ | |

Et pendant ce temps là, que fait l'algorithme de Faddeev ?
$N_1 = I_3$, $a_1 = -Tr(A)$
C'est bien le premier coefficient du polynôme caractéristique *(somme des racines)*.
On a déjà $N_1 =^t B_2$.
On a ensuite $N_2 = A.N_1 + a_1.I_3 = A - Tr(A).I_3 =^t B_1$.
On effectue : $a_2 = -Tr(A.N_2)/2 = -Tr(A.^tB_1)$

**DS10** • Partie algorithmique. • MPSI 2/2013

On donne une matrice `A` du type `[[ ., ., ...], [ ., .,...], ..., [ ., ., ...]]`. On vérifie qu'elle est carrée

```
def rezdaiboi(A) :
....n = len (A)
....for k in range(n) :
........if len(A[k])!= n :
............return(false)
....return (true)
```

Si à un moment on n'a pas eu une liste de longueur $n$, on sort tout de suite en répondant `false`. Sinon, on est sorti indemne de la boucle et on répond `true`.

---

Pour calculer la trace :

```
sum(A[k][k] for k in range(len(A))
```

Pour effectuer le produit matriciel de deux matrices *(après avoir vérifié qu'elles sont carrées)* :

```
def ramboise(A, B) :
....n = len(A)
....if len(B) == n :
........C = [[0]*n for k in range n]
........for i in range(n) :
............for k in range(n) :
................C[i][k] = sum(A[i][j]*B[j][k] for j in range(n))
........return(C)
....else :
........print('formats incompatibles')
```

On pourra retourner une réponse. En l'occurence ici, en cas de formats incompatibles, le programme répond `None` et affiche dans le shell interactif un message.

---

On crée une matrice unité (qu'on ne modifiera jamais mais copiera et utilisera) :

```
Uni = [[0]*n for k in range(n)]
for k in range(n) :
....Uni[k][k]=1
```

On crée aussi une procédure de combinaison linéaire de matrices :

```
def onktionnairengraiv(A, B, alpha, beta) :
....S = [[0]*n for k in range n]
....for i in range(n) :
........for k in range(n) :
............S[i][k] = alpha*A[i][k] + beta*B[i][k]
....return(S)
```

On initialise quelques éléments :

`Coeffs = [1]`
`N = Uni[ :]` (une copie et pas une identification)
`AN = Uni[ :]`

```
c = 0
```

On met ensuite en boucle une procédure

```
for k in range(n) :
....N = onctionnairengrev(AN, Uni, 1, c)
....AN = ramboise(A, N)
....c = -raise(AN)/(k+1)
....Coeff.append(c)
```

A la fin, on affiche la liste de coefficients `Coeff`.
On peut même affiner pour que l'on affiche un polynôme.
On évite de solliciter trop de fois le produit matriciel. On utilise donc une matrice `AN` qui contient le produit qui sert pour $a_k = -Tr(A.N_k)/(k+1)$ mais aussi pour $N_{k+1} = A.N_k + \ldots$.

---

La complexité en temps est $n^2$ pour les additions de matrices, et $n^3$ pour les multiplications. Chaque étape de la boucle est en $O(n^3)$.
On effectue $n$ boucles ayant toutes la même complexité.
Sinon, on utilise deux matrices de taille $n$ sur $n$ et une liste de taille $n$.

| temps | espace |
|---|---|
| $O(n^3)$ | $O(n^2)$ |

*On peut utiliser un algorithme qui calcule un peu plus vite le produit matriciel par découpage en blocs.*

**DS10** • Cas de la dimension 4. • MPSI 2/2013

On se donne deux matrices $A$ et $M$ semblables. C'est donc qu'il existe $P$ inversible vérifiant $M = P^{-1}.A.P$. On calcule alors le polynôme caractéristique de $M$ :
$\boxed{\det(\lambda.I_3 - M) = \det(\lambda.I_3 - P^{-1}.A.P) = \det(P^{-1}.(\lambda.I_3 - A).P) = \det(\lambda.I_3 - A)}$ en simplifiant $\det(P^{-1})$ et $\det(P)$.

---

On se donne encore deux matrices semblables $A$ et $M$ égale à $P^{-1}.A.P$.
On suit les deux algorithmes de Faddeev :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $N_1 = I_n$ | $N_2 = A + a_1.I_n$ | $N_3 = A.N_2 + a_2.I_n$ | |
| $a_1 = -Tr(A)$ | $a_2 = -Tr(A.N_2)$ | | |
| | | | |
| $N'_1 = I_n$ | $N'_2 = M + \alpha_1.I_n$ | $N'_3 = M.N'_2 + \alpha_2.I_n$ | |
| $\alpha_1 = -Tr(M)$ | $\alpha_2 = -Tr(M.N'_2)$ | | |

$A$ et $M$ étant semblables, elles ont la même trace : $\alpha_1 = a_1$.
On constate ensuite $N'_2 = P^{-1}.N_2.P$. La matrice $M.N'_2$ s'écrit $P^{-1}.A.N_2.P$. Elle est semblable à $A.N_2$. Elles ont donc la même trace : $\alpha_2 = a_2$.
On en déduit là encore $N'_3 = P^{-1}.N_3.P$ *(car $a_2$ et $\alpha_2$ sont égaux)*. On a ensuite $A.N_3$ et $M.N'_3$ qui sont semblables *(via $P$)*. Elles ont la même trace.

*Par récurrence sur $k$ ainsi initialisée, on montre que $\alpha_k$ est égal à $a_k$.*
Supposons qu'au rang $k$ on a égalité de $a_k$ et $\alpha_k$, et que $N_k$ et $N'_k$ sont semblables via la matrice $P$.
On calcule $N_{k+1} = A.N_k + a_k.I_n$ et $a_{k+1} = -Tr(A.N_{k+1})/(k+1)$ ainsi que $N'_{k+1} = M.N'_k + a_k.I_n$ et $\alpha_{k+1} = -Tr(M.N'_{k+1})/(k+1)$ (le même $a_k$ par hypothèse, mais pas encore les mêmes $a_{k+1}$ et $\alpha_{k+1}$ a priori).
Mais alors, on a $N'_{k+1} = P^{-1}.(A.N_k + a_k.I_k).P$ par factorisation. Les deux matrices sont bien semblables, via $P$.
On poursuit : $Tr(M.N'_{k+1}) = Tr(P^{-1}.A.N_k.P) = Tr(A.N_k)$ et on a bien coïncidence de $a_{k+1}$ et $\alpha_{k+1}$.

---

Cette récurrence nous indique que deux matrices semblables ont bien les mêmes coefficients de Faddeev.

*Comment va-t-on pouvoir exploiter ceci ?*
On se donne une matrice $M$ qu'on suppose diagonalisable.
Elle est donc semblable à une certaine matrice $D$. Elle a donc le même polynôme caractéristique que $D$.
On va ensuite montrer que l'algorithme de Faddeev donne bien pour $D$ les coefficients de son polynôme caractéristique.
Or, $M$ et $D$ donnent les mêmes coefficients de Faddeev.
On en déduit que l'algorithme de Faddeev calcule à partir de $M$ les coefficients du polynôme caractéristique de $D$ et effectivement de $M$.

**DS10** • Cas d'une matrice diagonale. • MPSI 2/2013

On part donc d'une matrice $D$ de la forme $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$.

On calcule $N_1 = I_4$ et $\boxed{a_1 = -Tr(D.N_1) = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) = -\sigma_1 = -S_1}$ avec les notations usuelles des relations coefficients racines.
On poursuit : $N_2 = D.I_4 - \sigma_1.I_3$. On multiplie par $D$ : $D.N_2 = D^2 - \sigma_1.D$. On passe à la trace, sachant que $D^2$ n'est autre que $\begin{pmatrix} (\lambda_1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda_4)^2 \end{pmatrix}$ $\boxed{Tr(D.N_2) = S_2 - \sigma_1.Tr(D) = S_2 - (\sigma_1)^2}$
On identifie alors $-2.\sigma_2$ (formule $(a + b + \ldots)^2 = a^2 + b^2 + \ldots + 2.a.b + \ldots$).
Pour ce qui est de $a_2$ c'est cette trace, divisée par 2 et changée de signe : $\boxed{a_2 = \sigma_2}$

On avance encore un peu : $N_3 = D.(D - \sigma_1.I_3) + a_2.I_3 = D^2 - \sigma_1.D + \sigma_2.I_3$.
On multiplie par $D$ : $D.N_3 = D^3 - \sigma_1.D^2 + \sigma_2.D$. C'est une matrice diagonale de terme général $(\lambda_i)^3 - \sigma_1.(\lambda_i)^2 + \sigma_2.\lambda_i$.
Quand on en prend la trace, on trouve $\boxed{S_3 - \sigma_1.S_2 + \sigma_2.S_1}$ Il faudra encore diviser par 4 et coller un signe moins.
On ne peut pas en dire grand chose car l'équation est hélàs de degré 4.
*Si elle avait été de degré* 3, *on aurait pu simplifier en utilisant que les* $\lambda_i$ *annulent le polynôme dont les coefficients sont les* $\sigma_k$.

On termine avec $N_4 = D^3 - \sigma_1.D^2 + \sigma_2.D + a_3.I_3$. On multiplie par $D$ et on en prend la trace. C'est encore une matrice diagonale, de terme général $(\lambda_i)^4 - \sigma_1.(\lambda_i)^3 + \sigma_2.(\lambda_i)^2 + a_3.\lambda_i$. On va sommer et trouver $\boxed{S_4 - \sigma_1.S_3 + \sigma_2.S_2 + a_3.S_1}$ Là encore, on ne sait pas trop quoi en faire.

**DS10** • Formules de Newton. • MPSI 2/2013

On se donne le polynôme $P$ de racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ et $\lambda_4$. Comme il est unitaire, il se factorise sous la forme $(X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_3).(X - \lambda_4)$.
On dérive : $(X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_3) + (X - \lambda_1).(X - \lambda_2).(X - \lambda_4) + (X - \lambda_1).(X - \lambda_3).(X - \lambda_4) + (X - \lambda_2).(X - \lambda_3).(X - \lambda_4)$
On divise par le produit de tous, il ne reste que des dénominateurs :
$\dfrac{P'(X)}{P(X)} = \dfrac{1}{X - \lambda_1} + \dfrac{1}{X - \lambda_2} + \dfrac{1}{X - \lambda_3} + \dfrac{1}{X - \lambda_4}$.
*On pouvait aussi dériver (formellement)* $\ln(P(X))$.

---

On remplace $X$ par $1/u$. On a donc d'un côté $\displaystyle\sum_{i \leq 4} \frac{u}{1 - u.\lambda_i}$.

Quand $u$ tend vers 0, chaque $u.\lambda_i$ le fait aussi et on peut utiliser le développement limité de $\dfrac{1}{1-t}$

*(série géométrique).*
Chaque terme de la somme se développe donc en $u.1+u.(u.\lambda_i)+u.(u.\lambda_i)^2+u.(u.\lambda_i)^3+u.(u.\lambda_i)^4+o(u^5)$.
En sommant, on a $\boxed{4.u+u^2.S_1+u^3.S_2+u^4.S_3+u^5.S_4+o(u^5)}$ quand $u$ tend vers 0.

Mais de l'autre côté du signe égale, qu'a-t-on ? $\dfrac{P'(1/u)}{P(1/u)}=\dfrac{4.(\frac{1}{u})^3-3.\sigma_1.(\frac{1}{u})^2+2.\sigma_2.(\frac{1}{u})-\sigma_3}{(\frac{1}{u})^4-\sigma_1.(\frac{1}{u})^3+\sigma_2.(\frac{1}{u})^2-\sigma_3.(\frac{1}{u})+\sigma_4}$.

On simplifie en $\dfrac{P'(1/u)}{P(1/u)}=\dfrac{4.u-3.\sigma_1.u^2+2.\sigma_2.u^3-\sigma_3.u^4}{1-\sigma_1.u+\sigma_2.u^2-\sigma_3.u^3+\sigma_4.u^4}$

On égalise les deux formules et on effectue le produit en croix :

$$4.u-3.\sigma_1.u^2+2.\sigma_2.u^3-\sigma_3.u^4=(1-\sigma_1.u+\sigma_2.u^2-\sigma_3.u^3+\sigma_4.u^4).\sum_{i=1}^{4}\frac{u}{1-u.\lambda_i}$$

On effectue les développements limités d'ordre 5 *(les polynômes sur la base canonique coïncident avec leurs développements limités en 0)* :
$4.u-3.\sigma_1.u^2+2.\sigma_2.u^3-\sigma_3.u^4=(1-\sigma_1.u+\sigma_2.u^2-\sigma_3.u^3+\sigma_4.u^4).(4.u+S_1.u^2+S_2.u^3+S_3.u^4+S_4.u^5+o(u^5))$
On développe et on identifie par unicité du développement limité :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 4 & = & 4 & & & & \\ -3.\sigma_1 & = & -4.\sigma_1 & +S_1 & & & \\ 2.\sigma_2 & = & 4.\sigma_2 & -\sigma_1.S_1 & +S_2 & & \\ -\sigma_3 & = & -4.\sigma_3 & +\sigma_2.S_1 & -\sigma_1.S_2 & +S_3 & \\ 0 & = & 4.\sigma_4 & -\sigma_3.S_1 & +\sigma_2.S_2 & -\sigma_1.S_3 & +S_4 \end{array}\right.$$

On extrait les formules utiles :
• $S_1=\sigma_1$ déjà connu : $\sum_i \lambda_i=\sum_i(\lambda_i)^1$
• $S_2=(\sigma_1)^2-2.\sigma_2$ (carrés, doubles produits)
• $S_3=3.\sigma_3-\sigma_2.S_1+\sigma_1.S_2$ On vérifie en développant :
$3.(a.b.c+a.b.d+a.c.d+b.c.d)-(a.b+a.c+a.d+b.c+b.d).(a+b+c+d)+(a+b+c+d).(a^2+b^2+c^2+d^2)$ donne au final $a^3+b^3+c^3+d^3$ mais il faut être courageux pour y parvenir.
La dernière dit : $S_4=\sigma_1.S_3-\sigma_2.S_2+\sigma_3.S_1-4.\sigma_4$ sachant que $\sigma_4$ est juste le produit des quatre racines.
On a donc les formules de Newton pour quatre nombres :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $S_1=\sigma_1$ | $S_2=\sigma_1.S_1-2.\sigma_2$ | $S_3=\sigma_1.S_2-\sigma_2.S_1+3.\sigma_3$ | $S_4=\sigma_1.S_3-\sigma_2.S_2+\sigma_3.S_1-4.\sigma_4$ |

On peut généraliser ces formules si nécessaire, mais elles sont hors programme en classes préparatoires.

---

On remonte dans l'algorithme de Faddeev pour la matrice diagonale $\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0&0\\0&\lambda_2&0&0\\0&0&\lambda_3&0\\0&0&0&\lambda_4\end{pmatrix}$.

On a obtenu $a_1=-\sigma_1$, $a_2=\sigma_2$, $a_3=-(S_3-\sigma_1.S_2+\sigma_2.S_1)/3$ et $a_4=-(S_4-\sigma_1.S_3+\sigma_2.S_2+a_3.S_1)/4$.
On remplace $S_3$ par sa valeur dans la formule de Newton : $a_3=-(3.\sigma_3)/3$.
On remplace dans la dernière : $4.a_4=-(S_4-\sigma_1.S_3+\sigma_2.S_2-\sigma_3.S_1)$.
La formule de Newton qui exprime $S_4$ ne nous laisse plus que $a_4=\sigma_4$.
Le polynôme caractéristique était $X^4-\sigma_1.X^3+\sigma_2.X^2-\sigma_3.X+\sigma_4$ et le polynôme de Faddeev est $X^4+a_1.X^3+a_2.X^2+a_3.X+a_4$. C'est bien le même Merci Dimitriovitch.

**DS10** • Formules de Newton et déterminants de Faddeev. • MPSI 2/2013

On développe les déterminants : $\begin{vmatrix}\sigma_1&1\\2.\sigma_2&\sigma_1\end{vmatrix}=(\sigma_1)^2-2.\sigma_2=S_2$,

$\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix} = (\sigma_1)^3 + 3.\sigma_3 - 3.\sigma_2.\sigma_1$

On remplace $\sigma_2$ par $((\sigma_1)^2 - S_2)/2$ et on reconnaît la formule de Newton donnant $S_2$.

On fait de même avec $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & 0 & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3.\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ 4.\sigma_4 & \sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 \end{vmatrix}$ et on trouve $S_4$.

On pouvait aussi effectuer des manipulations du type pivot de Gauss.

*Je n'ai effectivement croisé ces formules compactes pour les formules de Newton que dans le "recueil d'exercices d'algèbre supérieure" de Faddeev et Sominski publié en* 1972 *aux éditions Mir.*

---

Pour remplier la matrice de la forme $\begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & \dots & 0 \\ 2.\sigma_2 & \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n.\sigma_n & \sigma_{n-1} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}$, on crée d'abord une matrice nulle

```
M = matrix([0]*n for k in range(n))
```

on met des 1 :

```
for k in range(n-1) :
....M[k][k+1] = 1
```

on remplit sous la diagonale :

```
for i in range(n) :
....for k in range(i) :
........M[i][k] = sigma[i-k+1]
```

on modifie convenablement la première colonne par multiplication :

```
for i in range(n) :
....M[i][0] *= (i+1)
```

MPSI 2/2013 | 651 points | $DS10$

| | | |
|---|---|---|
| Charlemagne<br>MPSI-2 / 2013 | Vendredi 30 mai | $DS11*$ |

Dérivation : sujet des Mines de Sup (concours n'existant plus maintenant), se traitait en deux heures par un élève de MPSI ou PCSI.

Norme et trace : sujet de l'Ecole de l'Air P.S.I., devait se traiter en une heure.

Blackwell : sujet de l'Ecole Normale Supérieure, et était à traiter en trois heures. Que je vous rassure : E.N.S. mais par concours filière économique et commerciale...

| | | |
|---|---|---|
| MPSI 2/2013 | **DÉRIVATION** | $DS11*$ |

- 1) *Notons $F$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ et $D\ :\ f \in F \longmapsto f'$. Il est clair que $D$ est un endomorphisme de $F$.* Déterminez le noyau et l'image de $D$. •2 pt.•

- 2) *Soient $f_1\ :\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^t$, $f_2\ :\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t/2}.\sin\left(\dfrac{t.\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_1\ :\ t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{-t/2}.\cos\left(\dfrac{t.\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $B = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ et $G$ le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par $B$.*
*Nous allons montrer que $B$ est une famille libre de vecteurs de $F$. Soient $a$, $b$ et $c$ des réels tels que $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3$ soit la fonction nulle.*
• L'étudiante Antoinette observe que $a.f_1(t)+b.f_2(t)+c.f_3(t) = 0$ pour tout réel $t$. Elle choisit *(adroitement)* trois valeurs de $t$, obtient un système de trois équations à trois inconnues $a$, $b$ et $c$ qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conlure. Faites comme elle ! •2 pt.•
• L'étudiante Lucie propose d'exploiter un développement limité d'ordre 2 de la fonction $a.f_1+b.f_2+c.f_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle ! •2 pt.•
• L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $a.f_1(t)+b.f_2(t)+c.f_3(t)$ lorsque $t$ tend vers $+\infty$. Faites comme elle ! •2 pt.•
Le concepteur du sujet vous prend pour des neuneus. Fais comme lui, Nicolas !
*La famille $B$ est donc une base de $G$, et ce sous-espace est de dimension 3.*

- 3) Montrez que $G$ est stable par $D$. •1 pt.•

- 4) *Nous noterons $\overline{D}$ l'endomorphisme de $g$ induit par $D$.* Déterminez la matrice $M$ de $\overline{D}$ sur la base $B$. •1 pt.•

- 5) Calculez $M^3$. Montrez que $M$ est inversible et calculez son inverse $M^{-1}$. Montrez que $\overline{D}$ est un automorphisme de $G$. Exprimez $\overline{D}^{-1}$ en fonction de $\overline{D}$. •2 pt.•

- 1) *Soient $g$ et $h$ deux éléments de $G$. Définissons $\phi(g,\ h) = g(0).h(0) + g'(0).h'(0) + g"(0).h"(0)$.* Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes : pour $1 \leqslant i \leqslant 3$ la ligne $i$ présentera les valeurs de $i$, $f_i(0)$, $f_i'(0)$ et $f_i"(0)$ dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître les détails des calculs sur votre copie. •1 pt.•
- 2) Montrez que $\phi$ est un produit scalaire sur $G$. •3 pt.•
- 3) La base $B$ est elle orthogonale ? La base $B$ est elle orthonormée ? •2 pt.•

---

- 1) *Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y^{(3)} = y$, que nous noterons $(E)$. Une solution sur $\mathbb{R}$ de $(E)$ est une fonction $f$ définie et trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant $f^{(3)}(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ (ah bon ?).* Montrez que toute solution de $(E)$ est de classe $C^\infty$. •1 pt.•
- 2) Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de $(E)$. •1 pt.•
- 3) *Notons $T = D^3 - Id$ où $Id$ est l'identité de $E$, et $D^3 = D \circ D \circ D$. Le noyau de $T$ est donc l'ensemble des solutions de $(E)$.* Montrez que $G$ est contenu dans le noyau de $T$. •1 pt.•
- 4) *Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, $G$ sera exactemet l'ensemble des solutions de $(E)$. Soit $f$ une solution de $(E)$ ; nous noterons $g = f" + f' + f$.* Montrez que $g$ est solution de l'équation différentille

$y' = y$. décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$. •2 pt.•
- 5) Résolvez l'équation différentielle $y" + y' + y = 0$ ; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions. •1 pt.•
- 6) *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y" + y' + y = \lambda.e^t$. Et maintenant, concluez ! •2 pt.•

83 points — 83 points

## MPSI 2/2013 — Norme et trace — $DS11*$

♣13 On note $(E,\ +,\ .)$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille 2. Montrez que toutes les matrices symétriques de $E$ se diagonalisent. •2 pt.•

♣14 Montrez que $M \longmapsto \sqrt{Tr({}^tM.M.)}$ est une norme sur $(E,\ +,\ .)$. Calculez la norme des éléments de $SO_2(\mathbb{R})$. •2 pt.•

♣15 On note $G$ l'ensemble des éléments de $E$ de déterminant 1. Montrez que c'est un groupe. •1 pt.•
On note $G_\alpha$ le sous-ensemble des éléments de $G$ de norme $\alpha$. Déterminez en fonction de $\alpha$ le polynôme caracétristique de ${}^tM.M$ pour $M$ dans $G_\alpha$. •1 pt.•

♣16 Déduisez que $G_\alpha$ est vide pour $\alpha$ plus petit qu'un certain réel $\alpha_0$ que vous préciserez et vous vérifierez que $G_{\alpha_0}$ n'est autre que $SO_2(\mathbb{R})$. •3 pt.•

♣17 Bonus : construisez une matrice de $G_{2.\alpha_0}$. •2 pt.•

11 points — 11 points

## MPSI 2/2013 — Blackwell et l'équirépartition — $DS11*$

On va étudier un résultat de Blackwell utilisé en théorie des jeux. Ensuite, on étudiera les façons de découper $\mathbb{N}$ en parties deux à deux disjointes ayant des "masses" préimposées.

### MPSI 2/2013 — Préliminaire — $DS11*$

- 1) Soient $(w_n)$ et $(a_n)$ deux suites réelles positives. On suppose $(a_n)$ bornée (par $M$) et $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ w_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2.w_n + \dfrac{a_n}{(n+1)^2}$ *(ne me demandez pas pouquoi, c'est juste qu'on croisera ça plus tard)*. Montrez que $(w_n)$ tend vers 0 à l'infini si $M$ est nul. •1 pt.•
- 2) Montrez pour tout $k$ de $\mathbb{N}$ : $w_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{k+1}\right)^2.w_1 + \dfrac{k}{(k+1)^2}.M$. Déduisez que $(w_n)$ tend vers 0 à l'infini. •3 pt.•

### MPSI 2/2013 — Partie 1 — $DS11*$

- 1) Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle bornée (par $M$). On définit pour tout $n$ : $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}.\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ *(moyenne de Cesaro)*. On suppose pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $x_{n+1}.\overline{x}_n \leqslant 0$ *(propriété (s))*. Donnez une suite non nulle vérifiant cette propriété. •2 pt.•
- 2) Montrez que $\overline{x}$ est bornée. •1 pt.•
- 3) Montrez pour tout $n$ : $|\overline{x}_{n+1}|^2 \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2.|\overline{x}_n|^2 + \dfrac{1}{(n+1)^2}.|x_{n+1}|^2$. •2 pt.•
- 4) Déduisez que $\overline{x}$ tend vers 0 à l'infini. •1 pt.•
- 5) Donnez un contre-exemple où $\overline{x}$ ne tend pas vers 0 à l'infini si on ne suppose pas $(x_n)$ bornée. •2 pt.•
- 6) Donnez un contre-exemple où $\overline{x}$ ne tend pas vers 0 à l'infini si on ne suppose pas que $x$ vérifie la propriété $(s)$. •2 pt.•

- 1) On définit pour tout réel $a$ : $a^- = Min(a,\ 0)$. Représentez graphiquement $a \longmapsto a^-$. •1 pt.•
- 2) $d$ est un entier strictement positif. On se place dans $\mathbb{R}^d$. On note $\Gamma = (]-\infty,\ 0])^d$ *(représentez graphiquement pour d égal à 1, puis à 2 puis à 3)*. On dote $\mathbb{R}^d$ du produit scalaire usuel (noté $\phi$) et de la norme euclidienne associée. Pour tout vecteur $u$ de composantes $(u_1, \dots u_d)$, on note $P_{\Gamma(u)}$ le vecteur de composantes $(u_1^-, \dots u_d^-)$. Montrez pour tout $v$ de $\Gamma$ : $||u - P_\Gamma(u)|| \leqslant ||u - v||$. •2 pt.•
- 3) Montrez que $P_\Gamma(u)$ est l'unique élément de $\Gamma$ qui minimise $v \longmapsto ||u - v||$. Interprétez géométriquement. •2 pt.•
- 4) Montrez : $||u - P_\Gamma(u)|| \leqslant ||u||$. •1 pt.•

---

- 1) On prend une suite $(u_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $n$ on note $(c_n)$ la suite de terme général $c_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ *(pour chaque n on a un vecteur)*. On suppose que la suite $(u_n)$ est bornée *(en norme)* par $M$ *(pour tout n $||u_n|| \leqslant M$)*. On suppose de plus pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $\phi(c_n - P_\Gamma(c_n),\ u_{n+1} - P_\Gamma(c_{n+1})) \leqslant 0$. Pour tout $n$ on note $w_n = ||c_n - P_\Gamma(c_n)||^2$. Montrez pour tout $n$ : $w_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 .w_n + \dfrac{||u_{n+1} - P_\Gamma(c_{n+1})||^2}{(n+1)^2}$. *(indication : majorez $w_{n+1}$ par $||c_{n+1} - \dfrac{n.P_\Gamma(c_n) + P_\Gamma(x_n)}{n+1}||^2$ comme on s'en douterait)*. •3 pt.•
- 2) Montrez que $w_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. •1 pt.•
- 3) On suppose ici de plus que pour tout $n$ $\phi(u_n,\ \nu) = 0$ où $\nu$ est le vecteur de composantes $(1, \dots 1)$. Prouvez alors que pour tout $i$ la $i^{eme}$ composante de $x_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. •2 pt.•



- 1) $d$ est fixé encore dans $\mathbb{N}^*$ et $(c_n)$ est une suite à valeurs dans $\{1,\ \dots d\}$. On définit pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$ : $v_n(i) = \begin{cases} 1 & si \quad c_n = i \\ 0 & sinon \end{cases}$. On se donne $p$ dans $(\mathbb{R}^+)^d$ : $(p_1,\ \dots p_d)$ avec $p_1 + \dots + p_d = 1$ (vecteur de probabilités préimposé). Pour tout $n$, on pose $x_n = v_n - p$ et la moyenne de Cesaro est encore notée $(\overline{x}_n)$.

Montrez que pour tout $n$ la somme des composantes de $x_n$ est nulle. •2 pt.• - 2) Montrez pour tout $n$ que la somme des $d$ composantes de $\overline{x}_n$ est nulle, et montrez qu'il existe au moins une de ses composantes qui est négative. •2 pt.•
- 3) Montrez qu'on peut choisir une suite $(c_n)$ de sorte que pour tout $n$ on ait : $\phi(\overline{x}_n - P_\Gamma(\overline{x}_n),\ x_{n+1} - P_\Gamma(\overline{x}_n)) \leqslant 0$. •3 pt.•
- 4) Déduire que pour tout $i$ on a $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k(i) = p_i$ (où $v_k(i)$ est la $i^{eme}$ composante du vecteur $v_k$). •2 pt.•
- 5) En déduire qu'il existe une famille de parties de $\mathbb{N}^*$ : $[A_1,\ \dots A_d]$ deux à deux disjointes telles que pour tout $i$ entre 1 et $d$ : $dsp\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{Card(\{1,\dots n\}\ \cap\ A_i)}{n} = p_i$. •2 pt.•

37 points — 37 points

MPSI 2/2013 725 points $DS11*$

Charlemagne
MPSI-2 / 2013

Correction

# $DS11*$

**DS11*** • Famille libre de trois applications exponentielles. • MPSI 2/2013

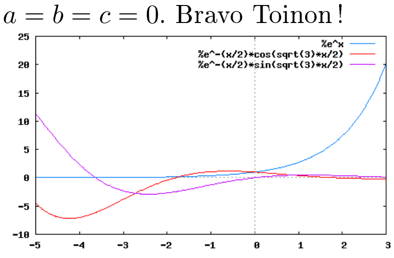
Avant tout quand même, le noyau de la dérivation est l'ensemble des fonctios constantes *(théorème du cours : toute application dérivable sur un intervale de dérivée nulle est nécessairement constante, issu du théorème des accroissements finis, et qui n'est accepté que si vous mentionnez le mot clef intervalle).*

Son ensemble image est fait de toutes les applications de $F$. En effet, pour $g$ dans $F$ il existe au moins une application $G$ vérifiant $D(G) = g$. Il suffit de prendre une de ses primitivies, comme par exemple $t \longmapsto \int_0^t g(u).du$.

*Il n'y a aucune incohérence à ce que cet endomorphisme soit surjectif sans être injectif. On est en dimension infinie, la formule du rang n'est pas utilisable.*

---

Antoinette prend pour $t$ les valeurs $0$, $\pi/\sqrt{3}$ et $-\pi/\sqrt{3}$ si ça l'amuse. Elle a un système en les inconnues $a$, $b$ et $c$ dont la matrice est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ e^{2.p} & e^p & 0 \\ e^{-2.p} & -e^{-p} & 0 \end{pmatrix}$ en posant pour simplifier : $p = \pi/2.\sqrt{3}$.
Le déterminant de cette matrice est non nul, le système a une unique solution, qui est la solution nulle : $a = b = c = 0$. Bravo Toinon !




---

On effectue le développement limité demandé :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a+c)$ | $+\Big(a + \dfrac{b.\sqrt{3}}{2} - \dfrac{c}{2}\Big).t$ | $+\Big(\dfrac{a}{2} - \dfrac{b.\sqrt{3}}{4} - \dfrac{c}{4}\Big).t^2$ | $+o(t^2)$ quand $t$ tend vers $0$ |

Par unicité du développement limité, on identifie avec celui de la fonction nulle. On aboutit à un système qu'on résout par substitutions *(car on fait comme Lucie qui a de bonnes idées mais est aussi parfois un peu conne)*. On trouve l'unique solution $a = b = c = 0$. On peut aussi calculer $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 \end{vmatrix}$, le trouver non nul et conclure à l'unicité de la solution.

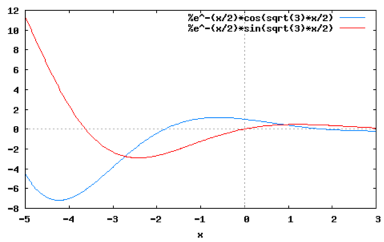
---

On écrit $a.e^t + b.e^{-t/2}.\sin(t.\sqrt{3}/2) + c.e^{-t/2}.\cos(t.\sqrt{3}/2) = 0$. On multiplie par $e^{-t}$. On a toujours $0$. On fait tendre $t$ vers l'infini. On trouve $a = 0$.
On a donc $b.e^{-t/2}.\sin(t.\sqrt{3}/2) + c.e^{-t/2}.\cos(t.\sqrt{3}/2) = 0$ pour tout $t$. On prend cette fois $t = 0$. On trouve $c = 0$ et on passe à $b = 0$ sans effort.

**DS11*** • Dérivation sur l'espace engendré par les trois fonctions. • MPSI 2/2013

Comme la dérivation est linéaire, il suffit d'établir que chaque vecteur d'une base de $G$ a son image dans $G$.
On calcule : $D(f_1) = f_1$. On poursuit : $D(f_2) = -\dfrac{f_2}{2} + \dfrac{\sqrt{3}.f_3}{2}$ et $D(f_3) = -\dfrac{f_3}{2} - \dfrac{\sqrt{3}.f_2}{2}$. On déduit

alors la matrice deméndée : $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ *(oh, une matrice de rotation d'axe $Vect(f_1)$ !)*
On l'élève au cube : $M^3 = I_3$.
On sait alors inverser $M$ sans effort : $M^{-1} = M^2$ puisque $M.M^2 = M^2.M = I_3$. On note qu'on a aussi $M^{-1} = {}^t M$.
Comme $M$ est inversible, $\overline{D}$ est un automorphisme et $\overline{D}^{-1} = \overline{D}^2$.




**DS11*** • Produit scalaire sur l'espace engendré par nos trois applications. • MPSI 2/2013

On dresse un tableau comme demandé :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | $\sqrt{3}/2$ | $-\sqrt{3}/2$ |
| 3 | 1 | $-1/2$ | $-1/2$ |

On avait déjà trouvé ces valeurs avec le développement limité d'ordre 2 en 0.

---

Pour $g$ et $h$ données, $\phi(g,\ h)$ existe. De plus, c'est aussi $\phi(h,\ g)$ ; on a la symétrie.
La bilinéarité s'obtient par déistributivité de la multiplication sur l'addition : $\phi(\alpha.g_1 + \beta.g_2,\ h) = \alpha.\phi(g_1,\ h) + \beta.\phi(g_2,\ h)$.
Quand on calcule $\phi(h,\ h)$, on a une somme de carrés de réels, c'est positif.
On suppose ensuite $\phi(h,\ h) = 0$ pour une certaine fonction $h$ de $G$. On trouve immédiatement $h(0) = h'(0) = h"(0) = 0$. Ayant écrit $h$ sous la forme $a.f_1 + b.f_2 + c.f_3$ on aboutit à $a + c = 0$, $a + \frac{\sqrt{3}}{2}.b - \frac{c}{2} = 0$ et enfin $a - \frac{\sqrt{3}}{2}.b - \frac{c}{2} = 0$. On résout : $a = b = c = 0$. Seule la fonction nulle a une norme nulle.

---

On calcule les produits scalaires deux à deux, grâce au tableau demandé par l'énoncé : $\phi(f_1,\ f_2) = \phi(f_1,\ f_3) = \phi(f_2,\ f_3) = 0$. La famille est orthogonale.
En revanche, seule $f_1$ a pour norme 1. La famille n'est pas orthonormée.

**DS11*** • Réslution d'une équation différentielle. • MPSI 2/2013

Toute solution $f$ de $(E)$ est donc trois fois dérivable. Mais en regardant $f^{(3)} = f$, on voit que $f^{(3)}$ est aussi trois fois dérivable. Il s'ensuite que $f$ est six fois dérivable.
Supposons $f$ au moins $n$ fois dérivable. Alors $f^{(3)}$ est aussi au moins $n$ fois dérivable. $f$ est donc au moins $n + 3$ fois dérivable. On réduit : $f$ est $n + 1$ fois dérivable.
Par récurrence sur $n$ on a prouvé que $f$ est dérivable autant de fois qu'on veut. C'est ce qu'on appelle justement $C^\infty$.

---

Soit $P$ un polynome qui serait solution de $(E)$ : $P^{(3)} = P$. Si $P$ est de degré $d$, on a alors $d - 3 = d$. C'est impossible. Le polynôme $P$ ne peut pas avoir de degré entier, c'est le polynome nul.
On vérifie aussi que le polynome nul est bien solution de l'équation.

---

La matrice $M^3$ l'atteste : pour tout élément $g$ de $G$, on a $D^3(g) = g$. On bascule : $(D^3 - Id)(g) = 0$ si on veut le dire en termes de noyaux.
Ou alors, on vérifie fonction par fonction *(de base)*.

On pose $g = f + f' + f"$. On dérive : $g' = f' + f" + f^{(3)}$ *(linéarité de la dérivation)*. On remplace $f^{(3)}$ par $f$ *(hypothèse de $(E)$)*. On reconnaît $g' = g$.

---

Le cours le dit : les solutions de l'équation $y' = y$ forment l'espace vectoriel $Vect(f_1)$.

---

Le cours indique aussi la forme de l'espace vectoriel des solutions de $y" + y' + y = 0$ *(d'équation caractéristique $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ et se spectre $\frac{-1 + i.\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{-1 - i.\sqrt{3}}{2}$)*. Les solutions complexes sont de la forme $t \longmapsto \alpha.e^{-t/2+i.\sqrt{3}/2} + \beta.e^{-t/2-i.\sqrt{3}/2}$ avec $\alpha$ et $\beta$ complexes dépendant des conditions initiales.
On les ramène sur $\mathbb{R}$ : $t \longmapsto e^{-t/2}.(a.\cos(\sqrt{3}.t/2) + b.\sin(\sqrt{3}.t/2)$ avec $a$ et $b$ réels dépendant des conditions initiales.

---

Quand l'équation a un second membre, les solutions forment un espace affine de dimension 2. Il suffit de trouver une solution particulière. Pour $y" + y' + y = \lambda.e^t$, on trouve $\lambda.e^t/3$.
Les solutions de $y" + y' + y = \lambda.e^t$ sont donc de la forme $t \longmapsto e^{-t/2}.(a.\cos(\sqrt{3}.t/2) + b.\sin(\sqrt{3}.t/2) + \lambda.e^t/3$ avec $a$ et $b$ dépendant des conditions initiales.

---

On a trouvé que $g$ est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^t$.
On remonte : $f" + f' + f$ est de la forme $t \longmapsto \lambda.e^t$. On trouve que $f$ est de la forme ci dessus. Elle est dans $G$.
*Il s'agit d'une méthode un peu bricolée, qui n'exploite pas les arguments de l'algèbre linéaire, mais utilise le par coeur du cours pour les équations de degré 1 et 2. Bref, c'est un sujet de fin de Sup, commun aux deux filières MPSI et PCSI, mais plus orienté PCSI je trouve.*

---

**DS11*** • Matrices carrées de taille 2 et norme en $Tr({}^tM.M)$. • MPSI 2/2013

On sait que $(E,\ +,\ .)$ est un espace vectoriel.
On sait aussi que $(A,\ B) \longmapsto Tr({}^tA.B)$ est un produit scalaire *(démonstration classique à refaire pour avoir les points)*. On nous donne ici la norme euclidienne issue de ce produit scalaire.

On sait que toute matrice réelle symétrique se diagonalise en base orthonormée. C'est vrai en toute dimension (théorème spectral vu en Spé). Mais on va le prouver en dimension 2. On part de $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ de polynôme caractéristique $X^2 - (\alpha + \gamma).X + (\alpha.\gamma - \beta^2)$. Son discriminant est $(\alpha - \gamma)^2 + 4.\beta^2$. Il est positif ou nul, on a deux racines réelles.
Si les deux racines sont distinctes, alors on a deux vecteurs propres linéairement indépendants. On appelle ça une base, et on comprend qu'on a diagonalisé la matrice.
Si les deux racines sont égales, c'est que le discriminant est nul. mais alors $\beta$ est nul *(et $\alpha$ est égal à $\gamma$)*. La matrice est déjà diagonale. Donc diagonalisable *(avec $P = I_2$ si on y tient)*.

---

L'ensemble des matrices de déterminant 1 est stable par multiplication *(le déterminant est un morphisme multiplicatif)*. La multiplication matricielle est associaitive. La matrice $I_2$ est le neutre, et elle a bien pour déterminant 1. Enfin, si $M$ a pour déterminant 1, déjà elle est inversible, mais de plus, son inverse a aussi pour déterminant 1. Bref, $(G,\ \times)$ est un groupe *(non commutatif)*.

---

On rappelle que le polynôme caractéristique de $M$ *(de taille 2)* est $X^2 - Tr(M).X + \det(M)$. Pour ${}^tM.M$, c'est donc $X^2 - Tr({}^tM.M).X + \det({}^tM.M)$. Si $M$ est dans $G$ on arrive à $X^2 - Tr({}^tM.M).X + 1$. Et si $M$ est dans $G_\alpha$ on arrive à $\boxed{X^2 - \alpha^2.X + 1}$ puisque c'est bien le carré de la norme de $M$ qui intervient au milieu.

---

La matrice ${}^tM.M$ est symétrique par construction. On sait que les racines de son polynôme caractéristique sont réelles *(diagonalisabilité des matrices réelles symétriques)*. Son discriminant est donc positif ou nul : $\alpha^4 - 4 \geqslant 0$.

Si il y a des matrices dans $G_\alpha$ alors nécessairement $\alpha^4$ est plus grand que 4. C'est donc que $\alpha$ est plus grand que $\sqrt{2}$ *(car $\alpha$ est positif, en tant que norme)*.

On renverse l'implication *(par contraposé)* : $(\alpha < \sqrt{2}) \Rightarrow (G_\alpha = \emptyset)$.
Le réel $\alpha_0$ de l'énoncé est $\sqrt{2}$.

---

On détaille ensuite. On doit comparer $G_{\sqrt{2}}$ et $SO_2(\mathbb{R})$.
Tous les éléments de $SO_2(\mathbb{R})$ ont pour déterminant 1 (isométries directes) et pour norme $\sqrt{2}$ ($Tr({}^tM.M) = Tr(I_2) = 2$). On a donc déjà $SO_2 \subset G_{\sqrt{2}}$.
On prend $M$ dans $G_{\sqrt{2}}$. Le polynôme caractéristique de ${}^tM.M$ est donc $X^2 - 2.X + 1$, de racine double 1. Son discriminant est nul. Or, le discriminant d'une matrice réelle symétrique $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est $(a-c)^2 + 4.b^2$. Il n'est nul que dans le cas $a = c$ et $b = 0$. On aboutit à ce que ${}^tM.M$ soit une matrice de la forme $a.I_2$. Or, la valeur propre (racine du polynôme caractéristique) est 1. On a donc ${}^tM.M = I_2$.
On reconnaît que $M$ est une matrice d'isométrie. Comme on a exigé "déterminant égal à 1", elle est directe. C'est une matrice de rotation (forme $\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$).

---

Pour finir, on doit trouver une matrice de $G_{2.\sqrt{2}}$, c'est à dire de déterminant 1 et de somme de carré des coefficients égale à 8.
Pour ne pas me fatiguer, je la prends triangulaire. Son déterminant est le produit des termes diagonaux : je choisis $\begin{pmatrix} 1 & ? \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il em manque juste $\sqrt{6}$ comme coefficient.
On vérifie : $\det \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$ et $\sqrt{Tr(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ 0 & 1 \end{pmatrix})} = \sqrt{8} = 2.\sqrt{2}$.

**DS11*** • Préliminaires du problème de Blackwell. • MPSI 2/2013

Si la suite $a$ est majorée par 0, sachant qu'elle est positive, elle est nulle *(de toutes façons, on la majore en valeur absolue par 0)*.
L'hypothèse liant $w$ et $a$ est donc $w_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2 .w_n$ pour tout $n$. Comme ce sont des inégalités entre réels positifs, on peut les multiplier entre elle, puis télescoper : $w_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}.\dfrac{n-1}{n} \dots \dfrac{1}{2}\right)^2 .w_1$.
On a donc $w_n \leqslant \dfrac{w_1}{(n+1)^2}$ *(démontrable aussi par récurrence sur $n$)*.
On minore par 0 *(hypothèse "suite positive")*. Par théorème d'encadrement, la suite $w$ tend vers 0 à l'infini *(et même, on peut expliciter $N_\epsilon$ dans la quantification)*.

---

Si il n'y a plus d'hypothèse sur la suite $a$ *(à part "bornée")*, on établit $w_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{k+1}\right)^2 .w_1 + \dfrac{k}{(k+1)^2}.M$ par récurrence sur $k$. Pour $k$ nul, c'est $w_1 \leqslant w_1$ ;
Pour $k$ égal à 1, c'est $w_2 \leqslant \left(\dfrac{1}{1+1}\right)^2 .w_1 + \dfrac{a_1}{(1+1)^2} \leqslant \left(\dfrac{1}{1+1}\right)^2 .w_1 + \dfrac{M}{(1+1)^2}$ par majoration et positivité des multiplicateurs.
On suppose pour un $k$ donné qu'on a $w_{k+1} \leqslant \left(\dfrac{1}{k+1}\right)^2 .w_1 + \dfrac{k}{(k+1)^2}.M$. On veut passer au rang $k+1$ en utilisant l'hypothèse liant les deux suites :
$w_{k+2} \leqslant \left(\dfrac{k+1}{k+2}\right)^2 .w_{k+1} + \dfrac{1}{(k+2)^2}.a_{k+1}$

$\leqslant \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 \left(\frac{1}{(k+1)^2}.w_1 + \frac{k}{(k+1)^2}.M\right) + \frac{1}{(k+2)^2}.a_{k+1}$

On développe, on simplifie et on trouve déjà $\dfrac{w_1}{(k+1)^2}$ et aussi $\dfrac{k}{(k+2)^2}.M + \dfrac{a_{k+1}}{(k+2)^2}$. On majore $a_{k+1}$ par $M$, on fusionne, et on arrive à ce qu'on attendait : $w_{k+2} \leqslant \left(\dfrac{1}{k+2}\right)^2.w_1 + \dfrac{k+1}{(k+2)^2}.M$.

---

On minore par 0 et on peut encore conclure par théorème d'encadrement.

**DS11*** • Moyennes de Cesaro. • MPSI 2/2013

On part d'une suite bornée. On construit sa moyenne de Cesaro, et on demande que chaque nouveau terme soit de signe opposé à la moyenne de Cesaro.
Prenons la suite $((-1)^{n+1})$ (universel contre-exemple en $(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ldots)$). Elle est bornée. Sa moyenne de Cesaro se calcule vite : $\overline{x}_n = \dfrac{1}{n}$ si $n$ impair et $\overline{x}_n = 0$ si $n$ pair. C'est $\Big(1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5},\ldots)$.
On vérifie $x_{n+1}.\overline{x}_n$ vaut 0 si $n$ est pair et $\dfrac{(-1)^{n+2}}{n}$ si $n$ impair. Ce produit est toujours négatif ou nul.

---

Si la suite $x$ est bornée par $M$, on a $|x_n| \leqslant \dfrac{1}{n}.|x_1 + \ldots + x_n| \leqslant \dfrac{|x_1| + \ldots + |x_n|}{n} \leqslant \dfrac{n.M}{n} = M$. C'est du classique.

---

Pour $|\overline{x}_{n+1}|^2 \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2.|\overline{x}_n|^2 + \dfrac{1}{(n+1)^2}.|x_{n+1}|^2$ on va regarder le premier cas.
Pour $n$ égal à 1 ; $|\overline{x}_2|^2 = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{4} = \dfrac{(x_1)^2 + (x_2)^2 + 2.x_1.x_2}{4}$.
Dans $\dfrac{(x_1)^2}{4}$ je reconnais $\left(\dfrac{1}{1+1}\right)^2.|\overline{x}_1|^2$.
Dans $\dfrac{(x_2)^2}{4}$ je reconnais $\left(\dfrac{1}{1+1}\right)^2.|x_2|^2$.
Et le terme $2.x_1.x_2$ est aussi $2.\overline{x}_1.x_2$ et il est négatif. Je majore par 0.
la formule est établie au rang 1.

On se place à un rang $n$ quelconque. On regarde alors la moyenne de Cesaro $\overline{x}_{n+1}$ qu'on écrit $\dfrac{n}{n+1}.\overline{x}_n + \dfrac{x_{n+1}}{n+1}$ par séparation classique.
On élève au carré pour avoir le carré de sa valeur absolue *(ce qui est la même chose que son propre carré puisqu'on a un réel)* :
$|\overline{x}_{n+1}|^2 = \dfrac{n^2.(\overline{x}_n)^2 + (x_{n+1})^2 + 2.\overline{x}_n.x_{n+1}}{(n+1)^2}$.
On comprend à quoi va servir notre hypothèse d'alternance de signes : $2.\overline{x}_{n+1}.x_{n+2}$ est négatif. On le majore par 0.
$|\overline{x}_{n+1}|^2 \leqslant \dfrac{n^2.(\overline{x}_n)^2 + (x_{n+1})^2}{(n+1)^2}$. C'est la formule de l'énoncé. Et on comprend qu'il ne fallait pas faire de récurrence.

---

En utilisant le résultat du préliminaire, appliqué aux suites positives $(|\overline{x}_n|)$ et $(|x_n|)$ où la seconde est bornée, on peut conclure.
Remarque : ne vous contentez pas de me dire "d'après les préliminaires" si vous ne validez pas "les suites sont positives".

---

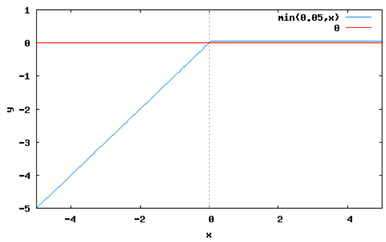
On veut une suite où l'on a alternance des signes, mais où la moyenne de Cesaro diverge *(la suite $(x_n)$ n'est alors plus bornée)*. Le contre-exemple universel va encore servir. Mais c'est la moyenne de Cesaro qui va être $((-1)^{n+1})$. On construit donc la suite $u$ de proche en proche pour avoir ces moyennes alternées : $(1,\ -3,\ 5,\ -7, \ldots)$. On donne une formule exacte : $x_n = (-1)^{n+1}(2.n-1)$. On montre alors $\overline{x}_n = (-1)^{n+1}$. Elle ne converge pas. Et on a $\overline{x}_n.x_{n+1} \leqslant 0$ pour tout $n$.

---

On veut cette fois que la suite $x$ soit bornée. On veut que sa moyenne de Cesaro diverge. La sachant bornée, on va la faire osciller encore. Mais comme son amplitude est bornée, c'est sur les longueur des plages de signes qu'on va jouer :
$(x_n) = (1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1, \ldots)$.
Lu sommairement : un 1, deux $-1$, quatre 1, huit $-1$ et ainsi de suite.

**DS11*** • Projection orthogonale sur un secteur. • MPSI 2/2013

Pour $a$ négatif, $a^-$ se confond avec $a$ et pour $a$ positif, on trouve 0.




L'ensemble $\Gamma$ est fait des vecteurs dont toutes les composantes son négatives. Demi-droite pour $d = 1$, quart de plan Sud-Ouest pour $d = 2$, huitième d'espace du côté de $-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}$.

---

On se donne $u$ de composantes $(u_1, \ldots u_n)$. Son projeté a pour composantes $(u_1^-, \ldots u_n^-)$ (on ne garde que les composantes négatives). On calcule le vecteur différence : $(u_1 - u_1-, \ldots u_n - u_n^-)$. On passe à la norme : $\sqrt{\sum_k (u_k - u_k^-)^2}$.

En face, on a $\sqrt{\sum_k (u_k - v_k)^2}$ avec chaque $v_k$ négatif.

On compare les carrés de ces normes : $\sum_k (u_k - u_k^-)^2$ et $\sum_k (u_k - v_k)^2$.

On va comprer ces deux sommes terme à terme et montrer que chaque $(u_k - u_k^-)^2$ à chaque $(u_k - v_k)^-$.

On distingue les cas

| cas | $\lvert u_k - u_k^- \rvert$ | $\lvert u_k - v_k \rvert$ | |
|---|---|---|---|
| $u_k > 0$ | $\lvert u_k \rvert$ | $\lvert u_k - negatif \rvert$ | $\lvert u_k \rvert \leqslant \lvert u_k - negatif \rvert$ |
| $u_k \leqslant 0$ | 0 | $\lvert u_k - v_k \rvert$ | $0 \leqslant \lvert u_k - v_k \rvert$ |

On peut bien sommer et passer à la racine.

---

Le réel positif $\lvert\lvert u - P_{\Gamma(u)} \rvert\rvert$ est un minorant de la fonction $v \longmapsto \lvert\lvert u - v \rvert\rvert$ quand $v$ décrit $\Gamma$ comme on vient de le voir.
Ce minorant est atteint en $v = P_\Gamma(u)$ dont il faut bien préciser que c'est un élément de $\Gamma$ par construction.
Il reste à vérifier que c'est le seul.

---

On qualifiera $P_{\Gamma(u)}$ de projeté de $u$ sur $\Gamma$, qui minimise la distance. Attention toutefois, on n'a pas un sous-espace vectoriel. On ne peut donc pas parler de projeter orthogonal.

---

On doit majorer $\lvert\lvert u - P_\Gamma(u) \rvert\rvert$ par $\lvert\lvert u \rvert\rvert$.
J'ai failli prendre le temps de le démontrer. C'est juste $\lvert\lvert u - P_\Gamma(u) \rvert\rvert \leqslant \lvert\lvert u - v \rvert\rvert$ avec $v$ égal au vecteur nul, qui est bien dans $\Gamma$.

**DS11*** • Version vectorielle du résultat. • MPSI 2/2013

*Pour tout $n$, le terme $u_n$ de la suite est un vecteur de $\mathbb{R}^d$, avec $d$ composantes. Les données de l'anonce, c'est donc finalement $d$ suites réelles. On pourra tout stocker dans une matrice à $d$ lignes et ... une infinité de colonnes.*
*Dans ce tableau, toutes les colonnes sont bornées par une même norme $M$.*
*L'hypothèse affirme ensuite que certains angles sont obtus. Des angles pour des vecteurs obtenus par un point et son projeté dans le sous ensemble $\Gamma$. J'arrive un peu à visualiser ça dans le plan.*

On va prouver $w_{n+1} \leqslant \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2.w_n + \dfrac{||u_{n+1} - P_\Gamma(c_{n+1})||^2}{(n+1)^2}$ sans aucune récurrence sur $n$. Il ne faut pas avoir gardé ce réflexe basique de Terminable "entier $n$ donc récurrence". On peut prouver les formules directement, sans récurrence, et c'est seulement ensuite qu'on l'utilise éventuellement pour les récurrences.
On se donne $n$ et on exprime : $(n+1).c_{n+1} = u_1 + \ldots + u_{n+1} = n.c_n + u_{n+1}$.
On part de $||c_{n+1} - P_\Gamma(c_{n+1})||^2$ qu'on majore par $||c_{n+1} - v||^2$ pour n'importe quel vecteur de $\Gamma$. On prend en particulier le vecteur $\dfrac{n.P_\Gamma(c_n) + P_\Gamma(u_n)}{n+1}$ (il est bien à composantes négatives). On a donc
$||w_{n+1}||^2 \leqslant \left|\left|c_{n+1} - \dfrac{n.P_\Gamma(c_n) + P_\Gamma(u_n)}{n+1}\right|\right|^2$
On remplace $c_{n+1}$ et on isole le dénominateur :
$(n+1)^2.||w_{n+1}||^2 \leqslant ||n.c_n + x_{n+1} - n.P_\Gamma(c_n) - P_\Gamma(u_n)||^2$
On arrange mieux : $(n+1)^2.||w_{n+1}||^2 \leqslant ||(n.c_n - n.P_\Gamma(c_n)) + (u_{n+1} - P_\Gamma(u_n))||^2$
On développe ce carré de norme par la formule $||a+b||^2 = ||a||^2 + ||b||^2 + 2.\phi(a,\ b)$.
$(n+1)^2.||w_{n+1}||^2 \leqslant ||n.c_n - n.P_\Gamma(c_n)||^2 + ||u_{n+1} - P_\Gamma(u_n)||^2 + 2.\phi(n.c_n - n.P_\Gamma(c_n),\ u_{n+1} - P_\Gamma(u_n))$
Or, le produit scalaire au bout est négatif. On le majore par 0.
On a bien la majoration demandée.

---

On va pouvoir utiliser le préliminaire. Les normes en jeu sont des suites positives. Il reste à prouver que la suite $||u_{n+1} - P_\Gamma(u_n)||^2$ est bornée. Et pourquoi l'est elle ?
Parce que la suite $(||u_n||)$ est bornée par un réel $M$. On utilise alors $||a - P_\Gamma(a)|| \leqslant ||a||$ déjà démontré. Mais ici, il y a un décalage d'indice. On doit donc ruser encore plus.
$||u_{n+1} - P_\Gamma(u_n)|| \leqslant ||u_{n+1} - u_n + u_n - P_\Gamma(u_n)|| \leqslant ||u_{n+1}|| + ||u_n|| + ||u_n - P_\Gamma(u_n)||$
On majore encore : $||u_{n+1} - P_\Gamma(u_n)|| \leqslant ||u_{n+1}|| + ||u_n|| + ||u_n|| \leqslant 3.M$
On peut donc enfin utiliser le lemme établi en préliminaire.

**DS11*** • Construction d'ensembles à probabilité préimposée. • MPSI 2/2013

La somme des composantes de $v_n - p$, c'est la somme des composantes de $v_n$ moins la somme des composantes de $p$ par linéarité (la somme des composantes de $u$ c'est le produit scalaire de $u$ et du vecteur dont toutes les composantes valent 1).
Or, la somme des composantes de $p$ vaut 1. Il nous reste à montrer que la somme des composantes de $v_n$ vaut toujours 1.
Or, pour $n$ donné, $c_n$ est égal à un et un seul des entiers entre 1 et $d$. Il y a donc une et une seule des $d$ composantes de $v_n$ qui vaut 1 *(la $(c_n)^{eme}$ pour être précis).*

---

Chaque $x_k$ a sa somme de composantes qui est nulle. Par linéarité de cet opérateur "somme des composantes", $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ a sa somme des composantes qui est nulle. La division par $n$ n'y change rien.

Comme la somme des composantes est nulle, il est impossible que chaque composante soit strictement positive. C'est donc qu'au moins une d'entre elles est nulle.

---

Que veut on faire en fait ? Obtenir par exemple quatre parties $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ de $\mathbb{N}$ deux à deux

disjointes telle que la proportion d'éléments dans chacune tende vers 1/6, 1/4, 1/2 et 1/12 par exemple *(c'est notre vecteur p).* On avance pas à pas dans $\mathbb{N}$ et on dit dans lequel des quatre ensembles on place l'entier $n$ *(c'est la suite c qui se charge d'indiquer l'indice de la partie dans laquelle on met n).* Le vecteur $u_n$ indique aussi cela : si on place $n$ dans $A_3$, alors $u_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le vecteur $\sum_{k=1}^{n} u_k$ indique combien il y a d'éléments de $\{1, \dots n\}$ dans chacun des quatre ensembles $A_1$ à $A_4$. Avec $\overline{u}_n$ on calcule la proportion d'éléments de $\{1, \dots n\}$ dans chacun des $A_i$. En soustryant $p$, on regarde de combien on se trompe.
On comprend alors qu'au moin un des ensembles est en sous-effectif *(au sens large).*
Que fait on alors ? On place $n+1$ dans l'un des ensembles en sous-effectif. C'est donc la construction de $c_{n+1}$.
On construit donc la suite $c$ par récurrence. On place 1 dans l'ensemble que l'on veut.
A chaque étape, on regarde quels ensembles sont en sous-effecif, on en prend un (par exemple celui dont l'indice est le plus petit, qu'on note $i_n$) et on pose $c_{n+1} = i_n$.
Il faut alors se convaincre que l'algorithme est pertinent *(se peut il qu'on oublie de remplir un des ensembles à choisir à cause de ce choix arbitraire d'un ensemble dans tous ceux en sous-effectif ?).* [10]
Mais tout ce qui précède a été fait pour ça !
Il suffit de vérifier que ce choix conduit à l'angle obtus $\phi(\overline{x}_n - P_\Gamma(\overline{x}_n),\ x_{n+1} - P_\Gamma(\overline{x}_n)) \leqslant 0$.
On vérifie ensuite que la suite $x$ est bornée. C'est le cas, puisque $u_n$ est toujours un vecteur de la base canonique, et $p$ est un vecteur fixé.
Le résultat de la partie 2 donne la convergence de $(x_n)$ vers le vecteur nul à l'infini.
Chaque proportion tend vers son $p_i$.

| MPSI 2/2013 | `725 points` | *DS*11∗ |
|---|---|---|

[10] de toutes façons, si on oublie trop de remplir la partie $A_4$ par exemple, elle finit par être la seule en sous-effectife, et l'algorithme la remplit jusqu'à ce qu'elle dépasse sa proportion $p_4$ et on bascule alors sur une autre