Bonjour. Content de vous retrouver.
Ça va ?
Élise, ça va mieux ? Au fait, c'était quoi ces dessins en script LaTeX sur le bot ?
J'en vois qui ont profité des vacances pour bronzer : ah l'avantage d'avoir une chambre orientée au sud.
Bon, on était dans le II sur les théorèmes usuels sur les suites.
Il nous reste une dernière chose à étudier sur les suites avant d'attaquer le II sur la calcul différentiel (continuité[1], dérivation).
Ce qu'on va faire, c'est un mode d'emploi pour des exercices classiques, et même pour certains répétitifs en Terminale : les sites « $u_{n+1} = f(u_n)$ ». Mais on va quand même agrandit les possibilités par rapport à la Terminale :

- on ne va pas donner la valeur de u_0, on va discuter en fonction de u_0
- on va travailler aussi un peu dans $\mathbb{C}$, là où il y n'a pas d'argument de monotonie possible
- on va utiliser le théorème de Cesàro pour pouvoir obtenir des résultats plus fins.

On prendra garde quand même à ne pas choisir un exercice au hasard, car on peut avoir de mauvaises surprises avec ce qu'on appelle les systèmes logistiques dits de Verhulst et les attracteurs étranges.

Petit combien ? Petit seize. Merci Ornella. Tiens, à cause toi, j'ai essayé de regarder de vieux épisodes de Barbapapa. J'ai pas tenu.

16°) Les suites « $u_{n+1} = f(u_n)$ ».

En général, pour ces suites, on donne f et u_0 et on demande d'étudier la suite
- existence
- monotonie
- convergence.

On peut aussi ne pas donner u_0 et demander une étude complète de la convergence possible en fonction de u_0.

En général, f sera une fonction assez simple, et tout commencera par la représentation graphique de f.

On met de côté les cas triviaux où f est si simple que l'exercice a déjà été traité :

<table>
<tr><td>$f = 1_{\mathbb{Q}}$</td><td colspan="5">facile : quel que soit u_0, u_1 vaut 0 ou 1 , $u_2$vaut 1 et la suite reste égale à 1</td></tr>
<tr><td>$f = 1_{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}$</td><td colspan="5">un peu pareil : u_1 vaut 0 ou 1, u_2 vaut 0, et la suite reste égale à 0</td></tr>
<tr><td>$f =?$</td><td colspan="5">que choisir pour que la suite devienne périodique de période 2 ?</td></tr>
<tr><td>$f = x \longmapsto x + b$</td><td colspan="5">la suite est arithmétique $u_n = u_0 + n.b$ elle diverge (sauf si b est nul, oui, merci)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$f = x \longmapsto a.x$</td><td rowspan="6">la suite est géométrique $u_n = a^n.u_0$</td><td>$u_0 = 0$</td><td colspan="3">converge</td></tr>
<tr><td rowspan="5">$u_0 \neq 0$</td><td>$|a| > 1$</td><td colspan="2">diverge (en module vers $+\infty$)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$|a| = 1$</td><td>$a = 1$</td><td>converge constante</td></tr>
<tr><td>$a \in \mathbb{C}$</td><td>périodique ou « tournante »</td></tr>
<tr><td>$a = -1$</td><td>diverge en oscillant</td></tr>
<tr><td>$|a| < 1$</td><td colspan="2">converge vers 0</td></tr>
<tr><td>$f = x \longmapsto a.x + b$</td><td colspan="5">Exercice classique</td></tr>
<tr><td>$f = x \longmapsto x^2$</td><td colspan="5">$u_n = (u_0)^{(2^n)}$</td></tr>
<tr><td>$f = x \longmapsto a.x^2$</td><td colspan="5">Exercice pas assez classique, faites le.</td></tr>
</table>

La suite « $u_{n+1} = a.u_n + b$ » mérite qu'on s'y attarde car elle donne quand même des éléments pour le cas général pour f.
C'est elle qu'on qualifie d'arithmético-géométrique.

1. mais ça, on a déjà presque tout fait, il manquera juste homéomorphisme, je vois Émile qui est soulagé, parce que j'avais posé des exercices dessus sans expliquer le mot

Si on est un fondu d'algèbre linéaire,

on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$,   on constate $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_n \\ 1 \end{pmatrix}$.   Il ne reste qu'à diagonaliser $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ en $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ via $P = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}$ (vérifiez).   On a alors sans effort $M^n = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ b & 1-a \end{pmatrix} . \frac{1}{1-a}$.   Et ceci donne une formule qu'on va retrouver dans un instant.

Maintenant, il est plus sain de la transformer en suite géométrique par « translation ». Si on le fait purement par le calcul, sans chercher à visualiser, ça donne ça :

- on cherche le point fixe[a] de $x \longmapsto a.x + b$: c'est $\frac{b}{1-a}$ [b]
. c'est le point vers lequel la suite va converger si elle converge,
- on étudie alors la suite translatée (celle qui doit alors tendre vers 0) : $v = u_n - \frac{b}{1-a}$
- on calcule : $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a.u_n + b - \frac{b}{1-a} = a.u_n - a.\frac{b}{1-a} = a.v_n$ (ligne $(*)$)
- on constate que la suite (v_n) est géométrique de raison a
- on calcule alors $v_n = a^n.v_0$
- on revient à $u_n = v_n + \frac{b}{1-a} = a^n.\left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}$

a. équation $f(x) = x$, ce n'était pas la peine de regarder cette note de bas de page, vous le saviez
b. en Terminale, souvent, on vous le donne sans explication

.

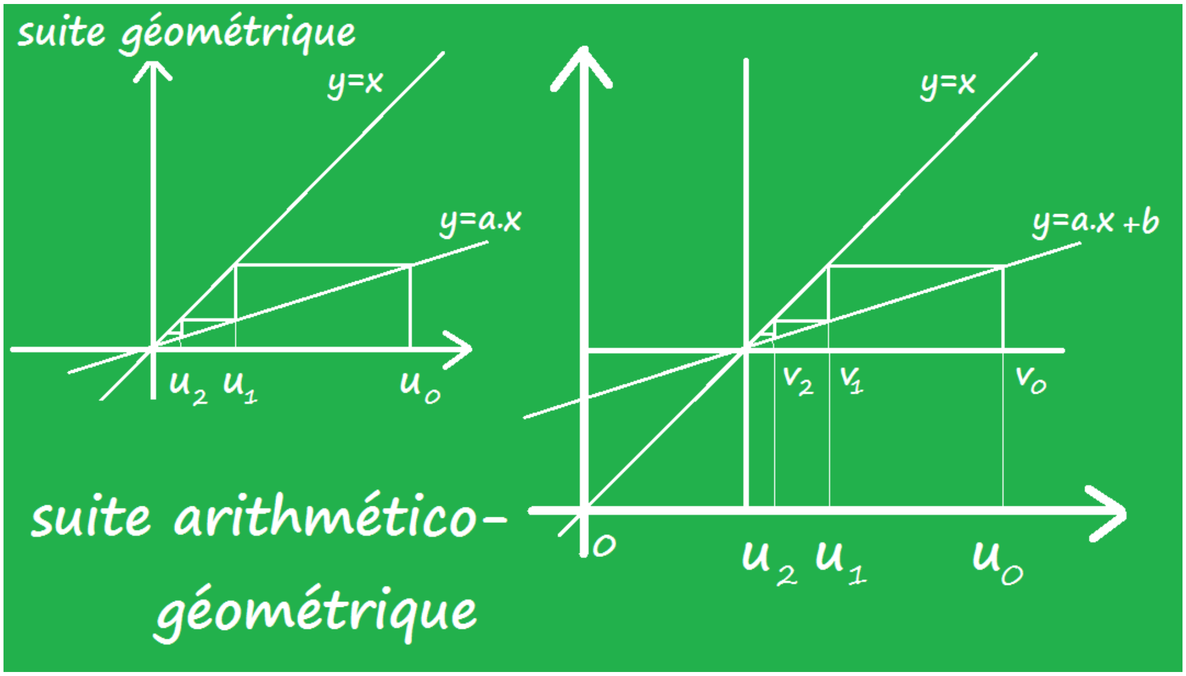
La formule finale remixée en $u_n = a^n.u_0 + b.\frac{1-a^n}{1-a}$ fait aussi penser à une série géométrique ? Vous n'avez pas tort :

Il y a une preuve « points de suspension » :

$u_1 = a.u_0 + b$ $u_2 = a.(a.u_0 + b) + b = a^2.u_0 + a.b + b$ $u_3 = a.(a^2.u_0 + a.b + b) = a^3.u_0 + a^2.b + a.b + b$ $u_4 = a.(a^3.u_0 + a^2.b + a.b + b) + b = a^4.u_0 + a^".b + a^2.b + a.b + b$ et plus généralement $u_n = a^n.u_0 + a^{n-1}.b + a^{n-2}.b + \ldots + b$ et la série géométrique est là

Mais en fait, si la translation se justifie par le calcul en ligne $(*)$, la sortie de cette valeur semble se faire « d'un chapeau ».

Alors géométriquement, c'est tout bête



On translate pour transformer la suite arithmético-géométrique en suite géométrique. Une fois qu'on a compris ça, il n'y a plus rien à faire.

$u_{n+1} = a.u_n + b$. Retenez qu'il existe une formule explicite, ne retenez pas la formule, retrouvez la directement par la méthode « points de suspension », retenez le dessin, et si on vous demande une preuve faites la preuve par translation.

Dans la famille des suites récurrentes pour lesquelles on a une formule explicité, on a bien sûr les suites récurrentes homographiques [2]. On se donne u_0 et on étudie $u_{n+1} = \dfrac{a.u_n + b}{c.u_n + d}$

On comprend tout de suite qu'en notant h l'homographie en jeu, il suffit de déterminer $h \circ h \circ h \ldots \circ h$. Il suffit donc de diagonaliser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On aura au final une formule avec des $(\lambda_1)^n$ et $(\lambda_2)^n$.

2. homographie, c'est $x \longmapsto \dfrac{a.x+b}{c.x+d}$ et c'est donc une matrice 2 sur 2

Un exemple ? *Tiens, je vous offre comment en faire un vous même, à rebours.*

Vous voulez M *se diagonalisant en* $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ *avec une matrice de passage pas trop compliquée et facile à inverser comme* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. *Vous prenez simplement* $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}$.

Vous vous proposez donc d'étudier $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{7.u_n - 5}{10.u_n - 8}}$

Vous dites : je diagonalise $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vous élevez : $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ 10 & -8 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vous trouvez $\boxed{u_n = \dfrac{(2.2^n - (-3)^n).u_0 + (-3)^n - 2^n}{2.(2^n - (-3)^n).u_0 + 2.(-3)^n - 2^n}}$ *en notant que les éventuels* $\det(P)$ *au dénominateur dans* M^n *sont partis dans le quotient ici définissant* $h^n(u_0)$.

Vous vérifiez votre formule pour $n = 0$ *:* $u_0 = \dfrac{1.u_0 + 0}{0.u_0 + 1}$ *c'est bon*

et $n = 1$ *:* $u_1 = \dfrac{7.u_0 - 5}{10.u_0 - 8}$

Vous en profitez pour donner la liste des valeurs interdites pour u_0 *:* $\dfrac{2.(-3)^n - 2^n}{2.(2^n - (-3)^n)}$ *(sinon, c'était lourd à trouver).*

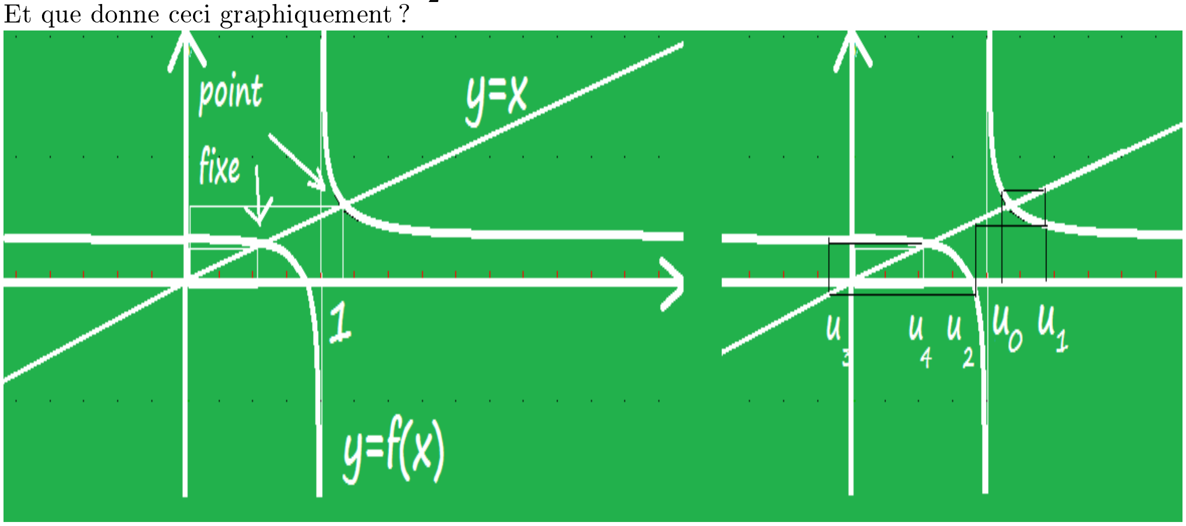
Vous pouvez même trouver la limite de u_n *à l'infini :*

$\boxed{u_n = \dfrac{(2.r^n - 1).u_0 + 1 - r^n}{2.(r^n - 1).u_0 + 2 - r^n}}$ *avec* $r = \dfrac{-2}{3}$ *en divisant haut et bas par* $(-3)^n$

$u_n \longrightarrow \dfrac{-u_0 + 1}{-2.u_0 + 2} = \dfrac{1}{2}$

On note au passage que $\dfrac{1}{2}$ *est l'un des deux points fixes de* f.

Et que donne ceci graphiquement ?



Maintenant, il y a une autre approche. *Si vous y parvenez à la comprendre, votre place en Sup était bien légitime.*
Si vous parvenez à la maîtriser, préparez la Spé.
Si vous saisissez le lien avec la diagonalisation, vous méritez une étoile.

L'application homographique h admet deux points fixes : 1 et $\dfrac{1}{2}$ que l'on peut lire sur le dessin [3].

3. si vous n'avez pas compris qu'un point fixe, c'est l'intersection du graphe et de la bissectrice, que puis je pour

• 1 est répulsif. La dérivée en 1 est en valeur absolue plus grande que 1.
Si vous partez près de 1 comme sur le dessins, vous vous éloignez de 1.

• $\frac{1}{2}$ est attractif. La dérivée en valeur absolue est plus petite que 1.
Si vous partez près de 1/2, vous vous en rapprochez encore.

Si cela vous évoque le théorème du point fixe avec f contractante, je vous dis « oui, tout à fait ! ».

On définit alors $\alpha_n = \dfrac{u_n - \frac{1}{2}}{u_n - 1}$ $\left(= \dfrac{u_n - fixe_{att}}{u_n - fixe_{rep}}\right)$.	$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
On calcule alors comme par hasard :	
$\alpha_{n+1} = \dfrac{\dfrac{7.u_n - 5}{10.u_n - 8} - \dfrac{1}{2}}{\dfrac{7.u_n - 5}{10.u_n - 8} - 1} = \dfrac{-2.u_n + 1}{3.u_n - 3} = \dfrac{2}{-3}.\alpha_n$	
(faites le calcul si vous n'avez pas confiance)	$D^n = P^{-1}.M.P$
α_n est géométrique de raison $\dfrac{2}{-3}$.	
Elle converge vers 0.	
On a une formule explicite pour le terme α_n puis pour u_n.	

J'ai laissé une colonne à droite pour ceux qui veulent qu'on leur montre « le chemin de l'étoile » et le lien avec la diagonalisation..

Il existe aussi des suites récurrentes qui ont l'air d'être des horreurs, mais pour lesquelles en fait le calcul est simple.

$\boxed{u_{n+1} = \sqrt{(u_n)^2 + 1}}$ par exemple... Vous voyez ?

Si ! La vraie suite est $(u_n)^2$. Elle est arithmétique... je vous la laisse en exercice.

Allez, on passe au cas général.

Que fait on dans le cas général ? Des récurrences. Pour cerner la suite, pour étudier sa monotonie.

Niveau terminale, tout commence par « montrez que pour tout n, $u_n$est entre tant et tant ».

Et à chaque fois, on écrit un truc comme $(a \leqslant u_n \leqslant b) \Rightarrow ... \Rightarrow (a \leqslant u_{n+1} \leqslant b)$ et dans l'étape du milieu, on a appliqué f.

En fait, à chaque fois, tout repose sur une notion simple : $x \in [a,\ b] \Rightarrow f(x) \in [a,\ b]$.

C'est ce qu'on appelle un intervalle f-stable (ou sans préfixe « stable par f »).

La définition de I est stable par f est $\boxed{\forall x \in I,\ \ f(x) \in I}$

A quoi ça sert ? • Si u_0 est dans I alors par récurrence évidente, chaque $u_n$est dans I.
• Si un certain u_p « tombe » dans I alors tous les u_k avec k plus grand que p restent dans I.

A quoi reconnait on un intervalle stable ? En général, il est entre deux points fixes de f. Mais ce n'est pas du tout une condition suffisante, ni même nécessaire.

Exemples Quand l'abscisse x est dans $[a,\ b]$, l'ordonnée y y est aussi. On enferme donc une partie du graphe dans un carré $[a,\ b] \times [a,\ b]$ centré sur la diagonale.
Quand l'abscisse x est dans $[a,\ +\infty[$, l'ordonnée y y est aussi. On enferme donc une partie du graphe dans un « carré » $[a,\ +\infty[\times[a,\ +\infty[$ centré sur la diagonale.

---

vous ?

Évidemment : • $\mathbb{R}$ est un intervalle stable, mais ce n'est pas génial.

• Un intervalle réduit à un point égal à un point fixe est stable, mais pas très utile.

• Un intervalle $[a,\ b]$ avec a et b points fixes sur lequel f est croissante est stable, et ça c'est pratique.

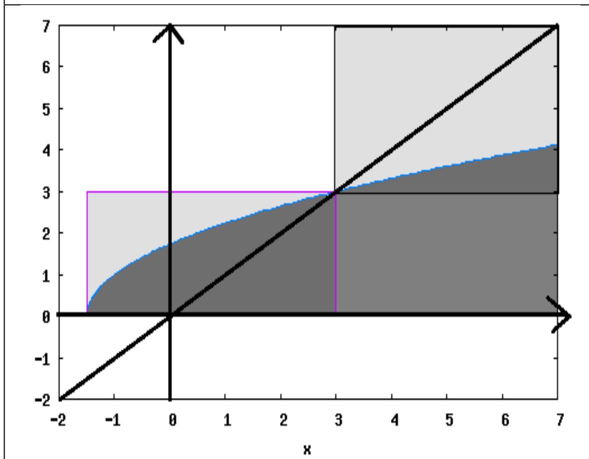
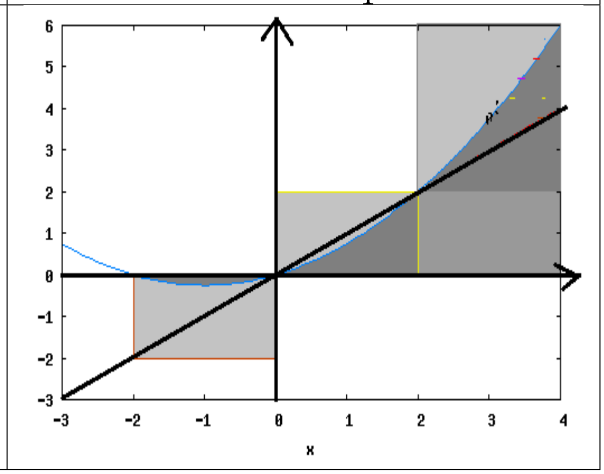
On prend x vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$, on applique f croissante : $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$
et comme ce sont des points fixes : $a \leqslant f(x) \leqslant b$.

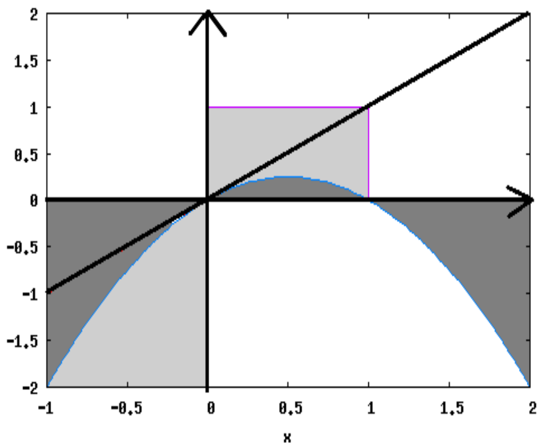
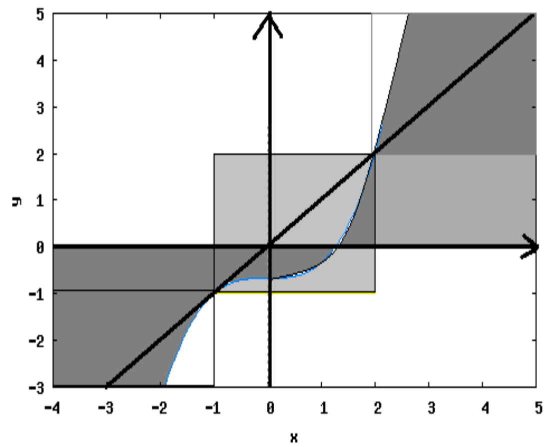
• Un intervalle $[a,\ b]$ avec $f(a) \leqslant b$ et $f(b) \geqslant a$ sur lequel f est décroissante est stable.

On prend x vérifiant $a \leqslant x \leqslant b$, on applique f décroissante : $f(a) \geqslant f(x) \geqslant f(b)$
et comme on a une hypothèse : $b \geqslant f(a) \geqslant f(x) \geqslant f(b) \geqslant a$.

Après, c'est une question d'habitude.

Le mieux est de s'attaquer à quelques exemples.

$u_{n+1} = \sqrt{2.u_n + 3}$	$u_{n+1} = \dfrac{2.u_n + (u_n)^2}{4}$
	
$\left[-\dfrac{3}{2},\ 3\right]$ est stable $[3,\ +\infty[$ est stable	$[-2,\ 0]$ est stable $[0,\ 2]$ est stable $[2,\ +\infty[$ est stable $[-2,\ 2]$ aussi est stable mais moins utile...

$u_{n+1} = u_n - (u_n)^2$	$u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 - 2}{3}$
	
$]-\infty, 0]$ est stable $[0,\ 1]$ est stable $[1,\ +\infty[$ n'est pas stable. Mais $[1,\ +\infty[$ renvoie sur $]-\infty,\ 0]$ qui est stable.	$]-\infty,\ -1]$ est stable. $[-1,\ 2]$ est stable. $[2,\ +\infty[$ est stable. Il y a d'autres intervalle stables, comme $[-1,\ 0]$, mais il est moins utile, car alors il nous reste $[0,\ 2]$ qui, lui, n'est pas stable.

On peut commencer à étudier $\boxed{u_{n+1} = \sqrt{2.u_n + 3}}$:

u_0	$\left]-\infty,\ -\frac{3}{2}\right[$	$\left]-\frac{3}{2},\ 3\right[$	3	$]3,\ +\infty[$
existence	seul $u_0$existe	$\forall n,\ u_n \in \left[-\frac{3}{2},\ 3\right[$	$\forall n,\ u_n = 3$	$\forall n,\ u_n \in]3,\ +\infty[$
monotonie		(u_n) croit	(u_n) constante	(u_n) décroit

La ligne existence repose sur la stabilité de l'intervalle.

Si vous tenez à le faire niveau Terminale : si u_0 est dans $]3,\ +\infty[$ alors pour tout n, u_n existe et est plus grand que 3.

On le montre en effet, par récurrence déjà initialisée.

Pour un n quelconque donné, on suppose $3 < u_n$.

On a alors $6 < 2.u_n$ puis $9 < 2.u_n + 3$ et enfin $3 < u_{n+1}$.

Mais autant le faire en parlant d'intervalle stable.

Attention, il faut un argument de stabilité ou une récurrence.

L'erreur trop bête : ne regarder une condition sur u_0 que pour l'existence de u_1.

Ânerie d'élève $u_{n+1} = \dfrac{7.u_n - 5}{10.u_n - 8}$. « Si u_0 est différent de $\dfrac{4}{5}$ alors (u_n) existe ».

Et pourtant, si u_0 vaut $\dfrac{31}{35}$ alors u_1 existe. Mais il vaut $\dfrac{7}{5}$.

Puis u_2 vaut $\dfrac{4}{5}$.

Et u_3 n'existe pas. pas plus que les suivants.

Il faut donc voir plus loin que le bout de son nez et réfléchir à tous les termes de la suite.

Mais comment compléter la ligne de la monotonie ?

Par le critère de la première bissectrice :

soit I un intervalle stable on suppose : $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant x$ alors la suite (u_n) est à valeur dans I la suite(u_n) est décroissante

Ce critère se lit directement sur le graphe et repose sur ce que son nom indique : la position du graphe de f par rapport à la première bissectrice.

Il n'y a strictement rien à prouver avec ce théorème. Si on a bien par stabilité $\forall n,\ u_n \in I$, alors on a $\forall n,\ f(u_n) \leqslant u_n$ et donc $\forall n,\ u_{n+1} \leqslant u_n$.

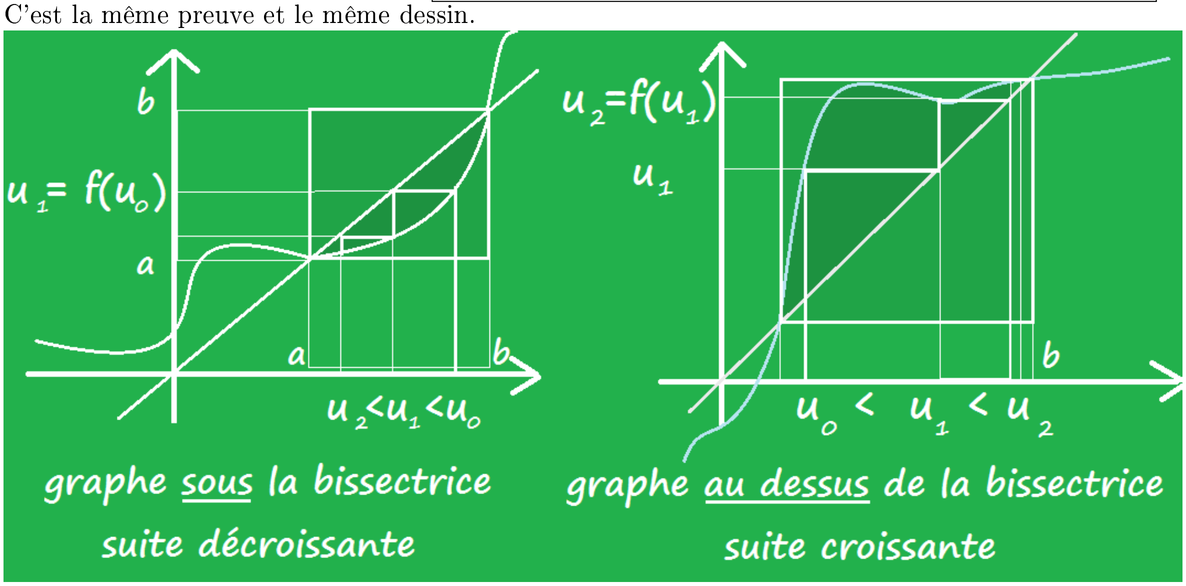
Quelques remarques quand même :

- *ce résultat repose sur la position du graphe, et ne nécessite aucune récurrence*
- *si l'intervalle n'est pas f-stable, ça ne sert à rien de regarder, vous n'aurez pour toute information que $u_1 \leqslant u_0$*
- *la monotonie de f n'a rien à voir, c'est la position par rapport à la bissectrice qui joue*

Évidemment, il existe l'autre critère

soit I un intervalle stable on suppose : $\forall x \in I,\ f(x) \geqslant x$ alors la suite (u_n) est à valeur dans I la suite(u_n) est croissante

C'est la même preuve et le même dessin.



Vous observez que le graphe de droite a failli rater, pour cause de débordement par le haut du carré ; l'intervalle n'eut pas été stable... et une valeur prise sur la zone de débordement aurait fait passer la suite au delà de b.
Quoi qu'il en soit, le critère vous évite de faire à chaque fois l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

Pour ce qui est des lignes suivantes, une fois qu'on a borné la suite et établi sa monotonie, on peut conclure à la convergence.

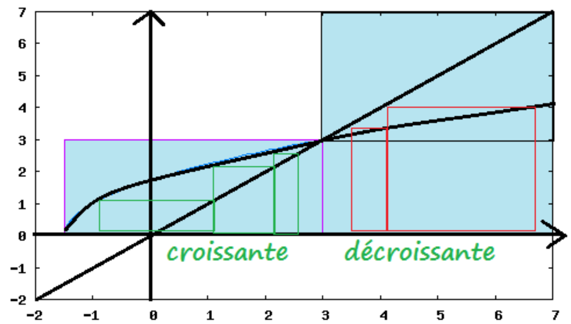
	$\left]-\infty,\ -\frac{3}{2}\right[$	$\left[-\frac{3}{2},\ 3\right[$	3	$]3,\ +\infty[$
existence	seul $u_0$existe	$\forall n,\ u_n \in \left[-\frac{3}{2},\ 3\right[$	$\forall n,\ u_n = 3$	$\forall n,\ u_n \in]3,\ +\infty[$
monotonie		(u_n) croit	(u_n) constante	(u_n) décroit
convergence		(u_n) converge en croissant	$u_n \to 3$	(u_n) converge en décroissant

Mais vers quoi ?
Ici, avec $u_{n+1} = \sqrt{2.u_n + 3}$, la suite converge vers 3. mais pourquoi ?
Parce que c'est la seule valeur possible. Par passage à la limite et continuité, si la suite converge, c'est vers un point fixe ($u_{+1} = f(u_n)$ devient $\lambda = f(\lambda)$).

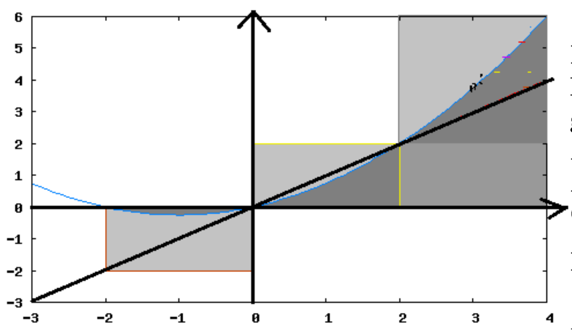
	$\left]-\infty,\ -\dfrac{3}{2}\right[$	$\left[-\dfrac{3}{2},\ 3\right[$	3	$]3,\ +\infty[$
existence	seul u_0 existe	$\forall n,\ u_n \in \left[-\dfrac{3}{2},\ 3\right[$	$\forall n,\ u_n = 3$	$\forall n,\ u_n \in]3,\ +\infty[$
monotonie		(u_n) croit	(u_n) constante	(u_n) décroit
convergence		(u_n) converge en croissant	$u_n \to 3$	(u_n) converge en décroissant
limite		$u_n \nearrow 3$	$un \to 3$	$u_n \searrow 3$

La dernière ligne nous dit que dans tous les cas, la suite converge vers 3, et de façon monotone.

Ici, on dit que tous les réels de $\left[-\dfrac{3}{2},\ +\infty\right[$ sont dans le bassin d'attraction de 3.
dans les exemples suivants, on va voir plusieurs bassins, avec plusieurs limites possibles.



Passons à $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{2.u_n + (u_n)^2}{4}}$ Pour cette application (trinôme), le plus important n'est pas son sens de variations, mais ses intersections avec la bissectrice et la position par rapport à celle ci.



Les points fixes sont 0 et 2.
Entre 0 et 2, on est sur un intervalle stable, et le graphe est sous la bissectrice.
Au delà de 2, on passe au dessus de la bissectrice.
Avant 0 on est au dessus de la bissectrice.
Comment je sais tout ça ?
Mais par l'étude de signe sur le trinôme $\dfrac{X^2 + 2.X}{4} - X$ égal à $\dfrac{X.(X-2)}{4}$.

u_0	$]-\infty, -2[$	-2	$]-2,\ 0[$	0	$]0,\ 2[$	2	$]2,\ +\infty[$
existence		$\forall n \geqslant 1,\ u_n = 0$	$\forall n,\ -2 < u_n < 0$		$\forall n,\ 0 < u_n < 2$		$\forall n,\ u_n > 2$
monotonie		stationnaire	croissante		décroit		(u_n) croit
convergence			converge	$\longrightarrow$	converge	$\longrightarrow$	(u_n) converge ou diverge
limite		$\longrightarrow 0$	$\nearrow 0$	0	$u_n \searrow 0$	2	$u_n \nearrow +\infty$
	(5)	(2)	(3)	(1)	(3')	(1)	(4)

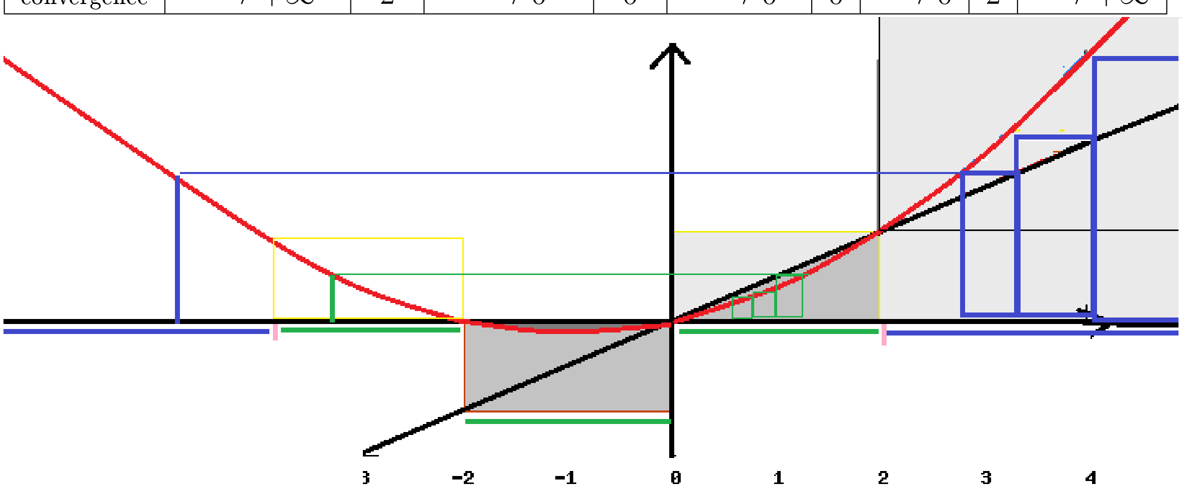
Expliquons les passages pas évidents.

(1)	la suite est constante, colonne facile à compléter
(2)	la suite devient constante à partir du rang 1
(3)	On montre comme dans l'exemple précédent que la suite est bornée, et monotone. Elle converge donc. Mais que vaut sa limite ? On sait que c'est un point fixe, et que c'est donc 0 ou 2. Et là, il faut faire un petit raisonnement bien propre. Pour (3) : la suite est à valeurs dans $]-2,\ 0[$ elle ne peut pas converger vers 2 ! Par élimination, elle converge vers 0. . . Pour (3') : La suite est à valeurs dans $]0,\ 2[$ pourquoi ne converge-t-elle pas vers 2 ? Parce qu'elle décroit, elle reste donc plus petite que u_0 lui même plus petit que 2. Par élimination, elle converge vers 0.
(4)	Trop de bêtises sur la convergence ici, dans bien des copies. Sur le schéma, il est évident que la suite diverge vers $+\infty$. Bon nombre d'élèves affirment alors : elle est croissante, non majorée, donc elle diverge vers $+\infty$. C'est une arnaque, car comment démontrer qu'elle n'est pas majorée ? Parfois par l'argument bidon : « parce qu'elle diverge vers $+\infty$ ». En fait, il faut encore bâtir un raisonnement par elimination. Comme elle crôit, elle n'a que deux possibilités : converger ou diverger vers $+\infty$(résultats du cours). Si elle converge, c'est vers 0 ou 2 qui sont hors de portée (elle reste plus grande que u_0). Elle ne peut donc pas converger. Par élimination, elle diverge vers $+\infty$.
(5)	L'intervalle $]-\infty,\ -2]$ n'est pas stable. Alors que faire ? Discuter en fonction de $u_1$qui va tomber dans un intervalle stable. On réutilise alors ce qu'on a fait avant.

u_0	$]-\infty,\ -4[$	-4	$]-4,\ -2[$	-2
$u_1 = f(u_0)$	$u_> > 2$	2	$u_1 \in]0,\ 2[$	0
	tend vers $+\infty$	stationnaire 2	$(u_n)_{n\geqslant 1}$ décroit vers 0	stationnaire 0

On résume les bassins d'attraction, si possible avec des couleurs sur un axe *(Bryan, c'est pour toi !)* :

u_0	$]-\infty,\ -4[$	-4	$]-4,\ -2[$	-2	$]-2,\ 0[$	0	$]0,\ 2[$	2	$]2,\ +\infty[$
convergence	$\longrightarrow +\infty$	2	$\longrightarrow 0$	0	$\longrightarrow 0$	0	$\longrightarrow 0$	2	$\longrightarrow +\infty$



On dira qu'il y a trois bassins :

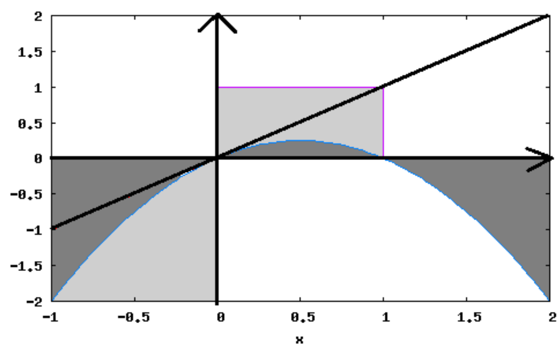
0 assez stable	$+\infty$ assez stable	2 très instable

En quoi 2 est il instable ? Si vous démarrez exactement avec la valeur 2, la suite converge vers 2.
Mais si vous démarrez avec un peu moins que 2, la suite dégringole vers 0
avec un peu plus que 2, la suite file vers $+\infty$
Il y a une forte sensibilité à la condition initiale. Si on était en salle 210, je poserais une craie sur le

sommet du crâne de Sucri. Si je la pose délicatement, elle reste au sommet. mais la moindre erreur, même d'un epsilon ridicule faut basculer d'un côté ou de l'autre.
En physique, vous avez ça, avec des équilibres stables ou instables ; des « puits de potentiel ».
Pensez à me demander de vous parler un jour de Lorenz et de son système dynamique.

Une erreur dans laquelle les élèves qui n'ont pas la vision d'une suite comme succession de termes risquent de tomber.
En -3 par exemple, le graphe est au dessus de la bissectrice, donc la suite est croissante.
Mais elle n'est croissante que le temps d'un terme... On a bien $u_1 = f(u_0) > u_0$.
Mais après, on tombe sur un intervalle où le graphe est sous la bissectrice, et la suite redescend....
[-3, 0.75, 0.5156..., 0.3242..., 0.1884..., 0.1030..., 0.0542..., 0.0278...,...]

Passons à $\boxed{u_{n+1} = u_n - (u_n)^2}$
Encore un trinôme du second degré ? Oui, parce que c'est facile à tracer. Mais attention, n'en prenez pas un au hasard comme je le fis une année, il y a de mauvaises surprises. Celui ci a été choisi par un professionnel.
La parabole est orientée vers le bas, et je ne cherche pas à connapitre ses racines, seuls ses points fixes sont utiles, pour découper en intervalle stables.



Et il n'y en a qu'un... Etrange.
.
L'intervalle $]-\infty,\ 0[$ est stable. En effet, si x est négatif, $f(x)$ l'est aussi.
L'intervalle $[0,\ a]$ est stable tant que a n'est pas trop grand et ne nous fait pas retomber au dessous de 0. En l'occurrence, on va prendre $[0,\ 1]$.
Et ensuite, $]1,\ +\infty[$ va nous renvoyer dans $\mathbb{R}^-$ que l'on contrôle.

u_0	$]-\infty,\ 0[$	0	$]0,\ 1[$	1	$]1,\ +\infty[$
stabilité	$\forall n,\ u_n < 0$		$\forall n,\ 0 < u_n < 1$	$\forall n > 0,\ u_n = 1$	$\forall n > 0,\ u_n < 0$
monotonie	la suite décroît		la suite décroît	constante	la suite décroit
convergence	converge ou diverge vers $-\infty$		décroissante minorée, converge	converge	
limite	diverge vers $-\infty$	0	0	0	$-\infty$

On note une fois encore que tout est dit dans un tableau. Oui, aux concours, si vous évitez les phrases et présentez de façon synthétique, vous y gagnez ! Rien ne sert d'étaler des formules partout. On est en maths !
Le contenu de la première colonne a fait l'objet d'une conclusion par élimination.
On note que l'on savait depuis le début que la suite allait toujours décroitre : $\forall n,\ u_{n+1} = u_n - (u_n)^2 \leqslant u_n$!
On constate aussi que 0 est un point fixe semi-stable.
En effet : Si vous commencez en 0, la suite reste sur 0.
Si vous commencez avec un peu plus que 0, elle revient vers 0.
Si vous commencez avec un peu moins que 0, elle file vers $-\infty$.
Ce phénomène est directement lié à la propriété $f'(0) = 1$.

Les domaines se découpent :

$]-\infty,\ 0[\cup]1,\ +\infty[$	$-\infty$
$[0,\ 1]$	0

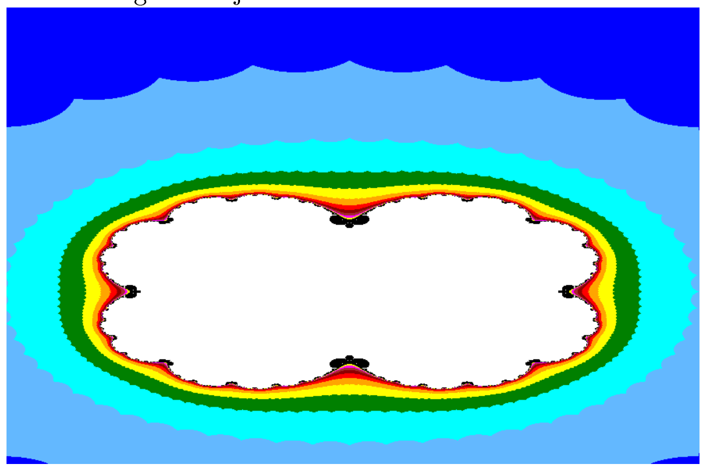
Mais j'ouvre la question : et sur $\mathbb{C}$?
Partez de i par exemple. Les termes successifs sont alors (faites le calcul) : $(i,\ 1+i,\ 1-i,\ 1+i,\ 1-i,\ 1+i\ldots)$.
vérifiez : $(1+i) - (1+i)^2 = 1-i$ et $(1-i) - (1-i)^2 = 1+i$. Voilà que la suite est périodique de

période 2.
Partez de $i/2$, elle va converger vers $0 + 0.i$ (je le présente ainsi, histoire de dire que c'est dans $\mathbb{C}$).
Je vous laisse faire des petits tests.
Je me souviens quand même d'un collègue qui, aux débuts de l'informatique, avait fait tourner un programme toute la nuit pour indiquer pixel par pixel sur un écran en fonction de la valeur initiale de $z_0 = a + i.b$ le comportement de la suite. Et les images sont jolies...

Sur ce schéma dans le plan complexe, la couleur correspond au comportement de la suit issue du point $z_0 = a + i.b$.

En couleur : la suite diverge vers l'infini en module, et la couleur indique « à quelle vitesse elle part vers l'infini ».

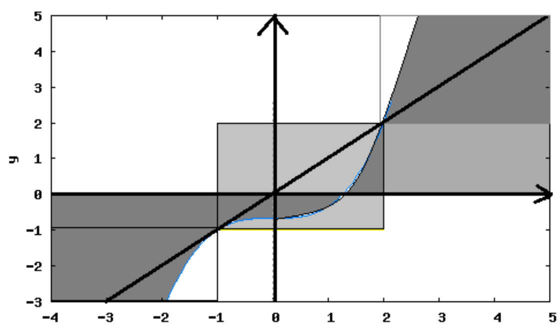
En blanc : la suite converge vers 0.
En noir : la suite reste bornée, mais ne converge pas.
A vous de retrouver le point d'affixe 0, celui d'affixe 1, celui d'affixe i.



On prend un autre polynôme bien choisi ? $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{(u_n)^3 - 2}{3}}$

Cette fois, je donne tout de suite les réponses.

Les intervalle stables sont assez clairs à voir, le découpage se fait par les deux points fixes (dont un qui est racine double) -1 et 2.



Complétez.

u_0	$]-\infty,\ -1[$	-1	$]-1,\ 2[$	2	$]2,\ +\infty[$
stabilité	$\forall n,\ u_n < -1$				
monotonie			décroissante		croissante
convergence					
limite	$-\infty$ par élimination	-1	-1 par élimination	2	$+\infty$ par élimination

On a trois bassins d'attraction :

$]2,\ +\infty[$	$+\infty$	
$\{2\}$	2	instable
$[-1,\ 2[$	-1	semi-stable
$]-\infty,\ -1[$	$-\infty$	

Ah, au fait, il faut que je définisse « bassin d'attarction ». le bassin d'attraction de λ est l'ensemble des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite converge vers λ.
On pourra parler si nécessaire de « bassin d'attraction de l'infini ».
Mais alors, tout réel de départ est dans un et un seul bassin d'attraction ? Pas forcément, il y a peut être des valeurs de u_0 pour lesquelles la suite ne converge pas, ni ne diverge vers un infini. Par exemple des valeurs de u_0 pour lesquelles elle reste bornée, mais périodique à partir d'un certain rang par exemple.

Vous avez vu que la monotonie de (u_n) n'est pas liée à la monotonie de f mais à sa position par rapport à la bissectrice sur des intervalles stables (argument simple : si vous avez $f(x) < x$ alors vous aurez $f(u_n) < u_n$).
Mais il y a quand même des résultats basés sur la monotonie de f.

Si f est croissante, alors la suite $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.

Juste monotone. Et le sens de variation de (u_n) dépend de u_0 et u_1.

Plus précisément :

f croissante	$u_0 < u_1$	alors (u_n) est croissante
	$u_0 > u_1$	alors (u_n) est décroissante

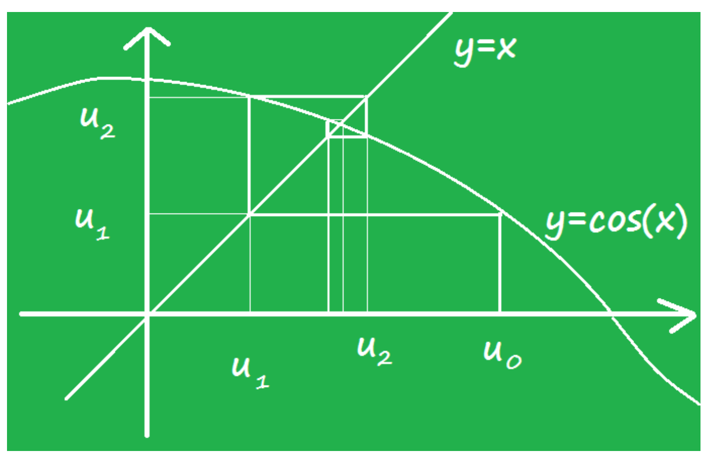
La démonstration ? Il n'y en a pas.
Non, je ne veux pas dire qu'on ne sait pas le démontrer. Juste que ce n'est même pas une démonstration. Une simple récurrence.

Et la case $\begin{array}{c}\boxed{u_0 < u_1}\\ \boxed{u_0 > u_1}\end{array}$ sert à initialiser.

Traitons le cas f croissante et $u_0 < u_1$. Alors pour tout n, $u_n < u_{n+1}$. La récurrence est initialisée.
Si l'on suppose ensuite, pour un n donné $u_n < u_{n+1}$ alors par croissance de f : $f(u_n) < f(u_{n+1})$ et donc $u_{n+1} < u_{n+2}$.
C'est tout.

Pour éviter de dire des bêtises : je vous rappelle que $x \longmapsto x - 1$ est croissante, mais que la suite $u_{n+1} = u_n - 1$ est décroissante.

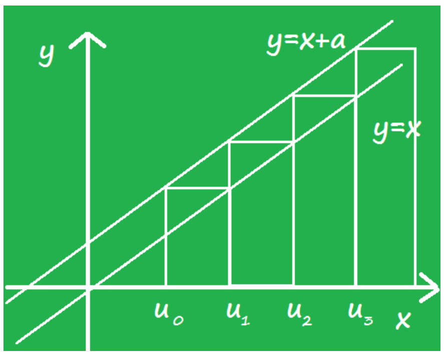
Et pour $\boxed{f \text{ décroissante}}$ A-t-on des résultats ?
On comprend que si on part de $u_0 < u_1$, on a en appliquant f : $u_1 > u_2$ puis $u_2 < u_3$. Le sens de variation change à chaque itération.
La suite u n'a aucune monotonie.
Mais on peut comprendre que (u_{2n}) sera monotone dans un sens (normal, on passe d'un terme au suivant par $f \circ f$ qui est croissante),
et $(u_{2.n+1})$ est monotone dans l'autre sens (même argument).



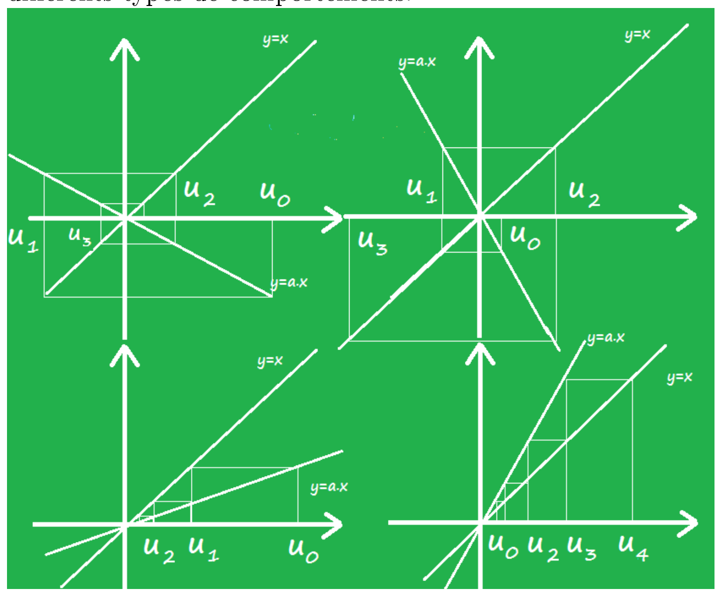
On se doute qu'alors, on aura des suites oscillantes.
C'est le schéma classique « en escargot », comme avec $u_{n+1} = \cos(u_n)$.
.
.
.
.
.

Et si de la même façon, on abordait graphiquement les suites arithmétiques et géométriques ?

Facile, pour la suite arithmétique, $f = x \longmapsto x + a$.
On un graphe parallèle à la première bissectrice.On va prendre a positif, le graphe est au dessus de la bissectrice, la suite est croissante.
Et comme il n'y a pas de point fixe, c'est vers l'infini qu'elle tend.



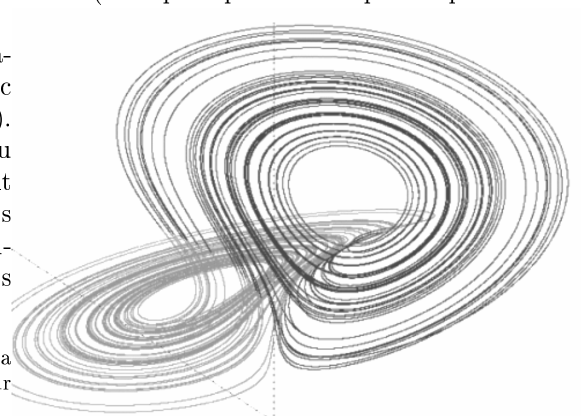
Pour la suite géométrique, suivant la valeur du rapport, on a différents types de comportements.



Un petit mot sur Edward Lorenz (1917-2008), et la sensibilité aux condition initiales. Cette histoire de point fixe « instable » (ou « répulsif », c'est pareil).
Il travaillait au M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology [4]). Il étudiait un système dynamique modélisant l'évolution locale du climat, avec juste trois variable, qu'on va appeler p_t,V_t et T_t même si ce n'est pas ça. Elles obéissaient à un système différentiel non linéaire qu'on ne peut pas résoudre à l'aide de fonctions classiques.
Il était donc amené à faire des résolutions approchées pas à pas, mais par une méthode quand même plus évoluée que ce que vous appelez « schéma d'Euler » (mais pourquoi schéma plutôt que méthode ?).

Comme on était en 1963, il disposait d'ordinateurs pour faire sa résolution approchée, avec $(P_{n+1},\ V_{n+1},\ T_{n+1}) = fonction\ de(p_n,\ V_n,\ T_n)$.
Mais les ordinateurs de l'époque (même ceux du M.I.T.) avaient des capacités de calcul largement inférieures à ce que vous pouvez imaginer [a]. Les calculs étaient donc longs, et s'étalaient sur plusieurs jours. Il reprenait le mardi matin avec les résultats sortis et imprimés le lundi soir.

a. l'ordinateur qui envoya la première mission sur la lune avaient des capacités inférieures au smartphone sur lequel vous lisez ce cours



Le texte de Wikipedia raconte très bien la suite :

4. la fierté que j'ai eue quand un jour, un ancien MPSI2 ayant intégré X ou ENS, je ne sais plus trop, m'a dit qu'il allait deux ans au M.I.T., comme chercheur invité, et un autre ayant fait SupAero, chargé de cours à à Columbia University

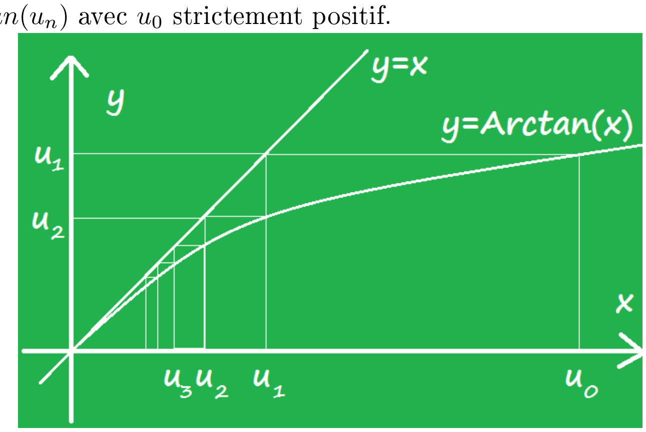
.

> *La rumeur veut que ce soit le café qui ait fait découvrir à Lorenz le phénomène de chaos. À cette époque, Lorenz passait de nombreuses heures à tenter de prédire le temps ; pour ce faire il utilisait un des premiers ordinateurs au monde, le Royal McBee LGP-300 (en). Or, sa méthode consistait à rentrer dans l'ordinateur un certain nombre de paramètres déterminés au millionième près (soit six chiffres après la virgule), de lancer la machine à l'aide d'algorithmes et de programmes de son cru, et d'interpréter les résultats (à savoir, une colonne de chiffres). Son protocole supposait de le faire deux fois pour chaque série de paramètres, dans un but de vérification. Cependant, on raconte qu'un jour, ayant une subite envie de café frais, Lorenz décida d'accélérer la deuxième manœuvre en ne rentrant ses paramètres cette fois-ci qu'avec une précision au millième (trois chiffres après la virgule). S'étant désaltéré, il retourna à son travail, s'attendant à obtenir une colonne de chiffres légèrement différente de la première obtenue avec les mêmes paramètres déterminés à un millionième près. Or, surprise, la deuxième colonne affiche des résultats largement différents de la première. Lorenz revérifie chaque colonne plusieurs fois, et retente l'expérience en rentrant les chiffres au dixième, au centième, au dix-millième près. À chaque fois, les résultats obtenus sont très éloignés de ceux obtenus au millionième.*
> *C'est ainsi que Lorenz découvrit le principe fondateur de la théorie du chaos, à savoir qu'* ***une infime variation de paramètre à un moment donné peut faire varier très différemment le résultat final****.*

Cet « attracteur étrange » de Lorenz peut faire l'objet d'un T.D. Python. Ou d'un « tableau vert » suivant mon humeur.

Il est temps maintenant de grandir et de passer à des choses niveau Sup et même en mordant sur la Spé. On va mélanger ces suites récurrentes et le théorème de Cesàro qui va nous servir à voir à quelle vitesse la suite converge.
On va faire simple avec la suite $u_{n+1} = Arctan(u_n)$ avec u_0 strictement positif.

u_0	$]0,\ +\infty[$
stabilité	$\forall n,\ 0 < u_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$
monotonie	le graphe est sous la bissectrice, la suite décroit
convergence	décroissante et minorée, elle converge
limite	ce ne peut être que vers 0, seule solution de l'équation $Arctan(x) = x$



Oui, je n'ai pas traité ici le fait qu'on a bien $Arctan(x) \leqslant x$ pour tout x positif, mais c'est une évidence.
Par exemple en écrivant $Arctan(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \int_0^x dt = x$.

Maintenant, on veut savoir à quelle vitesse elle converge vers 0. Comme du $\dfrac{1}{n}$, comme du $\dfrac{1}{n^2}$, comme du $\dfrac{1}{\ln(n)}$, comme du 2^{-n} ou autre chose encore.
A votre niveau, ne cherchez pas à comprendre d'où vont venir les idées pour construire la suite auxiliaire, contentez vous de suivre les étapes (en Spé étoile, on vous donnera la méthode générale, en Spé non étoilée, on vous fera refaire d'autres exercices du même type que celui ci).
On définit $d_n = \dfrac{1}{(u_{n+1})^2} - \dfrac{1}{(u_n)^2}$. Cette suite existe bien puisque tous les termes de la suite u sont strictement positifs.
Et elle converge... euh, on n'en sait rien, c'est une forme totalement indéterminée $+\infty - (+\infty)$ puisque $u_n$tend vers 0.

Mais regardez : $\dfrac{1}{(u_{n+1})^2}-\dfrac{1}{(u_n)^2}=\dfrac{1}{(Arctan(u_n))^2}-\dfrac{1}{(u_n)^2}=\dfrac{(u_n-Arctan(u_n)).(Arctan(u_n)+u_n)}{(u_n)^2.(Arctan(u_n))^2}$.
Qu'a-t-on gagné ? Rien me direz vous, puisque le numérateur continue à tendre vers 0 et le dénominateur aussi.
Mais si on regarde $\dfrac{(x-Arctan(x)).(x+Arctan(x))}{(x.Arctan(x))^2}$ quand x tend vers 0, on lui trouve une limite, égale à $\dfrac{2}{3}$.[5]

On a donc d_n qui converge vers $\dfrac{2}{3}$.
Par théorème de Cesàro, $\dfrac{d_0+d_1+\ldots+d_{n-1}}{n}$ converge vers $\dfrac{2}{3}$.
Par télescopage, $\dfrac{\dfrac{1}{(u_n)^2}-\dfrac{1}{(u_0)^2}}{n}$ tend vers $\dfrac{2}{3}$.
Mais comme déjà $\dfrac{1}{n.(u_0)^2}$ converge vers 0, on déduit que $\dfrac{1}{n.(u_n)^2}$ converge vers $\dfrac{2}{3}$.
On passe à la racine et à l'inverse : $\sqrt{n}.u_n$ converge vers $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.
Si vous préférez : $\dfrac{u_n}{\sqrt{\frac{3}{2.n}}}$ converge vers 1.

C'est la définition de $\boxed{u_n\sim\sqrt{\dfrac{3}{2.n}}}$

On sait donc maintenant que c'est à la vitesse de $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$,à facteur multiplicatif près que la suite u_n converge vers 0.
Il est « amusant » de voir que cette vitesse de convergence ne dépend pas de u_0.
Petite démonstration avec `Python` après avoir importé `math` :

niveau bêta gentillet :

```
a = float(input('Valeur de u0 : »))
L = [a]
for k in range(20) :
....a = atan(a)
....L.append(a)
print(L)
```

.

niveau I.P.T. :

```
def Suite(a, n) :
....L = [a]
....for k in range(n) :
........L.append(atan(L[-1])
....return(L)
```

et ensuite on tape ce qu'on veut avec des input et `print`, mais ce n'est plus de l'informatique, juste de la décoration.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$u_0=1$	1	0.785	0.665	0.587	0.531	0.488	0.454	0.426	0.402	0.383	0.365	0.350	0.337
$u_0=3$	3	1.249	0.896	0.730	0.631	0.563	0.513	0.474	0.442	0.416	0.395	0.376	0.360
$u_0=6$	6	1.406	0.952	0.761	0.651	0.577	0.523	0.482	0.449	0.422	0.399	0.380	0.363
$\sqrt{\dfrac{3}{2.n}}$	$\vert\vert$	1.225	0.866	0.707	0.612	0.548	0.500	0.463	0.433	0.408	0.387	0.369	0.354

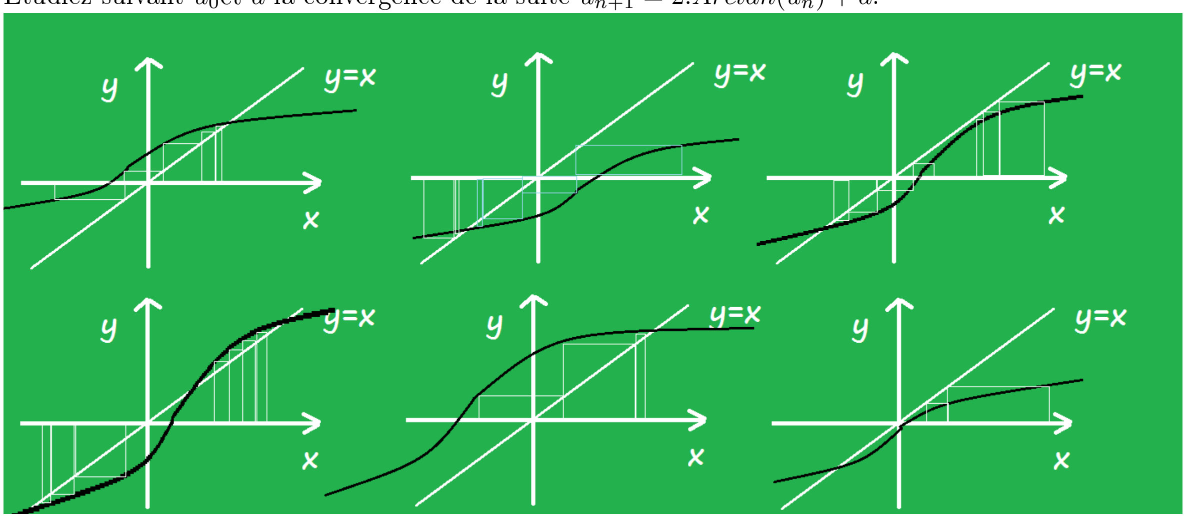
Ci dessus, trois exemples de la suite u_n) en fonction de u_0,et en dernière ligne, la suite à laquelle « elles finissent toutes par être équivalentes ».
Et c'est encore plus probant si vous prenez beaucoup de termes...

Et avant que C%ine[6] me signale qu'il reste une chose à prouver, j'y viens :

5. pardon ? ce n'est pas évident, c'est vrai, j'y viens plus loin ; alors que deux lignes au dessus, c'est simple...
6. la requète SQL `SELECT Prenom FROM MPSI2 WHERE Prenoms LIKE « C%ine »` va donner Caroline, Céline, Catherine

$\dfrac{(x - Arctan(x)).(x + Arctan(x))}{(x.Arctan(x))^2}$ converge vers $\dfrac{2}{3}$ quand x tend vers 0.
Ce n'est toujours pas évident en effet sous cette forme. Numérateur et dénominateur tendent vers 0, la forme est indéterminée (comme ma forme à moi quand je me regarde dans une glace, de profil).
Un équivalent pour commencer ? $Arctan(x) \sim_{x\to 0} x$. Il vient de $\dfrac{Arctan(x) - Arctan(0)}{x - 0}$ qui tend vers $Arctan'(0)$.
Et alors ? Dans $\dfrac{(x - Arctan(x)).(x + Arctan(x))}{(x.Arctan(x))^2}$, il y a $(x + Arctan(x))$ qui est équivalent à $2.x$. Et $(x.Arctan(x))^2$ est équivalent à x^4.
Bon, mais $x - Arctan(x)$ donne deux équivalents de même ordre. On ne peut pas soustraire, on ne sait pas ce qu'il reste.
Mais si on prenait un développement limité de l'arctangente en 0 : $Arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)_{x\to 0}$.
Il vient de $Arctan(x) = Arctan(0) + x.Arctan'(0) + \dfrac{x^2}{2}.Arctan"(0) + \dfrac{x^3}{6}.Arctan^{(3)}(0) + \dfrac{x^4}{6}.\displaystyle\int_0^1 (1-t)^3.Arctan^{(4)}(t.x).dt$.
On soustrait (pour les développements limités, on peut soustraire, puisque justement les termes indiqués contiennent les informations que ne donnait pas le seul équivalent) :
$x - Arctan(x) = \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)_{x\to 0} \sim_{x\to 0} \dfrac{x^3}{3}$.
On reporte : $\dfrac{(x - Arctan(x)).(x + Arctan(x))}{(x.Arctan(x))^2} \sim_{x\to 0} \dfrac{\frac{x^3}{3}.2.x}{(x.x)^2}$.
Une constante ! La fonction est équivalente à un réel non nul ! C'est qu'elle converge vers ce réel.

Et tant que j'y suis avec $u_{n+1} = Arctan(u_n)$, je reviens au niveau « sans Cesàro » :
Étudiez suivant u_0 et a la convergence de la suite $u_{n+1} = Arctan(u_n) + a$.
Étudiez suivant $u_0$et a la convergence de la suite $u_{n+1} = 2.Arctan(u_n) + a$.



Un classique de concours avec une suite complexe : $\boxed{z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}}$

Ici, on peut certes borner la suite : $|z_{n+1}| \leqslant \dfrac{|z_n + |z_n||}{2} \leqslant |z_n|$.
Mais ensuite, la notion de croissance n'a pas de sens, on est dans $\mathbb{C}$. Avec le caractère borné, on peut au mieux dire qu'il y a une sous-suite qui converge.

Mais attention, si $(u_{\varphi(n)})$ est une suite extraite de (u_n), elle n'est pas de la forme $u_{\varphi(n+1)} = F(u_{\varphi(n)})$, car pour passer de $\varphi(n)$ à $\varphi(n+1)$ il y a peut être un nombre fluctuant d'étapes à effectuer, donc il faut parfois utiliser f, parfois $f \circ f$, parfois $f \circ f \circ f$ et même bien plus.
Et déjà, rien que $(u_{2.n})$ vérifie $u_{2.(n+1)} = f(f(u_{2.n}))$.

Ici, comme le module intervient, on écrit la suite sous forme « module et argument » : $z_n = \rho_n.e^{i.\theta_n}$ en espérant que θ_n soit défini sans trop d'ambigüité.

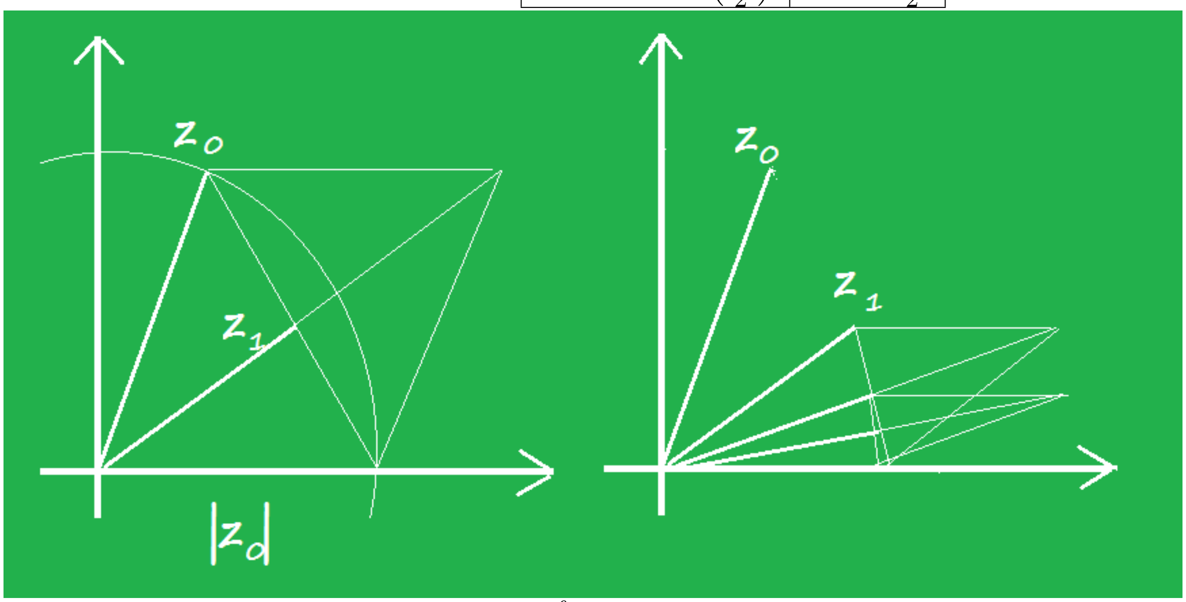
On détermine alors $z_{n+1} = \dfrac{\rho_n.e^{i.\theta_n} + \rho_n}{2} = \rho_n.\dfrac{1+e^{i.\theta_n}}{2}$.

Là, si je vous ai bien formé depuis le début de l'année, vous devez tilter : dans $\dfrac{1+e^{i.\theta}}{2}$ il y a de l'arc moitié. C'est géométrique.

Ou c'est aussi purement froid avec $\dfrac{1+e^{i.\theta}}{2} = e^{i.\theta/2}.\dfrac{e^{-i.\theta/2}+e^{i.\theta/2}}{2}$.

On a donc $z_{n+1} = \rho_n.\dfrac{1+e^{i.\theta_n}}{2} = \rho_n.\cos(\theta_n/2).e^{i.\theta_n/2}$.

On identifie alors le module et l'argument : $\boxed{\rho_{n+1} = \rho_n.\cos\left(\dfrac{\theta_n}{2}\right)}$ $\boxed{\theta_{n+1} = \dfrac{\theta_n}{2}}$



L'une des deux formules est un cadeau : $\theta_n = \dfrac{\theta_0}{2^n}$. On sait tout de suite que l'argument va converger vers 0.
Visuellement, on se rapproche de l'axe des abscisses.

Mais le module ? Par récurrence « évidente » : $\boxed{\rho_n = \rho_0.\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\dfrac{\theta_0}{4}\right)\ldots\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)}$

Mais seul l'élève naïf s'arrête ici. Ce produit de cosinus se simplifie.
A condition de l'avoir déjà croisé, ou d'avoir un peu d'initiative (ce qu'une collègue appelle « encore une astuce de matheux ») :

On multiplie par $\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right)$. A droite.

On utilise alors autant de fois qu'il faut la formule $\cos(\alpha).\sin(\alpha) = \dfrac{\sin(2.\alpha)}{2}$ ici sous la forme $\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right).\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^n}\right) = \dfrac{1}{2}.\sin\left(\dfrac{\theta_0}{2^{n-1}}\right)$.

Et elle télescope jusqu'à remonter au tout premier de la liste en $\cos\left(\dfrac{\theta_0}{2}\right)$.

Au final : $\rho_n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\cos\left(\frac{\theta_0}{2}\right).\cos\left(\frac{\theta_0}{4}\right)\ldots\cos\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right).\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right) = \rho_0.\frac{1}{2^n}.\sin(\theta)$ (il y a eu n produits télescopiques).

Alors on est heureux avec $\boxed{\rho_n = \frac{\rho_0.\sin(\theta_0)}{2^n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)}}$

Et on ne s'arrête pas là. On se demande si cette suite converge, et si oui, quelle est sa limite.

Réflexe idiot :
- je montre qu'elle est décroissante
- je la minore par 0
- j'en déduis qu'elle converge
- pour finir je calcule sa limite

Pourquoi idiot ? Parce que si je lui trouve une limite par un théorème adapté, j'en déduis qu'elle converge !

Et ici, le théorème c'est $\frac{\sin(x)}{x} \to_{x\to 0} 1$ ou encore $\sin(x) \sim_{x\to 0} x$.

On a donc $\rho_n = \frac{\rho_0.\sin(\theta_0)}{2^n.\sin\left(\frac{\theta_0}{2^n}\right)} \sim_{n\to+\infty} \frac{\rho_0.\sin(\theta_0)}{2^n.\frac{\theta_9}{2^n}} \sim_{n\to+\infty} \frac{\rho_0.\sin(\theta_0)}{\theta_0}$.

Étant équivalente à un réel, elle converge vers ce réel.

On a donc en recombinant les morceaux

$\theta_n \to 0$	$\rho_n \longrightarrow \frac{\rho_0.\sin(\theta_à)}{\theta_0}$	$z_n \longrightarrow \frac{\rho_0.\sin(\theta_0)}{\theta_0}$

Phrase classique avec les suites $u_n =$ *un truc qui depend de* n

La suite converge **car** elle a une limite

Phrase classique avec les suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Si la suite converge, c'est vers λ qui vérifie $f(\lambda) = \lambda$.

Que de mauvais réflexes avez vous souvent pris en Terminale, en faisant les choses dans le désordre :
- il ne faut pas parler de la limite avant d'en avoir prouvé l'existence !
- mais pour prouver l'existence de la limite, il suffit souvent de la calculer !

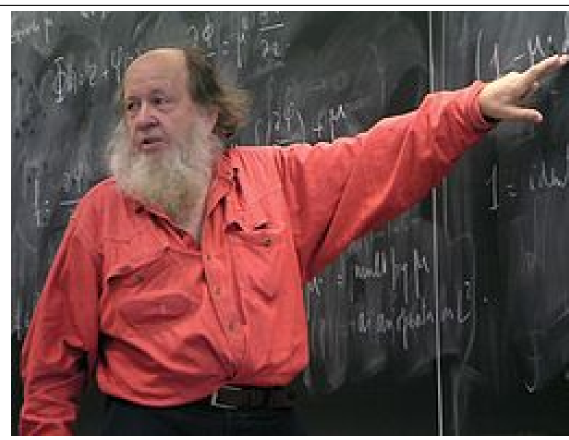
Je sais, certains vont dire que ça tourne en rond de manière vicieuse.

Sauf que pour montrer qu'une suite converge, on calcule u_n, avec des équivalents, des petits o, et à la fin, on met une flèche $\longrightarrow$ « tend vers », qui indique qu'il y a une limite.

Si en revanche vous écrivez dès le début $\lim_{n\to+\infty} u_{n=\ldots}$,c'est que vous savez que la limite existe.

Donc, pour les calculs de limite, vous ne commencez jamais votre ligne par $\lim u_n = \ldots$. C'est ça le plus mauvais réflexe de Terminale.

Veuillez commencer par $u_n = \ldots$ et terminer par $\longrightarrow_{n\to+\infty} \lambda$.



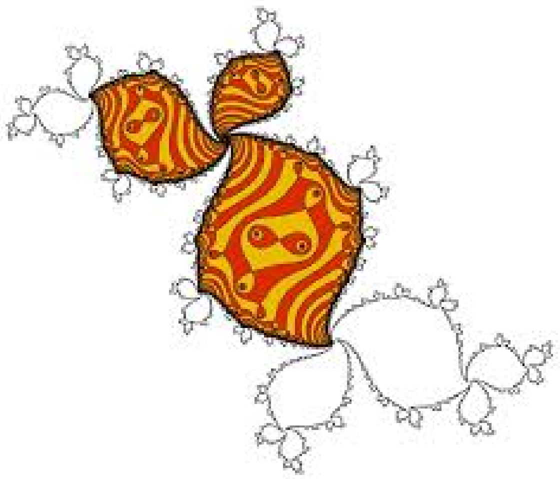
L'heure est venue pour moi maintenant de vous parler de Douady (Adrien, le père, il y a ensuite une épouse, deux fils, tous matheux et matheuses, et des lapins). Adrien Douady$^{1935-2006}$ était le mathématicien aux pieds nus (barbu hirsute, il n'aimait pas les contraintes et préférait se promener pieds nus ou dans de grosses bottes que de supporter des mocassins, et portait en toutes occasions sa chemise de bucheron en gros tissus). Dans sa maison à Arcueil, il faisait des mathématiques dans son jardin, perché dans un arbre, discutaillant avec ses voisins poètes et autres).

Ses cours (et ceux de sa femme) étaient un modèle de mathématiques vivantes, incarnées[7]. « Adrien Douady, il comprenait avec son corps » (J-C.Yoccoz)

On lui doit entre autre l'étude des ensembles de Gaston Julia, passés à la casserole sous forme de lapins

7. oui, j'avoue, un de mes grands maîtres...

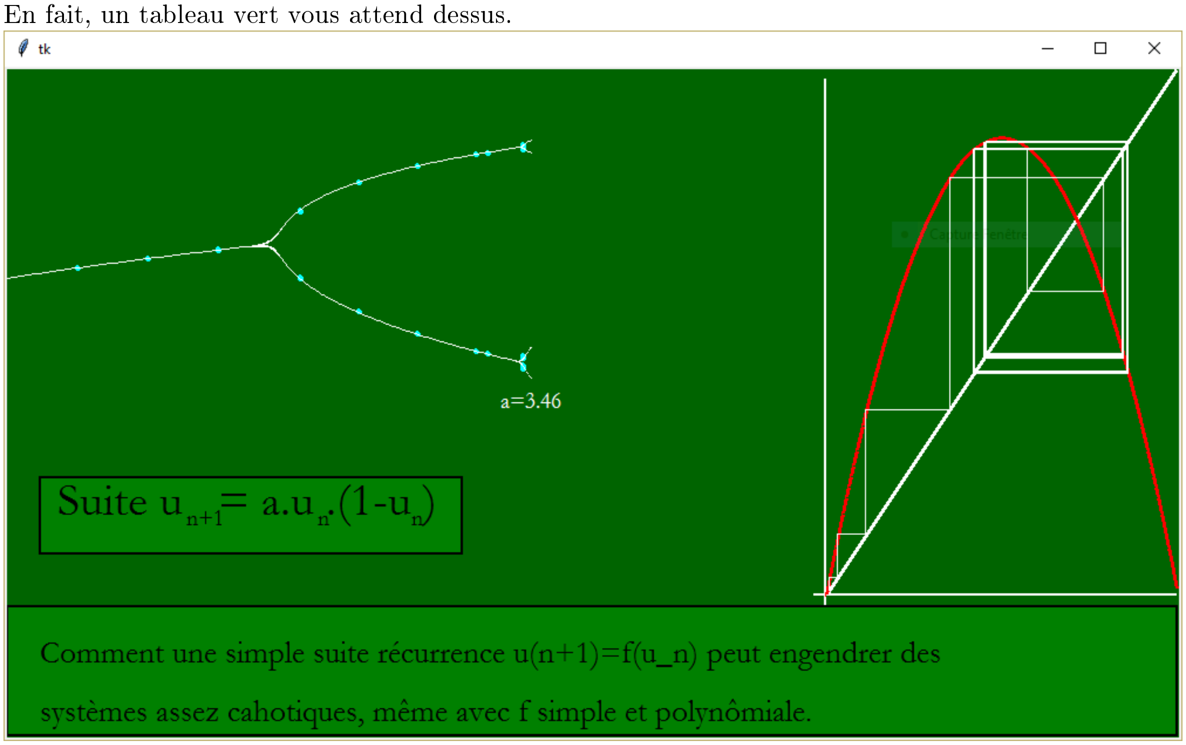
de Douady..
C'est en cela que sa place est justifiée ici dans ce cours.



Il s'agit d'étudier la convergence d'une suite complexe $z_{n+1} = (z_n)^2 + a$ en fonction de z_0 et de a.
Et là, rien n'est simple. Il y a des valeurs de z_0 pour lesquelles la suite converge. Des valeurs de z_0 pour lesquelles elle file à l'infini en module. Des valeurs de z_0 pour lesquelles elle est de période ". Des valeurs de z_0 pour lesquelles elle reste bornée. Et si on marque de diverses façons les valeurs de z_0 suivant leur comportement, on obtient la chose à droite.
On aboutit ensuite aux structures fractales, et à l'ensemble de Mandelbrot.
Et pour vous convaincre que Douady était un excellent pédagogue, je vous propose de voir une vidéo de 1996 (réalisation Adrien Douady, François Tisseyre), on ne fait qu'entendre sa voix, mais le plan complexe prend vie, avec de l'animation qui pour l'époque était un prodige.
Allez sur , vous comprendrez tout.
Et il y a aussi avec un rendu digne des meilleurs jeux vidéos le travail de Jos Leys.
Et les complexes en un quart d'heure, à montrer à tout élève de Terminale.

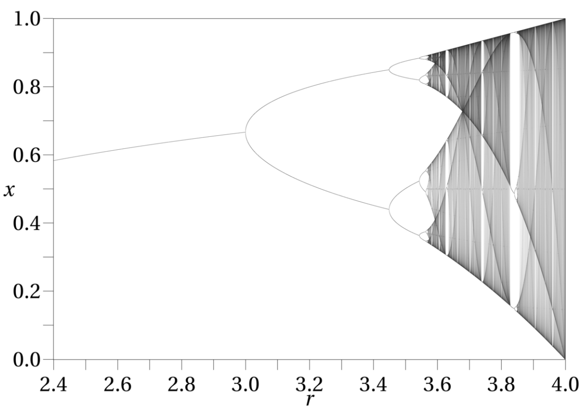
1996	La dynamique du lapin (Adrien Douady)	https ://www.youtube.com/watch ?v=JttLtBOGkdk
2013	L'ile des lapins de Douady (Jos Leish)	https ://www.youtube.com/watch ?v=_RRvnFDjDmE
2008	Dimensions : les complexes (Jos Leish, Etienne Ghys) http ://www.dimensions-math.org/Dim_fr.htm	https ://www.youtube.com/watch ?v=S7aXHqk7sbk https ://www.youtube.com/watch ?v=XzT5XSgkLvk

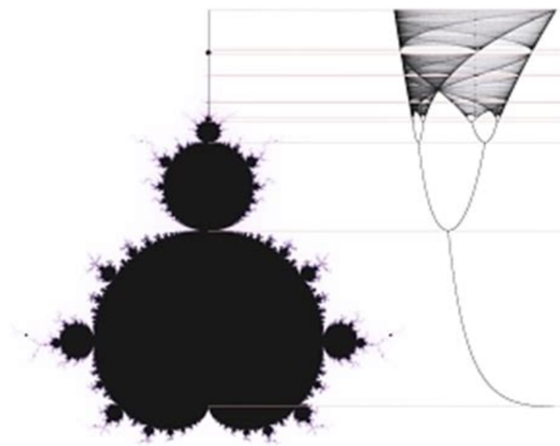
Une prochaine fois, je vous parlerai de François Verhulst. Toujours sur les suites $u_{n+1} = (u_n)^2 + a$.
En fait, un tableau vert vous attend dessus.



Et une vidéo recommandée par Emile : https ://youtu.be/ovJcsL7vyrk

Et si le chaos est pour vous la plus haute expression de l'ordre
`https ://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~perrin/Conferences/logistiqueDP.pdf`
une soixantaine de pages (les trente premières pour tout le monde), de l'excellent pédagogue Daniel Perrin (formateur E.N.S.) sur la suite de Pierre François Verhulst, allant jusqu'au théorème de Sarkovsky (là, c'est pour les matheux , Mathieu, Max, Maïna, Mantin, Martin, Marel, Mavid, Maourad, Maroline et quelques autres, vous pouvez vous régaler, et ça donne un sujet d'ADS de Polytechnique ensuite).





Il existe des exercices plus compliqués,
- où un terme dépend des deux précédents : $u_{n+1} = f(u_n,\ u_{n-1})$
- deux suites sont entrecroisées $a_{n+1} = f(a_n,\ b_n)$ et $b_{n+1} = \varphi(a_n,\ b_n)$
- un terme dépend du précédent et de n : $u_n = \varphi(n,\ u_n)$

Il n'y a pas alors de méthode universelle. Ce sont souvent des sujets d'oraux de concours où l'examinateur vous donnera des idées.
Un exemple, issu de l'oral de Polytechnique[8]

(a_n) est une suite réelle à valeurs dans $[0,\ 1]$, et (u_n) est définie par u_0 donné et pur tout n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{1 + a_n + u_n}$.
Montrez que (u_n) converge si et seulement si (a_n) converge.

Quelles peuvent être vos réactions face à un tel exercice ?

• Déjà, vous vérifiez que u_n **existe bien pour tout** n (récurrence).

• Vous montrez ensuite que (et en fait dans la même récurrence) que (u_n) **est positive** (c'est là que c'est la même récurrence qu'au dessus), et majorée (par 1, c'est assez évident, non ?).

• Vous traitez pour voir **le cas où** (a_n) **est en fait constante égale à** α (c'est bien un cas de convergence[9]).

8. tiens, le dernier oral à encore exister cette année !
9. certes un cas particulier, mais il va nous aider pour la suite, et cette prise d'initiative pour simplifie le problème est jugée favorablement aux concours

En effet : $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+\alpha+u_n}$ est une suite récurrente homographique classique.

L'homographie $t \longmapsto \dfrac{1}{1+a+t}$ a deux points fixes solutions de $X^2+(1+\alpha).X-1=0$. Un point fixe positif β (attractif) qui va nous intéresser et un point fixe négatif qu'on va laisser de côté.

On a alors $u_{n+1}-\beta = \dfrac{1}{1+\alpha+u_n} - \dfrac{1}{1+\alpha+\beta}$ car β est point fixe.

$u_{n+1}-\beta = \dfrac{\beta-u_n}{(1+\alpha+\beta).(1+\alpha+u_n)}$ par simple calcul

$|u_{n+1}-\beta| \leqslant \dfrac{|\beta-u_n|}{(1+\alpha)^2}$ par inégalité triangulaire et majoration

$|u_n-\beta| \leqslant \dfrac{|\beta-u_0|}{(1+\alpha)^{2.n}}$ par récurrence rapide sur n

$u_n-\beta \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ par encadrement

$u_n-\beta \longrightarrow_{n\to+\infty} 0$ par définition

Faites moi déjà un raisonnement comme ça, bien argumenté, vous méritez votre passage en Spé.

• Vous traitez aussi un sens de l'implication (en montrant que vous avez bien vu qu'il y a une équivalence, vous montrez que vous êtes quelqu'un d'organisé, vous marquez des points).

$\boxed{\Rightarrow}$ Si (u_n) converge, alors (a_n) converge.

Il suffit d'extraire a_n de la formule $a_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - 1 - u_n$.

Si (u_n) converge vers λ alors (a_n) converge vers $\dfrac{1}{\lambda} - 1 - \lambda$.

Normalement, une chose doit vous chiffonner dans ce qui vient d'être fait.

Certes, vous avez bien compris au fil de mes admonstations : on ne peut pas dire « on passe à la limite dans $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n+u_n}$ et on trouve que $a_n$tend vers... ». En effet, on ne passe pas à la limite puisque on ne sait pas que (a_n) en a une. En revanche, en faisant passer du côté droit tout ce dont la convergence est dans l'hypothèse, il vous reste alors du côté gauche quelquechose qui converge à son tour.

Mais si (u_n) converge vers 0, alors la phrase « (a_n) converge vers $\dfrac{1}{\lambda} - 1 - \lambda$. » n'a pas de sens.

Mais il y a une hypothèse qui doit nous sernir : (a_n) est à valeurs dans $[0,\ 1]$. On a donc pour tout n $\dfrac{1}{3} \leqslant u_n \leqslant 1$ (puisque $u_n = \dfrac{1}{a_n+u_n+1}$ avec $u_n < 1$, $a_n \leqslant 1$) et (u_n) ne peut pas converger vers 0.

• Il reste l'autre sens ? Ah oui, lequel ? **Si (a_n) converge vers α alors (u_n) converge.** Une fois encore, savoir ce que l'on veut montrer, c'est mieux que de se lancer dans des calculs sans savoir où on va arriver.[10]

Déjà, indiquez par condition nécessaire vers quoi (u_n) doit alors converger : le point fixe de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+\alpha}$.

Et là, le correcteur vous dit *« reprenez l'idée de votre preuve « quand la suite est constante » et appliquez la « à ε près » ».*

Aux oraux de concours, sauf exception mentionnée dans les forums, un examinateur ne reste pas immobile à vous acouter sans interagir, intervenir.

L'oral de concours n'est pas une colle où vous devez apprendre des choses, mais c'est quand même un lieu d'échange àoù l'examinateur veut évaluer votre niveau, quitte à vous donner des coups de pouce.

L'examinateur doit évaluer votre capacité à faire des maths, mais aussi à cmmuniquer, à faire comprendre votre démarche.

10. J'ai quand même le souvenir d'une amie qui m'avait indiqué sa façon à elle de traiter les problèmes de physique niveau Terminale :
« mâme sans comprendr, tu écris tout ce que tu peux écrire à partir des données et des théorèmes du cours, tu fais tous les calculs que tu peux avec ça, et tu finis par arriver à la réponse ».
C'est pour ça que ni elle ni moi n'aimions les exercices de physique
C'est pour ça que certains aiment les exercices de physique

On note donc à nouveau α la limite de (a_n) et β le point fixe positif de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x+\alpha}$.

On considère la suite « cas constant » : $b_{n+1} = \dfrac{1}{1+\alpha+b_n}$,celle qui vérifie $|b_{n+1}-\beta| \leqslant \dfrac{|\beta - b_n|}{(1+\alpha)^2}$ comme vu plus haut.

Il ne reste qu'à montrer que $u_n - b_n$ tend vers 0 pour conclure que par addition (u_n) tend vers $\beta + 0$.

On tente une majoration « géométrique » :

$u_{n+1} - b_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n+u_n} - \dfrac{1}{1+\alpha+b_n} = \dfrac{(\alpha - a_n)+(b_n-u_n)}{(1+a_n+u_n).(1+b_n+\alpha)} \leqslant \dfrac{(\alpha-a_n)+(b_n-u_n)}{(1+\alpha)}$.

En notant (ε_n) la suite (u_n-b_n), on a obtenu $|\varepsilon_{n+1}| \leqslant \dfrac{|\varepsilon_n|+|a_n-\alpha|}{1+\alpha}$.

On met en boucle : $|\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{|\varepsilon_0|}{(1+\alpha)^n} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{|a_n-\alpha|}{(1+\alpha)^{n-k}}$.

Il reste alors à appliquer un théorème de type Cesàro sur $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{|a_n-\alpha|}{(1+\alpha)^{n-k}}$ pour le faire converger vers 0.

La suite (ε_n) converge vers 0, la suite (b_n) converge : la suite (u_n) converge.

Oui, le final est encore long. C'est un oral de Polytechnique n'utilisant que des résultats niveau Sup, mais un cerveau niveau Spé.

Que retenir de cet exercice ? Que d'avoir abordé pour commencer le cas simple « (a_n) est constante » débrouille quand même bien le terrain et donne des idées pour la suite. Est-ce un conseil pour les concours ou un conseil pour le métier d'ingénieur ?

Mais aussi qu'un oral de Polytechnique, c'est quand même costaud !

Bon, on va maintenant passer au calcul différentiel. C'est à dire à la dérivation des fonctions réelles de variable réelle.

Dérivées successives, formule de Taylor. Théorème de Rolle et théorème des accroissements finis. Et enfin, on va prouver $f' = 0 \Rightarrow f$ *constante* et $f' \geqslant 0 \Rightarrow f$ *croissante*.

Et si vous êtes persuadé que vous avez prouvé f' positive implique f croissante », je vous rappelle que c'est juste la réciproque que vous savez prouver à ce stade.

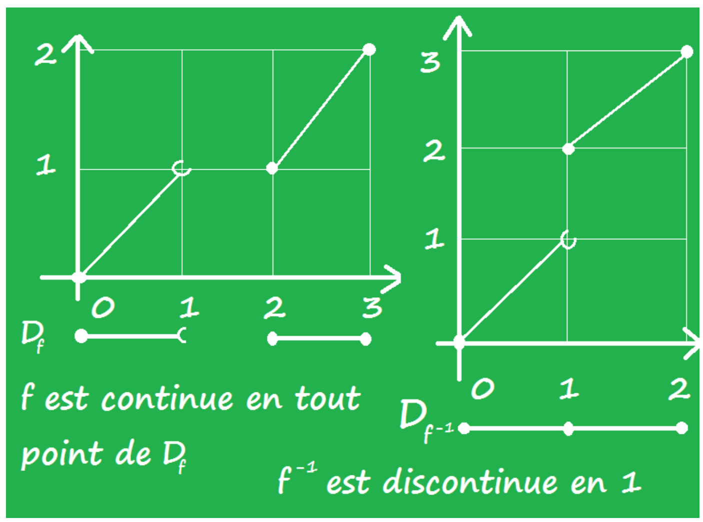
III°) Calcul différentiel.

et même si finalement je vous ai promis de la dérivation, on va refaire un point sur la continuité des applications de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}$.

1°) Continuité.

continuité en a	continuité sur un intervalle	continuité uniforme sur un intervalle
à droite à gauche	à droite à gauche	.
écrire la quantification	=continue en tout point	quantification à connaître
stabilités par addition,multiplication, composition	stabilités par addition,multiplication, composition	stabilités mais attention à la multiplication
continue en a implique bornée sur un voisinage de a	continue sur un segment implique bornée	uniformément continue implique encadrée par des fonctions affines
	continue sur un segment implique uniformément continue	lipschitzienne implique uniformément continue
	continue et injective sur un intervalle implique monotonie	

Attention, on rappelle qu'une application peut n'être continue qu'en quelques points, et discontinue ailleurs.
De même il existe des applications uniformément continues non lipschitziennes.



Il nous manque quoi ?
Il nous manque quoi ? On a des stabilités pour la continuité :
addition,
multiplication,
composition.
Mais la réciproque ? Serait il possible que la réciproque d'une application continue ne le soit pas ?
Réponse :
oui si on travaille sur un intervalle.
. non sinon.

Passons quand même au résultat favorable, celui qui va nous donner la continuité des applications réciproques classiques.Il va avoir besoin de quelques mots clefs : continuité, croissance stricte et intervalle.
Dans le dessin au dessus, il manque le mot clef intervalle...

Proposition :

Si f est strictement croissante de $[a, b]$ et continue, alors elle est bijective de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$ et son application réciproque f^{-1} est aussi strictement croissante et injective, et continue.

De même, si f est strictement décroissante et continue sur un intervalle, alors f^{-1} est aussi continue.
On généralise aussi aux applications de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, strictement monotones et continues.
On rappelle qu'un théorème du cours dit que pour f continue et injective sur I (intervalle), elle est strictement monotone. Mais il est si peu couteux de prendre la monotonie dans les hypothèses.
La seule hypothèse est strictement croissante et continue.
Les choses faciles à établir :
$\bullet_1$ l'ensemble image est inclus dans $[f(a), f(b)]$: par stricte croissance, on ne peut pas atteindre de valeurs plus grandes que $f(b)$ et plus petites que $f(a)$.

●2 l'ensemble image est exactement égal à $[f(a),\ f(b)]$: par théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois sur $[a,\ b]$

●3 f est donc bijective de $[a,\ b]$ sur $[f(a),\ f(b)]$: on vient de montrer la surjectivité, et l'injectivité est donnée par croissance stricte

●4 f^{-1} existe donc de $[f(a),\ f(b)]$ sur $[a,\ b]$

●5 f^{-1} est strictement croissante de $[f(a),\ f(b)]$ dans $[a,\ b]$:

on prend y et y' dans $[f(a),\ f(b]$ avec $y < y'$
on montre alors $f^{-1}(y) < f^{-1}(x')$ (dans $[a,\ b]$)
par l'absurde : si on avait $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$,
alors par croissance de $f$on aurait
$f(f^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y'))$ et donc $y \geqslant y'$.
Ce résultat n'utilise pas encore la continuité.

.

●6 f^{-1} est continue de $[f(a),\ f(b)]$ dans $[a,\ b]$

.

on montre la continuité à gauche et à droite en tout point y_0 de $[f(a),\ f(b)]$ en revenant aux ε :
et surtout en écrivant les $|x-\alpha| \leqslant \eta$ plutôt sous la forme $\alpha - \mu \leqslant x \leqslant \alpha + \mu$
$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \gamma_\varepsilon > 0,\ \exists \delta_\varepsilon > 0,\ \forall y,\ \Big((y_0 - \gamma_\varepsilon \leqslant y \leqslant y_0 + \delta_\varepsilon) \Rightarrow (f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) + \varepsilon)\Big)$
Par croissance de f et de f^{-1}, on peut même raisonner par équivalences :
$\Big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) + \varepsilon\Big) \Leftrightarrow \Big(f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big) \leqslant y \leqslant f\Big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\Big)$
On va donc poser $y_0 - \gamma_\varepsilon = f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big)$ et $y_0 + \delta_\varepsilon = f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big)$
c'est à dire $\boxed{\gamma_\varepsilon = y_0 - f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big)}$ et $\boxed{\delta_\varepsilon = f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big) - y_0}$
J'avoue ne pas les retenir par cœur, mais juste les reconstruire à chaque fois qu'on me le demande.
On en vérifie une : $y \leqslant y_0 + \delta_\varepsilon \Leftrightarrow y \leqslant y_0 + f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big) - y_0$
$y \leqslant y_0 + \delta_\varepsilon \Leftrightarrow y \leqslant f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big)$ par calcul
$y \leqslant y_0 + \delta_\varepsilon \Leftrightarrow f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}\Big(f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big)\Big)$ par croissance de f^{-1}
$y \leqslant y_0 + \delta_\varepsilon \Leftrightarrow f^{-1}(y) \leqslant f^{-1}(y_0) + \varepsilon$ par simplification
Et on fait de même de l'autre côté.

C'est ce passage qui démontre la continuité de f^{-1} et il semble ne pas utiliser la continuité de f. C'est amusant. Je vous autorise à faire un dessin pour déterminer les deux nombres $\gamma_\varepsilon$et δ_ε. mais en fait, cette preuve est assez « creuse ».

En Terminale, on parle parfois de théorème de la bijection pour le résultat ci-dessus, s'arrêtant avant le dernier encadré :

Si f est continue strictement croissante de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors
f est bijective de $[a,\ b]$ dans $[f(a),\ f(b]$
- injectivité par croissance stricte
- surjectivité par continuité (T.V.I.)

.
.

La version ici est plus forte et s'appelle théorème de l'homéomorphisme.

.

si f est continue strictement croissante de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors
f est bijective et continue de $[a,\ b]$ dans $[f(a),\ f(b]$
- injectivité par croissance stricte
- surjectivité par continuité (T.V.I.)
- continuité par ce qu'on a fait ci-dessus

Il existe aussi deux preuves par la topologie (ouverts, fermés). Je les mettrai peut être en TD.

Pour l'une d'elle, un exercice classique : f est continue si et seulement si son graphe $\{(x, f(x)) \mid x \in [a,\ b]\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Ah tiens, une question : : dans l'encadré pour la continuité, il manque une chose. Saurez vous trouver laquelle ?
Une sucette à qui trouve (mais à manger avec masque FFP2).

Sinon, je viens d'utiliser un mot nouveau (enfin, pas tant que ça, vu que depuis le début de l'année, je parle du théorème de homéomorphisme, justement) : homéomorphisme.
C'est quoi : un homéomorphisme entre A et B est une application bijective, continue, dont la réciproque est aussi continue.
Il faudra évidemment préciser les domaines, parce que sinon, que signifie « bijective » ?

Petit point : le mot morphisme revient souvent en mathématiques, dans plusieurs contextes, il faut faire le point.
C'est juste la racine grecque pour dire qu'on retrouve la même forme, la même structure à chaque bout de la flèche.
Du côté algèbre, c'est pour dire « transparent pour les lois », ou la phrase classique « l'image de la ... est la ... des images ».

Algèbre générale	
morphisme de groupes . on dit aussi « homomorphisme » pour insister sur « même forme ».	application de $(A, *)$ dans $(B, \star)$ vérifiant $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ f(a * \alpha) = f(a) \star f(\alpha)$ L'application est « transparente pour les lois ». Exemple : expde $(\mathbb{R}, +)$ dans $[\mathbb{R}^{+*}, \times)$. Signature de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1,\ 1\}, \times)$
morphisme d'anneaux	application de $(A, +, *)$ dans $(B, +, \star)$ vérifiant $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ f(a+\alpha) = f(a)+f(\alpha)$ $\forall (a, \alpha) \in A^2,\ f(a*\alpha) = f(a)\star f(\alpha)$ Exemple : $z \longmapsto \overline{z}$ de $(\mathbb{C}, +, .)$ dans lui même. la transposition de $(M_n(\mathbb{R}), +, .)$ dans lui même
morphisme bijectif	morphisme bijectif
Algèbre linéaire	
morphisme d'espaces vectoriels on dit aussi applications linéaires	application de $(E, +, .)$ dans $(F, +, .)$ vérifiant $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in A^2,\ f(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{u})+ f(\overrightarrow{v})$ $\forall \overrightarrow{u} \in A,\ \forall \alpha \in \mathbb{K},\ f(\alpha.\overrightarrow{u}) = \alpha.f(\overrightarrow{u})$ L'image d'une combinaison linéaire est combinaison linéaire des images.
endomorphisme	morphisme d'un espace dans lui même
isomorphisme	morphisme bijectif
automorphisme	morphisme bijectif d'un espace dans lui même (endo+auto=iso)
Analyse	
homéomorphisme	application continue bijective dont la réciproque est aussi continue bijective On dit aussi bi-continue, et c'est ma foi très clair.
difféomorphisme	application dérivable bijective dont la réciproque est aussi dérivable bijective (la dérivée n'a aucune raison d'être bijective)
C^k-difféomorphisme	application k fois dérivable avec toutes ses dérivées continues bijective dont la réciproque est aussi k fois dérivable avec des dérivées continues

On notera qu'il y a une lettre de différence entre (homo)-morphisme et homéomorphisme, mais une grande différence entre les deux. L'un regarde des lois, l'autre regarde des formes.

A quoi vont nous servir les homéomorphismes et leur théorème ?
• A enfin prouver que Arcsin, Arccos et Arctan sont continues elles aussi.

En même temps, on s'en doutait, puisqu'on traçait le graphe du sinus sans lever le crayon, il en est de même du graphe de l'Arcsinus.

.
• A dire que face à une équation $f(x) = a$ d'inconnue x et de paramètre a, dont la solution est obtenue par un tableau de variations, la solution x_a dépend continument de a.

C'est quand même agréable en physique ou S.I.I. de savoir que des petites variations de la sortie ne viennent pas d'un saut brutal à l'entrée.

.
•A pouvoir travailler sur des applications qu'on ne sait pas expliciter vraiment.

On sait que $x \longmapsto \int_0^x e^{-t^2}.dt$ est utile en statistiques, strictement croissante, non explicitables, mais on peut au moins nommer sa réciproque et travailler dessus.

.
• A faire des exercices de maths trop « cools »..

f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue si et seulement $x \longmapsto (f(x))^3 + 2.f(x)$ est continue..
Vous voyez comment le traiter ?

.

Ah, oui, j'y revient maintenant : Qu'est ce qui manquait dans l'encadré $\bullet_6$? La question posée plus haut pour une Chuppa-Chups.
Quel était le détail qui manquait encore dans la preuve de la continuité à droite et à gauche de f^{-1} par les ε ?
On a posé $\gamma_\varepsilon = y_0 - f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big)$ et $\delta_\varepsilon = f\big(f^{-1}(y_0) + \varepsilon\big) - y_0$.
Il manque une chose : ces deux nombres existent ils ?
ces deux nombres sont ils strictement positifs ?
Pour l'existence, ça va f et f^{-1} sont définies, et hormis en a où on ne regarde que la continuité à gauche et en b où on ne regarde que la continuité à droite, tout va bien.
Mais ensuite ? On insiste depuis le début de l'année : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{\varepsilon>0},\ \forall x,\ |x-a| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leqslant \varepsilon$.

Imaginons que η soit nul,	$(\lvert x-a\rvert \leqslant 0) \Rightarrow (x = a) \Rightarrow \lvert f(x) - f(a)\rvert \leqslant \varepsilon$.
ce serait de la triche :	Vous n'aviez jamais pensé à cette possibilité de tricher ?
.	Pire encore $(\lvert x-a\rvert \leqslant -1) \Rightarrow$ (*everything you want* !)

Alors, ici, $\gamma_\varepsilon = y_0 - f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big)$ est non nul ? positif ?
On a vu que f et f^{-1} étaient strictement croissantes (hypothèse et point 5). On a donc $f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y_0))$ et donc $f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big) < f(f^{-1}(y_0)) = y_0$ puis $y_0 - f\big(f^{-1}(y_0) - \varepsilon\big) > 0$.
C'est gagné. Je garde ma sucette Pierrot Gourmand !

J'en reviens maintenant à mon exercice
$\boxed{f \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \text{ est continue si et seulement } x \longmapsto (f(x))^3 + 2.f(x) \text{ est continue.}}$
Un sens est évident : si f est continue, alors f^3 l'est aussi, et la somme finale l'est.
Mais l'autre sens ? Comment remonter ? En écrivant des ε partout ?
Non, c'est en fait classique, et tout bête une fois qu'on a l'idée.
On nomme les choses. On définit $\varphi = t \longmapsto t^3 + 2.t$.
C'est une application continue, strictement croissante (dérivez la pour voir). Elle réalise donc un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle image qui est $\mathbb{R}$ aussi. On note φ^{-1} sa réciproque.
L'exercice devient f est continue si et seulement si $\varphi \circ f$ est continue.
Dans un sens, on a composé par φ, continue, c'est tout.
et pour l'autre donc ? On compose par φ^{-1} dont on vient de dire qu'elle était continue aussi.
Limpide,direct, zéro calcul. Encore une fois.

Un peu de stabilité dans ce monde de brutes :

	Faux	Vrai	Ne se prononce pas
la composée de deux homéomorphismes est un homéomorphisme			
la réciproque d'un homéomorphisme est un homéomorphisme			
la somme de deux homéomorphismes est un homéomorphisme			
le produit de deux homéomorphisme est un homéomorpisme			
la dérivée d'un homéomorphisme est un homéomorphisme			

je dirai qu'aucune de ces questions n'est bien posée, car on ne dit pas de quoi dans quoi.
Ensuite, une fois réglé ce problème, il y a deux vrais. Et trois faux, avec des contre-exemples comme Id et $-Id$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Un exercice idiot pour continuer, sur lequel certains vont se prendre la tête parce que « homéomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, ce n'est pas évident.
deux ensembles A et B sont dits homéomorphes si il existe un homéomorphisme de A sur B.

Je vous laisse prouver	Réflexive	.
	Symétrique	
	Transitive	

Ensuite : • montrez que tout intervalle $]a,\ b[$ est homéomorphe à $]0,\ 1[$
• montrez que tous les intervalles ouverts bornés sont homéomorphes entre eux
• montrez que tout intervalle $[a,\ b]$ est homéomorphe à $[0,\ 1]$
• montrez que $]0,\ 1[$ est homéomorphe à $]0,\ +\infty[$, à $\mathbb{R}$
• montrez que $]0,\ 1[$ n'est pas homéomorphe pas à $[0,\ 1]$ (enlevez l'image réciproque de 1, que se asse-il ?)
• montrez que $\mathbb{Q}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
• $\mathbb{Z}$est il homéomorphe à $\mathbb{Q}$?

Et enfin, des questions plus complexes car dans le plan (complexe) et l'espace :
montrez qu'un carré est homéomorphe à un autre carré par une $z \longmapsto a.z+b$ avec a et b bien choisis
Sucri est il homéomorphe à la boite qui le contenait ?
un cercle est il homéomorphe à un disque (là encore, enlevez un point de l'un et son image sur l'autre, ce qu'il reste doit être encore « homéomorphe ») ?
des chiffres et des lettres : regroupez ces symboles (vu comme des ensembles du plan) en mettant ensemble ceux qui sont homéomorphes entre eux (bref, faites des classes d'équivalence) :

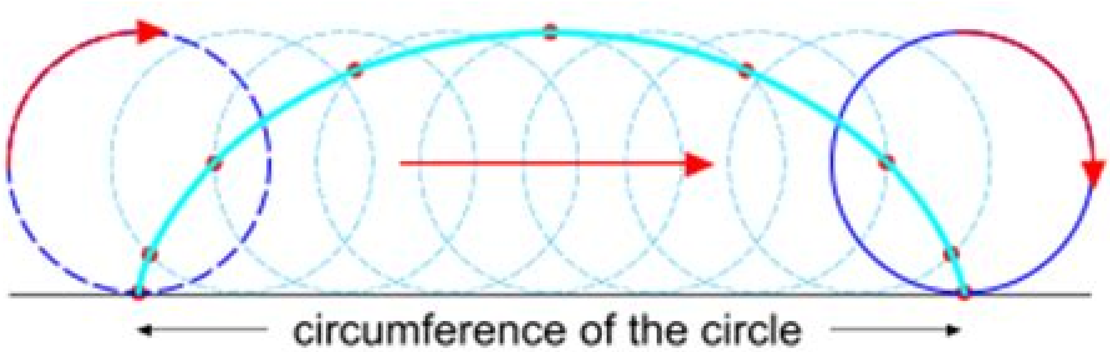
1	2	3	7	6	9	0	8	4

En formulation simple : si ces chiffres sont des traits en pâte à modeler, lesquels peuvent être transformés l'un en l'autre en étirant, tordant, mais sans déchirer.

							A vous de jouer				
C	I	G	D	O	E	F	A	B	H	...	Z

Si l'exercice vous semble trop tordu, passez à la suite.

Tiens, justement, la suite est là, avec un objet mathématique passionnant : la brachistochrone.
Aujourd'hui on fait du grec, avec nos morphismes et la brachistochrone appelée aussi tautochrone.
Bon, on l'appelle aussi cycloïde.
C'est la trajectoire que suit un point de la roue d'un véélo quand le vélo roule. Une fois de temps en temps, ce point touche le sol. Puis il monte, tandis que la roue tourne et le fait avancer. A un moment il est tout en haut, puis il redescend.
On vous l'a peut être montré dans une salle de physique en faisant tourner une roue sur la paillasse, roue sur le bord de laquelle il y a une diode lumineuse.



Si vous suiviez la trajectoire du centre de la roue (flèche rouge), ce serait un mouvement rectiligne uniforme. mais ici, c'est la combainaison du mouvement uniforme et de la rotation.
On peut le décrire sous la forme paramétrique : $\left\{ \begin{array}{ccc} x_t & = & t - sin(t) \\ y_t & = & 1 - cos(t) \end{array} \right|$
Et quel rapport avec les homéomorphismes ? On veut y fonction de x.
On définit alors $\varphi = t \longmapsto t - \sin(t)$. C'est une application continue, strictement croissante (dérivez la, vous avez $1 - \cos$, si ça ce n'est pas positif !).
Elle réalise un homéomorphisme de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle image $\mathbb{R}$ aussi.
Elle a donc une réciproque (qui n'est pas du tout $Id - Arcsin$, on est d'accord !), qui existe mais n'est pas explicable autrement que sous le nom de φ^{-1}.
La brachistochrone devient alors la courbe de $x \longmapsto 1 - \cos(\varphi^{-1}(x))$. Continue, et même dérivable sauf en des points isolés.
Et on peut étudier cette courbe.

Petit défi : vous savez que pour mesurer la longueur d'un graphe, on doit calculer $\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + (f'(x))^2}.dx$.
Saurez vous calculer la longueur d'une arche de cycloïde.
Et l'aire qu'il y a aussi dessous ? Oui, il faudra justement... changer de variable $x = \varphi(t)$.

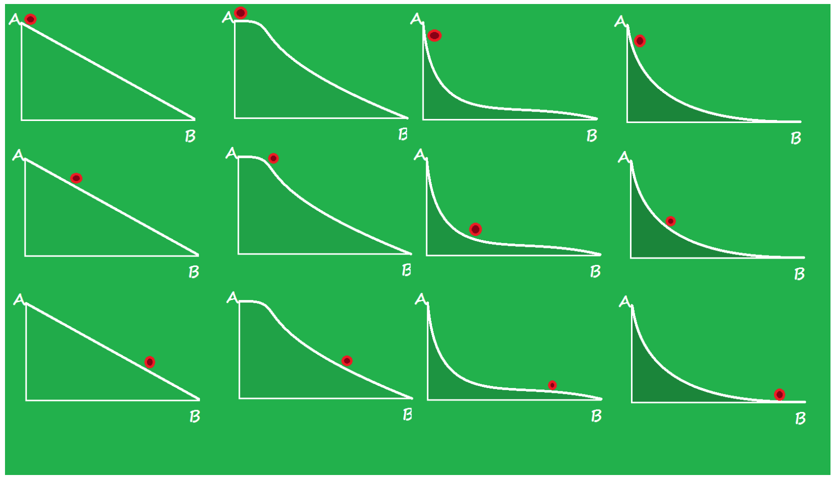
Pourquoi son nom de « courbe la plus rapide » (brachistochrone) et aussi de courbe aux battements réguliers ? (tautochrone) ?
Trois choses à voir z'et à entendre pour saisir [11]

`https ://www.youtube.com/watch ?v=k6vXtjne5-c` belles animations faciles à comprendre.	en russe mais sans paroles (!)	4 minutes
`https ://www.youtube.com/watch ?v=ChWHLDr6UmI` expérience avec des billes	en français	3 minutes
`https ://www.youtube.com/watch ?v=Cld0p3a43fU` d'un bon niveau, avec des images animées	en anglais (sous-titré anglais)	15 minutes
`https ://mathcurve.com/courbes2d/brachistochrone/brachistochrone.shtml` page en français		

11. le « z'à voir et à entendre » est un clin d'oeil à « Je voudrais pas crever » de Boris Vian :
Je voudrais pas crever avant d'avoir connu les chiens noirs du Mexique qui dorment sans rêver, les singes à cul nu dévoreurs de Tropiques, les ariagnées d'argent au nid truffé de bulles, (...)
si les quatre saisons ne sont vraiment que quatre (...) Je voudrais pas mourir Sans qu'on ait inventé Les roses éternelles La journée de deux heures La mer à la montagne La montagne à la mer La fin de la douleur
Les journaux en couleur Tous les enfants contents Et tant de trucs encore Qui dorment dans les crânes Des géniaux ingénieurs Des jardiniers joviaux Des soucieux socialistes Des urbains urbanistes Et des pensifs penseurs **Tant de choses à voir A voir et à z-entendre** Tant de temps à attendre A chercher dans le noir...
(extrait, et c'est tellement beau, dit par Serge Reggiani !)
et ça se termine par « je voudrais pas crever avant d'avoir goûté la saveur de la mort.

Résumé de l'histoire : quelle forme donner à un toboggan pour que vous alliez le plus vite possible du point A au point B en glissant dessus.

Pas la ligne droite, ça va aller trop lentement.
Encore moins la courbe concave, vous allez prendre de la vitesse à la fin, mais faire quasiment du sur-place au départ.
Pas non plus la « chute libre » du début qui, certes, vous donne une grande vitesse (par échange d'énergie potenetielle contre cinétique), mais c'est une vitesse dont vous ne profitez pas car vous finissez en terrain presque plat.



Il faut une forme intermédiaire, qui vous donne de la vitesse au départ avec une « presque chute libre » (demi-tangente verticale) puis vous permet de profiter de cette vitesse pour aller vite jusqu'en B.

. *Evidemment, on met de côté les courbes discontinues (c'est douloureux) et même « non dérivables » (le coccyx va souffrir).*

Sur les vidéos suggérées, on voit les comparaisons.

C'est la brachistochrone qui réalise cet exploit. La chose a été prouvée par Euler qui a pour l'occasion introduit le calcul des variations.

C'est quoi ça ? On a une fonction à minimiser. facile, il suffit d'annuler la dérivée première et de calculer le signe de la dérivée seconde. On le fait depuis la seconde ou la première.
Mais non ! Pas une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
C'est une fonction qui prend comme entrée un graphe reliant A et B et donne en sortie un réel (le temps mis pour le parcours) :

$$\Gamma = f \longmapsto \int_a^b \sqrt{\frac{1+(f'(t))^2}{2.g.f(t)}}.dt$$ [a]

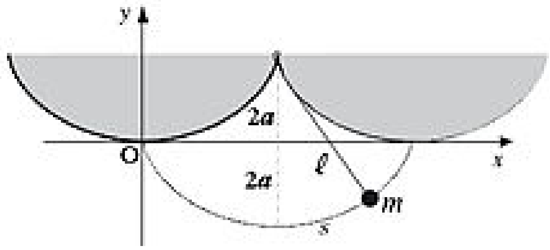
C'est ceci qu'il faut minimiser sur l'ensemble des f dérivables vérifiant $f(a) = A$ et $f(b) = B$.
On doit donc « dériver par rapport à f ».
C'est à dire étudier $\Gamma(f + df) - \Gamma(f)$ avec df qui déforme le graphe de f.
C'est subtil. C'est Euler !
Ca peut faire l'objet d'un problème de concours. Je l'ai posé une année en devoir à la maison, en ne traitant que la condition nécessaire et pas la condition suffisante sinon, ça devient X-ENS.
Et ensuite, Leonhard a appliqué ça à d'autres problèmes d'optimisation. Demandez à votre prof d'IPT et à votre prof de physique.

a. (g pour gravitation, formule que vous pouvez démontrer avec vos outils de physique)

Mais ce n'est pas tout !
Regardez la vidéo en russe : on y montre le problème tautochrone :
quel que soit le point de départ pris ensuite sur la brachistochrone, sous l'action de la pesanteur, des billes ayant démarré au même moment vont arriver en bas au même moment !
Et autre chose : un pendule moins simpliste que celui du cours de physique de base.
Fabriquez un pendule (oui, la masse au bout d'une ficèle) que vous coincez entre deux brachistochrone.
Quand le pendule oscille, le fil vient se coller aux deux brachistochrone, et le petite masse oscille.

Avec une certaine période. Qui normalement dépend de l'amplitude du mouvement [a] mais ici, ce n'est pas le pendule simple avec juste la ficelle et la masse !

a. pas trop d'amplitude, en cours de physique pour le pendule simple, pour pouvoir remplacer $\ddot{\theta_t} + \omega^2.\sin(\theta_t) = 0$ par $\ddot{\theta_t} + \omega^2.\theta_t = 0$ et résoudre facilement, on ne doit pas dépasser 5 degrés, merci !



Et la chose géniale est que la période ne dépend pas de l'amplitude du mouvement. De quoi faire un métronome assez génial.
Et vous savez quoi ? La courbe qui décrit alors la masse en bas est... une cycloïde encore !
C'est le mathématicien Christiaan Huygens [12], contemporain de Newton et Leibniz, qui a découvert et exploité cette propriété.
On raconte que c'est parce que sa nourrice le suspendait à une corde pour être tranquille qu'il a étudié par la suite le pendule.
Il a mené une vie de m..., solitaire (il tombe amoureux d'une femme qui se retire au convent, il est persuadé à quarante ans qu'il va déjà mourir, il écrit à son frère « Tu es le père d'un fils magnifique et moi, d'une invention, qui est magnifique à sa manière »), mais jeune et à votre âge, il refusait d'étudier autre chose que les mathématiques, comme certains d'entre vous.
Mathématicien, bricoleur, astronome, physicien, « opticien », parlant néerlandais, français, latin, grec et italien, assez génial finalement.

Ce retour sur la continuité et la définition des homéomorphisme étant donné, on passe comme promis à la dérivabilité, en un point, et sur un intervalle.

2°) Dérivabilité en un point.

Définition déjà croisée dans le cours (c'était pour déblayer le terrain) :
f définie sur un voisinage de a est dite dérivable en a si l'une des quatre propriétés suivantes est vérifiée

	développement limité	taux d'accroissement
forme « a+h »	$\exists$A, $f(a+h) = f(a) + A.h + o(h)_{h\to 0}$	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0
forme « x-a »	$\exists A,\ f(x) = f(a) + A.(x-a).o(x-a)_{x\to a}$	$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ adet une limite quand x tend vers a

On passe d'une ligne à l'autre en posant $x = a+h$ ou $h = x-a$. Attention, dans la forme en « $x-a$ » (non recommandée), c'est bien $o(x-a)$ et pas $o(x)$. Il faut quand même une quantité qui tend vers 0.
On passe de la forme « taux d'accroissements » à la forme « développement limité » en écrivant la définition de l'existence d'une limite : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = A + o(1)$ donc par produit $f(a+h) - f(a) = A.h + o(h)$.
On passe de la formule taux « développement limité d'ordre 1 » à la formule « limite des taux d'accroissement » en faisant passer de l'autre côté et en divisant (rappelle $\dfrac{o(h)}{h} \longrightarrow_{h\to 0} 0$.

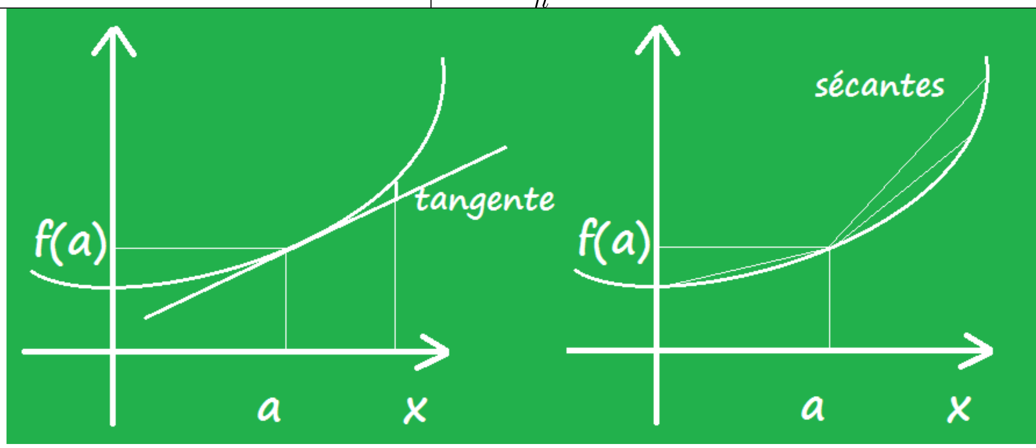
En Terminale, vous n'utilisiez que la forme « taux d'accroissements » (cerveau droit).
En physique, vous êtes plutôt amené à utiliser la forme développement limité (cerveau gauche) exemple $(1+x)^a = 1 + a.x + \ldots$.
En maths, tout l'intérêt est de jongler avec les deux et de passer de l'une à l'autre (cerveau médian).

.

On note que la forme « taux d'accroissement » garantit que si il y a une limite, il n'y en a qu'une. C'est ce qui fait que dans la forme de gauche, il n'y aura qu'un seul réel A possible.
Bien sûr, on le notera très vite $f'(a)$.

12. c'est du hollandais, on ne prononce u-i-gainse comme tous les francophones font, on prononce heu-reunse, merci !

Les deux points de vue sont quand même assez différents quoique faisant une étude locale.

	développement limité	taux d'accroissement
	$\exists$A, $f(a+h) = f(a) + A.h + o(h)_{h\to 0}$	$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0
		
	on cherche si il existe une tangente à la courbe la différence entre le graphe et la droite tend vers 0 plus vite que h	on cherche si les sécantes ont une limite les sécantes ressemblent de plus en plus à une droite... la tangente
	tangente : droite qui frôle la courbe (tangere) =droite osculatrice (qui baise la courbe) = le contact entre la droite et la courbe est d'ordre 1	sécante = droite qui coupe la courbe en deux points

Pourquoi préférer la forme développement limité, parce qu'on peut l'exporter aux fonctions de plusieurs variables qui ont alors plusieurs dérivées (partielles $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$), mais une différentielle (dF qui est une application linéaire) :
$F(x+h, y+k) = F(x,y) + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(\sqrt{h^2+k^2})_{(h,k)\to(0,0)}$
et même de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ $f(z+h) = f(z) + A.h + o(h)_{h\to 0+0.i}$
et pourquoi pas pour des matrices (exercices de concours Mines-Ponts).

Cette notion se généralise ensuite à des ordres plus élevés : $F(x+h, y+k) = F(x,y) + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2+k^2)_{(h,k)\to(0,0)}$.
Si ceci vous semble joli et naturel, c'est génial, vous avez l'esprit matheux.
Si ceci vous semble étrange, surprenant, attendez l'an prochain, ce sera à Pierre-Jean Desnoux et Anne-Laure Biolley de faire le boulot.

Remarque : dans certains livres, vous trouverez une autre formulation de $o(h)$:

$o(h)$	$h.o(1)$	$h.\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand h tend vers 0

Je préfère nettement $o(h)_{h\to 0}$ qui dit tout. Les livres de physique préfèrent $h.\varepsilon(h)$ car pour un physicien, ε c'est petit, alors que pour le matheux, c'est « petit o » qui est petit.

Attention, il y a des applications non dérivables en un point a.

Par exemple : • les applications non continues.
• celles qui n'ont pas la même demi tangente de chaque côté.
• celles qui ont une tangente verticale (les taux d'accroissement tendent vers l'infini)
• celles pour lesquels les taux n'ont même pas de limite.

Associez ces contre-exemples à chacun des types
$1_{\mathbb{Q}}$, elle n'est continue nulle part.
$Arcsin$ n'est pas dérivable en 1
la valeur absolue n'est pas dérivable en 0 (ailleurs si)
la racine carré n'est pas dérivable en 0
la partie entière n'est pas dérivable en n de $\mathbb{Z}$ (ailleurs, si !)
$x \longmapsto x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'est pas dérivable en 0 (après l'avoir pourtant prolongée par continuité par la valeur 0).

Puisqu'on vient d'en parler : $\boxed{\begin{array}{ccc} \text{dérivable en } a & \text{implique} & \text{continue en } a \\ \text{dérivable sur } I & \text{implique} & \text{continue sur } I \end{array}}$ (où « dérivable sur I signifie « dérivable en tout point a de I »).
Démonstration : si f est dérivable en a, elle admet un développement d'ordre 1 donc un développement d'ordre 0 :

$f(a+h) = f(a) + A.h + o(h)_{h\to 0}$	$\Rightarrow$	$f(a+h) = f(a) + o(1)_{h\to 0}$
ordre 1		ordre 0

Une fois que vous avez visualisé la preuve ainsi, vous comprenez qu'on a perdu de l'information.
Vous comprenez qu'on perd une part de l'hypothèse en groupant deux termes en un, quitte à perdre A.
Et vous comprenez donc qu'il n'y a pas de réciproque.
tandis que si vous retenez par cœur une litanie « dérivable implique continue », elle n'a pas plus de sens que « continue donc dérivable » que les limaces de Terminale profèrent parce que ça sonne comme une phrase du prof et pas parce qu'ils ont l'intime conviction que c'est vrai.

On pourra donc juste dire « non continue donc non dérivable ».
On notera que dérivable est facile à prouver : on dérive en appliquant des règles.
Continue est parfois plus difficile il faut en revenir aux εsi nécessaire.

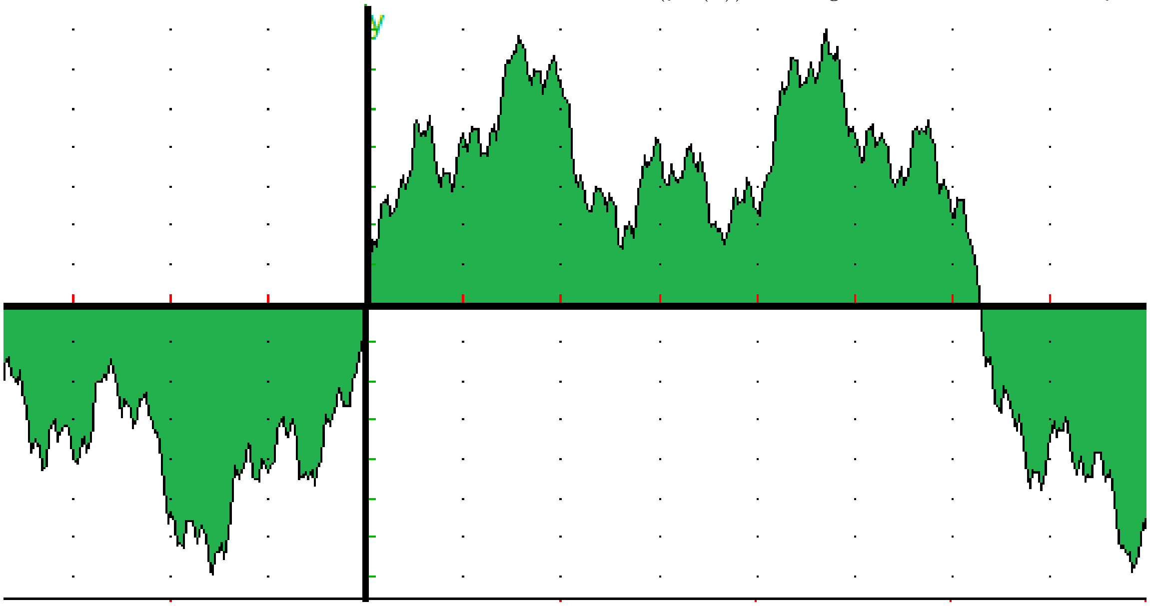
On peut d'ailleurs à ce stade en profiter pour avoir des catégories plus ou moins exigeantes :

intégrable	$\Leftarrow$	continue	$\Leftarrow$	dérivable une fois	$\Leftarrow$	dérivable deux fois
pas de notation		C^0		D^1 puis C^1		D^2 puis C^2
pas forcément continue		pas forcément dérivable		pas forcément deux		pas forcément trois
dégoulinante de Baire		« brownien »		réfléchissez		

Vous comprenez alors pourquoi je suis au trente-sixième dessous, affligé quand je découvre dans le programme de Terminale « intégrable car dérivable ». A cause de cette approche, voilà que la partie entière sort du cadre, que la valeur absolue pose aussi problème... On saute deux marches. On paye une suit en camping au prix d'une suite au Retz !

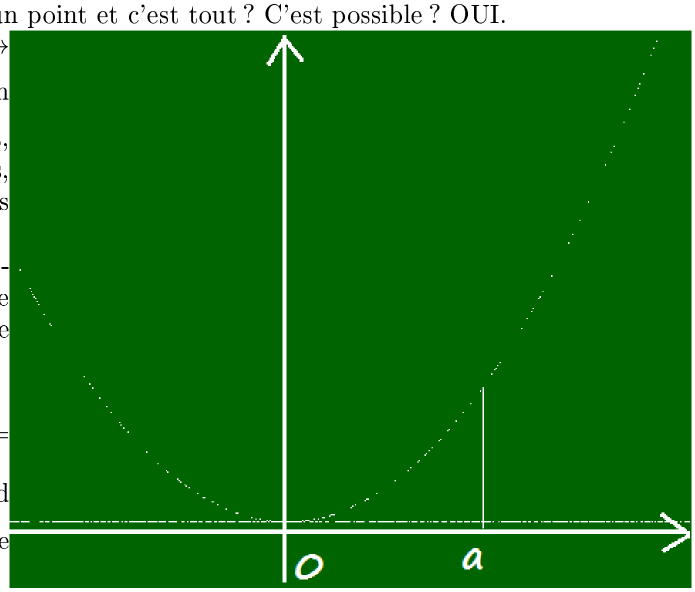
Plusieurs exercices de T.D. proposent de construire des fonctions continues partout, dérivables nulle part.

Pour tout n, on définit $f_N = x \longmapsto \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin(3^n.x)}{2^n}$. Montrez que chaque f_N est continue et lipschitzienne de rapport k_N à préciser.
Montrez que pour tout x, la suite des sommes partielles $(f_N(x))$ converge. Sa limite sera notée f_∞.



On se donne x et y. Montrez : $|f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leqslant |f_\infty(x) - f_N(x)| + |f_\infty(y) - f_N(y)| + |f_N(x) - f_N(y)| \leqslant 2^{1-N} + K_N.|y - x|$.
On se donne ε, montrez qu'il existe N et η vérifiant $\forall(y,\ y),\ |y-x| \leqslant \eta \Rightarrow |f_\infty(x) - f_\infty(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$.
Déduisez que f_∞ est continue en tout point. A suivre pour la non dérivabilité.

Ah, des exemples un peu plus originaux que les seules fonctions en polynômes exponentielles et autres ? Oh oui, oh oui.
Une fonction qui n'est dérivable qu'en un point et c'est tout ? C'est possible ? OUI.



L'application $f = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x^2 & si & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$ n'a qu'un point de continuité : 0 et en ce point, elle est même dérivable... Et ailleurs, elle n'est pas dérivable car même pas continue !
En a différent de 0, elle n'est pas continue (prendre une suite de rationnels de limite a et une suite d'irrationnels de limite a), donc non dérivable.
En 0 elle est dérivable.
Par les taux ? $\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \left\{ \begin{array}{ccc} h & si & h \in \mathbb{Q} \\ 0 & sinon & \end{array} \right|$. Quand h tend vers 0 (rationnel ou de sexe opposé), ce taux tend vers 0. On a donc $f'(0) = 0$.
Ou alors par le développement limité : $f(0+h) = 0 + O.h + o(h)_{h \to 0}$ et c'est bien $o(h)$ puisque c'est

soit 0, soit h^2.[13]

Si vous y tenez : $f' = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & si & x=0 \\ pas\ defini & sinon & \end{array} \right|$. Le graphe de f se réduit à un point.

Une fonction qui est dérivable en un point, mais dont la dérivée n'est pas continue ? Oh oui oh oui.[14]

L'application $g = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & si & x \neq 0 \\ 0 & si & x = 0 \end{array} \right|$ est continue (même en 0 par encadrement) et dérivable en tout point : $g = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 2.x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si & x \neq 0 \\ 0 & si & x = 0 \end{array} \right|$.

Comment j'ai obtenu sa dérivée ? En dérivant.

Mais attention, je n'ai pas dit 0 (valeur en 0) se dérive en 0. Je ne suis quand même pas con ![15]

Pour dériver en 0, j'ai calculé des taux d'accroissement : $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = h.\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$ et le sinus est borné et se fait écraser par h.

Ou alors, j'ai écrit $f(0+h) = 0 + 0.h + o(h)_{h\to 0}$.

En tout cas, g est dérivable en tout point, même là où on l'a prolongée par continuité.

Mais g' n'est pas continue en 0.

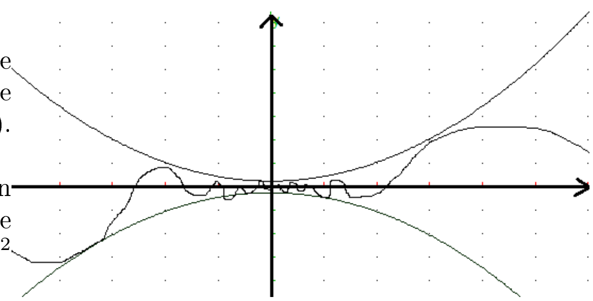
Quoi ? $g'(a)$ ne tend pas vers $g'(0)$ quand a tend vers 0 ?

Non. $g'(a)$ ne tend vers rien quand h tend vers 0, à cause du $\cos\left(\dfrac{1}{h}\right)$.

Oui, g' a une discontinuité de seconde espèce (elle ne peut pas avoir une discontinuité de première espèce (un saut), c'est Darboux qui nous le dira).

Bon, pour faire un dessin, pas évident.

On imagine $x \longmapsto \sin(1/x)$, c'est une application qui oscille de plus en plus quand on se rapproche de 0. Et on l'enferme entre deux graphes : $y = x^2$ et $y = -x^2$.



Après, quand même, on revient à des fonctions plus simples, dont on prouve la dérivabilité par les théorèmes simples.

Par exemple • $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$en a non nul : $\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{a}}{x-a} = \dfrac{\frac{a-x}{a.x}}{x-a} = \dfrac{-1}{a.x}$. On fait tendre x vers a, on trouve $\dfrac{-1}{a^2}$.

• $x \longmapsto \sin(x)$ en a : $\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\cos\left(\dfrac{x+a}{2}\right) \longrightarrow_{x\to a} \cos\left(\dfrac{a+a}{2}\right)$

• $x \longmapsto x^n$ en a : $\dfrac{x-a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + a^{n-1} \longrightarrow_{x\to a} n.a^{n-1}$ en comptant les termes.

Pour aller plus loin : un exercice qui n'est pas exigible dans le cadre du programme.

Qui sont les applications dérivables au sens complexe.

---

13. pour les balourds, en 0 : $1 \gg h \gg h^2 \gg h^3 \gg$

14. je sais, j'en devine prêt(e)s à dire « oh non oh non, après avec de tels monstres, je ne vais plus oser faire aucun calcul en physique et Sosso va m'engueler »

15. enfin, il parait que si, des fois on me le dit, alors que je trouvais astucieux de faire en une seule fois la vaisselle et la lessive pour gagner du temps, en frottant les assiettes avec mes chaussettes sales, le tout enduit de savon...

Dérivable au sens complexe, c'est $\dfrac{f(z+h)-f(z)}{h}$ admet une limite quand le complexe h tend vers 0.
Vérifiez que $z \longmapsto z^2$ est dérivable. De même que $z \longmapsto \dfrac{1}{1+z}$ (sauf en 1).
Complétez pour qu'elle soit dérivable : $(x+i.y) \longmapsto \cos(x).sh(y)+i\ldots$.
Complétez pour que ce soit la dérive de quelqu'un : $(x+i.y) \longmapsto \dfrac{x}{x^2+y^2}+i\ldots$.
Montrez que si $(x+i.y) \longmapsto u(x,y)+i.v(x,y)$ est dérivable, alors $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$.

3°) Théorèmes algébriques.

On dispose de théorèmes classiques, obtenus en combinant des développements limités d'ordre 1.
Addition, combinaisons linéaires, multiplication.

C'est la multiplication qui est ce qui est le plus agréable à prouver :

$(a+h).g(a+h) =$

	$f(a)$	$+h.f'(a)$	$o(h)_{h\to 0}$
g(a)	$f(a).g(a)$	$h.f'(a).g(a)$	$o(h)$
$+h.g'(a)$	$h.f(a).g'(a)$	$o(h)$	$o(h^2)$
$o(h)_{h\to 0}$	$o(h)$	$o(h^2)$	$o(h^2)$

$= f(a).g(a) + \Big(f(a).g'(a)+f'(a).g(a)\Big) + o(h)_{h\to 0}$
Un exercice que j'aime :

> Le prof Hitzan-Pourdèce-Hendrelap-Houbell est nul. Il a écrit dans son cours que $u.v$ avait pour dérivée $u'.v'$. Pour se justifier, il donne un exemple : $u = x \longmapsto e^{-x}$ et $v = x \longmapsto e^{x/2}$. Vérifiez.
> Il propose aussi : $u = x \longmapsto e^{(x^2)}$ et $v = x \longmapsto e^x.\sqrt{1-2.x}$.
> Devinez ce qu'il a proposé pour $u = x \longmapsto \dfrac{1}{x-1}$.
> Et pour $x \longmapsto \dfrac{1}{(x-3)^3}$?

Cet exercice est en fait un exercice sur les équations différentielles. Je vous le confine.

Pour la composition, il suffit d'enchaîner :
$f(a+h) \quad = f(a) \quad +h.f'(a) \quad +o(h)_{h\to 0}$
$g(b+k) \quad = g(b) \quad +k.g'(b) \quad +o(k)_{k\to 0}$ avec $b = f(a)$
On reporte l'une dans l'autre en posant $k = h.f'(a)+o(h)$ (on vérifie qu'il tend vers 0 quand h tend vers 0) :
$g(f(a+h)) = g(f(a)+h.f'(a)+o(h)) = g(f(a)) + g'(f(a)).(h+o(h)) + o(h+\ldots) = g(f(a)) + g'(f(a)).f'(a).h + o(h)$
La dérivée de $g\circ f$ est bien le produit des deux dérivées. Mais celle de f se calcule en a et celle de g en $f(a)$.

Devez vous retenir $(g\circ f)' = (g'\circ f)\times f'$, ou ou $(g\circ f)'$= produit des dérivées ? Comme vous voulez, mais soyez rigoureux.

En tout cas, je vous recommande le tableau simple

	f		g	
a	$\longrightarrow$	$f(a)$	$\longrightarrow$	$g(f(a))$
	$f'(a)$	$\times$	$g'(f(a))$	

, combinable à l'infini (enfin pas tant que ça)

	exp		sin		ln	
a	$\longrightarrow$	e^a	$\longrightarrow$	$\sin(e^a)$	$\longrightarrow$	$\ln(\sin(e^a))$
	e^a	$\times$	$\cos(e^a)$		$\dfrac{1}{\sin(e^a)}$	

$\Big(x \longmapsto \ln(\sin(e^x))\Big)' = \Big(x \longmapsto \frac{e^a.\cos(e^a)}{\sin(e^a)}\Big)$.

Je vous recommande aussi cette formule, car l'an prochain, vous retrouverez cette formule pour dériver

t	$\xrightarrow{f}$	$\begin{pmatrix} x_t & y_t \end{pmatrix}$	$\xrightarrow{g}$	$F(x_t,\ y_t)$
	$\begin{pmatrix} x'_t & y'_t \end{pmatrix}$	$\times$	$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$	

et trouverez $\begin{pmatrix} x'_t & y'_t \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}$ (produit matriciel).

Cette formule donnera $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}.x'_t + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}.y'_t$ écrite aussi $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}.\dfrac{dx_t}{dt} + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}.\dfrac{dy_t}{dt}$.

Et le physicien écrit parfois $dF = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}.dy$.

Et quand il restera sur une isochrone, isobare ou isotherme, il se débrouillera pour que F reste constante, il annulera $\dfrac{dF}{dt}$ et trouvera cette formule dont on reparlera : $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\dfrac{\partial F(x,y)}{dx}}{\dfrac{\partial F(x,y)}{dy}}$ avec son étrange signe moins dont on reparlera.

Remarque : $1_{\mathbb{Q}}$n'est dérivable nulle par, de même que $1_{\mathbb{Q}}$ (pas de faute de frappe, c'est deux fois la même), mais $x \longmapsto 1_{\mathbb{Q}}(1_{\mathbb{Q}}(x))$ ne serait elle pas dérivable partout ?

4°) Dérivabilité sur un intervalle.

Bon, on se débarrasse de la définition : dérivable en tout point. On définit alors f'.
Et on se débarrasse du résultat simpliste : si f est croissante et dérivable, alors sa dérivée est positive ou nulle.

si	la fonction est croissante	alors	les taux d'accroissement sont positifs	puis	les limites de taux sont positives
si	f est strictement croissante	alors	ses taux sont strictement positifs	puis	les limites des taux sont positives ou nulles

On fait de même : f *décroissante* $\Rightarrow$ f' *negative ou nulle*. Et j'insiste bien sur « ou nulle ». Et je rappelle que $x \longmapsto x^3$ est strictement croissante, alors que sa dérivée s'annule au moins une fois.
On verra que ce que la croissance stricte donne, c'est que la dérivée ne peut pas s'annuler sur tout un intervalle. disons que la dérivée s'annule en des points « isolés les uns des autres ».

Attention, le théorème a un énoncé précis, il ne se contente pas de croissante implique dérivée positive. Il se peut que la dérivée n'existe pas...

Dans la même famille de théorèmes, on dispose de « si f est lipschitzienne de rapport K et dérivable, alors sa dérivée est majorée par K.
déjà démontré.

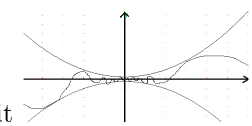
Si f est dérivable en tout point de I, alors $f'(a)$ existe en tout point de I et on définit f'.
On peut alors s'interroger sur la continuité de f'.
Puis sur la dérivabilité de f' et ainsi de suite.
On définit de proche en proche tant que c'est possible $f^{(n)}$.

Je laisse de côté le résultat purement technique : $f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = (f^{(n)})'$ pour tout n.

On définit des ensembles inclus les uns dans les autres
$C^0(I,\ R) \supset D^1(I,\ R) \supset C^1(I,\ R) \supset D^2(I,\ R) \supset C^2(I,\ R) \supset \ldots \supset D^n(I,\ R) \supset C^n(I,\ R) \supset D^{n+1}(I,\ R) \supset \ldots$
L'inclusion $D^n(I,\ R) \supset C^n(I,\ R)$ correspond à une exigence plus grande : non seulement la dérivée n^{ieme} existe, mais en plus elle est continue.

Et ensuite $C^n(I,\ R) \supset D^{n+1}(I,\ R)$ correspond à l'exigence : $f^{(n)}$ est encore dérivable : $f^{(n+1)}$ existe.
Et comme $f^{(n)}$ est dérivable, elle est pour le moins continue.
pour ça !
Vous voulez une application qui ne soit pas dérivable plus d'une fois ?
Je vous propose $f = x \longmapsto x.|x|$. Elle est dérivable partout, même en 0 (tangente horizontale) : $f' = x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} 2.x & si & x > 0 \\ 0 & si & x = 0 \\ -2.x & si & x < 0 \end{array} \right|$. Cette dérivée f' est continue, mais pas dérivable en 0.
Et si vous prenez $f = x \longmapsto x.|x|$, vous vous assurerez l'existence de f' et f" mais f" ne sera plus dérivable en 0.
Et ainsi de suite.

Mais la question plus tordue est ϕ' existe mais n'est pas continue. C'est facile ? C'est à dire D^1 mais pas C^1.

Je suis déçu que vous me posiez cette question ! On a construit  pour ça ! Je la note ϕ.
Et si vous voulez que ce soit f" qui soit définie mais pas continue ? Calculez $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \phi(t).dt$.

Quelques stabilités déjà prouvées :
$C^n(I,\mathbb{R})$ est stable par additon (évident), multiplication par un réel (évident), combinaison linéaire (Chaoquet, tu te répètes), et multiplication (là c'est la formule de Leibniz, déjà vue).
On a montré ensuite grâce à la formule de laibniz que la composée de deux applications de classe C^nsur des domaines compatibles est encore C^n.
Je vous rappelle la joile idée de la récurrence.
On se donne n on suppose la stabilité par composition pour des application C^n. On prend alors f et g de classe C^{n+1} et on dérive déjà une fois : $g \circ f = (g'$\circ f).f' . Là dedans, g' est C^n (car g est C^{n+1}), f est C^n(car même C^{n+1}). Par hypothèse de récurrrence $g' \circ f$ est C^n. Par multiplication, $(g' \circ f).f'$ est C^n.Et comme $(g \circ f)'$ est C^n,on remonte : $g \circ f$ est C^{n+1}.
Rien de méchant, mes de petites idées à pousser dans le bon ordre. Des maths de Prépas, quoi !

C'est en composant avec $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ qu'on montre alors que si f est C^n ne s'annulant jamais, alors $\dfrac{1}{f}$est C^n.
Mais attention, on n'a pas de formule pour $\left(\dfrac{1}{f}\right)^{(n)}$ à l'aide des dérivées de f. Quoique...

A titre d'exemple sur une composition bien choisie :

> Montrez l'existence d'une suite à double de coefficients B_n^k vérifiant pour toute f de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
> $\big(x \longmapsto f(\ln(x))\big)^{(n)} = \Big(x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}.\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} B_n^k.f^{(n-k)}(\ln(x))\Big)$
> *(vérifiez que les B_n^k ne dépendent pas de f)*
> Calculez les B_n^k pour $0 \leqslant k < n \leqslant 3$.
> Montrez, pour tout λ de $\mathbb{R}^*$: $B_n^0.\lambda^n + B_n^1.\lambda^{n-1} + \ldots + B_n^{n-1} = (\lambda-1).(\lambda-2)\ldots(\lambda-n+1)$ *(indication : $f = x \longmapsto e^{\lambda.x}$)*. Calculez les B_5^k pour k de 0 à 4.

Pour aller encore plus loin, on définit C^∞comme l'intersection de tous les C^n. Une application est de classe C^∞si et seulement si toutes ses dérivées existent (et sont continues puisque re-dérivables).

Une fois encore, je le redis, ça se lit « dérivable autant de fois qu'on veut », et pas « infiniment dérivable », si possible. Car en tant que probabiliste, je vous demande ce que serait alors $f^{(\infty)}$...

Évidemment, $C^\infty(I,\ \mathbb{R})$ a toutes les stabilités voulues.

Petite citation sur la formule hors programme de Faa-di-Bruno.
Il y a seize ans à l'École normale supérieure de Paris, notre professeur de géométrie différentielle nous avait présenté cette formule qui donne les dérivées successives des fonctions composées ; elle était si compliquée que nous l'avions accueillie avec hilarité et qu'il avait dû s'excuser, avec un air piteux et un brin d'auto dérision : « Ne riez pas, c'est très utile » Elle est effectivement utile cette formule, il avait raison ; c'est grâce à elle que mon inégalité mystérieuse est vraie ! (Cédric Villani)
Et la formule :

$$(g\circ f)^{(n)} = \sum_{1.m_1+2.m_2+\ldots+n.m_n=n} \frac{n!}{m_1!.m_2!\ldots m_n!}.\Big(\prod_{k=1}^{n}\Big(\frac{f^{(k)}}{k!}\Big)^{m_k}\Big)\times g^{(m_1+\cdots+m_n)}\circ f$$

Vérifiez juste cette formule pour $n = 1$ et $n = 2$.
Et écrivez la aussi pour $n = 3$.

Un exercice plus classique : les fonctions à dérivées positives.
On définit l'espace E des applications f de classe C^∞ dont toutes les dérivées sont positives ou nulles sur $\mathbb{R}$.
Comme l'exponentielle évidemment.
Et comme $x \longmapsto 1$ aussi.

Questions rapides : Quelle est la bonne quantification ?

$f^{(n)}(x) \geqslant 0$
$\forall n,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$
$\forall x,\ \forall n,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0$

Montrez que cet ensemble est stable par addition. Par composition.
Qui sont les polynômes présents dans cet ensemble ?
ch et *sh* sont ils dans cet ensemble ?

4,5°) Dérivabilité sur un intervalle.

Quoi ? Le même titre mais avec un alinéa $4,5$? Qu'est ce ? De la culture générale. Et très particulière. Ce qui va suivre va être plus proche du T.I.P.E. de maths que du cours proprement dit, même si en gros ça peut faire l'objet d'un sujet de concours.
Je vous prose de dérivée à l'ordre $1/2$. Oui, on va définir ce qu'est $f^{(1/2)}$. Un truc entre f et f'.
Et ça va vérifier $(f^{(1/2)})^{(1/2)} = f'$.
Attention, ça va être particulier, mais ce n'est pas qu'un délire de mathématicien, ça a des applications en sciences de l'ingénieur, quand on veut construire des systèmes pour amortir les vibrations (qui donc veut faire de l'antisismique ou des digues de protection ?).

Ce qui est étrange, c'est que pour dériver, on va déjà intégrer.
On va trouver une formule pour intégrer f n fois de suite par un seul calcul.
C'est une formule asse simple. Si vous définissez $F = x \longmapsto \frac{1}{(n-1)!}.\int_0^x (x-t)^{n-1}.f(t).dt$ alors vous avez $F^{(n)} = f$.

Pour n égal à 1, on calcule $F = x \longmapsto \int_0^x f(t).dt$. Enfin, non, on ne calcule pas, mais ça se dérive en f, c'est déjà ça.
Ensuite, on progresse par récurrence, on définit $\phi = x \longmapsto \frac{1}{n!}.\int_0^x (x-t)^n.f(t).dt$.
Suivez déjà ce qui va venir sans vous demander à chaque fois « mais il fait quoi », et ça montrera que vous comprenez les calculs, c'est bien.
On développe :
$\phi(x) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^{n-k}.(-1)^k.\int_0^x t^k.f(t).dt.$
On dérive (et on efface un terme dont la dérivée est nulle !) :
$\phi'(x) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}.(n-k).x^{n-k-1}.(-1)^k.\int_0^x t^k.f(t).dt + \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^{n-k}.(-1)^k.x^k.f(x)$
On regroupe :
$\phi'(x) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}.(n-k).x^{n-k-1}.(-1)^k.\int_0^x t^k.f(t).dt + \frac{1}{n!}.\Big(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.x^{n-k}.(-1)^k.x^k\Big).f(x)$
On exploite Newton :
$\phi'(x) = \frac{1}{n!}.\sum_{k=0}^{n-1} n.\binom{n-1}{k}.x^{n-k-1}.(-1)^k.\int_0^x t^k.f(t).dt + \frac{1}{n!}.\Big(x-x\Big)^n.f(x)$
On simplifie :
$\phi'(x) = \frac{1}{(n-1)!}.\int_0^x \Big(\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}.x^{(n-1)-k}.(-1)^k.t^k.f(t)\Big).dt$
C'est $F(x)$!
On exploite l'hypothèse de récurrence en dérivant cette fois n fois :
$\phi^{(1+n)}(x) = F^{(n)}(x) = f(x)$. Et la récurrence s'achève.

.

Sinon, il y a plus court, si vous reconnaissez que $F = x \longmapsto \frac{1}{(n-1)!}.\int_0^x (x-t)^{n-1}.f(t).dt$ est le reste de Taylor intégrale. Mais je vous laisse y réfléchir.

Mais alors, on peut définir $F = x \longmapsto \frac{1}{(-1/2)!}.\int_0^x (x-t)^{-1/2}.f(t).dt$ qui sera par généralisation une primitive d'ordre $\frac{1}{2}$ de f.

Et vous savez quoi ? Il suffira de la dériver pour avoir $f^{(1/2)}$ (logique, pour avancer de $\frac{1}{2}$, on recule de $\frac{1}{2}$ puis on avance de 1.

Le problème avec cette formule est qu'on y trouve $\Big(\frac{-1}{2}\Big)!$ et on se demande ce que c'est.

Moi je vous le dis : on a prouvé par récurrence $n! = \int_0^1 \Big(\ln\Big(\frac{1}{t}\Big)\Big)^n.dt$, donc on n'hésite pas $\Big(\frac{-1}{2}\Big)! = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{1}{t}\right)}}.dt$.Oui, ça existe, mais ça ne se calcule pas (enfin, si : $\Big(\frac{-1}{2}\Big)! = \sqrt{\pi}$ et ça, ça peut faire un joli sujet de Spé déjà).

Alors, le problème est que l'on ne peut pas facilement dériver ne serait ce que $x \longmapsto x$ à l'ordre $\frac{1}{2}$. Il semble naturel d'obtenir du $x^{1-\frac{1}{2}}$ mais avec un facteur $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ devant.
Et quand on redérive une demi fois, on trouve $x \longmapsto 1$.

L'autre mauvaise surprise est que dériver une fois ou plus (mais un nombre entier de fois) l'exponentielle ne la modifie pas, alors que sa dérivée d'ordre $\frac{1}{2}$ donne quelquechose d'intermédiaire qui n'est plus l'exponentielle.

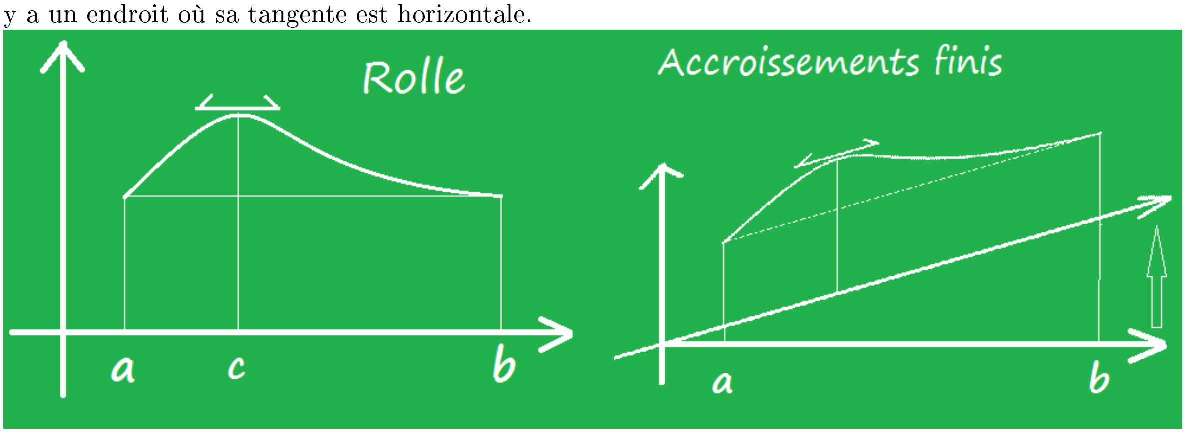
Bref, je vous ressortirai peut être le sujet que j'ai posé une année là dessus.

5°) Théorème de Rolle.

Proposition : **Si une application f (continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,\ b[$) prend la même valeur en a et en b, alors sa dérivée s'annule au moins une fois sur $]a,\ b[$.**

Formulation de gros livre : $f \in C^0([a,\ b],\ R) \cap D^1(]a,\ b[, \mathbb{R}),\ f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in]a,\ b[,\ f'(c) = 0$.

Formulation graphique : si la fonction prend la même valeur à chaque bout de l'intervalle, alors il y a un endroit où sa tangente est horizontale.



Remarques du professeur : ne pas oublier les mots importants : continue, dérivable, intervalle, valeurs dans $\mathbb{R}$
et dans la conclusion, n'oubliez pas que c est dans l'intervalle ouvert.
C'est ce qui permettra d'avoir des c différents quand il y aura plusieurs intervalles côte à côte et de recommencer. Mais n'en disons pas trop pour l'instant.
Et pour le début de la remarque, donnez des exemples de fonctions vérifiant une seule partie des hypothèses, pour lesquelles la conclusion est invalidée (la dérivée ne s'annule pas forcement)

	intervalle	dérivable	à valeurs dans $\mathbb{R}$	dessin
$x \longmapsto \frac{1}{x^2} a = -1,\ b = 1$	non	oui	oui	
$x \longmapsto \lvert x \rvert,\ a = -1,\ b = 1$	oui	non	oui	
$x \longmapsto e^{i.x},\ a = -1,\ b = 1$	oui	oui	non	

Question de l'élève angoissé :	Vous avez écrit « continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,\ b[$ », je fais quoi si elle est dérivable en a ou b ? Le théorème ne s'applique pas ?
Réponse du professeur :	J'ai dit dérivable sur $]a,\ b[$, ça ne lui interdit pas d'être dérivable aussi en a et en b. C'est juste que c'est une hypothèse dont je n'ai pas besoin.
Remarque du professeur une fois l'élève parti :	Celui là, il est aussi con que celui qui en cinquième dit « monsieur, vous avez fait une faute, vous avez écrit $3 \leqslant 4$, alors que c'est $3 < 4$ ».
Remaque du professeur moins sarcastique :	C'est pas le même qui m'a dit « un polynôme n'est pas de classe C^∞ car quand on le dérive trop, on tombe sur 0 et on ne peut plus dériver... » ?

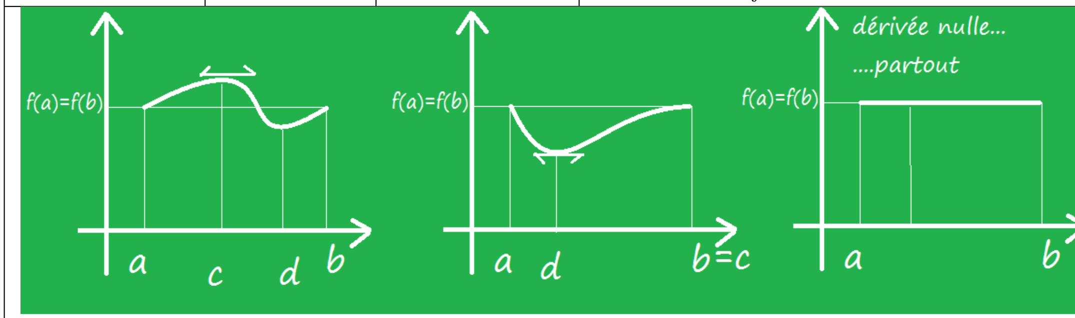
Ce qu'il y a de fort avec ce théorème, c'est qu'il est ridicule ! Un trait horizontal quand la fonction atteint son maximum ou son minimum, c'est tout...
Mais les conséquence en sont formidables.

Accroissements finis	quitte à changer d'axe des abscisses, il existe c entre a et b vérifiant $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$
Variation des fonctions	si la dérivée est partout positive, les taux d'accroissement le sont aussi, la fonction est croissante
Formules de Taylor	$f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\ldots)$ $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f"(a+\ldots)$ $f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f"(a) + \dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a+\ldots)$
Formule de l'Hôpital	quitte à changer d'axe des abscisses en l'étirant, il existe c entre a et b vérifiant $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$
Variation de fonction, intégration	si la dérivée de F est nulle partout, alors F est constante si F se dérive en f alors $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt - F(t)$ est constante si F se dérive en f $x \longmapsto \int_a^b f(t).dt - F(b) = 0 - F(a)$
Darboux	même si elle n'est pas continue, la dérivée f' d'une application dérivable vérifie le théorème des valeurs intermédiaires sans être continue, c'est jouable ? oui, elle ne saute pas, elle oscille comme une dingue.

Rolle énonce ce théorème en 1691, mais dans un contexte de recherche de racines de polynômes. Il n'en voit donc pas l'intérêt direct et n'hésite pas à dire que ce n'est pas un résultat important (en gros, il ne regarde que des polynômes et dit : les racines de P' sont intercalées entre les racines de P).
Rolle va même jusqu'à s'engueuler avec Varignon, autre mathématicien de l'époque en lui disant : mais vos histoires de dérivées de fonctions non polynomiales, ça n'a aucun intérêt, le calcul différentiel, c'est n'importe quoi !

Démonstration du théorème de Rolle :

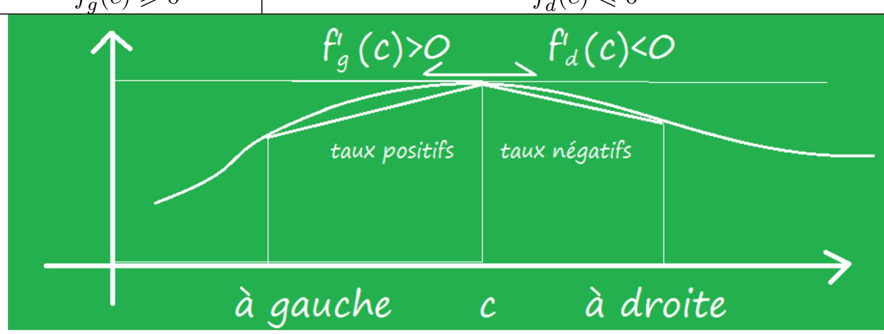
f est continue sur $[a,\ b]$ (segment, bornes incluses), donc bornée et elle atteint ses bornes (ici se cachent le principe de la borne supérieure ainsi que Bolzano et Weierstrass).
On va dire qu'elle atteint son maximum M en c et son minimum μ en d.
L'exercice semble fini ! Là où elle atteint son maximum, sa dérivée s'annule !
Sauf que si le maximum est atteint en a ou en b, on n'a pas le droit de dire cela.
Le lemme « atteint son maximum implique dérivée s'annule » doit se placer en un point où elle est dérivable, et surtout à l'intérieur de l'intervalle.
Alors on doit discuter.

<table>
<tr><td>$c \in]a,\ b[$</td><td colspan="3">$c = a$ ou $c = b$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">alors $f'(c) = 0$</td><td rowspan="2">on cherche
le minimum</td><td>$d \in]a,\ b[$</td><td>$d = a$ ou $d = b$</td></tr>
<tr><td>alors $f'(d) = 0$</td><td>alors sachant $f(a) = f(b)$,
f est constante</td></tr>
<tr><td colspan="4">
</td></tr>
<tr><td>gagné</td><td colspan="2">gagné</td><td>gagné
$f'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$</td></tr>
</table>

Ah, il nous manque quand même un lemme évident (appelé dans certains livre « de Lagrange », mais à :

si f dérivable en c atteint son maximum en c intérieur au domaine de définition, alors $f'(c) = 0$

☹ On suppose que f admet en$c$ un maximum (pour un minimum, prenez $-f$) et est dérivable en c (et peut être juste en c) et définie au moins sur un intervalle $[c - \gamma,\ c + \gamma]$.
On regarde alors le signe des taux d'accroissement, puis on passe à la limite

<table>
<tr><td></td><td>$[c - \gamma,\ c[$à gauche</td><td>à droite $]c,\ c + \gamma]$</td></tr>
<tr><td>inégalités</td><td>$f(x) \leqslant f(c)$ et $x < c$</td><td>$f(x) \leqslant f(c)$ et $x > c$</td></tr>
<tr><td>taux</td><td>$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$</td><td>$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$</td></tr>
<tr><td>passage à la limite</td><td>$f'_g(c) \geqslant 0$</td><td>$f'_d(c) \leqslant 0$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

Comme f est dérivable, les deux nombres dérivés doivent être égaux : $f'(c) = f'_g(c) = f'_d(c)$ est à la fois positif et négatif. Il est nul. C'est fini. ☺

Faut il retenir cette démonstration ?
- *Oui, car elle est évidente.*
- *Oui, car elle permet de comprendre pourquoi un maximum en c sur $D_f = [a,\ c]$ ne permet que de conclure $f'(c) \leqslant 0$.*
- *Oui, car elle permet de comprendre pourquoi un maximum en c sur $D_f = [c,\ b]$ ne permet que de conclure $f'(c) \geqslant 0$.*

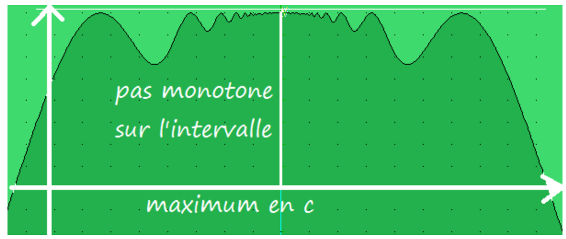
En général, retenir les grandes étapes de la preuve vous permet de comprendre, et de retenir plus facilement le résultat.

Évidemment, si f n'est pas dérivable en c, on ne peut rien dire.

Attention, ce qui suit n'est pas une preuve, pourquoi ? :

	à gauche de c	à droite de c
information	maximum en c donc f est croissante	maximum en c donc f est décroissante
	f' est positive	f' est négative
signe	$f'(c) \geqslant 0$	$f'(c) \leqslant 0$

Qu'est ce qui me chiffonne là dedans ? Le fait qu'il y ait un maximum en c ne force pas f être croissante avec c. Elle peut osciller, du moment qu'elle ne dépasse pas $f(c)$.

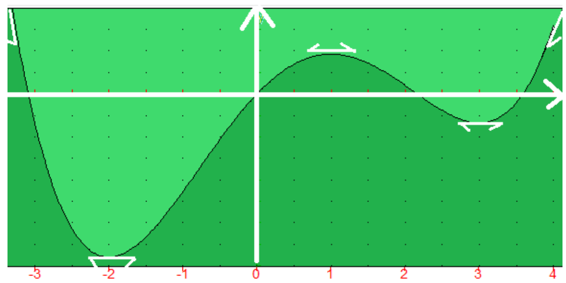


Ne vous faites pas avoir par les phrases trop rapides du style « elle a un maximum dont celle est monotone », « elle est dérivable en c donc dérivable sur un voisinage de c ».

Profitons en pour rappeler quelquechose de connu : pour trouver maximum et minimum d'une application sur un intervalle, on étudie le signe de f', et on sait que quand f' s'annule et change de signe, on a un extrémum local.

Mais peut être que le maximum est atteint... aux bornes du domaine.

Un exemple : $f = x \longmapsto 3.x^4 - 8.x^3 - 30.x^2 + 72.x$ sur $[-1,\ 4]$. La dérivée s'annule et change de signe [a] en 1 et 3. Mais le maximum est en -3 (et le minimum en -2 c'est vrai).



[a] la bonne phrase est bien « s'annule et change de signe » et pas « s'annule »

Petit quiz en passant :

a	Pourquoi est il vrai que si f est continue à droite et continue à gauche en a, alors elle est continue en a.	.
b	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a, alors pourquoi elle n'est pas forcément dérivable en a.	
c	Pourquoi est il vrai que si f est dérivable à droite et dérivable à gauche en a, alors elle est continue en a.	
d	Un $\mathcal{E}$ tracé par Julien L est il homéomorphe à un $\mathcal{E}$ tracé par Julien W ?	
e	Vrai ou faux : $x \longmapsto \ln(\vert x\vert)$ a pour dérivée $x \longmapsto \dfrac{1}{\vert x\vert}$?	
f	Vrai ou faux : f est dérivable en a si et seulement si $x \longmapsto f(x+a)$ est dérivable en 0.	
g	Vrai ou faux : si f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$, alors $x \longmapsto f(-x)$ est dérivable en $-a$ de dérivée $f'(a)$.	
h	Vrai ou faux : si $x \longmapsto Arctan(f(x))$ est dérivable en a alors f est dérivable en a.	
i	Vrai ou faux : si $x \longmapsto (f(x))^2$ est dérivable en a alors f est dérivable en a.	
j	Vrai ou faux : si f est paire, alors f' est nulle en 0.	
	et même http ://rogermansuy.fr/HX2/Derivables.html	

6°) Rolle, Rolle, Rolle.

C'est le titre d'un vieux blues de B.B.King. Oui, il y a eu d'autres King dans la musique que le King

of Pop...
Mais ici c'est juste qu'on va utiliser de manière élémentaire le théorème de Rolle, mais « en cascade ».

Déjà, au premier rang, on refait ce que raconta déjà Rolle :

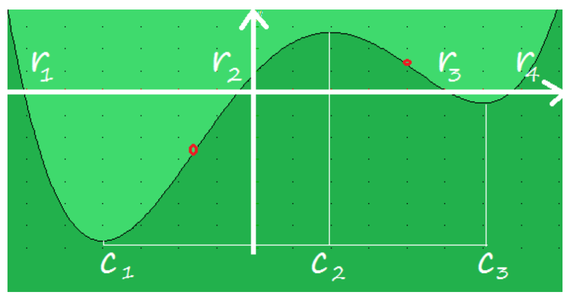
si le polynôme P de degré d admet d racines réelles, alors les racines du polynôme P' sont intercalées entre les racines de P.

En effet quitte à ordonner les racines de P, on a $r_1 < r_2 < \ldots < r_d$.
Sur les $d-1$ intervalles $[r_k,\ r_{k+1}]$, on appliquons le théorème de Rolle : P est continu de $[r_k,\ r_{k+1}]$ dans $\mathbb{R}$
P est dérivable sur $]r_k,\ r_{k+1}[$
$P(r_k) = P(r_{k+1})$

Il existe donc un certain c_k tel vérifiant $P'(c_k)$.
De plus $r_1 < c_1 < r_2 < c_2 < r_3 < c_3 < \ldots < c_{d-1} < r_d$, les $c_k$sont tous distincts.
On a trouvé $d-1$ racines pour P'. On les a toutes.

Vocabulaire : si P est scindé, alors P' est scindé.
Un polynôme scindé est un polynôme qui s'écrit comme produit de polynômes de degré 1 : $P(X) = \lambda.\prod_{k=1}^{d}(X - r_k)$.
C'est ce qui est utile pour les formules de Viète.

On sait déjà depuis la seconde que le sommet de la parabole est juste au milieu des deux racines. mais le résultat s'étend aux degrés plus élevés.
Petit détail supplémentaire : la moyenne $\dfrac{c_1 + \ldots + c_{d-1}}{d-1}$ est égale à la moyenne $\dfrac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ (facile ! Viète).
On notera qu'on peut recommencer et insérer les racines de P" entre les racines de P'.
Sur ce schéma, on a marqué en rouge les racines de P", qui sont des points d'inflexion.
Et on localise encore les racines de $P^{(3)}$. Et ainsi de suite.



Cette idée se généralise sur $\mathbb{C}$, sans pouvoir utiliser le théorème de Rolle (car il utilise l'ordre sur $\mathbb{R}$ [16]).
C'est dans une IS.

Le polynôme complexe P de degré 4 a pour racines a, b, c et d. P' a pour racines α, βet γ.
Montrez pour z dans $\mathbb{C} - \{a,b,c,d\}$: $\dfrac{\overline{P'(z)}}{\overline{P(z)}} = \overline{\left(\dfrac{1}{z-a} + \dfrac{1}{z-b} + \dfrac{1}{z-c} + \dfrac{1}{z-d}\right)} = \dfrac{z-a}{|z-a|^2} + \dfrac{z-d}{|z-b|^2} + \dfrac{z-c}{|z-c|^2} + \dfrac{z-d}{|z-a|^2}$.
Déduisez qu'il existe quatre réels positifs λ_1 à λ_4 vérifiant $\alpha = \dfrac{\lambda_1.a + \lambda_2.b + \lambda_3.c + \lambda_4.d}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4}$.
Déduisez que le triangle de sommets α,β et γ est inscrit dans le quadrilatère de sommets a, b, c et d.
Montrez que les deux racines de P" et la racine de $P^{(3)}$ est aussi dans ce triangle.

Maintenant, on généralise, même quand l'application n'est pas un polynôme.
Rolle en cascade.

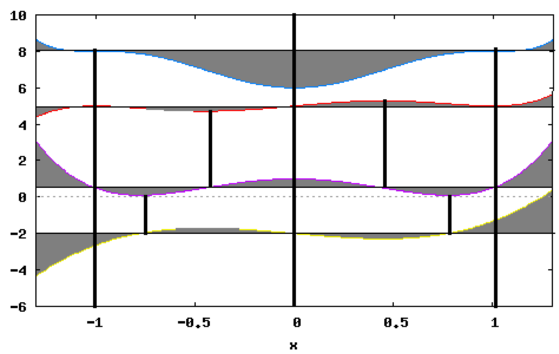
16. rappelons que $t \longmapsto e^{i.t}$ prend la même valeur en $-\pi$ et en π, est dérivable, mais sa dérivée ne s'annule pas sur $[-\pi,\ \pi]$ (la partie réelle s'annule une fois, la partie imaginaire aussi, mais pas en même temps)

Soit f n fois dérivable de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}$, admettant la même valeur en $n+1$ points, alors il existe au moins un point où $f^{(n)}$ s'annule.

☹ Le cas $n = 1$ correspond exactement au théorème de Rolle : la fonction dérivable qui prend la même valeur en deux points a une dérivée qui s'annule au moins une fois.

Pour l'hérédité, on suppose que toute application numérique qui prend la même valeur en $n+1$ points d'un intervalle a sa dérivée n^{ieme} qui s'annule au moins une fois. On prend alors une application f *($n+1$ fois dérivable)* qui prend la même valeur en $n+2$ points d'un intervalle, qu'on va noter a_0 jusqu'à a_{n+1}, et qu'on va supposer triés par ordre croissant.
On applique le théorème de Rolle sur chacun des intervalles $[a_k,\ a_{k+1}]$ *(f y est continue, dérivable, et prend la même valeur aux deux extrémités)*. Pour chacun, il existe au moins un point α_k de l'intervalle ouvert $]a_k,\ a_{k+1}[$ où f' s'annule :
$a_0 < \alpha_0 < a_1 < \alpha_1 < a_2 \ldots < \alpha_n < a_{n+1}$
L'application f' est alors $n+1$ fois dérivable et prend la même valeur *(nulle)* en $n+1$ points distincts *(les α_k pour k de 0 à n)*. Par hypothèse de récurrence, sa dérivée n^{ieme} s'annule au moins une fois. ☻

Et on va faire mieux : quand Rolle rencontre Leibniz.



Ce qui suit est classique, dans des sujets de concours et dans des oraux.

On définit pour tout n : $P_n = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$ Montrez que chaque P_n est un polynôme, donnez son degré, son terme dominant, sa parité, et montrez qu'il a n racines, toutes entre -1 et 1.

Attention, pour définir P_n, on doit d'abord calculer $(X^2-1)^n$ puis le dériver n fois.

n	$(X^2-1)^n$	P_n
0	1	0
1	X^2-1	$2.X$
2	$X^4-2.X^2+1$	$12.X^2-4$
3	$X^6-3.X^4+3.X^2-1$	$120.X^3-72.X$

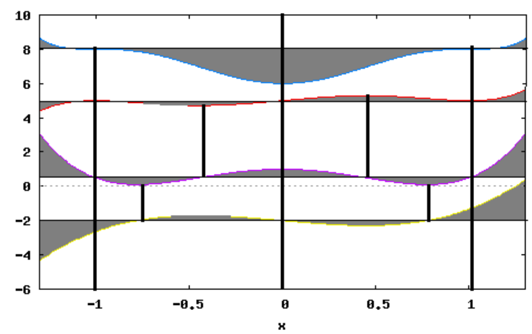
On fait tout de suite tomber les résultats évidents, en introduisant une notation : $Q_n(X) = (X^2-1)^n$. Et donc $P_n = (Q_n)^{(n)}$. C'est en créant cette notation qu'on commence à rendre les choses plus faciles à raconter.
• Chaque Q_n est un polynôme à coefficients entiers, donc chaque $P_n$est un polynôme à coefficients entiers.
• Q_n est de degré $2.n$, on le dérive n fois : P_n est de degré n.
• Le terme dominant de Q_n est $X^{2.n}$, donc P_n est de degré $2.n-n$
le terme dominant de P_n est $(2.n).(2.n-1)\ldots(n+1).X^{2.n-n}$
c'est à dire $\dfrac{(2.n)!}{n!}.X^n$

- Q_n est pair ($Q_n(-x) = Q_n(x)$), donc
  - les dérivées de Q_n sont alternativement paires et impaires
  - P_n est pair pour n pair ($P_n(-x) = P_n(x)$)
  - P_n est im pair pour n impair ($P_n(-x) = -P_n(x)$)
  - P_n a la même parité que n ($P_n(-x) = (-1)^n.P_n(x)$)
  - tous les termes de P_n ont des exposants de même parité

Maintenant, il faut identifier les racines de P_n.
On commence par Q_n prend la même valeur en -1 et en 1 (parité).
Donc, il existe un réel entre -1 et 1 où $(Q_n)'$ s'annule (en fait c'est en 0).

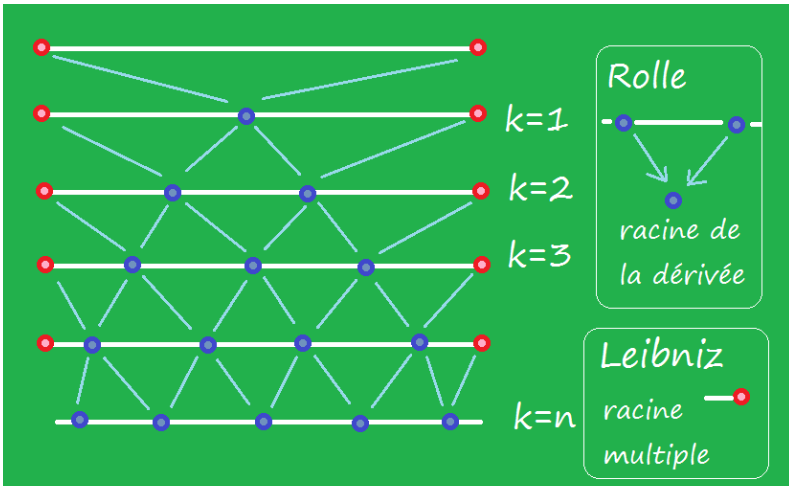
Mais ensuite ? Eh bien ensuite, $(Q_n)'$ est encore nul en -1 et 1 : $Q_n'(X) = n.2.X.(X^2-1)^{n-1}$.
Ainsi, Q_n' admet trois racines au moins : -1, la racine « Rolle » et 1.
On a trois racines, donc deux intervalles, donc deux racines pour sa dérivée Q_n", on les note $r_{2,0}$ et $r_{2,1}$.
D'accord, ça donne une racine pour $Q_n^{(3)}$. Mais mieux encore. Aux deux bornes de l'intervalle, il surgit encore deux racines : .$Q_n"(X) = n.2.(X^2-1)^{n-1} + 4.n.(n-1).X^2.(X^2-1)^{n-2}$ est nul en -1 et 1.
On sent venir la généralisation : à chaque étape, $(Q_n)^{(k)}$ a k racines venant du théorème de Rolle, mais il en gagne aussi deux en -1 et 1.
Il a donc $k+2$ racines successives.
Entre ces racines, il y a $k+1$ intervalles, et donc $k+1$ fois où l'on peut appliquer le théorème de Rolle.
Ce qui donne pour sa dérivée $k+1$ racines.
Et c'est ce qu'on voulait !

Reste à rendre ceci rigoureux. C'est à vous de prendre l'initiative d'introduire des notations.
n est fixé pour tout l'exercice, ce n'est pas sur lui qui porte la récurrence, mais sur le nombre k de dérivations [17].



On va donc au rang k dire que $(Q_n)^{(k)}$ admet k racines. On va les nommer.
Il faut alors un double indice, pour dire « i^{eme} racine de la dérivée k^{ieme} de Q_n » :
$r_{k,1} < r_{k,2} < \ldots < r_{k,k}$.
On n'a que $k-1$ intervalles, mais le coup de génie est de dire : $(Q_n)^{(k)}$ s'annule aussi en -1 et 1.
On a donc maintenant :
$-1 < r_{k,1} < r_{k,2} < \ldots < r_{k,k} < 1$
On applique le théorème de Rolle sur les $k+1$ intervalles de $[-1,\ r_{k,1}]$ à $[r_{k,k},\ 1]$ en passant par les $[r_{k,i},\ r_{k,i+1}]$.
Sur chaque intervalle $(Q_n)^{(k)}$ est continue, dérivable, et prend la même valeur (en l'occurrence 0) aux deux extrémités ; les théorème s'applique, et donne une racine de $(Q_n)^{(k+1)}$qu'on note donc $r_{k+1,i}$.
On a donc pour $(Q_n)^{(k+1)}$: $-1 < r_{k+1,1} < r_{k,1} < r_{k+1,2} < r_{k,2} < r_{k+1,3} < \ldots < r_{k,k} < r_{k+1,k+1} < 1$.
C'est le bon nombre de racines.

17. depuis le temps que vous vous tanne pour que vous disiez sur qui porte la récurrence !



En colle où à un oral de concours, l'usage de craies de couleur semble s'imposer pour visualiser ceci.
Avec une couleur pour indiquer les racines obtenues par théorème de Rolle, et une couleur pour les racines qui reviennent en -1 et 1 par calcul des dérivées.

Petit détail quand même : on va jusqu'où comme ça ? Jusqu'à $(Q_n)^{(n)}$ qui admet alors n racines $-1 < r_{n,1} < r_{n,2} < \ldots < r_{n,n} < 1$ (ici, n et k se rejoignent).
Ce qui devrait vous inquiéter : si on continue, on va avoir trop de racines !
Qu'est ce qui fait que le phénomène s'arrête au rang $k = n$?
cette fois ci, on n'a plus $(Q_n)^{(n)}(-1) = (Q_n)^{(n)}(1) = 0$ à rajouter aux bouts...

Mais on s'en moque, car $(Q_n)^{(n)}$ vient d'avouer qu'il avait n racines. Or, il est de degré n. On les a donc toutes.
C'est le genre de détail qu'il faut surveiller pour bien dire qu'on a compris toute la question qui a été posée.

Et ensuite, on se dit qu'il reste quand même un problème :
il faut quand même justifier la formule $(Q_n)^{(k)}(-1) = (Q_n)^{(k)}(1) = 0$ qui fait resurgir une source à chaque bout du champ.
Et ce n'est pas si évident. Surtout si on se dit que les premières dérivées de Q_n sont $Q_n'(X) = n.2.X.(X^2-1)^{n-1}$ et $Q_n"(X) = n.2.(X^2-1)^{n-1} + 4.n.(n-1).X^2.(X^2-1)^{n-2}$...

Mais quel nom ai-je cité au début ? Leibniz. C'est une histoire de polynôme qui s'annule en -1 et en 1.
On factorise $Q(X) = (X-1)^n.(X+1)^n$. Et on voit que -1 et 1 sont racines « très multiples » de Q_n.
Les termes $(X-1)$ et $(X+1)$ vont rester en facteur même après plusieurs dérivations :
$(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!\binom{k}{}}{i!.(k-i)!}.((X+1)^n)^{(i)}.((X-1)^n)^{(k-i)}$
tant que k et i sont assez petits, on sait dériver ces puissances : $((X+a)^n)^{(i)} = n.(n-1)\ldots(n-i-1).(X+a)^{n-i}$ (récurrence ? oui, sur qui ? sur i).
et même $((X+a)^n)^{(i)} = \frac{n!}{(n-i)!}.(X+a)^{n-i}$.
On reporte : $(Q_n)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!(n!)^2}{i!.(k-i)!.(n-i)!.(n-k+i)!}.(X+1)^{n-i}.(X-1)^{n-k+i}$.
tant que k est plus petit que k (donc i aussi), les exposants sont restés strictement positifs, et on a bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$, et $(Q_n)^{(k)}(-1) = 0$.
On est bien d'accord, c'est bien $(Q_n)^{(k)}(1) = 0$ et pas $(Q_n(1))^{(k)}$.

Un exercice assez dense, mais sans difficulté particulière..

Il existe une autre application du théorème de Rolle en cascade, avec une source comme ici. Je vous l'énoncé, et vous laisse y réfléchir, car on reviendra dessus plus tard pour démontrer la formule de Taylor-Young (la formule malingre, la petite formule de Taylor, avec un reste que l'on ne peut pas vraiment exploiter, mais qui a son importance quand même).

Soit φ une application n fois dérivable vérifiant

$\varphi(0) = 0$	$\varphi'(0) = 0$	$\varphi''(0) = 0$	$\varphi^{(3)}(0) = 0$	$\dots$	$\varphi^{(n-1)}(0) = 0$
$\varphi(1) = 0$					

On montre alors qu'il existe au moins un point γ entre 0 et 1 vérifiant $\varphi^{(n)}(\gamma) = 0$.

La présentation doit vous mettre sur la piste pour appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois...

$\varphi(0) = 0$	$\varphi'(0) = 0$	$\varphi''(0) = 0$	$\varphi^{(3)}(0) = 0$	$\dots$	$\varphi^{(n-1)}(0) = 0$
Rolle	$\varphi'(c) = 0$				
$\varphi(1) = 0$					

Vous voyez le truc qui prend forme ?

Conseil : il ne faudra pas hésiter à appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle sur différents intervalles.

Sinon, j'en profite pour dire que le théorème de Rolle dit qu'il existe au moins un point où la dérivée s'annule. Mais il ne dit pas quelle est la valeur de ce point. Il faudra s'en contenter, et ensuite faire des encadrements comme dans l'Inégalité des Accroissements Finis.

D'ailleurs, c'est parti pour le théorème des Accroissements Finis, dit aussi première formule de Taylor-Lagrange

7°) Théorème des accroissements finis.

Proposition :

Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,\ b[$ [a] alors il existe c dans $]a,\ b[$ vérifiant $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

a. oui, elle a le droit d'être dérivable en a et/ou en b

Comment comprendre le mot fini dans cette formule ? • *Pas comme le contraire d'infini,*
• *Mais comme le contraire d'infinitésimal.*

*D'un côté, un taux d'***accroissement** $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ *et de l'autre un taux in***fini***tésimal $f'(c)$, c'est à dire une limite de taux d'accroissements en c (quelque part entre a et b).*

Une fois qu'on l'a compris ainsi, il n'y a aucun effort à faire pour retenir ce théorème, et sa démonstration avec.

On peut [18] le voir géométriquement : sous réserve de continuité et dérivabilité :

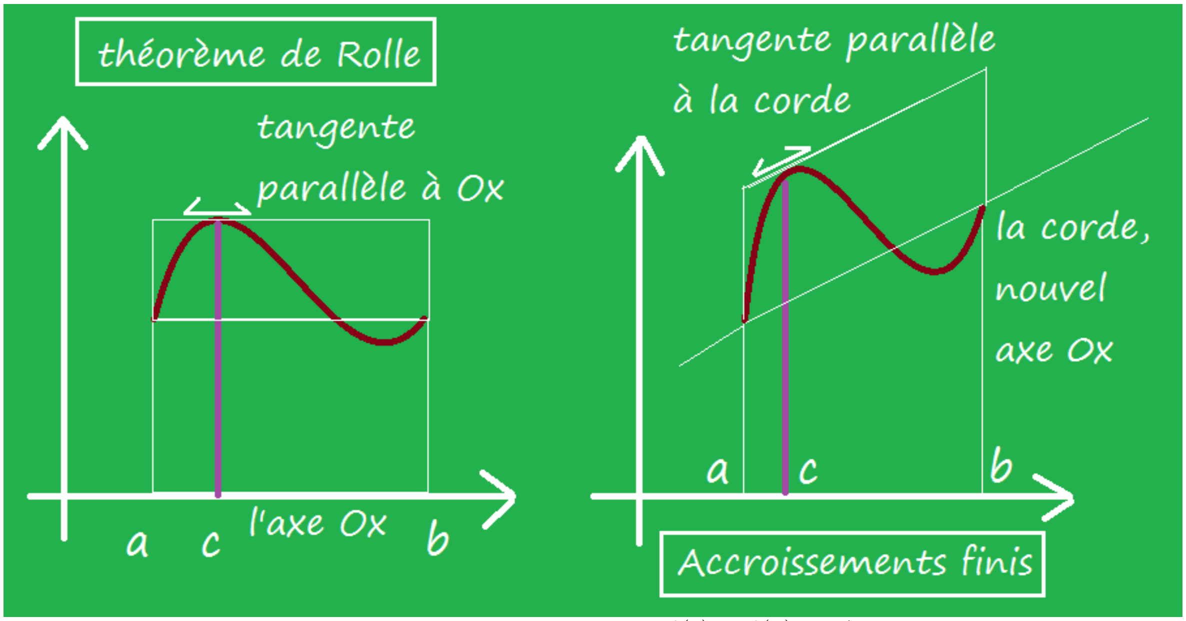
il y a un point antre a et b où la tangente est parallèle à la corde

La tangente, c'est la tangente en c, et son coefficient directeur, c'est $f'(c)$.

La corde, c'est celle qui joint $A(a,\ f(a)$ et $B(b,\ f(b))$ [a]

a. si vous n'êtes pas foutus de savoir que son coefficient directeur est le taux $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ comment faites vous en physique ?

18. on doit ?



Tiens, à propose de physique, d'un côté, un vrai taux : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, et de l'autre, un infinitésimal $f'(c)=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=c}$.[19].

Et cinématiquement : la vitesse moyenne sur le trajet, c'est $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, et la vitesse instantanée à un instant c'est $f'(c)$. Ne vous semble-t-il pas normal que si vous avez parcouru cent kilomètres en une heure, alors il y a eu au moins un moment où vous avez fait du cent à l'heure ? Attention, il est tentant d'y voir un théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la dérivée, mais en fait, c'est celui de Rolle appliqué à... ce qu'il faut.

J'en devine aussi parmi vous qui disent : tiens, quand $f(b)$ est égal à $f(a)$, ça donne $\exists c\in]a,\ b[,\ f'(c)=0$. Et ceux là vont me dire « le théorème de Rolle est un cas particulier du théorème des Accroissements Finis ».
Bof bof... En fait, le théorème de Rolle et celui des Accroissements Finis, c'est exactement le même.
Tout est une question d'axe des abscisses. Pour le théorème de Rolle, il est « horizontal »,
pour les accroissements finis, c'est la corde AB.
Alors, la preuve ? D'accord.
☹ On définit tout simplement la fonction « hauteur », différence entre le graphe et la sécante

le graphe		et	la sécante	
$f(x)$			$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)+f(a)$	
en a	en b		en a	en b
$f(a)$	$f(b)$		$0+f(a)$	$(f(b)-f(a))+f(a)=f(b)$

On définit donc $\varphi : x\longmapsto f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)-f(a)$[20].
Cette application est nulle en a et en b. fatiguez vous à vérifier si vous y tenez, mais on a tout fait pour ça.
Elle est continue sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$ puisque f et le terme affine le sont.

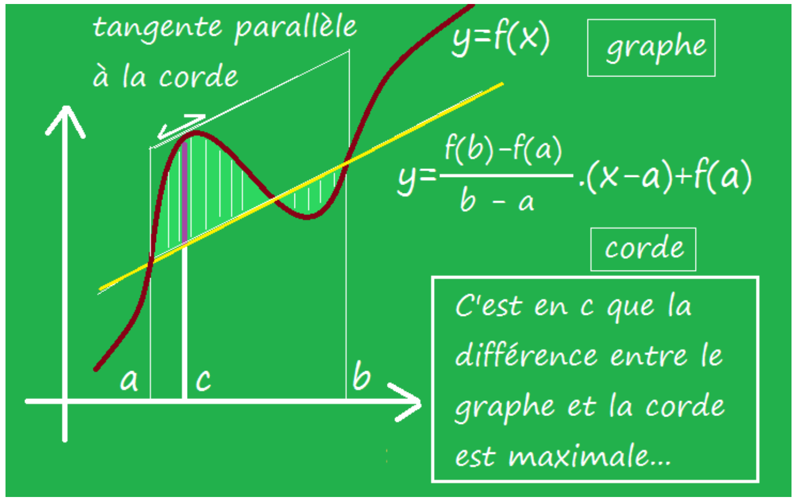
19. c'est enfin en voyant ce théorème en Sup que j'ai compris la distinction entre Δ et d dans les « notations de Leibniz et/ou de Landau » en physique

20. dans des livres, vous croiserez $f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.x$ ou $(b-a).f(x)-(f(b)-f(a)).x$ ou $(b-a).f(x)-(f(b)-f(a)).(x-a)$, c'est « pareil »

Le théorème de Rolle dit que sa dérivée s'annule en au moins un point entre a et b : $\exists c \in]a,\ b[,\ \phi'(c) = 0$.

Et $\phi'(c) = 0$, c'est exactement $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

☺



Ce théorème est donc tout bête : si on résume : on mesure la distance entre le graphe et la corde, et quand cette distance admet un maximum sur $[a,\ b]$ (théorème de compacité), la dérivée de la différence s'annule, la tangente est parallèle à la corde.

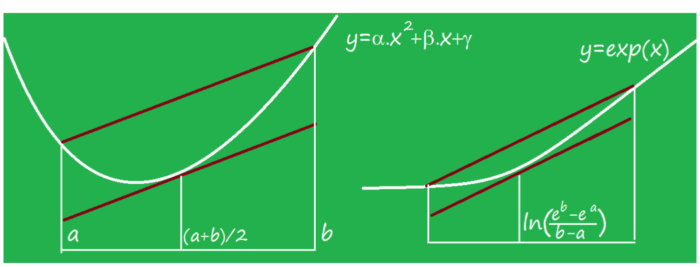
On verra une généralisation avec changement d'échelle sur $[a,\ b]$, ce sera la formule de l'Hôpital.
Il n'y a pas besoin de retenir la fonction φ sous sa forme littérale (avec des x-a, des $f(b) - f(a)$ et autres), mais sous sa forme géométrique ; vous avez ainsi les clefs de la démonstration, de la compréhension, et ça vous évite ensuite de dire n'importe quoi.

On va voir commente ce théorème donne alors
- *si f' est positive sur l'intervalle, alors f est croissante*
- *si f' est nulle sur l'intervalle, alors f est constante*

deux résultats qui vous semblent évident, mais pourtant...

Un exemple ? On prend $x \longmapsto x^2$ entre a et b : $\exists c \in]a,\ b[,\ f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ donne ici $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = 2.c$ soit encore $c = \dfrac{a + b}{1}$.
géométriquement : c'est au milieu du segment $[a,\ b]$ que la tangente est parallèle à la corde.

On prend $x \longmapsto x^3$ sur $\mathbb{R}^+$: cette fois $c = \sqrt{\dfrac{a^2 + a.b + b^2}{3}}$, et vous pouvez vérifier qu'il est bien entre a et b car entre $\sqrt{\dfrac{3.a^2}{3}}$ et $\sqrt{\dfrac{3.b^2}{3}}$.



Ah oui, si vous y tenez, je prends aussi $x \longmapsto \alpha.x + \beta$ mais là, c est « où vous voulez entre a et b », et j'espère que vous comprenez que c'est normal.
Et avec $x \longmapsto e^x$? $c = \ln\left(\dfrac{e^b - e^a}{b - a}\right)$ et il est moins clair que ce point est entre a et b.

Tiens, et pour $x \longmapsto \alpha.x^2 + \beta.x + \gamma$, le terme $\beta.x + \gamma$ n'apporte rien, et le multiplicateur non nuls, c'est encore juste au milieu du segment que la tangente est parallèle à la corde.
Un résultat que nous verrons en exercice dit que « si a et b se rapprochent, pour toute application f assez régulière, c a tendance à se placer de plus en plus près du milieu de $[a,\ b]$.

Si ensuite vous voulez devenir colleur, fabriquez un exercice de début d'année « à l'envers ».
Prenez une application f, comme le logarithme ou la tangente, écrivez le formule des accroissements finis, extrayez c, et posez aux élèves :

• montre moi que $\dfrac{b-a}{\ln(b)-\ln(a)}$ est toujours entre a et b.

• montre moi que $Arccos\left(\sqrt{\dfrac{b-a}{\tan(b)-\tan(a)}}\right)$ existe et est toujours entre a et b.

Il existe des reformulations du théorème des accroissements finis :

Version inégalité :

Soit f continue de $]a,\ b[$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,\ b[$, dont la dérivée est bornée par M (=majorée en valeur absolue), alors $[f(b)-f(a)|\leqslant M.|b-a|$.

Il suffit d'écrire $\exists c,\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ puis $\left|\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leqslant K$ puis de multiplier par $|b-a|$ positif.
Ce n'est pas une version tellement plus faible que l'égalité dans la mesure où on ne sait pas où est c entre a et b.

Si ce résultat vous suggère : si f' est bornée alors f est lipschitzienne, c'est normal.

Si vous voulez l'écrire $|f(b)-f(a)|\leqslant ||f'||.|b-a|$, vous avez raison aussi.

Si vous voulez aussi assembler ceci et un théorème de compacité, vous obtenez : si f est C^1 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ alors elle est lipschitzienne.

Il existe des versions avec des hypothèses plus faibles : si f est dérivable à droite en tout point de $]a,\ b[$ avec f'_d majorée par M, alors on a $|f(b)-f(a)|\leqslant M.|b-a|$.
Enfin, le théorème des accroissements finis n'est pas valable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{C}$(pas de résultat sur le signe de la dérivée quand on atteint un « maximum », donc pas de théorème de Rolle, donc pas de théorème des accroissements finis.
Mais l'inégalité des accroissements finis est valable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{C}$(démontsration hors programme, à moins que de prendre une hypothèse C^1 plus forte que D^1 et d'écrire $|f(b)-f(a)|=\left|\int_a^b f'(t).dt\right|\leqslant\int_a^b|f'(t)|.dt$ valable même pour les fonctions complexes. [a] ;

[a]. et le premier qui me demande D^1 c'est plus exigeant ou moins exigeant que C^1, je lui fais bouffer son cours, même en version électronique au lieu de la version papier

Il existe aussi la formulation première égalité de Taylor-Lagrange

Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,\ b[$, alors il existe c dans $]a,\ b[$ vérifiant $f(b)=f(a)+(b-a).f'(c)$.

Soit f continue de $[a,\ a+h]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,\ a+h[$, alors il existe k dans $]0,\ h[$ vérifiant $f(a+h)=f(a)+h.f'(a+k)$.

Soit f continue de $[a,\ a+h]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a,\ a+h[$, alors il existe θ dans $]0,\ 1[$ vérifiant $f(a+h)=f(a)+h.f'(a+\theta.h)$.

Ces formules vous rappellent la formule de Taylor $f(a+h)=f(a)+h.f(a)+\dots$ de la physique ? Le matheux dira « NON ».
Ces formules vous rappellent la formule de Taylor $f(a+h)=f(a)+h.\int_0^1 f'(a+t.h).dt$ des maths ? Le matheux dira « OUI ».

Exercice naïf :

Que pensez vous d'une application f vérifiant $\exists c,\ \forall(a,\ b),\ f(b)-f(a)=(b-a).f'(c)$?

Exercice très naïf mais qui me vaudra des questions (ah la logique...) :

Si f' ne s'annule jamais, alors f est injective.

Exercice moins naïf :

Que pensez vous d'une application f vérifiant $\forall (a,\ b),\ \exists ! c \in]a,\ b[,\ f(b)-f(a)=(b-a).f'(c)$? Quel nom donneriez vous à de telles applications ?

8°) Enfin la réciproque du théorème de Terminale. Et le lien entre intégrales et primitives.

Si f est dérivable de I dans $\mathbb{R}$ avec f' positive, alors f est croissante.
Si f est dérivable de I dans $\mathbb{R}$ avec f' nulle, alors f est constante.

En Terminale et dans notre cours jusqu'à présent, on a montré les réciproques : si l'application est croissante et dérivable alors sa dérivée est positive ou nulle.
Mais si vous avez des hypothèses sur les limites des taux d'accroissement, en quoi en auriez vous sur les taux d'accroissement proprement dits ?
C'est là qu'il faut passer de la positivité de $\dfrac{dy}{dx}$ à celle de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et c'est le théorème qui fait ça.
Rappelons que si une limite de taux est positive, ça ne doit rien de ces taux en toute généralité. De même qu'une affirmation du type « (u_n) converge vers 1 quand n tend vers l'infini » ne vous permet pas de conclure « donc tous les termes de la suite sont positifs », on est d'accord.

Démonstration : Ici, tout devient simple. On suppose f' positive (et définie, puisqu'on parle d'elle) sur I.
On prend a et b dans I avec $a \leqslant b$. Alors f est continue et dérivable sur $[a,\ b]$ (a et b sont dans I et I est un intervalle). On peut lui appliquer le théorème des accroissements finis : il existe un c vérifiant $f(b)-f(a)=(b-a).f'(c)$. Même si on ne sait pas où est c exactement, $f'(c)$ est positif et donc $f(b)-f(a)$ est positif.

En version rapide : les taux d'accroissement sont convertis en des dérivées en des points particuliers, ils sont donc positifs. Rapide, clair, des maths !

De même, si f' est nulle partout sur l'intervalle I, alors tous les taux d'accroissements $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ sont nuls, et f est constante.

Méfiez vous, ces théorèmes ont besoin du mot-clef « intervalle ». Rappelons en effet que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ a une dérivée négative sur tout $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$ mais n'est décroissante que sur $]-\infty,\ 0[$, puis sur $]0,\ +\infty[$, mais pas sur $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$.

Tiens, je suis en train d'étudier les dossiers ParcourSup en même temps que je tape ce cours.
Et je me dis que •*si au lieu de crouler sous l'avalanche de notes de maths/physique/SVT/écrit du bac et autres plus avis dans tous les sens,*
•*j'avais le droit de juste poser une question sur « vous comprenez* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *n'est décroissante que sur* $]-\infty,\ 0[$*, puis sur* $]0,\ +\infty[$*, mais pas sur* $]-\infty,\ 0[\cup]0,\ +\infty[$.
• *je trierais bien plus efficacement les candidats à la Prépa.*

Je vous explique quand vont servir ces résultats ?
Déjà, pour les tableaux de variations de fonctions, ça c'est vrai. Avec le résultat classique : quand la dérivée s'annule et change de signe, on a un extrémum.
Mais aussi pour le résultat qui va lier intégrales et primitives.

Une intégrale, c'est $\int_a^b f(t).dt$.

Une intégrale fonction de l'extrémité supérieure de l'intervalle, c'est $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$.

Une primitive de f, c'est F vérifiant $F' = f$.

On met le pluriel à « primitives », puisque si F est une primitive de f alors $F+\gamma$ avec γ réel est encore une primitive de f.

Calculer une intégrale, c'est trouver une aire algébrique, c'est regarder la limite des sommes de Riemann.
Trouver une primitive, c'est se poser un quiz : « tu connais une fonction qui se dérive en f ? »

A priori, aucun rapport entre les deux.

Cependant, prenons f continue sur I, alors **-a)** $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$ est définie sur I

-b) $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$ est dérivable sur I

-c) $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$ a pour dérivée f

Le point **a** c'est continue implique uniformément continue sur $[a,\ b]$ donc intégrable (déjà vu).

Le point **b** et le point **c** se traitent en une fois :

☹ On se donne x et on calcule un taux d'accroissement $\dfrac{\int_a^{x+h} f(t).dt - \int_a^x f(t).dt}{h}$.

Par relation de Chasles, c'est $\dfrac{1}{h}.\int_x^{x+h} f(t).dt$.

f est continue sur le segment $[x,\ x+h]$, elle y est bornée et atteint ses bornes : il existe c et d (dépendant de x et hh) vérifiant
$f(c) \leqslant f(t) \leqslant f(d)$ pour tout t de $[x,\ x+h]$[21].

On intègre de x à $x+h$: $h.f(c) = \int_x^{x+h} f(c).dt \leqslant \int_x^{x+h} f(t) \leqslant \int_x^{x+h} f(d).dt = f(d).\int_x^{x+h} dt = h.f(d)$

On divise par h : $f(c) \leqslant \dfrac{1}{h}.\int_x^{x+h} f(t).dt \leqslant f(d)$.[22]

Le réel $\dfrac{1}{h}.\int_x^{x+h} f(t).dt$ (valeur moyenne) est compris entre $f(c)$ et $f(d)$.

Par théorème des valeurs intermédiaires (f continue, $[c,\ d]$ intervalle), il existe γ entre c et d vérifiant $\dfrac{1}{h}.\int_x^{x+h} f(t).dt = f(\gamma)$.

Comme c et d sont entre x et $x+h$, γ y est aussi.

Si on fait tendre h vers 0, par encadrement, γ tend vers x.

Par continuité de f, quand h tend vers 0, $f(\gamma)$ tend vers $f(x)$.

Les taux d'accroissement de $x \longmapsto \int_a^x f(t).dt$ ont une limite, cette application « intégrale » est dérivable.

Ces taux d'accroissement tendent vers $f(x)$, cette application « intégrale » est dérivable de dérivée f. ☺

21. on va travailler avec h positif, mais je vous laisse voir h négatif
22. le résultat est le même avec h négatif, ici on recolle

Questions : • *vous avez tout suivi ?*

• *avez vous vu en combien d'endroits on a besoin des mots clefs « intervalle » et « continuité » ?*

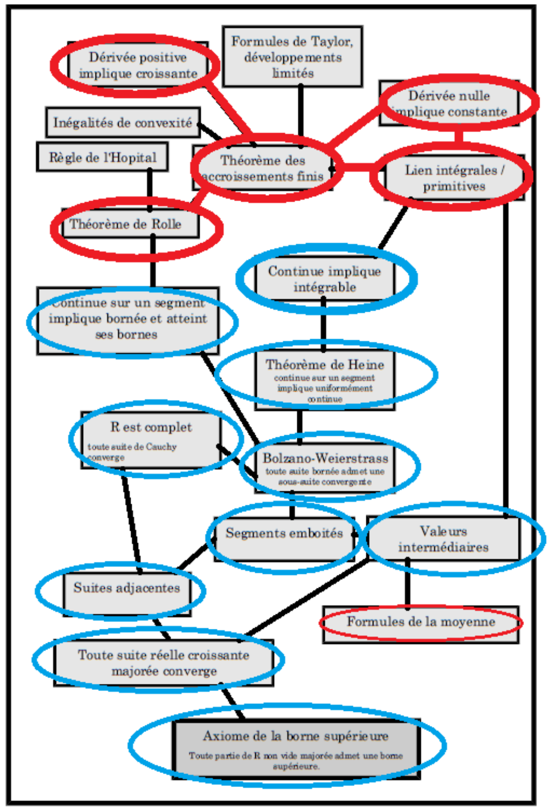
• *avez vous vu si ceci est traitable au niveau Terminale (hormis dans le cours de physique de Terminale où on croit que vous maitrisez les maths de Sup).*

On a donc prouvé que $\phi_a = x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t).dt$.

Soit alors F une (autre) primitive de f, trouvé en tâtonnant en se disant juste « qu'est ce qui va pouvoir se dériver en $x \longmapsto e^{\sin(x)}.\cos(x)$ ».

F et ϕ_a ont la même dérivée f.
Elles ne diffèrent que d'une constante.
Ah STOP ! *On a juste montré quand on ajoute une constante, on a encore une primitive, mais on n'a pas montré la réciproque.*
Il reste du boulot.
On considère $\phi_a - F$.
Elle est dérivable sur I.
Sa dérivée est $(\phi_a) - F'$, c'est à dire $f - f$.
$\phi_a - F$ a une dérivée nulle sur l'intervalle I, elle est constante. Ici, le prix à payer est le théorème des accroissements finis, on paye cher, c'est Sup.
Puisqu'elle est constante, elle a la même valeur en a et en b : $\phi_a(b) - F(b) = \phi_a(a) - F(a)$.
Or, par définition, $\phi_a(a) = 0$ (intervalle réduit à un point) et $\phi_a(b) = \displaystyle\int_a^b f(t).dt$.

On a donc en faisant passer $F(b)$ de l'autre côté : $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(t).dt = F(b) - F(a)}$



L'intégrale de f de a à b est égale à la variation d'une primitive de f entre a et b. Gagné !

C'est bon, à partir de maintenant, vous avez le droit de calculer les intégrales en faisant appel à une primitive.
Ce que fort heureusement vous faites depuis longtemps...
Rappelons au passage que ce lien entre intégrale et primitives permet de justifier la formule d'intégration par parties pour les applications de classe . En effet, on part de « une primitive de $u'.v + u.v'$ est $u.v$ et on a donc $\displaystyle\int_a^b (u'.v + u.v') = \left[u.v\right]_a^b$. Sous réserve que $u'.v + u.v'$ soit continue, ce qui va passer par la continuité de u, v', v et u'.

9°) Théorème à vendre.

Ce titre pour amener le théorème de l'Hospital. Mais j'aurais pu l'appeler aussi « le théorème interdit ». Je vous explique pourquoi (normalement, pour une digression de cet ordre, je me place entre le tableau et l'armoire, plutôt à votre gauche).

Pourquoi « à vendre » ?
Voici la petite histoire de ce théorème
Guillaume de l'Hospital (ou de l'Hôpital par élision du s), contre d'Autremont, marquis de Saint-Mesme, est un contemporain de Rolle, Leibniz et de quelques Bernoulli.
Il apprend d'ailleurs les mathématiques avec Jean/Johan Bernoulli (cherchez le dans l'arbre des Bernoulli).
Il a étudié le problème brachistochrone en même temps que Leibniz et Newton, proposé par Johan Bernoulli.
On lui doit le nom « intégrale » pour le calcul d'aire d'une fonction.
Membre de l'Académie Royale des Sciences (1693), Guillaume de l'Hospital, s'inspirant des travaux de son "maître" et en accord avec lui, édita en 1696 un traité complet de calcul différentiel : Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes (le terme intelligence est utilisé ici au sens de compréhension) qui marquera, avec les travaux de Leibniz et Newton, l'avènement des méthodes différentielles et du calcul intégral.
A la mort de l'Hospital, Johan Bernoulli indique quand même que la règle qui fait l'objet de notre théorème à été publiée par l'Hôpital dans son traité, mais avait été trouvée par Johan Bernoulli. On dit même que l'Hôpital aurait acheté le droit de publier ladite règle.

Pourquoi « interdit ».
Même si on le trouve sur l'excellente page de résumé de Wiki
https ://fr.wikiversity.org/wiki/Fonctions_d'une_variable_réelle/Dérivabilité#Théorèmes_sur_la_dérivation,
le théorème de l'Hospital ne fait pas partie du programme de Prépas.
Ce n'est pas que vous n'ayez pas le droit de l'utiliser. Mais si vous voulez l'utiliser, vous devez être en mesure de le redémontrer vous même (ce qui ne prend que quatre lignes).

Mais surtout, ce théorème ne sert à rien dans la pratique. Et bien souvent, le simple recours à un développement limité donne la même réponse aussi vite qu'en appliquant ce qu'on appelle la règle de l'Hospital.
En gros, je vous l'offre car il est totalement naturel, fait l'objet d'un exercice simple, et parce qu'ensuite, vous pouvez utiliser sa règle au brouillon pour avoir une idée de la limite d'une forme indéterminée. mais ensuite, vous passez par des développements limités, et le tour est joué.

Allez, que dit ce théorème :

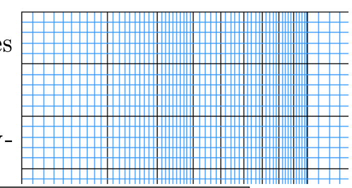
Soient f et g dérivables de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ avec g' ne s'annulant jamais, alors il existe c dans $]a,\ b[$ vérifiant $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Ça ressemble à la formule des accroissements finis.
• Les mauvais élèves croiront même que c'est le quotient de deux formules des accroissements finis :
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}}{\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ oui, c'est une grosse erreur, en avez vous conscience ? ★

• Les moins mauvais élèves diront : pour $g = Id$, on a $g'(c) = 1$, et c'est donc le théorème des accroissements finis.
Mais ceux là se méfient, on ne peut pas écrire « accroissements finis implique l'Hospital », puisque le premier est un cas particulier du second. L'implication est « l'Hospital implique accroissements finis », on est en bas d'un escalator qui descend ; on ne peut pas monter dessus...

• Mais il y a un rapport déjà avec le théorème des accroissements finis pour déblayer le terrain dans cette formule.
Pourquoi sous nos hypothèses « g' jamais nulle » le dénominateur ne s'annule-t-il jamais ?
Si g' ne s'annule pas, alors g est injective.
Si g est injective et continue, elle est strictement monotone. Et donc g' est de signe constant.
En tout cas, $g(b) - g(a)$ ne peut pas être nul.

☹ Maintenant, comment on la prouve ? En reprenant la démonstration du théorème des accroissements finis.



Mais avec une déformation par g strictement monotone sur l'axe des abscisses.
On remplace par homéomorphisme les x par des $g(x)$ sur l'axe.
Comme sur la papier millimétré non linéaire qui sert parfaois en physique.

le graphe	et	la sécante
$f(x)$		$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)$

non :

le graphe	et	la sécante
$f(x)$		$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(x)-g(a))$

La différence à étudier est donc $\varphi = x \longmapsto f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(x)-g(a))$.
Elle est bien définie (dénominateur non nul).
On la calcule aux bornes et on la dérive

en a	dérivée	en b
$\longmapsto f(a) - 0$	$f'(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g'(x)$	$f(b) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.(g(b)-g(a)) = f(a)$

Elle prend la même valeur aux deux bornes, par le théorème de Rolle, sa dérivée s'annule au moins une fois entre a et b en un point c.
En ce point c : $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g'(c)$. C'est tout. ☺

Ah pardon ? Où est l'erreur dans la formule ★ *? On a deux formules*
$\exists c,\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ *et* $\exists c,\ \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$
Mais en fait $\exists c,\ \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ *et* $\exists c',\ \dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c')$.
Il n'y a pas de raison que ce soit le même c quand même. Il n'y a même aucun raison que ce soit le même...
J'espère que vous sous en étiez rendu compte.
Normalement, en cours « en présentiel », certains auraient tenté de m'interrompre.
D'autres auraient souri ironiquement en se disant « non, il ne peut pas avoir fait cette erreur là, il nous teste *».*

.

Que dit ensuite la règle de l'Hôpital, celle qui lève des indéterminations mais qu'on n'a pas le droit d'utiliser ?
Mais il me semble qu'on vous appelle pour manger. On se retrouve lundi...

Passons de la formule de l'Hospital à la règle de l'Hospital, application directe de la formule.

Cadre d'application : on a une forme indéterminée $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quand x tend vers a (numérateur et dénominateur tendent vers 0 quand x tend vers a, que faire ?).
Idée : écrire $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ puisque $f(a)$ et $g(a)$ sont nuls.
Apport de l'Hospital : il existe c vérifiant $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ (sous réserve de carcatère D^1 de tout le monde).
Nouvelle recherche : est ce qe $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ a une limite quand c tend vers a (puisqu'il est coincé entre x et a).
Si cette limite existe, alors c'est donc aussi celle de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Version rapide : pour trouver si la forme indéterminée $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ a une limite quand x tend vers a, on regarde si $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ quand x tend vers a.
Si oui, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.
Sinon, recommencer si nécessaire avec $\lim\limits_{d\to a}\dfrac{f"(d)}{g"(d)}$.
Ce que les élèves retiennent : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{c\to a}\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ mais comme toujours, ils ne retiennent que la formule et pas les hypothèses... C'est nul. (laquelle cherche-t-on ? et si une seule des deux existe... c'est flou tout ça).
Ce que les mauvais élèves retiennent : $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ alors que ceci fait oublier que l'idée fait appel à un c entre a et x.

Remarque : je n'ai aucun exemple où $\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$ *n'a pas de limite alors que* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *en a une. mais ça doit pouvoir se construire.*[23]

23. *Proposition d'Alexandre : f et g constantes, f/g a une limite, mais f'/g' n'en a pas... moi j'allais envisager des trucs plus tordus.*

Exemple d'application puisque c'est par des exemples qu'on comprend.

On veut déterminer la $\boxed{\text{limite de } \dfrac{x-1}{\ln(x)} \text{ quand } x \text{ tend vers } 1}$ [24].

C'est bien une forme indéterminée. NON, pas $\dfrac{0}{0}$ qui n'a aucun sens.

C'est $\dfrac{o(1)}{o(1)}$. On parle de limite, et 0 n'est pas une histoire de limite, c'est un nombre.
Alors on oublie ces histoires de $\dfrac{0}{0}$ des mauvais cours de Terminale
(mais on n'en voudra pas au prof de Terminale, il n'a pas le langage des *petitso* pour vous le dire proprement)

On pose $f = x \longmapsto x$et $g = x \longmapsto \ln(x)$.

Et on fait appel au théorème de L'Hospital et on remplace limite de $\dfrac{x-1}{\ln(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{1}{\frac{1}{c}} = c$.

Quand c tend vers 1, ceci a une limite : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\ln(x)} = 1}$

Exercice : faites de même avec $\dfrac{\sin(\theta)}{theta} = \lim\limits_{c\to 0} \dfrac{\cos(c)}{1}$.

Oui, ces exemples sont idiots. Pourquoi solliciter l'Hospital alors que l'on a juste $\dfrac{x-1}{\ln(x)} = \dfrac{1}{\dfrac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1}} \longrightarrow_{x\to 1} \dfrac{1}{\ln'(1)} = 1$.

Oui, dans quasiment tous les cas, on s'en sort en voyant le bon taux d'accroissement, ou par un développement limité.

Exemple : dans le T.D. : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2^x - x^2}{x-2}$ avec ou sans hospitalisation...

Bon, on retiendra que le théorème de l'Hospital est joli à démontrer, mais inutile.

Dans la famille des théorèmes pas forcément utile, passons à celui qui a changé de nom depuis que j'enseigne [25].

10°) Théorème de la limite de la dérivée.

On l'appelle aussi théorème de la limite C^1. Et il s'est appelé à tort « théorème du prolongement C^1 ».
On va en donner deux versions : une simple, et une plus hard.

Version simple. Soit f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ (b n'aura aucune utilité),
dérivable sur $]a,\ b]$.
On ne sait pas si f est dérivable en a (en général parce que $f(a)$ vient d'un prolongement par continuité)
mais on sait que f' admet une limite en a (qu'on va noter α).
Alors, f est bien dérivable en a et même $f'(a) = \alpha$.

Résumé rapide : si $\lim\limits_{x\to a} f'(x)$ existe, alors $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} f'(x)$.

Comme toujours avec nos théorèmes, l'énoncé est plus long que la preuve, et ce qui prend le plus de temps, c'est de dire ce que le théorème ne dit pas, et le cadre précis d'application.

24. si elle existe, c'est aussi votre boulot de montrer qu'elle existe, sans dire « l'énoncé dit calculez »
25. tiens, comme ma femme, quand je l'ai rencontrée, elle avait un autre nom, puis elle a pris le mien, et c'est contagieux, mes enfants aussi sont atteints

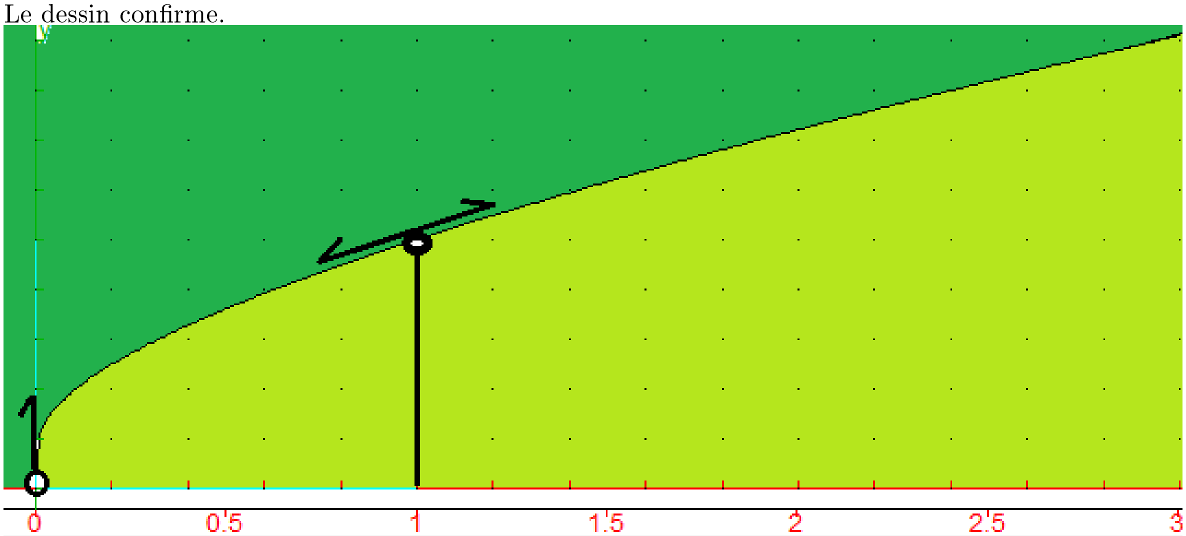
☺ Sous nos hypothèses de continuité et dérivabilité, on cherche si f est dérivable (à droite) en a en étudiant si les taux d'accroissement ont une limite.
Mais un taux $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ se convertit en un $f'(c)$ pour un c entre a et x (accroissements finis).
Quand x tend vers a, par encadrement, c tend vers a.
Par hypothèse de « limite de la dérivée », $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c)\longrightarrow\alpha$.
On reconnaît f est dérivable en a et $f'(a)=\alpha$. ☺

Application : $\boxed{f=x\longmapsto\dfrac{x-1}{\ln(x)} \text{ est elle dérivable en 1 et en 0 ?}}$
On vient de la prolonger en 1 il y a quelques lignes : valeur 1.
Mais de là à ce qu'elle soit dérivable.

Partout ailleurs qu'en 1 : $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-\dfrac{x-1}{x}}{(\ln(x))^2}=\dfrac{x.\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2}$.
Bon, c'est quand même une sacrée forme indéterminée ce truc quand x tend vers 1.
Mais elle tend vers $\dfrac{1}{2}$ quand x tend vers 1. mais si, on va dire que c'est évident. [26]

On en déduit alors $\boxed{f'(1)=\dfrac{1}{2}}$

Et en 0 ? On l'a prolongée par continuité déjà ? $\dfrac{x-1}{\ln(x)}\longrightarrow_{x\to 0} 0$ car le numérateur a une limite tandis que le dénominateur tend vers l'infini.
Reste à voir si la dérivée a une limite : $f'(x)=\dfrac{x.\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2}\longrightarrow_{x\to 0^+}+\infty$. Cette fois, en effet, le numérateur tend vers l'infini (négatif) et le dénominateur tend vers 0 (forme indéterminée $x.\ln(x)$ en à, c'est du cours).
On ne déduit que les taux d'accroissement tendent vers l'infini. f n'est pas dérivable en 0, mais on pourrait écrire abusivement $f'(0)\infty$ et interpréter géométriquement une demi-tangente verticale.
Le dessin confirme.



26. sinon, je vous le prouve dans huit lignes, soyez patients !

Ah oui, vous le réclamez : $\dfrac{\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2} = \dfrac{(1+h).\ln(1+h)-(1+h)+1}{(1+h).(\ln(1+h))^2}$ par changement de variable $x=1+h$ avec h qui tend vers 0

$\dfrac{\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2} = \dfrac{(1+h).\Big(h-\dfrac{h^2}{2}+o(h^2)\Big)-h}{(1+h).(h+o(h))^2}$ par le développement classique $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)_{x\to 0}$

$\dfrac{\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2} \sim \dfrac{\frac{h^2}{2}}{(1+h).h^2}$ par les équivalents

$\dfrac{\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2} \longrightarrow_{\substack{x\to 1\\ h\to 0}} \dfrac{1}{2}$ puisqu'il y a une limite numérique

Ou alors en allant vite : $\lim_{x\to 1}\Big(\dfrac{x.\ln(x)-x+1}{x.(\ln(x))^2}\Big) = \lim_{c\to 1}\dfrac{\ln(x)+1-1}{(\ln(c))^2+2.\ln(x)} = \lim_{d\to 1}\dfrac{\frac{1}{d}}{\frac{2.\ln(d)}{d}+\frac{2}{d}} = \dfrac{1}{2}$

Finalement pas mal, le coup de l'Hospital !

Bon, on résume : on a sû prolonger f par continuité en 0 et en 1

	en 0	en 1
je pose	$f(0)=0$	$f(1)=1$

on a montré que f est dérivable

	en 0	en 1
je découvre	$f'(0)=\infty$	$f(1)=\dfrac{1}{2}$

Pourquoi le vieux nom de « prolongement C^1 » était mal choisi ? C'est f qui était prolongée (choix arbitraire « je pose »), tandis que ce n'est pas moi qui choisissais la valeur de $f'(0)$ et $f'(1)$.
Dès que $f(0)$ et $f(1)$ sont données, $f'(0)$ et $f'(1)$ existent, je n'y peux rien.
C'est un prolongement C^0 qui admet son caractère C^1. Donc pas un « prolongement C^1 ».

mais au fit, était il utile ce théorème ? Devait on passer par le théorème des accroissements finis (pour convertir $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ en) puis par nos développements limités ?

Eh bien, non. Il y avait aussi rapide par le calcul pur : $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\frac{x-1}{\ln(x)}-1}{x-1} = \dfrac{x-1-\ln(x)}{(x-1).\ln(x)}$.

Et par le même développement limité ou par la même hospitalisation, la limite vaut $\dfrac{1}{2}$.

De même, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x-1}{x.\ln(x)}$. Le dénominateur tend vers 0 et le numérateur vers -1. le quotient tend vers l'infini.

Et normalement, là, vous me dites : mais ça va plus vite que de passer par la limite de la dérivée ! Et c'est vrai.

Alors, pourquoi utiliser le théorème de la limite de la dérivée ?
Beh, ce n'est pas la peine de l'utiliser.

Ou en tout cas, ça dépend du contexte.
Si l'énoncé vous demande de montrer que f est dérivable, restez en aux bons vieux taux d'accroissement, c'est efficace.
Si on vous demande de montrer que f est C^1 sur $]0,\ 2]$, utilisez le théorème de la limite de la dérivée.

En effet, il vous donne la valeur de la dérivée en 0 et en 1 et il vous dit aussi qu'elle coïncide avec la limite de f' en 0 et en &.
Bref, il vous dit que f est C^1.
Tandis que si vous passez par « je calcule $f'(1)$ par les taux », il vous faut ensuite quand même vérifier $\dfrac{x.\ln(x) - x + 1}{x.(\ln(x))^2} \longrightarrow_{x\to 1} \dfrac{1}{2}$. Et vous ne coupez pas à cette limite traitée au dessus par développement limité et/ou règle de l'Hospital.

L'outil que vous utiliserez dépendra donc de la forme de la question.

Exemple classique qui servira pour les décompositions en séries de Fourier

Soit φ dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on se donne a, et on pose $F_a = \theta \longmapsto \dfrac{\varphi(x) - \varphi(a)}{2.\sin\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}$. On vous demande de montrer que F_a se prolonge par continuité en a : équivalent du sinus, et définition de la dérivabilité de φ. On vous demande juste de prouver que F_a est dérivable en a : taux d'accroissements, développement limité de $f(a+h)$ à l'ordre 2. On vous demande carrément de prouver que F_a est C^1sur $[a-\pi,\ a+\pi]$: théorème de la limite de la dérivée. On vous demande de prouver que F_a est lipschitzienne : devinez.

Ah oui, je vous offre aussi le théorème de la limite de la dérivée dans sa forme lourde (interdite aux moins de 18 ans ou non étoilables) :

Version lourde. Soit f continue de $]a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ (b n'aura aucune utilité), dérivable sur $]a,\ b]$. On ne sait pas si f est prolongeable par continuité en a, et encore moins dérivable en a mais on sait que f' admet une limite en a (qu'on va noter α). Alors, f se prolonge par continuité en a (valeur ? euh, don't ask me), et ensuite elle est bien dérivable en a et même $f'(a) = \alpha$.

Qu'est ce qui change dans cette version ? f' a une limite, mais pour f on ne sait pas. *On va quand même prouver qu'elle en a une, sans pour autant la calculer..*
Je vous donne les grandes lignes, car on va assembler des théorèmes.

• f' a une limite en a, elle est donc bornée sur un intervalle $]a,\ a+\alpha]$.
• Comme f' est bornée, f est lipschitzienne.
• Comme elle est lipschitzienne elle est uniformément continue.
• Comme elle est uniformément continue, elle transforme les suites de Cauchy en suites de Cauchy.
• Si une suite (a_n) converge vers a, elle est de Cauchy, et donc la suite des images $(f(a_n))$ est aussi de Cauchy.
• Comme $(f(a_n))$ est de Cauchy, elle converge.
• Comme la suite $(f(a_n))$ converge, on peut prolonger f par continuité en a.
• Et on est alors ramené à la version simple, et f avoue qu'elle est dérivable.

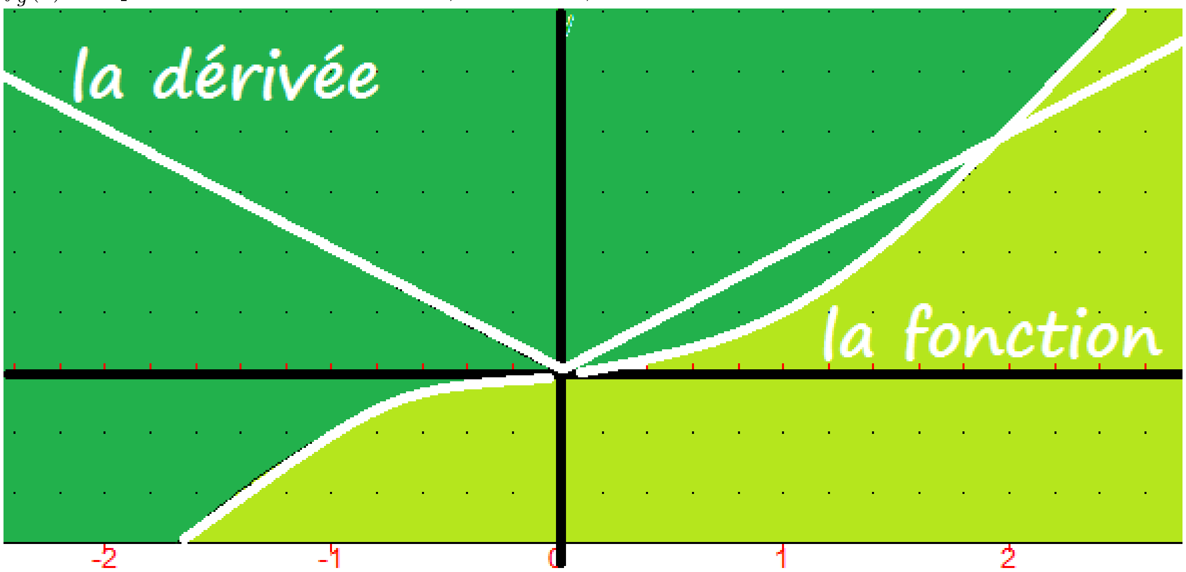
Cette version ne sert pas à grand chose, car il vous faudra quand même trouver la limite de f en a.

Une question en rapport avec le théorème de la limite de la dérivée, même si vous ne vous en rendez pas compte :

existe-t-il une application dont la dérivée est la valeur absolue ?

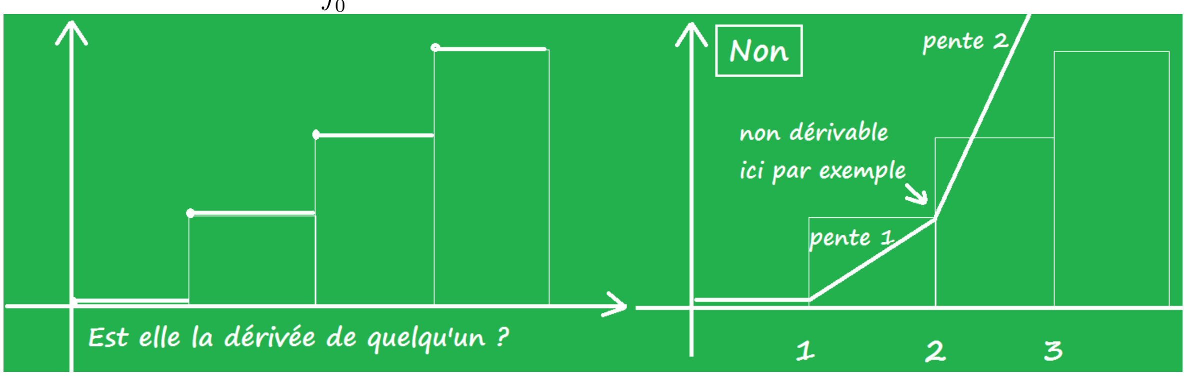
Euh, non, pardon, ça c'est trop facile : $x \longmapsto \dfrac{x.|x|}{2}$ a pour dérivée $x \longmapsto |x|$.

Il vaut mieux l'écrire $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x^2/2 & si & x>0 \\ 0 & si & x=0 \\ -x^2/2 & si & x<0 \end{array} \right|$. On la dérive $x \longmapsto \left\{ \begin{array}{ccc} x & si & x>0 \\ ? & si & x=0 \\ -x & si & x<0 \end{array} \right|$. (les formules ne donnent rien en 0 au premier coup d'œil, on sait juste $f'_d(0) = 0$ par la formule du haut et $f'_g(0) = 0$ par la formule du bas. Ah si, finalement, elle est dérivable en 0.



Non, je reprends ma question : $\boxed{\text{existe-t-il une application dont la dérivée est la partie entière ?}}$

Ne me répondez pas $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x [t].dt$, ce serait une erreur.



Cette application existe, mais ne se dérive pas en $x \longmapsto [x]$. En tout cas, en 1 elle ne se dérive pas en...
[1
NON ! En 1 elle ne se dérive pas... Elle a deux demi tangentes.
. *Qui ! Vous confondez intégrale et primitive ? A quoi a servi tout le 8° alors ?*
On reprend, à la recherche de f dérivable (et donc continue, oui) vérifiant $f'(x) = [x]$ pour tout x.
C'est possible ? je vous laisse mariner jusqu'à midi.
Mais la réponse sera non.
Et c'est la limite de la dérivée qui va vous le dire. Ou le théorème de Darboux. Comme quoi on prépare les enchainements.

Et maintenant, la réponse : non, il n'y a pas d'application dont $x \longmapsto [x]$ soit la dérivée. Bref, la partie entière n'a pas de primitive.

. *Oui, la malheureuse, la voilà discontinue, non dérivable, et sans primitive. Sans descednance, ni partents...*

Explication par l'absurde. Prenons nous à supposer qu'il existe F vérifiant $F' = [.]$ (au sens de $x \longmapsto [x]$).
Plaçons nous en $a = 1$, à gauche. On a $F'(c) = 0$ pour tout c de $[0,\ 1[$.
On en déduit que $\lim\limits_{\substack{c\to 1\\ c<1}} F'(c)$ existe.
Le théorème de la limite de la dérivée dit alors : F est donc dérivable en 1 et vérifie $F'(1) = 0$.
Or, $F'(1)$ devrait être égal à $[1]$ c'est à dire 1.

En bref, le théorème de la limite de la dérivée dit : « si F' a une limite en a, alors $F'(a)$ existe et est égal à cette limite ». Ou encore $f'(a) = \lim\limits_{x\to a} F'(x)$ (sous réserve d'existence).

Une dérivée serait donc forcément continue. C'est en gros ça l'idée. Et la partie entière ne l'est pas.
De même, $x \longmapsto 1_{x\geqslant 0}$ (fonction qui en $x = 0$ passe de $y = 0$ à $y = 1$, importante et utile en maths et physique) n'est la dérivée de personne.

Une dérivée ne peut pas faire n'importe quoi, elle ne peut pas sauter.
Bon, ce qui n'est pas grave, c'est qu'en physique (et en maths classiques), les fonctions que vous croisez sont continues, donc intégrables et primitivables.
Mais dans votre tableau de primitives, ce qu'il y a dans la colonne de gauche doit toujours être continu.

fonction f	primitive F
$x \longmapsto x^a$	$x \longmapsto \dfrac{x^{a+1}}{a+1}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$x \longmapsto \ln(x)$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$
$x \longmapsto [x]$	Non !
$x \longmapsto e^{x^2}$	existe

Delà dit, non, une dérivé F' n'est pas forcément continue. Ce qu'elle ne peut pas faire, c'est sauter.
Mais elle a le droit d'avoir d'autres discontinuités. De deuxième espèce.
Remontons sur le cours sur la continuité : discontinuité de première espèce : $\lim_{x\to a} f(x)$ existe mais ne vaut pas $f(a)$
discontinuité de deuxième espèce : $\lim_{x\to a} f(x)$ n'existe même pas.
Et là dessus, le théorème de la limite C^1 est tranquille : si $\lim_{x\to a} F'(x)$ n'existe pas (même dans $[-\infty,\ +\infty]$, alors peut être que $F'(a)$ existe quand même.
peut être que les taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ont une limite sans que ça passe par le théorème des accroissements fins.
Ça existe, ça ? Oui ! Et je vous en ai même déjà montré.

Je vous le refais : $\boxed{f = x \longmapsto \begin{cases} x^2.\sin(1/x) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x \leqslant 0 \end{cases}}$

f est continue sur $]0,\ +\infty[$ et sur $]-\infty,\ 0]$.

. *Ceci ne dit pas qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, il faut regarder en 0 si elle a une limite à droite : $x^2.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est le produit d'un $o(1)$ et d'un $O(1)$ (terme borné en sinus), il tend vers 0 et justement $f(0) = 0$.*

On dérive : $f' = x \longmapsto \begin{cases} 2.x.\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \\ ? & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$ et $f'_g(0) = 0$.

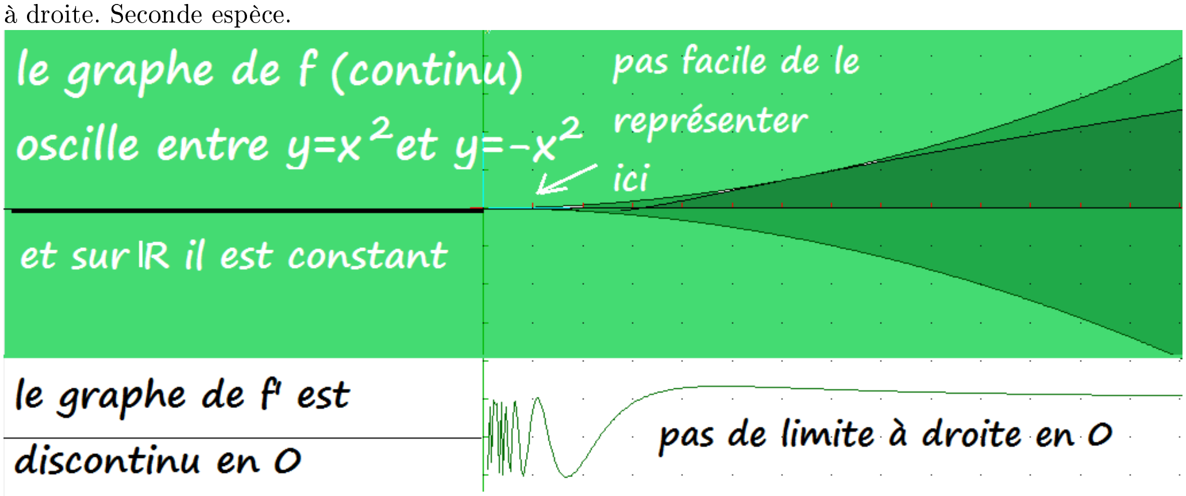
Il nous manque $f'_d(0)$. On tente la limite de la dérivée ? Beh non, justement, $2.x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0,$\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite, la somme n'a pas de limite.

. *On n'écrit pas naïvement* $\lim_{x\to 0}\left(2.x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(2.x.\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) + \lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ *puisque rien de tout ça n'existe !*

Le théorème de la limite de la dérivée reste muet. Il ne dit pas « non dérivable », il se contente de hausser les épaules en indiquant « je n'ai pas les outils pour ».
Alors que faire ? Revenir à la définition : $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow_{x\to 0} 0$.

On a donc $f'_d(0) = 0$. Et finalement $\boxed{f' = x \longmapsto \begin{cases} 2.x.\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}}$ *Avec trois lignes bien distinctes pour montrer qu'on a compris la difficulté, que ce n'est pas que du calcul, mais aussi du raisonnement...*

f est continue, dérivable, mais f' n'est pas continue en 0. Mais elle ne saute pas, elle n'a pas de limite à droite. Seconde espèce.



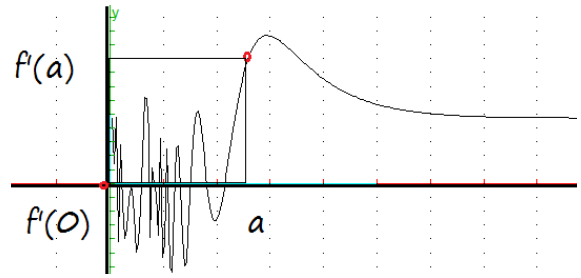
Encore une fois, un exemple pour vous éviter les naïvetés.

On va même démontrer le théorème de Darboux : la preuve qu'une dérivée ne saute pas : elle doit vérifier le théorème des valeurs intermédiaires.

11°) Théorème de Darboux.

Même si une application dérivée F' n'est pas forcément continue, elle vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Attention, on a montré de manière naturelle : continue implique valeurs intermédiaires. Mais on n'a quand même pas de réciproque.
On peut vérifier le T.V.I. sans être continue.
L'application f' de l'exemple précédent n'est pas continue (en 0, c'est tout), mais elle vérifie quand même le théorème des valeurs intermédiaires, même entre 0 et a par exemple. Toute valeur entre $f'(0) = 0$ et $f'(a)$ quelconque est atteinte au moins une fois entre 0 et a, à cause des oscillations...



Bon, le théorème de Darboux n'est pas au programme.
Est ce parce qu'il est difficile à démontrer : pas du tout.
Est ce parce qu'il sert très peu : c'est plutôt ça.

Mais sa démonstration fait appel à trois belles idées, et il mérite donc de figurer dans notre cours.
Je rappelle au passage : • *cours de Terminale : des théorèmes (je suis gentil en mettant le pluriel)*
• *cours de Sup : des idées*
• *cours de Spé : des idées et des théorèmes.*
Après, je le concède, ce n'est pas parce que vous ne l'aurez pas vu que vous ne pourrez pas calculer les huit intégrales dont vous aurez besoin en physique.
Et même si vous ne comprenez pas les subtilités entre D^1 mais pas C^1, vous pouvez intégrer une bonne école.
Mais c'est quand même décevant pour moi de savoir que vos parents vous ont donné un cerveau, et que vous ne l'utilisez pas à plein, que vous ne vous posez pas les bonnes questions et que vous restez dans un monde naïf où les applications se plient à tous vos désirs ; je la dérive, je l'intègre, elle est continue, je la trace...

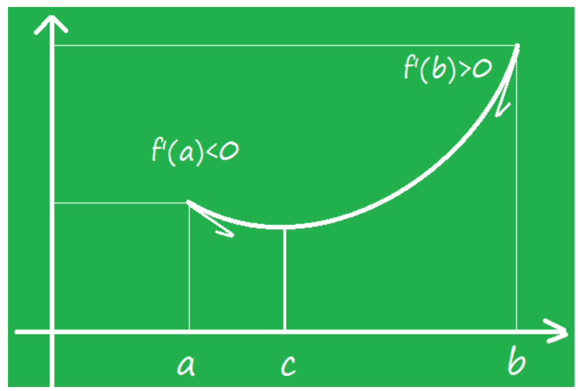
Première démonstration, utilisant un théorème déjà prouvé.
On suppose pour commencer $f'(a) < 0$ et $f'(a) > 0$.
f n'est donc pas monotone sur $[a,\ b]$.
En effet, si elle était croissante, $f'(x)$ serait positif ou nul en tout point,
y compris en a.
si elle était décroissante, $f'(x)$ serait négatif ou nul tout point,
y compris en b.
f n'est donc pas injective (contraposée du théorème « continue et injective sur un intervalle implique monotone »).
Il existe donc u et v dans $[a,\ b]$ vérifiant $f(u) = f(v)$ et $u \neq v$.
En appliquant le théorème de Rolle sur $[u, `\ v]$, il vient un point c de $]u,\ v[$ donc de $[a,\ b]$ vérifiant $f'(c) = 0$.

On passe du cas « s'annule » au cas « passe par toutes les valeurs intermédiaires ».
On pose cette fois $f'(a) = \alpha$ et $f'(b) = \beta$. Il faut montrer que toute valeur γ comprise entre α et β est atteinte au moins une fois par f'.
On fait alors un petit changement d'axe : $g = t \longmapsto f(t) - \gamma.t$.
g est continue, dérivable. On calcule $g'(a) = \alpha - \gamma$ et $g'(b) = \beta - \gamma$.
Comme γ est entre α et β, ces deux réels sont de signes opposés.
On applique le résultat précédent : $\exists c \in [a,\ b],\ g'(c) = 0$.
On reconnaît $\exists c \in [a,\ b],\ f'(c) = \gamma$.

La démonstration n'a jamais essayé d'appliquer le principe des valeurs intermédiaires à f'.
Et n'a jamais cherché non plus à dire « plaçons nous sur un intervalle sur lequel f est croissante ». Ces intervalles d'existence peut être pas forcement, à cause des applications un peu tordues qui ne manquent pas d'exister et ne sont pas de gentils polynômes, fractions ou fonctions simplistes.

Autre preuve, se ramenant à la démonstration du théorème de Rolle.

On recommence avec la version « passe par 0 ». On suppose donc $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
On va montrer que f' s'annule en au moins un point c, et ce point c sera le point où f atteint son minimum.
Visuellement, on part de a avec dérivée négative, on part donc vers le bas, on arrive en b en « montant », donc le minimum était entre les deux.
Mais cette vision est trop naïve ($f'(a) < 0$ n'implique pas « f est décroissante sur un voisinage de a » si on n'a pas d'hypothèse de continuité sur f', ne soyez pas trop naïfs).
On y va : f est continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$, elle admet un minimum, atteint en un point c.
c pourrait il être en a ? Si le minimum est en a, pour tout x plus grand que a on a $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \dfrac{\oplus}{\oplus}$, et par passage à la limite $f'(a) \geqslant 0$. C'est contraire à l'hypothèse.
c pourrait il être en b ? Si le minimum est en b, pour tout x plus peeit que b on a $\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} = \dfrac{\oplus}{\ominus}$, et par passage à la limite $f'(b) \leqslant 0$. C'est contraire à l'hypothèse.
Le minimum est atteint en un point c de l'ouvert $]a,\ b[$. En bougeant à droite et à gauche de c, on a $0 \geqslant f'(c) \geqslant 0$ et donc $f'(c) = 0$.



Le passage de $\begin{array}{cc} & f'(a) < 0 < f'(b) \Rightarrow \exists c,\ f'(c) = 0 \\ \text{à} & f'(a) < \gamma < f'(b) \Rightarrow \exists c,\ f'(c) = \gamma \end{array}$ se refait avec la même idée classique de $g = t \longmapsto f(t) - \gamma.t$.

On va passer maintenant à des formules qui sont aussi à la limite du programme : les formules de type « Lagrange », pour lesquelles à chaque fois il faut trouver une bonne fonction auxiliaire à laquelle appliquer le théorème des accroissements finis ou même le théorème de Rolle pour ensuite, en reportant, obtenir la bonne réponse.
Ces théorèmes sont à la limite du programme dans la mesure où seule la majoration de Taylor-Lagrange est exigible, et prouvée par formule de Taylor avec reste intégrale :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + \frac{h^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.f^{(n+1)}(a+t.h).dt$$

donne $\left| f(a+h) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k \right| \leqslant \dfrac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.||f^{(n+1)}||$, comprenez vous comment ?

Mais il existe tant d'exercices et sujets de concours dans lesquels on vous invite à introduire la bonne fonction pour prouver une égalité avec des dérivées partout qu'il vaut mieux en avoir croisé quelques uns...

Petit mot sur JOSEPH-LOUIS LAGRANGE *: en dépit de son nom qui sonne bien français, il est en fait italien de naissance (Giuseppe Luigi Lagrangia ou aussi Giuseppe Ludovico De la Grange Tournier), né à Turin en 1736 et mort à Paris en 1813.*
Il a passé vingt et un ans de sa vie en Allemagne, puis a été naturalisé français en 1802, ayant déjà vécu une bonne partie de la Révolution en France (membre de la commission des poids et mesures, promoteur du calendrier républicain, il déclarera à la mort de Lavoisier guillotiné sous la terreur « Il a fallu un instant pour couper sa tête, et un siècle ne suffira pas pour en produire une si bien faite. »
Il repose au Panthéon et a son nom sur la tour Eiffel, ça vous laisse de l'espoir (mais à votre âge, tout seul, il

avait compris les travaux de Newton, Bernoulli et Euler).
dans notre cours, il intervient pour les formules de Taylor-Lagrange, pour les polynômes interpolateurs, pour les points dits de Lagrange en astronomie dans le problème des trois corps.

12°) Quelques formules de Taylor-Lagrange.

La première est une reformulation du théorème des accroissements finis $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ dans lequel on pose $b = a+h$. Comme c est entre a et b, il s'écrit $a+\theta.h$ avec θ entre 0 et 1 (on part de a, mais on n'avance pas tout entier de h, juste d'une fraction.

$\exists\theta \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a+\theta.h)$ pour f dérivable sur $[a,\ a+h]$

Je sais, ça ressemble à un développement limité. Mais c'est une formule de Taylor. Et c'est bien plus fort.

Un développement limité, comme son nom l'indique, c'est juste une limite. Et le seul endroit où il s'applique, c'est pour mh=0 .
Une formule de Taylor, c'est une vraie égalité, que h soit « petit » ou « grand ».
Douze fois sur dix, quand dans le cours vous dites que vous utilisez un développement limité, vous utilisez en fait une formule de Taylor dans laquelle vous oubliez d'écrire le reste.
Bon, c'est vrai que développements limités et formules de Taylor se ressemblent. C'est la même partie principale, et c'est juste le reste qui change.
Comme le physicien n'écrit pas le reste, il croit que c'est un développement limité.
. *Pour le matheux, comme il doit l'écrire, ça ne fait pas du tout le même usage.*

Visuellement, c'est bel et bien la tangente en $a+\theta.h$ qui est parallèle à la corde entre $A(a,\ f(a))$ et $B(a+h,\ f(a+h)$.
Un exercice classique consiste à déterminer θ pour des fonctions classiques *(est il unique ? ça dépend de la fonction)*, puis à chercher son comportement suivant a et h.

$x \longmapsto x^2$	$x \longmapsto e^x$	$x \longmapsto \ln(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$
$\theta_{a,h} = \dfrac{1}{2}$	$\theta_{a,h} = \dfrac{1}{h}.\ln\Big(\dfrac{e^h-1}{h}\Big)$	$\theta_{a,h} = \dfrac{1}{\ln(a+h)-\ln(a)} - \dfrac{a}{h}$	$\theta_{a,h} = \dfrac{1}{h}.Arccos\Big(\dfrac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h}\Big)$

Il est intéressant de voir dans quelle mesure θ dépend de a et de h.
Un exercice plus délicat mais classique consiste à trouver la limite de $\theta_{a,h}$ quand h tend vers 0.
Je vous le fais pour $\dfrac{1}{h}.\ln\Big(\dfrac{e^h-1}{h}\Big)$ pour vous habituer à nos développements limités classiques :

$$\frac{1}{h}.\ln\Big(\frac{e^h-1}{h}\Big) = \frac{1}{h}.\ln\Big(\frac{1+h+\frac{h^2}{2}+o(h^2)-1}{h}\Big) = \frac{1}{h}.\ln\Big(1+\frac{h}{2}+o(h)\Big) = \frac{1}{h}.\Big(\frac{h}{2}+o(h)+o(\frac{h}{2}+o(h)\Big) = \frac{1}{2}+o(1)$$

Et aussi pour le logarithme :

$$\frac{1}{\ln(a+h)-\ln(a)} - \frac{a}{h} = \frac{1}{\ln\Big(1+\frac{h}{a}\Big)} - \frac{a}{h} = \frac{1}{\frac{h}{a}-\frac{h^2}{2.a^2)}+o(h^2)} - \frac{a}{h} = \frac{\frac{h^2}{2.a}+o(h^2)}{\frac{h^2}{a}-\frac{h^3}{2.a^2}+o(h^3)} = \frac{1}{2}+o(1)$$

Il est peut être surprenant sur deux exemples de voir $\theta_{a,h}$ tendre vers $\dfrac{1}{2}$ quand h tend vers 0, indépendamment de a et de la fonction ?
Réfléchissez la formule un peu moche et obtenue à la va-vite : $\theta_{a,h} = \dfrac{1}{h}.(f')^{-1}\Big(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\Big)$ et faites des développements limités à des ordres suffisants...

Passons maintenant à la formule de Taylor à l'ordre 2.

Pour f deux fois dérivable sur $[a,\ a+h]$: $\exists\theta \in]0,\ 1[,\ f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \dfrac{h^2}{2}.f''(a+\theta.h)$.

Ce n'est évidemment pas le même θ qu'à l'ordre 1, puisque on veut un terme de plus.
On se donne a et $a+h$, et on définit $g = t \longmapsto f(a+t) - f(a) - t.f'(a) - t^2.A$.
Qui est A ? je vous laisse le choisir pour l'instant, pour avoir $g(h) = 0$.
C'est donc facile : $A = \dfrac{f(a+h)-f(a)-h.f'(a)}{h^2}$.

Bon, c'est idiot, mais si on réussit à montrer que A s'écrit aussi $\dfrac{f''(a+\theta.h)}{2}$ pour un $a+\theta.h$ de $]a,\ a+h[$, on aura gagné.

On constate : $g(0)=0$ (facile) et $g(h)=0$ *(choix de A)*.
Il existe donc α vérifiant $g'(\alpha)=0$ *(Rolle)*.
Mais on a aussi $g'(t)=f'(a+t)-f'a)-2.A.t$ et donc $g'(0)=0$.
g' s'annule en deux points, on lui applique à son tour le théorème de Rolle : $\exists\beta,\ g''(\beta)=0$.
Et cette égalité $g''(\beta)=0$, c'est justement $2.a=f''(a+\beta)$ pour un β bien choisi entre 0 et h.
On reporte dans $g(h)=0$: $f(a+h)-f(a)-h.f'(a)-\dfrac{h^2}{2}.f''(a+\beta)$ avec β de la forme $\theta.h$.

Les grandes lignes de la suivante :

> Pour f trois fois dérivable sur $[a,\ a+h]$, on a
> $\exists\theta\in]0,\ 1[,\ f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\dfrac{h^2}{2}.f''(a)+\dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a+\theta.h)$.

Le schéma est le même. a et h sont fixés, on définit $g=t\longmapsto f(a+t)-f(a)-t.f'(a)-\dfrac{t^2}{2}.f''(a)-t^3.A$

On choisit $A=\dfrac{f(a+t)-f(a)-t.f'(a)-\frac{t^2}{2}.f''(a)}{h^3}$, mais on a envie d'aboutir à $a=\dfrac{f^{(3)}(quelqu'un)}{6}$.
On calcule et on applique le théorème de Rolle

$g(t)=f(a+t)-f(a)-t.f'(a)-\dfrac{t^2}{2}.f''(a)-t^3.A$	$g(0)=0$				$g(h)=0$ (ch
				Rolle :	
$g'(t)=f'(a+t)-f'(a)-t.f''(a)-3.t^2.A$	$g'(0)=0$			$\exists\alpha,\ g'(\alpha=0)$	
			Rolle		
$g''(t)=f''(a+t)-f''(a)-6.t.A$	$g''(0)=0$		$\exists\beta,\ g''(\beta)=0$		
		Rolle			
$g^{(3)}(t)=f^{(3)}(a+t)-6.A$		$\exists\gamma,\ g^{(3)}(\gamma)=0$			

On reconnaît d'ailleurs un lemme sur le théorème de Rolle en cascade.
La dernière ligne donne $f^{(3)}(\gamma)=6.A$.
On a trouvé une autre forme pour A, on reporte dans $g(h)=0$ et on a bien $f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+\dfrac{h^2}{2}.f''(a)+\dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a+\gamma)$ pour un γ de $]0,\ h[$ qu'on écrit $\theta.h$.

.
On note que comme h^2 est toujours positif, c'est le signe de f'' sur un intervalle autour de a qui va nous renseigner sur la position du graphe de f par rapport à sa tangente en a.

Je vous laisse généraliser la démonstration pour

> Pour f $n+1$ fois dérivable sur $[a,\ a+h]$, on a
> $\exists\theta\in]0,\ 1[,\ f(a+h)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{h^k}{k}.f^{(k)}(a)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}..f^{(n+1)}(a+\theta.h)$.

On définit g, on choisit a pour avoir $g(h)=0$.
On applique le théorème de Rolle autant de fois qu'il faut, en constatant que $g^{(k)}(0)$ est nul à chaque fois.
On aboutit finalement à l'existence d'un α entre 0 et h vérifiant $g^{(n+1)}(\alpha)=0$.
On reporte dans $g(h)=0$ et on obtient la formule demandée.

Cela dit, on peut obtenir la formule en une seule étape, avec une fonction bien choisie, mais pas évidente à construire soi même.

a et b donnés, on définit $\boxed{\phi = x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x).\frac{(b-x)^k}{k!} \text{ et } \psi = x \longmapsto \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}}$:

On la dérive, elle télescope génialement (faites le) : $\phi' = x \longmapsto f^{(n+1)}(x).\frac{(b-x)^n}{n!}$. Et $\psi' = x \longmapsto -\frac{(b-x)^n}{n!}$

On lui applique alors le théorème de l'Hôpital au quotient $\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\psi(b)-\psi(a)}$ entre a et b :
il existe c vérifiant $\frac{\phi(b)-\phi(a)}{\psi(b)-\psi(a)} = \frac{\phi'(c)}{\psi'(c)}$.

On remplace par leurs valeurs : $\frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a).\frac{(b-xa)}{k!}}{-\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{\frac{(b-c)^n}{n!}.f^{(n+1)}(c)}{-\frac{(b-c)^n}{n!}}$ *(attention, dans $\phi(b)$ il reste un terme).*

On simplifie les $(b-c)^n$ et les factorielles $\frac{f(b) - \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a).\frac{(b-xa)}{k!}}{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}} = f^{(n+1)}(c)$.

On fait passer de l'autre côté, et on tient la formule !
Démonstration totalement hors programme car nécessitant d'utiliser la règle de l'Hospital, et le recours à une fonction artificielle.

Pour vous entrainer : prenez cette fois la même fonction ϕ et remplacer ψ par $x \longmapsto \frac{(b-a)^{n+1-p}}{(n+1-p)!}$, appliquez encore le théorème de l'Hospital et vous avez la formule de Taylor-Schlömilch : $\exists c \in]a,\ b[,\ f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k}.f^{(k)}(a) + \frac{(b-c)^p.(b-a)^{n+1-p}}{(n+1)!.(n+1-p)}..f^{(n+1)}(c)$.
Pour p égal à 0, c'est notre formule, et pour $p = n$, elle porte le nom de formule de Taylor avec reste de Cauchy.
Bon, après je dois vous avouer n'avoir trouvé aucun sujet de concours allant chercher ce résultat.

---

téressant : la comparaison des formules de Taylor :

$f(a+h) =$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+\frac{h^{n+1}}{n!}.\int_0^1 (1-t).f^{(n+1)}(a+t.h).dt$	intégrale
$f(a+h) =$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(a+\theta.h)$	Lagrange
$\Big\vert f(a+h)-$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)\Big\vert$	$\leqslant \frac{\vert h\vert^{n+1}}{(n+1)!}.\vert\vert f_{n+1}\vert\vert$	Lagrange
$f(a+h) =$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+o(h^n)_{h\to 0}$	Young (D.L.)

Elles se ressemblent.
• Si on part de la formule de Taylor avec reste intégrale et qu'on majore $f^{(n+1)}(a+t.h)$ dans l'intégrale par $\vert\vert f^{(n+1)})\vert\vert$ puis intègre $\frac{1}{n!}.\int_0^1 (1-t)^n.dt = \frac{1}{(n+1)!}$, on obtient l'inégalité de Taylor-Lagrange.
• Si on part de l'égalité de Taylor Lagrange et qu'on majore le reste, on trouve l'égalité de Taylor-Lagrange.

• Si on part de la formule avec reste intégrale et qu'on dit que $f^{(n+1)}$ est constante, on trouve la formule de Taylor Lagrange.
• La formule avec reste intégrale prend une moyenne pondérée le long d'un intervalle, alors que Taylor Lagrange va la chercher en un point.
• Si on dit que $\dfrac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}.||f^{(n+1)}||$ est un $O(h^{n+1})$, on peut le faire dégénérer en $o(h^n)$ [27] moins précis, et on a la formule de Taylor Young, appelée aussi développement limité.

Mais elles ont des hypothèses différentes.

$f(a+h) =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+\dfrac{h^{n+1}}{n!}.\displaystyle\int_0^1 (1-t).f^{(n+1)}(a+t.h).dt$	intégrale
	f est C^{n+1} sur $[a,\ b]$ (continuité de $f^{(n+1)}$		
$f(a+h) =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!}.f^{(n+1)}(a+\theta.h)$	Lagrange
	f est D^{n+1}, (existence de $f^{(n+1)}$ c'est tout)		
$\Big\vert f(a+h)-$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)\Big\vert$	$\leqslant \dfrac{\vert h\vert^{n+1}}{(n+1)!}.\vert\vert f_{n+1}\vert\vert$	Lagrange
	f est D^{n+1} et même à valeurs dans $\mathbb{C}$		
$f(a+h) =$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+o(h^n)_{h\to 0}$	Young (D.L.)
	f est juste D^{n-1} et une fois encore dérivable en a		

La formule avec reste intégrale a besoin de la continuité de $f^{(n+1)}$ pour pouvoir intégrer par parties.
C'est la formule de Taylor-Young (développement limité) qui en demande le moins, pas besoin de dérivée $(n+1)^{ieme}$. Mais en même temps, c'est celle qui sert le moins.

Et des applications différentes. Les deux premières formules sont des égalités. On peut les appliquer en n'importe quel point. Et elles donnent le signe du reste, une majoration...
L'inégalité de Taylor Lagrange majore le reste mais n'en donne pas le signe.
La formule de Taylor-Young *(que je méprise mais que je vais vous démontrer en fin de semaine)* permet juste de calculer les limites et lever des indéterminations, obtenir des équivalents. Mais vous ne pouvez pas l'utiliser pour $h$donné. Même petit » avec les tonnes de guillemets. Le seul h pour lequel elle donne une égalité est $h = 0$. Mais sinon, elle dit juste que la méga indétermination $\dfrac{f(b) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k}{h^n}$tend quand même vers 0 quand h tend vers 0.

27. si, il existe des termes qui sont $o(h^n)$ mais pas encore $O(h^{n+1})$, comme $h^{n+\frac{1}{2}}$, et je veux que les plus faibles comprennent au moins cette échelle en 0 et ne soinet pas à chaque fois à devoir apprdnre par coeur des trucs sans les « voir »

J'insiste comme un boulet

(alors que je sais que les élèves à qui ce serait utile vont lire ça, et faire l'erreur dans les minutes qui suivront, sans même s'en rendre compte) :

en physique, si vous écrirez $\sin(\theta) \simeq \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$ *pour* θ *petit, vous ne faites pas un développement limité*

ou alors, dites moi quel est le prof de physique qui va dire « génial : $\dfrac{\sin(\theta) - \theta + \frac{\theta^3}{6}}{\theta^4}$ *tend vers* 0 *quand* θ*tend vers* 0*, ça va me servir ».*

vous écrivez une formule de Taylor.

Et vous sous-entendez que la différence est petite entre $\sin(\theta)$ *et* $\theta - \dfrac{\theta^3}{6}$*, majorée par* $\dfrac{\theta^5}{120}$ *(c'est* $\dfrac{\theta^5}{120}.||\sin^{(6)}||$*).*

Il existe une **formule de Taylor-Lagrange multiplicative**, qu'on retrouve dans des sujets de concours. Elle commence par un lemme :

soit F une application $n+1$ fois dérivable, s'annulant en n points a_1 à a_n d'un intervalle I (disons $\mathbb{R}$).
alors pour tout x, il existe c vérifiant $F(x) = \dfrac{(x-a_1).(x-a_2)\dots(x-a_n)}{n!}.F^{(n)}(c)$

Pour n égal à 1, c'est $F(x) = F(a) + (x - a_1).F'(c)$, reconnu
Pour n égal à 2, c'est dans l'I.S. de mardi dernier.
Pour n quelconque... on dit que si x est l'un des a_i, on peut prendre c comme on veut.
Sinon, on définit $g = t \longmapsto F(t) - A.(t-a_1).(t-a_2)\dots(t-a_n)$ et on ajuste A pour avoir $g(x) = 0$ *(équation du premier degré).*
L'application g est nulle en $n+1$ points *(les* a_k *et aussi* x *lui même).*
L'application g' est donc nulle en n points *(*n *intervalles sur lesquels appliquer le théorème de Rolle).*
On poursuit « en cascade » jusqu'à $g^{(n)}$ qui s'annule au moins une fois en un point qu'on va noter c.
En ce point c, il reste $F^{(n)}(c) - n!.A = 0$ *(le polynôme de degré* $n(x-a_1)\dots(x-a_n)$ *a presque tout perdu à la dérivation, sauf la dérivée de son terme dominant* x^n*).*
On a donc $A = \dfrac{F^{(n)}(c)}{n!}$. On reporte dans l'information $g(x) = 0$ et on a la formule souhaitée.

Que fait on de ça ensuite ? Si on nous donne f quelconque et n points a_1 à a_n, on construit le polynôme de degré strictement inférieur à n qui coïncide avec f en a_1, a_2 jusqu'à a_n.

C'est le polynôme de Lagrange $P = x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(\prod_{i\neq k}\dfrac{X-a_i}{a_k-a_i}\Big).f(a_k)$.

Vérifiez, il est construit pour.
Je vous le refais pour trois racines a_1, a_2 et a_3

	$x = a_1$	$x = a_2$	$x = a_3$
$\dfrac{(X-a_2).(X-a_3)}{(a_1-a_2).(a_1-a_3)}$	1	0	0
$\dfrac{(X-a_1).(X-a_3)}{(a_2-a_1).(a_2-a_3)}$	0	1	0
$\dfrac{(X-a_1).(X-a_2)}{(a_3-a_1).(a_3-a_2)}$	0	0	1

puis

	$x = a_1$	$x = a_2$	$x = a_3$
$\dfrac{(X-a_2).(X-a_3)}{(a_1-a_2).(a_1-a_3)}.f(a_1)$	$f(a_1)$	0	0
$\dfrac{(X-a_1).(X-a_3)}{(a_2-a_1).(a_2-a_3)}.f(a_2)$	0	$f(a_2)$	0
$\dfrac{(X-a_1).(X-a_2)}{(a_3-a_1).(a_3-a_2)}.f(a_3)$	0	0	$f(a_3)$
la somme	$f(a_1)$	$f(a_2)$	$f(a_3)$

La différence $F = f - P$ est alors nulle en n points. On peut lui appliquer le lemme précédent :
$\forall x,\ \exists c,\ F(x) = \dfrac{(x-a_1).(x-a_2)\dots(x-an)}{n!}.F^{(n)}(c)$.
Mais comme P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, sa dérivée n^{ieme} est nulle.
$\forall x,\ \exists c,\ f(x) - P(x) = \dfrac{(x-a_1).(x-a_2)\dots(x-an)}{n!}.f^{(n)}(c)$
Ceci permet de montrer que la différence entre la fonction et son interpolateur de Lagrange se majore

par $\dfrac{|(x-a_1).(x-a_2)\dots(x-an)|}{n!}.||f^{(n)}||$.
Il reste encore du travail, mais c'est l'objet des problèmes de concours justement...

On y reviendra avec la méthode des paraboles dite méthode de Simpson pour les calculs approchés d'intégrales.

Encore des formules de la famille de Lagrange ? Allez oui ![28]
Cette fois, en voici une qui sert pour le calcul approché d'intégrales par la somme de Riemann milieu (si vous ne voyez pas directement le rapport, ce n'est pas grave).
Vérifiez les étapes de cette démonstration, demandez vous si vous auriez réussi à construire ce raisonnement si on ne vous avait balisé le terrain qu'avec une ligne sur trois.
Soient a et b deux réels ($a<b$) et f de classe C^3 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$.
La formule de Taylor-Lagrange entre $\dfrac{a+b}{2}$ et b dit qu'il existe c_1 dans $\left]\dfrac{a+b}{2},\ b\right[$ tel que :

$$f(b)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{b-a}{2}.f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{(b-a)^2}{8}.f"\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{(b-a)^3}{48}.f^{(3)}(c_1)$$

La même formule entre a et $\dfrac{a+b}{2}$ livre c_2 dans $\left]a,\ \dfrac{a+b}{2}\right[$ vérifiant :

$$f(a)=f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-\frac{b-a}{2}.f'\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{(b-a)^2}{8}.f"\Big(\frac{a+b}{2}\Big)-\frac{(b-a)^3}{48}.f^{(3)}(c_2)$$

On les compare, ou plutôt on effectue la différence :
$f(b)-f(a)=(b-a).f\prime\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)+\dfrac{(b-a)^3}{24}.\dfrac{f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_2)}{2}$ *(des termes « impairs » sont partis).*
Le réel $\frac{f^{(3)}(c_1)+f^{(3)}(c_1)}{2}$ est entre $f^{(3)}(c_1)$ et $f^{(3)}(c_2)$, par continuité, il s'écrit $f^{(3)}(c)$ pour au moins un c entre c_1 et c_2.
On a obtenu $\boxed{f(b)=f(a)+(b-a).f'\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)+\dfrac{(b-a)^3}{24}.f^{(3)}(c)}$
Soit maintenant φ de classe C^2 de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$. On se donne un entier n et on découpe $[a,\ b]$ en n segments par l'équisubdivision des $a_k=a+k.\dfrac{b-a}{n}$.
On calcule alors $\displaystyle\int_a^b\varphi(t).dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\varphi(t).dt$ *(vraie intégrale)*
et $R_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}.f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)$ *(approximation interprétée géométriquement).*
On pose $f=x\longmapsto\displaystyle\int_a^x\varphi(t).dt$ (primitive de φ), et on calcule la différence *(est espérant qu'elle soit petite).*
$\displaystyle\int_a^b\varphi(t).dt-R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\int_{a_k}^{a_{k+1}}\varphi(t).dt-\frac{b-a}{n}.f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)\Big)$
$\displaystyle\int_a^b\varphi(t).dt-R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(a_{k+1})-f(a_k)-\frac{b-a}{n}.f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)\Big)$ car f primitive de φ
$\displaystyle\int_a^b\varphi(t).dt-R_n=\sum_{k=0}^{n-1}\Big(f(a_{k+1})-f(a_k)-(a_{k+1}-a_k).f\Big(\frac{a_k+a_{k+1}}{2}\Big)\Big)$ car $\dfrac{b-a}{n}$ est le pas de la subdivision

28. une année lointaine où vous n'étiez pas né, Jérémy Manesse (devenu depuis auteur de café théâtre) a profité d'une de mes pauses-café pour remplacer dans une écriture proche de la mienne intitulé d'une des formules de Taylor, plusieurs de ses camarades ont recopié en toute confiance, et dans le devoir suivant, j'ai vi des élèves invoquer la formule de Lagrange-Hablé...

On reconnaît la formule encadrée avec a_k et a_{k+1} dans le rôle de a et b ; il existe donc des c_k vérifiant

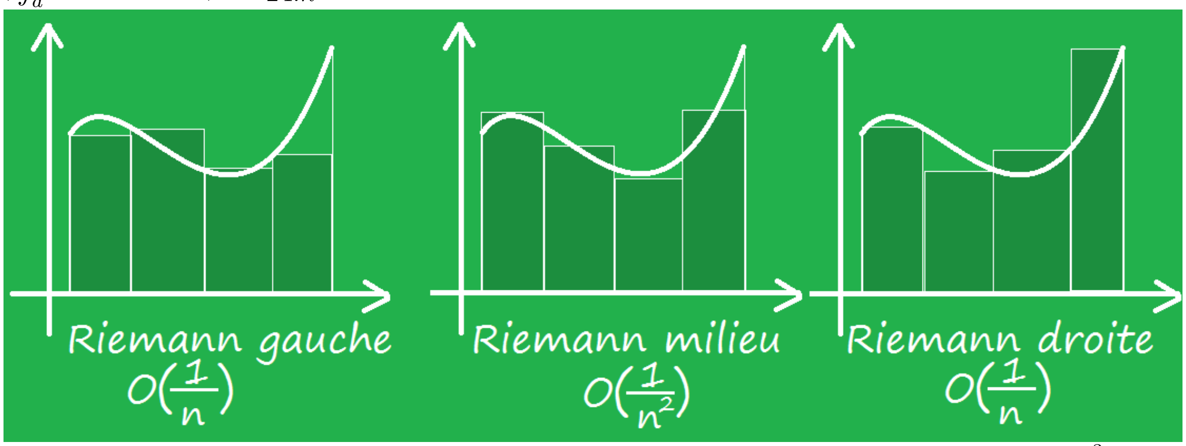
$$\int_a^b \varphi(t).dt - R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{24}.f^{(3)}(c_k)\Big)$$

$$\int_a^b \varphi(t).dt - R_n = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{(b-a)^3}{24.n^3}.f^{(3)}(c_k)\Big) \text{ par définition du pas}$$

$$\int_a^b \varphi(t).dt - R_n = \frac{(b-a)^3}{24.n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\varphi"(c_k)$$

On note $||\varphi"||$ un majorant de $|\varphi"|$ sur l'intervalle. On a n termes majorés par $||\varphi"||$:

$$\Big|\int_a^b \varphi(t).dt - R_n\Big| \leqslant \frac{(b-a)^3}{24.n^3}.n.||\varphi"||.$$



L'erreur commise dans la méthode des « sommes de Riemann milieu » est majorée par $\frac{(b-a)^3}{24.n^2}.||\varphi"||$.

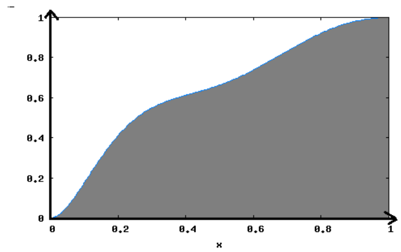
Le 24 n'est pas le terme important.

C'est le $\frac{1}{n^2}$ qui importe. Il est plus rapide que le $\frac{1}{n}$ des sommes de Riemann droite ou gauche.
Là, c'est l'approche « ingénieur », minimisation des coûts, optimisation des méthodes.
Pour calculer l'intégrale, vous avez intérêt à utiliser la Riemann milieu plutôt que la Riemann droite ou la Riemann gauche.
Quand vous doublez le nombre de points, l'erreur est divisée par 4.
Si vous multipliez par 10 le nombre de points, vous avec un facteur 100, vous gagnez deux chiffres derrière la virgule.

Il est évident qu'on tentera (et réussira) à trouver des méthodes en $0\Big(\frac{1}{n^3}\Big)$. *Pour elles (Simpson), en gros, en doublant le nombre de points, vous gagnez un facteur 8, ce qui fait presque une décimale de plus.*
D'ailleurs, je vous donne juste après les éléments pour la formule de Simpson :

Soit g une application de classe C^4 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrez qu'on peut ajuster A pour que $t \longmapsto \int_{-t}^{t} g(u).du - t.\frac{g(t)+4.g(0)+g(-t)}{3} - A.t^5$ *(notée ϕ)* soit nulle en 1 *(et que vaut elle en 0 ?)*.
Montrez que $\phi(-1)$ est nul aussi. Calculez $\phi'(0)$.
Déduisez que $\phi^{(3)}$ s'annule en au moins un point α de $]-1,\ 1[$.
Exprimez alors A à l'aide de $g^{(3)}(\alpha)$, $g^{(3)}(-\alpha)$ et α.
Déduisez : $\Big|\frac{g(-1)+4.g(0)+g(1)}{6} - \frac{1}{2}.\int_{-1}^{1} g(t).dt\Big| \leqslant \frac{M_4(g)}{180}$ où $M_4(g)$ est la borne supérieure de $|g^{(4)}|$ sur $[-1,\ 1]$.

Encore une formule de Taylor, avec des dérivées, posée aux oraux de concours, et pouvant faire l'objet d'un exercice de physique.



Soit f une application vérifiant :
$\boxed{f(0)=0}\ \boxed{f'(0)=0}\ \boxed{f(1)=1}\ \boxed{f'(1)=0}$, de classe C_2. Écrivez la formule de Taylor Lagrange pour f entre 0 et $1/2$ puis entre $1/2$ et 1. Éliminez $f(1/2)$. Déduisez qu'il existe au moins un c de $[0,\ 1]$ vérifiant $|f"(c)| \geqslant 4$.

Application : vous avez couru cent mètres en dix secondes *(départ et arrivée à vitesse nulle)*. Montrez que votre accélération a dépassé assurément au moins une fois une valeur à préciser.

Après Lagrange, on va passer à Young. La formule de Taylor-Young, c'est celle des développements limités, dont la partie principale (polynômiale) est donnée par la formule de Taylor, avec des dérivées (il y aurait donc des développements limités donnés par autre chose que $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k$ *? Oui, mais pas en physique...).*

13°) Formule de Taylor-Young.

Si f est au moins n fois dérivable en a, alors elle admet un développent limité d'ordre n en a, donné par la formule de Taylor : $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a) + o(h^n)_{h\to 0}$.

Les hypothèses sont
- définie sur un voisinage de a : $[a-\alpha,\ a+\alpha]$,
- à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou même C),
- $n-1$ fois dérivable sur ce voisinage
- et même encore une fois en a (et pas forcément ailleurs,

mais dans tous les cas qu'on va traiter, f sera C^∞, non ?

La vraie formulation du développement limité est $\dfrac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n} = o(1)$ ou si vous avez encore du mal avec les notations rigoureuses des o : $\dfrac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n} \longrightarrow_{h\to 0} 0$.

Pour que cette formule ait un sens, il faut $h \in]0,\ \alpha]$ ou $h \in [-\alpha,\ 0[$, pour la cohérence, et ceci est totalement compatible avec « h tend vers 0 ».

On va poser dans nos deux démonstration (oui, je vous en offre deux) :

$\varphi = h \longmapsto f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$. C'est la fonction différence entre f et son développement de Taylor.

Et c'est elle qui va devoir tendre très très vite vers 0.

<u>Méthode à applaudir le soir à vingt heures (oui, l'Hospital !) :</u>

Comme on a des hypothèses de dérivabilité suffisantes, on peut remplacer :

$\dfrac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n} = \dfrac{\varphi(h)}{h^n} = \dfrac{\varphi'(c)}{n.c^{n-1}} = \dfrac{\varphi"(d)}{n.(n-1).d^{n-2}} = \dfrac{\varphi^{(3)}(d)}{n.(n-1).(n-2).e^{n-3}}$ et on continue jusqu'à $\dfrac{\varphi^{(n-1)}(t)}{n!.t}$ pour un t convenable entre 0 et h.

Que reste-t-il dans $\varphi^{(n-1)}$? déjà $f^{(n-1)}(a+t)$ et du polynôme il ne reste que

$f(a+h)$	et	$f(a)$	$+h.f'(a)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f"(a)$	$+\dfrac{h^3}{6}.f^{(3)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^n}{n!}.f^{(n)}(a)$
$f'(a+h)$			$f'(a)$	$+h.f"(a)$	$+\dfrac{h^2}{2}.f^{(3)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^{k-1}}{(k-1)!}.f^{(k)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^{n-1}}{(n-1)!}.f^{(n)}(a)$
$f"(a+h)$				$f"(a)$	$+h.f^{(3)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^{k-2}}{(k-2)!}.f^{(k)}(a)$	$+\dots$	$+\dfrac{h^{n-2}}{(n-2)!}.f^{(n)}(a)$
$\dots$					$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$f^{(n-1)}(a+h)$								$f^{(n-1)}(a)$	$+h.f^{(n)}(a)$
$f^{(n)}(a+h)$									$f^{(n)}(a)$

On a donc

$$\frac{f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n}=\frac{f^{(n-1)}(a+h)-f^{(n-1)}(a)-h.f^{(n)}(a)}{n!.h}=\frac{1}{n!}.\Big(\frac{f^{(n-1)}(a+t)-f^{(n-1)}(a)}{t}-f^{(n)}(a)\Big).$$

Quand h tend vers 0, t le fait aussi et $\dfrac{f^{(n-1)}(a+t)-f^{(n-1)}(a)}{t}$ tend $f^{(n)}(a)$. La différence tend vers 0, et la « constante » $n!$ n'y change rien.

Bref, $\dfrac{f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n}$ tend vers 0 quand h tend vers 0.

C'est la définition de « je suis un petit o de h^n ». ☺

○ *Avec cette preuve dans laquelle on applique $n-1$ fois la formule simple de l'Hospital, on comprend que le développement limité d'ordre n est un résultat d'une grande précision. Plus n est grand, plus c'est fin.*

○ *On me demandera peut être : pourquoi ne pas être allé jusqu'à ce qui suit*

$$\frac{f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\dfrac{h^k}{k!}.f^{(k)}(a)}{h^n}=\frac{\varphi(h)}{h^n}=\frac{\varphi'(c)}{n.c^{n-1}}=\dots=\frac{\varphi^{(n-1)}(t)}{n!.t}=\frac{\varphi^{(n)}(u)}{n!}=\frac{f^{(n)}(a+u)-f^{(n)}(a)}{n!}\ ?$$

C'est alors facile : quand h tend vers 0, u tend aussi vers 0 et $f^{(n)}(a+u)-f^{(n)}(a)$ tend vers 0. facile, non ? facile, mais demandant une hypothèse plus forte que le théorème que j'ai énoncé et encadré. Dans votre preuve, vous avez besoin de f est de classe C^n (la dérivée n^{ieme} existe partout sur $[a-\alpha,\ a+\alpha]$ et elle est continue) ; moi, j'ai juste besoin de « la dérivée n^{ieme} existe en a ». C'est moins exigeant.

Preuve par accroissements finis (hospitalisation à domicile).
C'est presque la même. On applique le théorème des accroissements finis à φ *(la fonction du numérateur)* entre à et h, puis à φ' et ainsi de suite.
On agrandit un peu notre tableau plus haut avec des informations :
$\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$, $\varphi"(0)=0$ jusqu'à $\varphi^{(n-1)}(0)=0$.

application	calcul		
φ	$\varphi(0)=0$	entre 0 et h	$\exists\theta_1\in]0,\ 1[,\ \varphi(h)-\varphi(0)=h.\varphi'(\theta_1.h)$
φ'	$\varphi'(0)=0$	entre 0 et $\theta_1.h$	$\exists\theta_2\in]0,\ 1[,\ \varphi'(\theta_1.h)-\varphi'(0)=\theta_1.h.\varphi"(\theta_2.\theta_1.h)$
$\varphi"$	$\varphi"(0)=0$	entre 0 et $\theta_2.h$	$\exists\theta_3\in]0,\ 1[,\ \varphi"(\theta_2.\theta_1.h)-\varphi"(0)=\theta_1.\theta_2.h.\varphi^{(3)}(\theta_3.\theta_2.\theta_1.h)$
			$\dots$

Quand ensuite on reporte ces lignes les unes dans les autres, on obtient

$$\varphi(h)=h.\varphi'(\theta_1.h)=h^2.\theta_1.\varphi"(\theta_2.\theta_1.h)=h^3.(\theta_1)^2.\theta_2.\varphi^{(3)}(\theta_3.\theta_2.\theta_1.h)=h^4.(\theta_1)^3.(\theta_2)^2.\theta_3.\varphi^{(3)}(\theta_4.\theta_3.\theta_2.\theta_1.h)$$

Qu'obtient on à la $(n-1)^{ieme}$ itération ? Un truc assez moche :

$$\varphi(h)=h^{n-1}.(\theta_1)^{n-1}.(\theta_2)^{n-2}.(\theta_3)^{n-3}\dots\theta_{n-1}.\varphi(\theta_n.\theta_{n-1}\dots\theta_1.h).$$

Brrrr, fallait y arriver à celle là. On va poser $\Theta_n = \theta_n.\theta_{n-1}\dots\theta_1$ *(entre* 0 *et* 1*)* et même $\vartheta_n = (\theta_1)^{n-1}.(\theta_2)^{n-2}.(\theta_3)^{n-3}\dots\theta_{n-1}$ *(l'un est un* θ *majuscule, et l'autre est un* θ *calligraphique).*
Mais $\varphi^{(n-1)}$ est encore dérivable en a *(et juste en* a*)* de dérivée nulle en 0. On peut donc écrire un développement limité d'ordre 1 *(définition de la dérivabilité autrement que par le calcul)* :

$$\varphi^{(n-1)}(\Theta_n.h) = \varphi^{(n-1)}(0) + \Theta_n.h.\varphi^{(n)}(0) + o(\Theta_n.h)_{h\to 0} = o(\Theta_n.h)_{h\to 0}.$$

On reporte tout : $\varphi(h) = \vartheta_n.h^{n-1}.o(\Theta_n.h)_{h\to 0}$. Il reste à dire que tous ce qui s'appelle θ avec ou sans majuscule, $\varphi(h) = o(h^n)_{h\to 0}$.

Pardon, il y en a qui ont encore besoin qu'on leur écrive noir sur blanc $h^k.o(h^p) = o(h^{k+p})$ *?*
Ou qui ont besoin qu'on l'écrive à la physicienne $h^k.(h^p.\varepsilon(h)) = h^{k+p}.\varepsilon(h)$ *avec* $\varepsilon(h) \longrightarrow_{h\to 0} 0$.
Bon, on va dire que oui. Mais je considère que ceux et celles qui ont besoin de réécrire ça à la manière des physiciens devront décompter le temps perdu sur leur temps imparti à la physique, pas aux maths.

.

On reviendra plus tard plus en détails sur l'usage de cette formule de Taylor-Young et des développements limités, avec tout un grand paragraphe.

Oui, il nous a fallu tout ce temps pour arriver aux D.L.. Et mes collègues physiciens[a] *me les réclament depuis septembre. De même que les calculs dans* $\mathbb{C}$*, la trigonométrie, les équations différentielles linaires, et je ne sais plus quoi...*
Et moi, en septembre, je constate quoi ? Que c'est même sur les bases de la logique, du raisonnement, de la compréhension que vous avez des lacunes abyssales. Alors, arriver aux développements limités, faut pas pousser...

a. sens large, incluant la maman adoptive d'Émile et le Papa (de) Nicolas

.

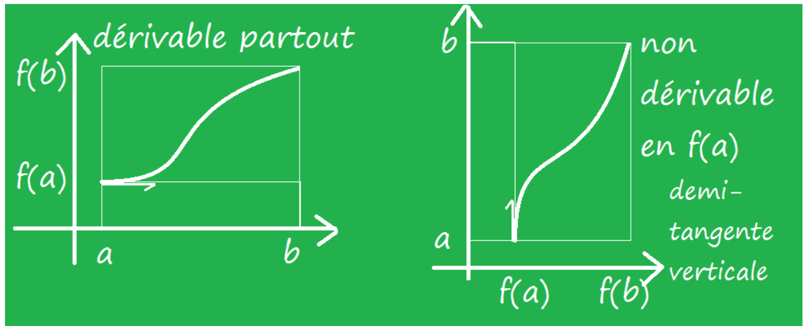
Auparavant, on va parler de difféomorphismes, et du calcul intégral. Même si vous avez observé qu'on a à peu près tout mis en place déjà sur le lien entre calcul intégral et calcul différentiel...

14°) D'homéo à difféo.

Bon, un homéomorphisme, c'est une application continue, bijective, dont la réciproque est aussi continue.
Un difféomorphisme, c'est une application continue, dérivable, bijective, dont la réciproque est aussi continue, dérivable (et bijective, oui, évidemment).

Comment ça pourrait ne pas être le cas si f est déjà continue, dérivable et bijective ?
Si on ne travaille pas sur un intervalle, comme on l'a vu avec homéomorphismes.

Mais une fois qu'on travaille sur un intervalle, si f est bijective et continue, f^{-1} est continue, on le sait.
Et si f est dérivable et bijective, qu'est ce qui pourrait empêcher f^{-1} d'être dérivable ? Si le graphe de f a des tangentes en tout point, ce doit être aussi le cas de celui de f^{-1}, non ? Avec un petit détail.



Si f a des tangentes horizontales, on va avoir des tangentes verticales dans le graphe de f^{-1}. Et de fait, f^{-1} ne sera pas dérivable en ces points. A moins que d'écrire $(f^{-1})'(b) = +\infty$, mais ça, c'est un peu limite, non ?

Alors, j'en devine prêtes à me dire : mais si il y a des tangentes horizontales, f cesse d'être bijective. Sauf si ce sont des tangentes horizontales au bout de l'intervalle. Ou même des tangentes horizontales, là où f' s'annule mais ne change pas de signe (comme pour notre $\theta \longmapsto \theta + \sin(\theta)$ en π).

Maintenant, il n'y a presque rien à démontrer.
On prend f continue, dérivable de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$.
On suppose que f' est strictement positive en tout point *(vous traiterez ensuite f' strictement négative partout si vous y tenez).*
Alors, f est strictement croissante de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ *(théorème des accroissements finis*[29]*).*
L'ensemble image est l'intervalle $[f(a),\ f(b)]$ *(théorème des valeurs intermédiaires).*
f^{-1} existe, et est continue (démonstration avec nos $f(f^{-1}(y_0)+\varepsilon) - f^{-1}(y_0))$.
Il nous manque sa dérivabilité en tout point.
On se donne un point y_0 et on étudie les taux d'accroissements de f^{-1} au voisinage de y_0 : $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$.
Géométriquement, il est facile de voir l'inverse d'un taux d'accroissements de f :
$\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} = \dfrac{1}{\dfrac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$ (rien n'est nul par injectivité de f et de f^1).
Quand y tend vers y_0, on voit $f^{-1}(y)$ tendre vers $f^{-1}(y_0)$(continuité de f^{-1}) et le dénominateur tendre vers $f'(f^{-1}(y_0))$.
Si on a bien fait l'hypothèse que f' ne s'annulait pas, on a bien une limite pour $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$.
On reconnait que f^{-1} est dérivable en y_0, de dérivée $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

On peut même écrire la formule indigeste des cours de ma jeunesse[30] : $\boxed{(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}}$

♦ Ici, c'est $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

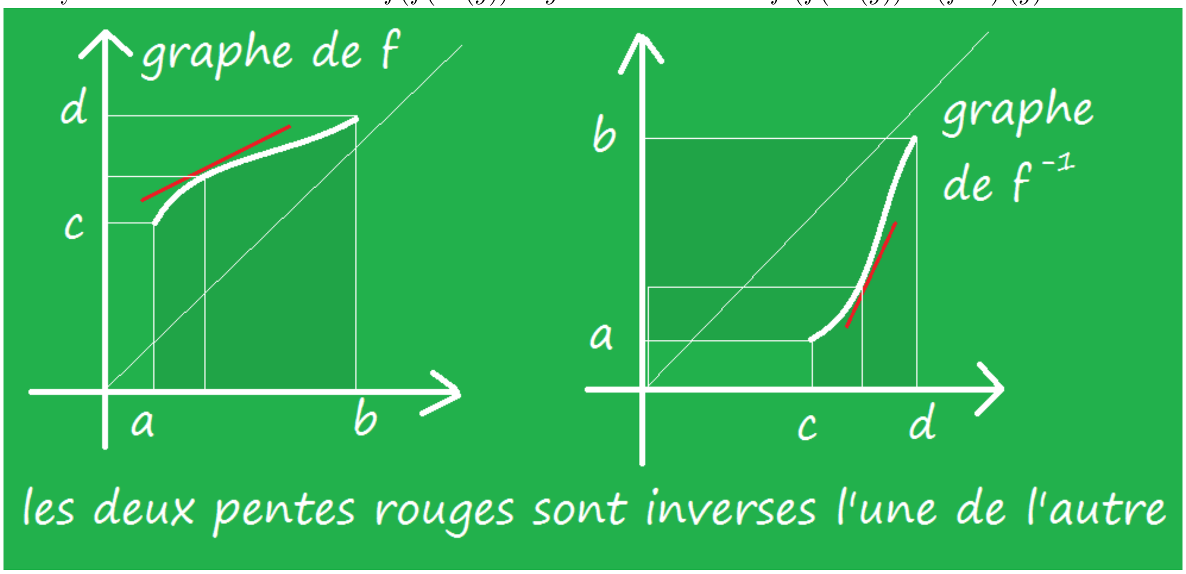
♦ Mais je préfère $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ avec $x_0 = f^{-1}(y_0)$ et $y_0 = f(x_0)$.

♦ Et la version rhétorique et géométrique : *la dérivée de la réciproque est l'inverse de la dérivée* mais il faut calculer chacune au bon endroit ! Toujours une histoire de variables...

29. *penserez vous à me citer le théorème des accroissements finis chaque fois que vous passerez de « f' positive » à « f croissante »*
30. pardon, de ma première jeunesse, la seconde jeunesse, c'est quand tu vois grandir tes gosses, et le coup de vieux, c'est toi qui le donnes... mais à qui

♦ Et la version physique : $\boxed{\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}}$ (plus simple que ça, y'a pas).

♦ Et la version « je te me retrouve directe, comme on avait fait pour *Arctan* en septembre, quand on se voyait encore en face à face : $f(f(^{-1}(y)) = y$ donc en dérivant $f'(f(^{-1}(y)) \times (f^{-1})'(y) = 1$ [31].



Exemple : exp est dérivable en tout point x, de nombre dérivé $\exp'(x) = x$.
Sa réciproque lnest dérivable en tout point y, de nombre dérivé $\ln'(y) = \dfrac{1}{\exp'(x)} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{y}$ puisque $y = e^x$ et $x = \ln(y)$.

Exercice : f est un C^1 difféomorphisme de $[a,\ b]$ sur $[c,\ d]$. Justifiez : $\displaystyle\int_a^b f(u).du + \int_c^d f^{-1}(v).dv = b.d - a.c$ (on pourra dériver $\displaystyle\int_a^x f(u).du + \int_c^{f(x)} f^{-1}(v).dv$)
Interprétez géométriquement(ah, c'est au dessus ?).

Exercice : Pour tout x de $]1,\ e]$, il existe un unique y de $[e,\ +\infty[$ vérifiant $x^y = y^x$ (comme $2^4 = 4^2$), qu'on note alors $y = \varphi(x)$. Calculez $\varphi(2)$ et $\varphi'(2)$.
(non corrigé ici, mais c'est une histoire des deux fonctions réciproques de $t \longmapsto \frac{\ln(t)}{t}$). Réfléchissez bien.

A quoi servent les difféomorphisme ? On les croise surtout en calcul intégral. Pour les changements de variables.
Je mets le pluriel, car il existe deux types de changements de variables : ceux par application C^1 et ceux par C^1 difféomorphisme.

Les changements C^1 sont ceux de niveau élémentaire, pour lesquels on voit tout de suite la composée qui se cache.
Ce sont les intégrales de la forme $\displaystyle\int_a^b f(u(t)).u'(t).dt$ avec u de classe C^1 et f continue.
Même pas besoin de théorie ou quoi que ce soit : on note F une primitive de f et on reconnaît

31. petit défaut : cette méthode suppose que f^{-1} est vraiment dérivable

$$\boxed{\int_{t=a}^{b} f(u(t)).u'(t).dt = \Big[F(u(t))\Big]_{t=a}^{b}}$$

Un exemple vaut mieux qu'on long discours : $\displaystyle\int_a^b e^{\cos(t)}.\sin(t).dt = \Big[-e^{\cos(t)}\Big]_a^b$ (ici, $u = \cos$ et $f = \exp$ au signe près).

Deux exemples valent mieux qu'un seul exemple : $\displaystyle\int_0^1 t.\sqrt{1+t^2}.dt = \Big[\frac{1}{3}.(1+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1$ (ici, $u = t \longmapsto 1+t^2$ et $f = \sqrt{\ }$ avec une notation simple).

Trois exemples valent mieux qu'un : $\displaystyle\int_a^b \frac{Arctan(t)}{1+t^2}.dt = \Big[\frac{(Arctan(t))^2}{2}\Big]_a^b$.

On note qu'on a juste besoin que u soit C^1, mais elle n'est pas obligée d'être bijective, elle peut monter et redescendre comme le cosinus de notre premier exemple.

Il se trouve aussi des élèves qui, pour calculer alors $\displaystyle\int_a^b \cos(\omega.t+\varphi).dt$ posent explicitement $u = \omega.t+\varphi$ puis $du = \omega.dt$ et écrivent $\displaystyle\int_{t=a}^{b} \cos(\omega.t+\varphi).dt = \int_{u=\omega.a+\varphi}^{\omega.b+\varphi} \cos(u).\frac{du}{\omega}$. je ne leur en veux pas, même si je me dis que c'est d'une lourdeur incroyable. Si ils ont besoin de cet garde-fou pour y arriver, qu'importe du moment qu'ils y arrivent. Après tout, peut être que chez Deliveroo ils embauchent aussi ceux qui disent « moi j'ai ressorti le vélo de quand j'étais petit, avec ses petites roues derrière, c'est bon, je peux faire livreur *?* ».

.

Les changements par C^1 difféomorphisme sont ceux où il nous manque $u'(t)$ dans la formule...

...comme $\displaystyle\int_0^1 e^{t^2}.dt$ où il nous manque $2.t$ pour s'en sortir.

Évidemment, le très très mauvais élève va inventer un truc en $\dfrac{e^{t^2}}{2.t}$ parce qu'il a vu que $e^{a.t}$ s'intégrait en $\dfrac{e^{a.t}}{a}$ avec ce $\dfrac{1}{a}$ pour compenser le a qui sort à la dérivation.
L'élève qui écrit cette idiotie n'a qu'une possibilité : expérer que les concours 2021 seront perturbés par le Covid et que le recrutement se fera sur tirage au sort aléatoire.

.

On force alors la main en introduisant de force le $u'(t)$ dont on a besoin, mais en le compensant au dénominateur :

$\displaystyle\int_a^b f(u(t)).dt = \int_a^b \frac{f(u(t))}{u'(t)}.u'(t).dt.$

Sous cette forme, on comprend pourquoi il est important que $u'(t)$ ne s'annule jamais, d'où C^1difféomorphisme.

Mais alors, la fonction a changé. ce n'est plus $f(u(t))$. C'est $\dfrac{f(u(t))}{u'(t)}$ qu'on écrit même $\dfrac{f(u(t))}{u'(u^{-1}(u(t)))}$.

On pose alors $g = x \longmapsto \dfrac{f(x)}{u'(u^{-1}(x))}$.

L'intégrale devient $\displaystyle\int_a^b f(u(t)).dt = \int_a^b \frac{f(u(t))}{u'(t)}.u'(t).dt = \int_a^b g(u(t)).u'(t).dt$ et on l'intègre en $\Big[G(u(t))\Big]_{t=a}^{b}$.

Et l'intégrale se calcule. mais il a fallu changer la fonction f et la remplacer par g. Dans laquelle on reconnait la dérivée de la réciproque de u dans $x \longmapsto \dfrac{1}{u'(u^{-1}(x))}$.

Ah oui, pourquoi u a une réciproque juste si u′ ne s'annule pas ? Parce que Darboux nous dit que si u′ ne s'annule pas, u est de signe constant et u est strictement monotone. Tout se tient dans ce cours !

.

Question : • faut il retenir la formule ? Non, trop tordu.

• faut il retenir la démonstration ? Par forcément, juste les grandes lignes en $\displaystyle\int_a^b f(u(t)).dt = \int_a^b \frac{f(u(t))}{u'(t)}.u'(t).dt$

• que faut il retenir ? ce que l'on fait depuis le début de l'année :

○ vérifier qu'on a bien un C^1 difféomorphisme ○ changer dans la fonction ○ changer l'élément différentiel $u = fonction\ de\ t$ donc $\dfrac{du}{dt} = facile$ et $\dfrac{dt}{du} = pas\ mal$ et $dt = \frac{dt}{du}.du$ ○ changer les bornes

.

Des exemples ?

$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^2}.dt$	$t = sh(x)$ $\quad x = \ln(t+\sqrt{1+t^2})$	$dt = ch(x).dx$	$\displaystyle\int_{x=0}^{\ln(1+\sqrt{2})} \sqrt{1+sh^2(x))}.ch(x).dx = \int_0^{\ln(1+\sqrt{2})} ch^2(x).dx =$
$\displaystyle\int_{\theta=a}^b \frac{1}{\sin(\theta)}.d\theta$	$t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$ $\quad \theta = 2.Arctan(t)$	$d\theta = \dfrac{2.dt}{1+t^2}$	$\displaystyle\int_{t=\tan(a/2)}^{\tan(b/2)} \frac{1}{\frac{2.t}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} = \dots$
$\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.dx$	$u = \sqrt{x}$ $\quad x = u^2$	$dx = 2.u.du$	$\displaystyle\int \frac{1-u}{1+u}.u.du = \int \Big(-u+2-\frac{2}{1+u}\Big).du = \dots$

Les conseils : Pensez à écrire les bornes de manière le plus explicite possible :

$$\int_{t=a}^{b} \dots = \int_{u=euh}^{beh} \dots .$$

Si besoin est, précisez même des choses comme

$$\theta \in [0, \pi/4] \quad \underset{Arctan}{\overset{\tan}{\longleftrightarrow}} \quad \tan(\theta) \in [0, 1] \ .$$

Surveillez qu'il n'y a pas un défaut de difféomorphisme :

Exemple : $\displaystyle\int_0^{2.\pi} \frac{d\theta}{2+\cos(\theta)} = \int_{t=0}^{0} \frac{1}{2+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2.dt}{1+t^2} = 0$. Où est l'erreur ?

Les changements de variables classiques (et il faudra peut être en enchaîner plusieurs) :

trigonométrie :

	invariance de $f(\cos(\theta), \sin\theta)).d\theta$ par	changement	élément différentiel
Règles de Bioche	$\theta \to -\theta$	$c = \cos(\theta)$	$d\theta = \dfrac{-dc}{\sqrt{1-c^2}}$
	$\theta \to \pi - \theta$	$s = \sin(\theta)$	$d\theta = \dfrac{ds}{\sqrt{1-s^2}}$
	$\theta \to \pi + \theta$	$t = \tan(\theta)$	$d\theta = \dfrac{dt}{1+t^2}$
	$\theta \to 2.\pi + \theta$	$t = \tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$	$d\theta = \dfrac{2.dt}{1+t^2}$

tout en sachant que si il y a un changement à faire en $\cos(\theta)$ c'est parce qu'en fait l'intégrale se présente déjà sous la forme $F(\cos(\theta)).\sin(\theta).d\theta$; il doit y avoir un sinus « en facteur ».

Mais on rappelle qu'il est souvent bon de simplement

• linéariser par exemple pour calculer $\displaystyle\int \cos(p.\theta).\sin(q.\theta).d\theta$

• chercher l'arc double pour intégrer $\displaystyle\int \cos^2(t).dt = \int \frac{1+\cos(2.t)}{2}.dt$

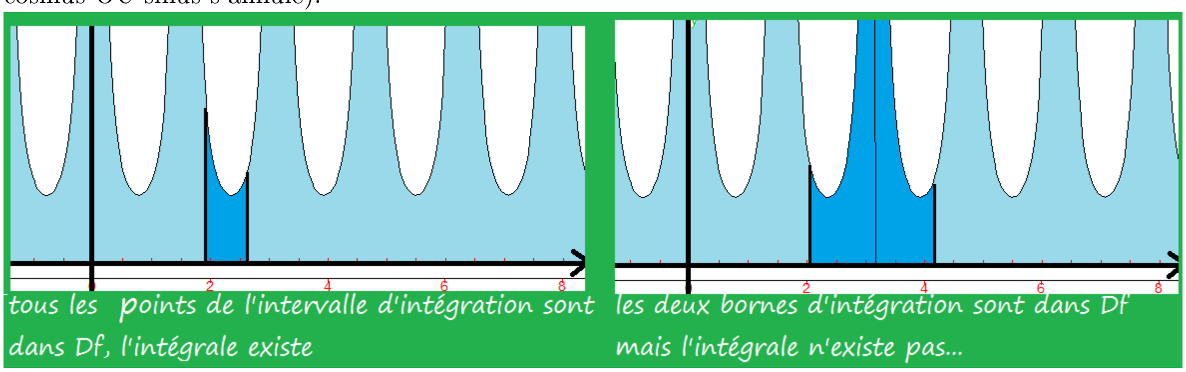
$$\int \cos^4(t).dt = \int \Big(\frac{1+\cos(2.t)}{2}\Big)^2.dt = \int \frac{1}{4} + \frac{\cos(2.t)}{2} + \frac{1+\cos(4.t)}{8}\Big).dt$$

• faire venir des formules en $f(u).u'$: $\int \cos^3(t).dt = \int (1-\sin^2(t)).\cos(t).dt = \left[\sin(t) + \frac{1}{3}.\sin^3(t)\right]$

Exemples :

• pour $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)}.d\theta$ sur un domaine inclus dans $]-\pi/2,\ \pi/2[$, c'est $\left[\frac{1}{2.\cos^2(\theta)}\right]_a^b$.   • pour $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin(\theta)}{\cos^3(\theta)}.d\theta$ sur un domaine inclus dans $]-\pi/6,\ \pi/6[$ par exemple, on pose $c=\cos(\theta)$ et l'intégrale devient $\displaystyle\int_{\cos(b)}^{\cos(a)} \frac{dc}{4.c^3-3.c}$ et il reste à décomposer $\displaystyle\frac{1}{4.c^3-3.c} = \frac{-1}{3.c} + \frac{1}{6.(x-\frac{\sqrt{3}}{2})} + \ldots$.   • pour $\displaystyle\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}$ (sur un intervalle ne contenant aucun multiple de $\frac{\pi}{2}$) on pose $t=\tan(\theta)$ pour avoir finalement $\displaystyle\frac{1}{1-\frac{1}{1+\tan^2(\theta)}}.\frac{d\theta}{\cos^2(\theta)}$

Tiens, j'en profite pour dire un mot sur les domaines. Certains élèves disent $\displaystyle\int_a^b \frac{d\theta}{\sin^2(\theta).\cos^2(\theta)}(\theta)$ existe dès lors que a et b sont dans $R - \left\{\frac{k.\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ (ils se disent qu'il faut éviter les endroits où cosinus OU sinus s'annule).



Je suis désolé pour ces élèves là, mais ils ne voient pas l'intégrale. Ils voient une formule, et c'est tout. Le mauvais point de vue.
Ce qu'il faut, c'est que **tous les points de l'intervalle d'intégration soient dans** Df pour que $\displaystyle\int_a^b f(t).dt$ existe, et pas seulement ceux des extrémités. Mais si vous persistez à voire $\displaystyle\int_a^b f(t).dt$comme $F(b)-F(a)$ vous ne ferez ni maths, ni physique, ni sciences, juste du calcul, et sans y comprendre rien...

trigonométrie hyperbolique :

Il existe aussi des formules de type Bioche, mais le plus simple est de poser $u=e^t$.

Le plus classique des exemples : $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{ch(t)}$ on pose $X=e^t$:

$\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{ch(t)} = \int_{X=e^a}^{e^b} \frac{2}{X+\frac{1}{X}}.\frac{dX}{X} = \int_{e^a}^{e^b} \frac{2.dX}{X^2+1} = \Big[2.Arctan(X)\Big]_{e^a}^{e^b} = \Big[2.Arctan(e^t)\Big]_{t=a}^{b}$ (toujours revenir à la variable initiale, surtout quand on cherche une primitive, sans bornes).

radicaux du premier ordre :

Si une racine carrée traîne dans votre intégrale, prenez la comme nouvelle variable :

$\displaystyle\int_{t=0}^{1} \frac{dt}{1+\sqrt{1+t}} = \int_{u=1}^{\sqrt{2}} \frac{1}{1+u}.(2.u.du) = \int_{0}^{1} \Big(2 - \frac{2}{1+u}\Big).du = \dots$

$\displaystyle\int_{t=0}^{1} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}}.dt = \int_{u=1}^{0} u.\Big(\frac{-4.u}{(1+u^2)^2}\Big).du$ en ayant posé $u = \sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$ et donc $t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$

radicaux d'ordre 2 :

Si votre intégrale contient du t et aussi du $\sqrt{a.t^2 + b.t. = c}$ (comme $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{2.t+1+\sqrt{t^2+4.t+5}}$ ou même simplement $\int_0^1 \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}.dt$), vous allez commencer par mettre votre radical sous forme canonique $\sqrt{1+u^2}$ ou $\sqrt{1-u^2}$ ou $\sqrt{u^2-1}$ par transformation affine [32].

Par exemple

$\sqrt{t^2+4.t+5} = \sqrt{(t+2)^2+1}$	$\sqrt{t^2-6.t+10} = \sqrt{(t-3)^2+1}$	$\sqrt{t^2+2.t+5} = 2.\sqrt{\left(\frac{t+1}{2}\right)^2+1}$
$\sqrt{5.t^2-2.t+2} = \frac{3}{\sqrt{5}}.\sqrt{\left(\frac{5.t-1}{3}\right)^2+1}$	$\sqrt{t^2-5.t+4} = \frac{3}{2}.\sqrt{\left(\frac{2.t-5}{3}\right)^2-1}$	$\sqrt{4-t^2} = 2.\sqrt{1-\left(\frac{t}{2}\right)^2}$

Vous devez vite retrouver vos réflexes de Première et Terminale pour canoniser un trinôme. Et des réflexes de Terminale, ce ne sont pas des formules apprises par cœur (ô que je fus dégouté par ça quand j'étais petit, des formules dont on ne comprenait pas d'où elles sortaient à part de notre mémoire !). Mais $t^2 + b.t + c = \left(t + \frac{b}{2}\right)^2 + \dots$ et on factorise...

On notera que la smple lecteure par avance du domaine vous livre tout de suite la voie : entre les racines, à l'extérieur des racines, partout

à l'extérieur des racines	*entre les racines*	*partout*
$\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$

En langage « j'apprends sans comprendre » ou « je comprends donc j'apprends »

à l'extérieur des racines	*entre les racines*	*partout*
$\Delta > 0$ *et* $a > 0$	$\Delta > 0$ *et* $a < 0$	$\Delta < 0$
$\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$

Pardon ? Qui m'a demandé « et pour $\Delta = 0$? celui là, je lui fais calculer $\displaystyle\int_{-2}^{3} \frac{dt}{1+\sqrt{t^2-2.t+1}}$, *et sans changement de variable, S.V.P., mais avec un cerveau.*

.

Ensuite, suivant la forme obtenue, vous allez changer de variable avec de la trigonométrie hyperbolique ou non, et là encore, ne retenez rien par cœur, il suffit de vous convaincre que c'est tout ce qu'il y a de plus naturel.

à l'extérieur des racines	entre les racines	partout
$\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
$u = ch(x)$	$u = \sin(\theta)$	$u = sh(x)$
$x = \ln(u+\sqrt{u^2-1})$	$\theta = Arcsin(u)$	$x = \ln(u+\sqrt{1+u^2})$
$du = sh(x).dx$	$du = \cos(x).dx$	$du = ch(x).dx$

Pourquoi c'est naturel ? Mais parce que $\sqrt{1-\sin^2(\theta)}$ donne $\cos(\theta)$ (ou $-\cos(\theta)$ mais choisissez le bon domaine pour θ).
Ensuite, $\sqrt{ch^2(x)-1} = sh(x)$.
Enfin, $\sqrt{1+sh^2(x)} = ch(x)$.

A l'issue de ce second changement, on est ramené à une forme trigonométrique ou hyperbolique, et on sait se débrouiller.

Je vous donne un exemple : $\boxed{I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x+1+\sqrt{x^2+4.x+5}}}$ dont l'existence ne pose pas de problème.

32. et si la mise sous forme canonique vous donne $\sqrt{1-u^2}$,posez vous des questions

On met sous forme canonique $I = \int_{x=0}^{1} \frac{dx}{x+1+\sqrt{(x+2)^2+1}}$.
On change de variable affinement : $I = \int_{u=2}^{3} \frac{du}{u-1+\sqrt{u^2+1}}$.
On hyperbolise : $u = sh(t)$: $I = \int_{t=\alpha}^{\beta} \frac{ch(t).dt}{sh(t)-1+\sqrt{sh(t)^2+1}}$ avec $sh(\alpha) = 2$ et $sh(\beta) = 3$
On simplifie : $I = \int_{t=\alpha}^{\beta} \frac{ch(t).dt}{sh(t)-1+ch(t)} = \frac{1}{2}.\int_{t=\alpha}^{\beta} \frac{e^t+e^{-t}}{e^t-1}.dt$
On change encore : $X = e^t$: $I = \frac{1}{2}.\int_{X=e^\alpha}^{e^\beta} \frac{X+\frac{1}{X}}{X-1}.\frac{dX}{X}$.
Il ne reste qu'à décomposer en éléments simples en $\dfrac{2}{X-1} - \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X^2}$.

Quelques locutions retenir sur ce type d'exercice avec moi :

- « l'intégrale existe par continuité de la fonction sous le signe intégrale »
- « le changement de variable est bien un C^1difféomorphisme »
- « l'intégrale devient ... »
- « elle est calculable (il rest quelques lignes de calcul sans intérêt) »

.
Allez, les suivants... dans le T.D.

15°) Convexité.

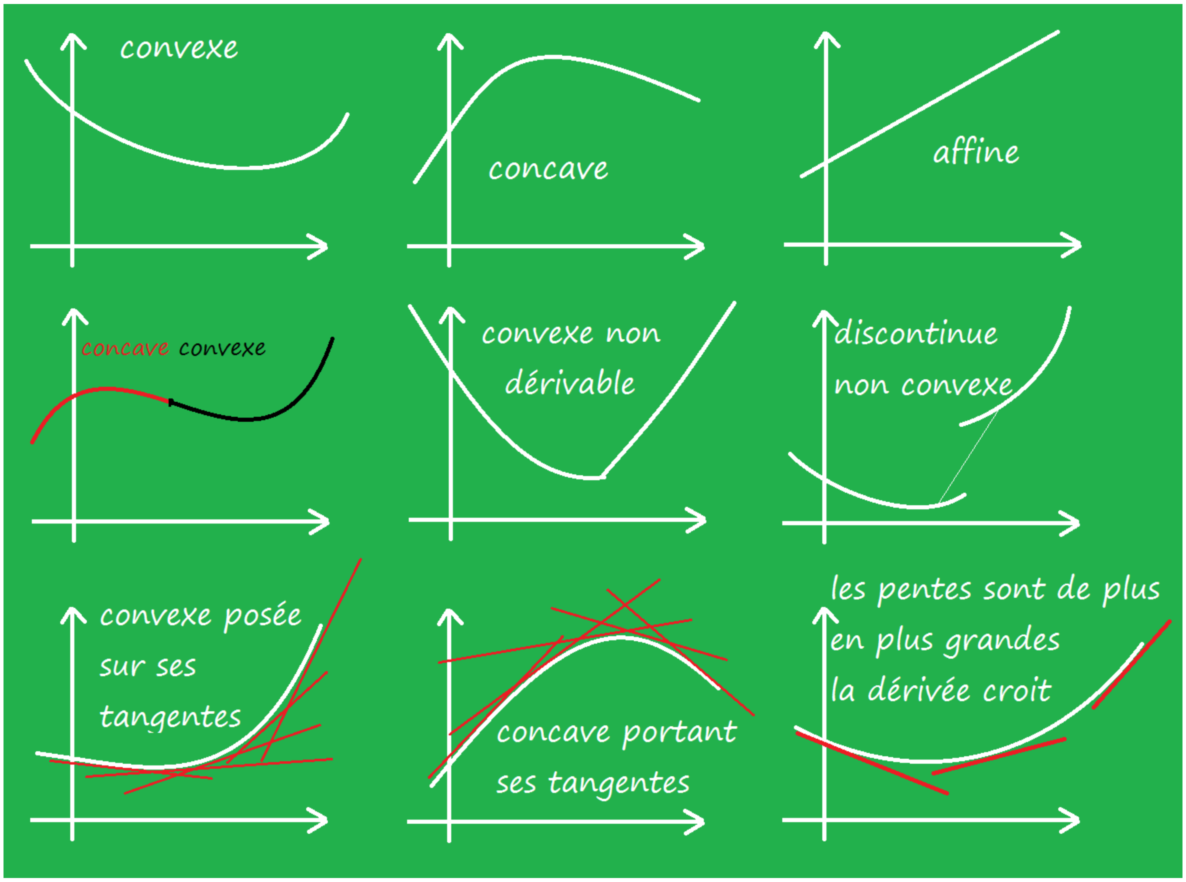
Je vous propose un survol rapide niveau Sup de la notion de convexité. C'est une notion que vous avez aperçue en Terminale, et que vous reprendrez en détail l'an prochain, y compris dans des espaces de dimension autre que 1.
Il y a certes un rapport avec les lentilles convexes de l'optique, mais on se contentera de dire « tiens, c'est le même mot ».

Pour se représenter une fonction convexe ? L'exponentielle. C'est bien, il y a la sonorité EX dans les deux.
Et une fonction concave : le logarithme (ou une voûte de cave). [33]
Visuellement, la fonction convexe repose sur ses tangentes.
La fonction concave porte ses tangentes sur son dos.
Mais ce point de vue est naïf, certaines fonctions convexes n'ont pas de tangentes. Juste des demi tangentes.

Il existe des fonctions à la fois convexes et concaves, mais elles ne sont pas si nombreuses : les fonctions affines.

Il existe des fonctions ni convexes ni concaves, comme le sinus qui change toujours de concavité. Et même les fonctions discontinues.

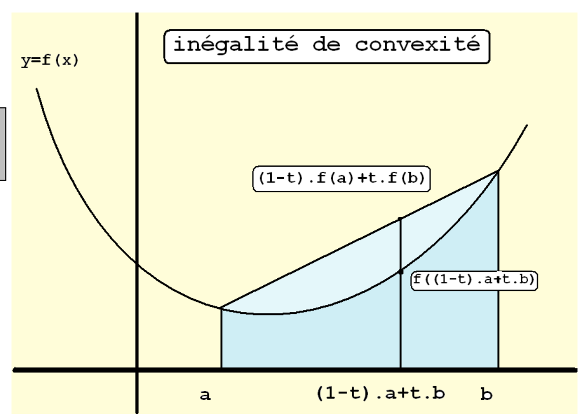
33. f est concave si $-f$ est convexe



Dans la vision de Terminale : les fonctions convexes sont celles dont la dérivée seconde est positive. C'est un critère facile à manier.
Dans une vision un peu moins simpliste, ce sont les fonctions dont la dérivée est croissante. Souvent, ça fait moins de calculs...
...et le naïf qui pense que tout est dérivable dire « mais c'est pareil ».

Dans la vision de Sup, une fonction convexe est une fonction qui vérifie une inégalité de convexité facile à énoncer :

« l'image de la moyenne est plus petite que la moyenne des images ».



Sur le graphe, la moyenne, c'est $(1-t).a+t.b$

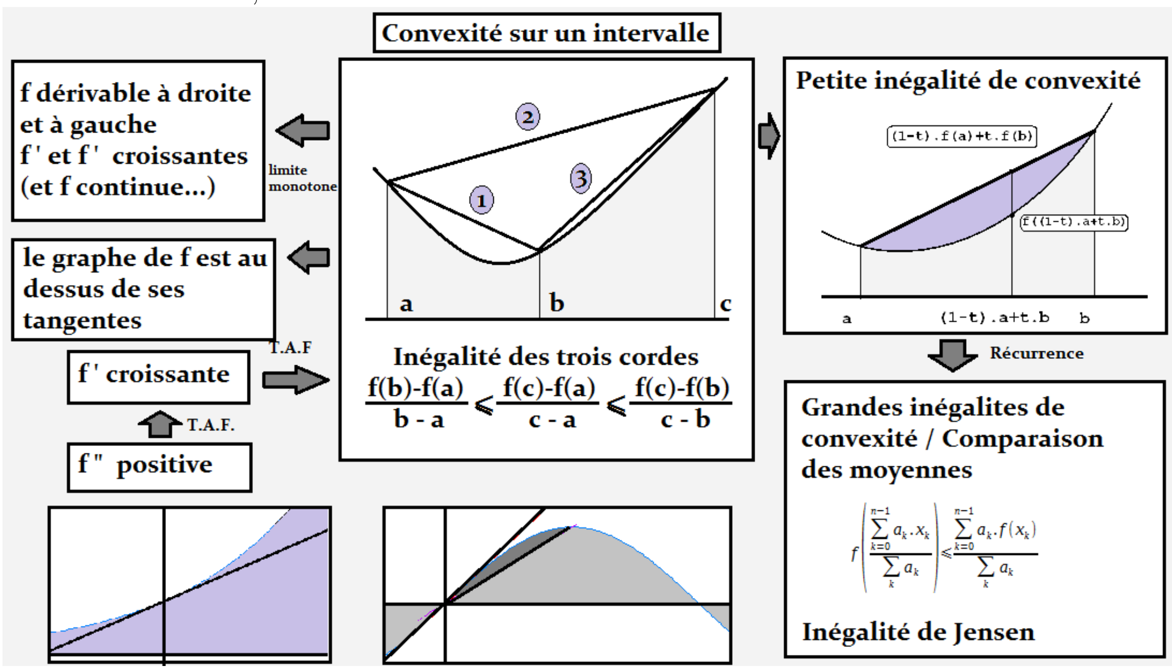
l'image de la moyenne : $f((1-t).a+t.b)$

et la moyenne des images :

$(1-t).f(a)+t.f(b)$

Et les fonctions convexes servent à déterminer des inégalités de convexité telles que $e^w \geqslant 1+x$ et des comparaisions de moyennes, plus des inégalités plus fortes que les inégalités de Cauchy-Schwarz.

Et dans la vision de MPSI2, une fonction convexe est une fonction qui vérifie l'inégalité des trois cordes
Elle est facile à écrire, et tout découle de là.



Si vous suivez sur ce schéma, l'inégalité des trois cordes est au milieu, on va l'étudier largement et la prendre comme définition.
A partir d'elle on étudiera quelques stabilités (addition, multiplication par un réel positif, composition sous certaines conditions restrictives...).
On montrera l'implication « (f' croissante) implique (trois cordes) ».
Vous sortirez le théorème des accroissements finis pour dire « (f" positive) implique (f' croissante) implique (trois cordes) ».

Mais on prendra aussi le schéma dans l'autre sens : trois cordes implique dérivable à droite en tout point
trois cordes implique dérivable à gauche en tout point
trois cordes implique donc continue en tout point.
On montrera même que la dérivée à droite est croissante, de même que la dérivée à gauche. Ce qui bouclera presque avec l'implication « f' croissante implique f convexe ».

Et on montrera les inégalités de convexité à partir de la formule des trois cordes.

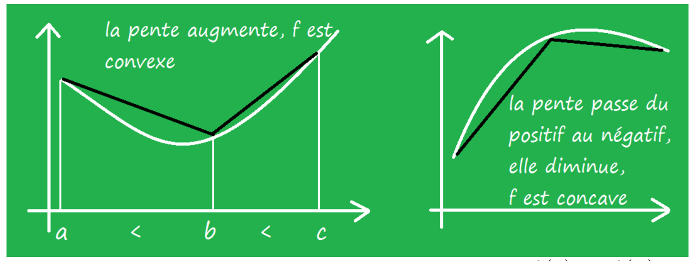
Mais surtout, avant d'attaquer : un mot capital : dans tout ce qui suit, on va envisager des applications définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ (pour écrire des inégalités). S'il y a un trou dans votre domaine de définition, ne parlez pas de convexité.
Et on évitera de se poser des questions aux bornes éventuelles du domaine de définition.

La définition des la convexité par les trois cordes est visuelles, mais aussi très facile à écrire mathématiquement .
Et avec des mots : les cordes vont en croissant.

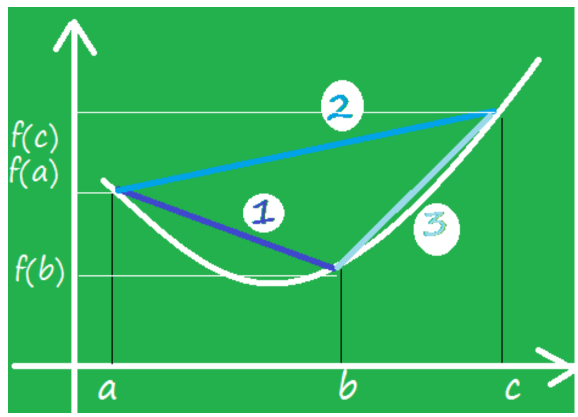
Ah pardon ? Le mot « corde » ? Vous auriez dû me le demander plus tôt : c'est le segment de droite qui joint deux points $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$ d'un graphe de fonction. Et une corde telle que celle ci a pour coefficient directeur $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

.

Nous, on va prendre trois points A, B et C d'abscisses a, b et c dans cet ordre $a < b < c$. On peut alors définir deux cordes. Et les ordonner de la plus petite à la plus grande.
Et la convexité, c'est « les cordes vont en croissant » : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.



Mais ce qui est fort, c'est qu'il y a trois cordes et que l'inégalité c'est même $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$



$$\boxed{\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\boxed{1}} \leqslant \underbrace{\frac{f(c)-f(a)}{c-a}}_{\boxed{2}} \leqslant \underbrace{\frac{f(c)-f(b)}{c-b}}_{\boxed{3}}}$$

.
.
.
.

Pourquoi est ce que je dis que c'est fort ? Parce qu'en fait on compare trois cordes par a priori deux inégalités, mais dans la pratique il n'y en a qu'une.

C'est à dire que • *si on a classé* $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$ *alors l'autre taux s'insère au milieu*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

• *de même*

$$\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}\right) \Rightarrow \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}\right)\Big)$$

• *et la troisième implication aussi.*

Je m'explique et j'écris... une matrice ou plutôt un déterminant : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0.$

Et je vous invite à montrer des inégalités équivalentes entre elles.

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

Moi qui passe mon temps à surveiller les résolutions d'équations et à vous dire « ton système a trois équations, comment peut il être équivalent à un système qui n'en a plus que deux ! », je suis surpris ici que les comparaisons des cordes soient équivalentes.

.

Je vous le fais par les opérations classiques sur les déterminants : invariant quand on soustrait une colonne sur une autre

$$0 \leqslant \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ f(a) & f(b)-f(a) & f(c)-f(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a-b & b & c-b \\ f(a)-f(b) & f(b) & f(c)-b(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a-c & b-c \\ f(a)-f(c) & f(b)-f(c) & f \end{vmatrix}$$

$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ f(b)-f(a) & f(c)-f(a) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} b-a & c-b \\ f(b)-f(a) & f(c)-b(b) \end{vmatrix} \geqslant 0$	$\begin{vmatrix} c-a & c-b \\ f(c)-f(a) & f(c)-f(b) \end{vmatrix}$
développer	développer	développer
diviser par $(b-a).(c-a)$	diviser par $(b-a).(c-b)$	diviser par ...
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$	$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$	$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \dfrac{f(c)-f(b}{c-b}$
$\boxed{1} \leqslant \boxed{2}$	$\boxed{1} \leqslant \boxed{3}$	$\boxed{2} \leqslant \boxed{3}$

Dès lors, vous pouvez avoir un parfait comportement de MPSI2 et dire

« la convexité c'est $a < b < c \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ »

et « la concavité c'est $a < b < c \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \leqslant 0$ »

et devinez ce qu'est une application affine...

Et vous mémorisez le petit dessin pour les classer effectivement.

A partir de cette définition, on peut vérifier des stabilités en passant de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ -f(a) & -f(b) & -f(c) \end{vmatrix} \leqslant 0$

ou de $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ \lambda.f(a) & \lambda.f(b) & \lambda.f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$.

f est convexe si et seulement si $-f$ est concave.

Si f est convexe, alors chaque $\lambda.f$ avec λ positif est convexe (mais avec λ négatif...).

Attention, il n'y a pas de résultat évident par composition ni par multiplication.

Les contre-exemples sont offerts avec les fonctions affines.

$x \longmapsto x$ *et* $x \longmapsto -x$ *sont convexes, mais pas leur produit.*

exp *est convexe, composez la avec* $x \longmapsto -x$ *(convexe car affine) et vous avez* $x \longmapsto -e^x$ *qui n'est plus convexe.*

.

Petits exercices :
Montrez que $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$, non pas en dérivant deux fois, mais en étudiant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$ avec l'aide d'Alexandre [a].

Montrez que $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $]0,\ +\infty[$ en transformant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1/a & 1/b & 1/c \end{vmatrix}$ en $positif \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ et en revenant au déterminant de VanDerMonde.

Vérifiez que les fonctions affines sont convexes.
Pouvez vous prouver que $x \longmapsto x^3$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ avec ces déterminant ?
♠ Montrez que si f est concave sur $\mathbb{R}^-$ puis convexe sur $\mathbb{R}^+$ alors il existe trois points du graphe qui sont alignés (pas facile).

a. non, pas Alexandre SDD ni Alexandre $\varphi$and, mais Alexandre VanDerMonde

Exercice plus fin.
Pour toute application f de $]0,\ +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, on définit sa conjuguée f^* par $f^* = x \longmapsto x.f\left(\frac{1}{x}\right)$.
Montrez que f est convexe si et seulement si sa conjuguée l'est.

Si on aborde ça avec l'approche simpliste « convexe équivalent à dérivée seconde positive » [34] on suppose f" positive, et on dérive deux fois f^*. C'est déjà un exercice sympathique.
Je vous laisse vous convaincre que $(f*)$" donne $x \longmapsto 2.\dfrac{f"(1/x)}{x^3}$ ou quelque chose d'approchant. Vous pouvez alors conclure f" positive implique (f^*)" positive ».
Mais comme indiqué, ceci ne traite que les cas des applications à la fois convexe et D^2.

Ensuite, vous pouvez essayer avec la définition image de la moyenne et moyenne des images, et rester perplexe devant
$\Big((1-t).a+t.b\Big).f\Big(\dfrac{1}{1-t).a+t.b}\Big)$ et $(1-t).a.f\Big(\dfrac{1}{a}\Big)+t.f\Big(\dfrac{1}{b}\Big)$.

Non, la bonne approche est de prendre $0 < a < b < c$ d'étudier $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a.f(\frac{1}{a}) & b.f(\frac{1}{b}) & c.f(\frac{1}{c}) \end{vmatrix}$ et d'essayer de le relier à $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}$ ou même $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/c & 1/b & 1/a \\ f(\frac{1}{c}) & f(\frac{1}{b}) & f(\frac{1}{a}) \end{vmatrix}$ puisque $0 < \dfrac{1}{c} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$. Je vous laisse le regarder *(et Émile me demandera dans un mois « il y a une correction du petit exercice de la page tant ?).*

Ceci étant fait, vous n'avez montré qu'un sens : (f convexe) implique (f^*convexe). Il faut encore traiter la réciproque.
S'arrêter après un beau raisonnement ou calcul et passer à la suite sans regarder « ai je bien prouvé tout ce que je devais prouver », c'est digne de qui à votre avis ?
Réflexe MaxoQuentinien pour la réciproque : « Monsieur, on n'a pas raisonné par équivalences dans notre raisonnement ? ».
Réflexe Karelien : « Y'aurait pas un truc avec $(f^*)^*$? ».
Je vous laisse y réfléchir.

34. simpliste en ce sens que la condition est suffisante mais pas nécessaire et qu'il existe des applications qui sont convexes sans avoir de dérivée seconde qui vont vous passer au travers des mailles du filet...

Réflexe &∞[35] : la réciproque, c'est quel sens ?

Première implication facile :

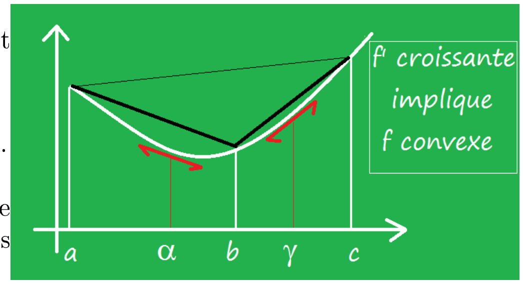
f' croissante de I dans $\mathbb{R}$ implique f convexe.

C'est grâce à ce résultat que va tomber en trois secondes « l'exponentielle est convexe » ou « le logarithme est concave ».

On suppose f' croissante, et on se donne trois réels a, b et c avec $a < b < c$.

On veut comparer trois taux, mais on sait qu'il suffit d'en comparer deux.

Prenons comme par hasard $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ et $\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$.



Le théorème des accroissements finis nous permet de les convertir en des dérivées calculées en des points convenables :

$\exists \alpha \in]a,\ b[\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\alpha)$	et	$\exists \gamma \in]b,\ c[,\ \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} = f'(\gamma)$
$\alpha < b < \gamma$		
$f(\alpha) \leqslant f'(b) \leqslant f'(\gamma)$		
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$	$\leqslant$	$\dfrac{f(c)-f(b)}{c-b}$

C'est aussi simple que ça. ☺

On en déduit donc directement que

- l'application tangente est convexe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ car sa dérivée $1+\tan^2$ est croissante
- l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, car sa dérivée croît
- le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$ car sa décriée décroît

.

On constate qu'il n'est pas forcément utile de dériver deux fois.

En effet, le prix à payer pour passer de f" positive à f' croissante est déjà un T.A.F.

le prix à payer pour passer de f' croissante à f convexe est de deux TAF

ça fait beaucoup au total

Questions rapides :	• pourquoi peut on dire « le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$ et sur $[2.\pi,\ 3.\pi]$? • pourquoi ne peut on pas dire « le sinus est concave sur $[0,\ \pi] \cup [2.\pi,\ 3.\pi]$? • pourquoi peut on dire que $\ln(x)$ est convex sur $[1,\ e]$? (si si !) • pourquoi une application strictement convexe dérivable n'a-t-elle pas plus d'un extrémum ?

Exemple sympathiqe :

On a montré que le sinus est concave sur $[0,\ \pi]$, car sa dérivée première décroît (et souvent, c'est vrai, on diré « sa dérivée seconde est négative).

Écrivons alors l'inégalité des trois cordes entre 0, θ et $\pi/2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \theta & \pi/2 \\ 0 & \sin(\theta) & 1 \end{vmatrix} \leqslant 0$ (oui, concave, pas convexe).

35. mettez ici le prénom de quelqu'un dont vous voulez dire du mal

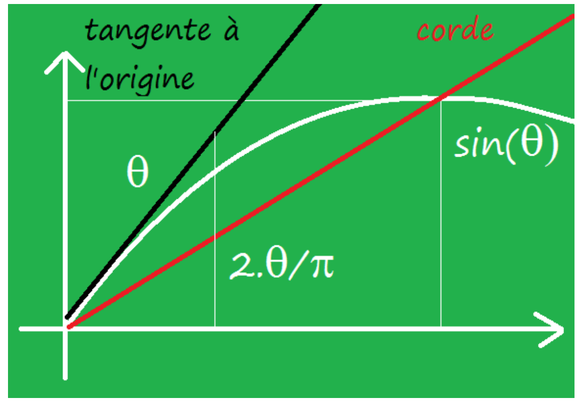
Et on obtient en développant par rapport à la dernière ligne : $-\sin(\theta).\frac{\pi}{2}+\theta \leqslant 0$.

C'est à dire $\sin(\theta) \geqslant \frac{\theta.2}{\pi}$.

Et on complète avec ce qu'on sait déjà $\frac{\theta.2}{\pi} \leqslant \sin(\theta) \leqslant \theta$.

C'est même

$\frac{\theta.2}{\pi}$	$\leqslant \sin(\theta)$	$\leqslant \theta$
corde	graphe du sinus	tangente à l'origine



Joli, non ? Sans bricolage avec des fonctions auxilliaires. Juste la convexité.

Maintenant, qu'est ce qu'on a comme sorte de réciproque *(et quelle petite boîte à outil va-t-on utiliser de notre cours ? TAF ? TVI ? Taylor ? borne sup ?).*

Si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ alors	$\bullet_1$ f est dérivable à gauche en tout point
	$\bullet_2$ f est dérivable à droite en tout point
	$\bullet_3$ f est continue en tout point
	$\bullet_4$ f'_d est croissante
	$\bullet_5$ f'_g est croissante
	$\bullet_5$ f'_d majore f'_g

On va le démontrer pour f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Si elle n'est définie que sur un intervalle I, vous pouvez modifier la démonstration au bon endroit, et comprendre que si f est convexe de $[\alpha,\ \beta]$ dans $\mathbb{R}$, alors elle n'est peut être pas dérivable en β et/ou en α (elle peut avoir une demi tangente verticale).

On suppose donc qu'on a le droit d'utiliser dès qu'on veut l'inégalité des trois cordes. Et les cordes, c'est quoi ? Des taux d'accroissement.

On va donc étudier si les taux d'accroissement en un point x ont une limite.

On se place en un point x, et on va montrer le point $\bullet_1$: f est dérivable à gauche en x.

On va montrer que les taux d'accroissement à gauche ont une limite.

Un taux d'accroissement à gauche, c'est $\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$avec y plus petit que x.

On montre que c'est une fonction de y croissante, majorée.

Elle aura donc une limite quand y tend vers x (l'outil de notre boite « maths » est donc « borne supérieure »).

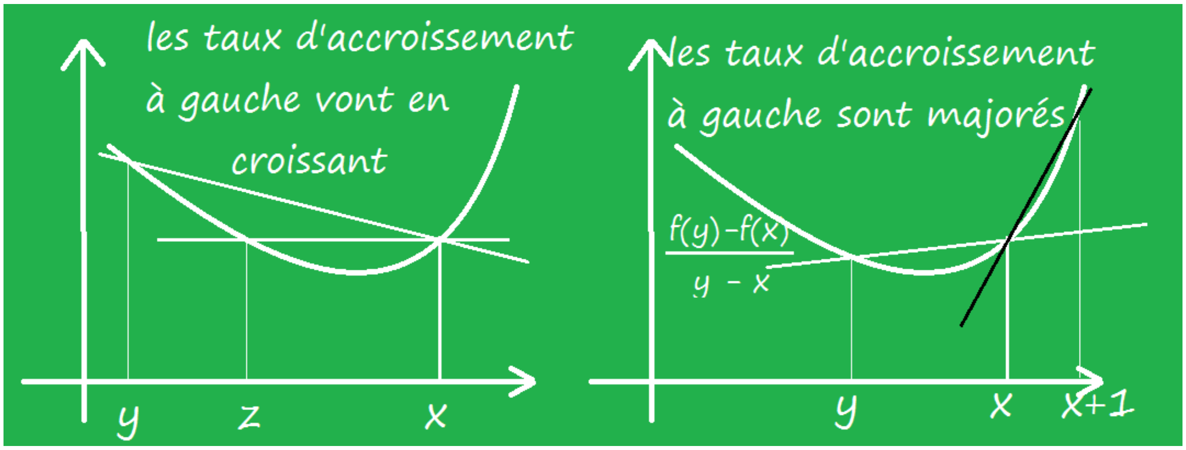
Croissance en y : $y<z<x \Rightarrow \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ c'est les trois cordes avec

a	b	c
y	z	x

Majorée : $y<x<x+1$ donc $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(x+1)-f(x)}{1}$ qui ne dépend pas de y.

a	b	c
y	x	$x+1$

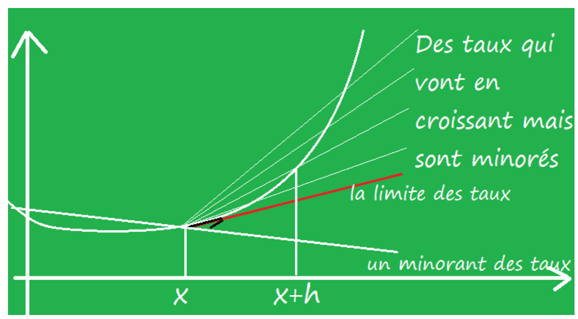
. *Remarque : c'est sur ce point « majoration » qu'il y a un problème si x est l'extrémité droite du domaine de définition.*



Comment prouver que f est dérivable à droite en x ? De la même façon.
Les taux d'accroissement à droite $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ vont en croissant et sont minorés. Ils ont donc une limite quand h tend vers 0 par valeur supérieure. [36]

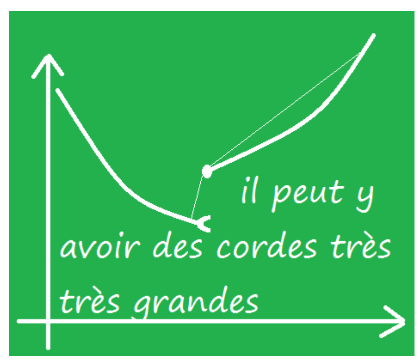
Leur croissance, c'est encore $0 < h < k$ implique $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \leqslant \dfrac{f(x+k)-f(x)}{k}$.
La minoration, c'est en utilisant le taux entre $x-1$ et x.
f est dérivable à droite en tout point x.
$f'_d(x)$ existe pour tout x.

Bonus : étant dérivable à droit, f est continue à droite *(DL d'ordre 1 implique DL d'ordre 0).*



On s'offre le point $\bullet_3$: en tout point f est continue à droite car dérivable à droit
continue à gauche car dérivable à gauche
f est continue en tout point.

On note qu'une application discontinue poserait visuellement un problème pour les trois cordes ou pour les comparaisons des moyennes.
.
.
.
.
.
.



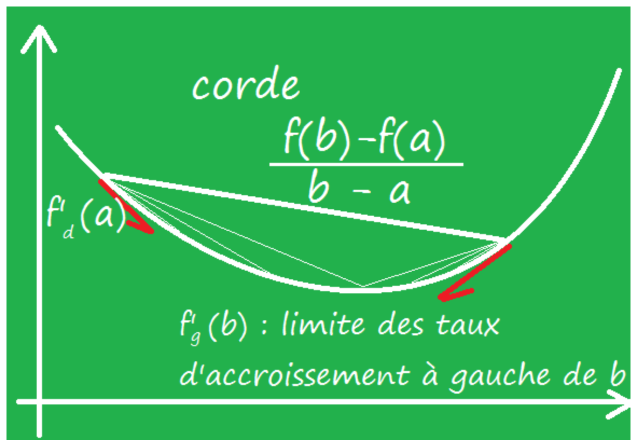
On note qu'on a en fait obtenu $f'_d(x) = Inf\left\{\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \mid h > 0\right\}$ *puisque c'était la limite « monotone » des taux d'accroissement à droite.*
Et on note qu'une phrase aurait pu revenir souvent dans notre démonstration, même si elle est un peu floue :
pour une application convexe, les taux d'accroissement vont en croissant.

36. si on veut tendre vers 0 par valeur supérieure, on fait « descendre » h, et c'est donc bien une minoration qu'il nous faut

Et on résume notre démonstration en disant pour x fixé, $y \longmapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ est croissante, et admet donc une limite à droite et une limite à gauche en tout point... en particulier en x.

On se donne à présent deux points a et b dans I $(a < b)$ et étudie la corde qui va de $A(a,\ f(a))$ à $B(b,\ f(b))$.
Elle a pour taux d'accroissement $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Et on peut le lire comme un taux d'accroissement particulier à droite de a.
Il est donc plus grand que la borne inférieure des taux d'accroissements en a : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant Inf\Big\{\dfrac{f(y)-f(a)}{y-a} \mid y > a\Big\} = f'_d(a)$.

Et si on le voit comme un taux d'accroissement à gauche de b, il est plus petit que la borne Sup :
$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant Sup\Big\{\dfrac{f(y)-f(b)}{y-b} \mid y < b\Big\} = \lim\limits_{\substack{y\to b\\ y<b}} \dfrac{f(y)-f(b)}{y-b} = f'_g(a)$.



On recolle les morceaux : $f'_d(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)$.
Mine de rien, voilà un résultat important je l'écris plus gros :
$$f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b).$$
Je crois que je devrais même l'encadrer :
$$\boxed{f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)}$$

Sinon, au lieu de le faire entre a et b, je peux aussi le faire de part et d'autre de a :
pour y plus petit que a et z plus grand que a, on peut comparer :$\dfrac{f(a)-f(y)}{a-y} \leqslant \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$ (trois cordes).
On fait tendre y vers a par valeur inférieure. On sait maintenant qu'il y a une limite grâce au $\bullet_1$ ou $\bullet_2$:
Par passage à la limite : $f'_g(a) \leqslant \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a}$
On fait tendre z vers a par valeur supérieure. Cette fois on récupère $f'_d(a)$ (avec d comme droite) :
$\boxed{f'_g(a) \leqslant f'_d(a)}$
Ça, je l'avais promis comme point numéro $\bullet_5$.

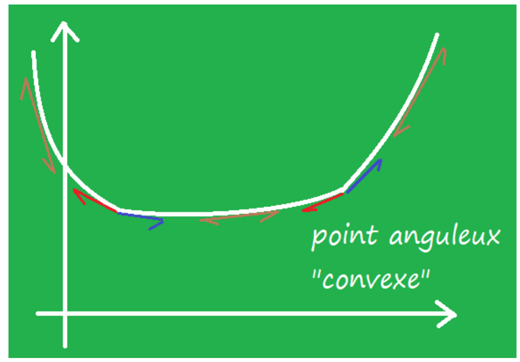
Et si on colle bout à bout ces différents résultats, écrits soit en a, soit en b :
$$\begin{array}{ccccccc} & & & & f'_g(b) & \leqslant & f'_d(b) \\ & & f'_d(a) & \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant & f'_g(b) & & \\ f'_g(a) & \leqslant & f'_d(a) & & & & \end{array}$$
Vous voyez comment on obtient que f'_d est croissante, de même que f'_g...
C'est donc fini. Smiley please ! $\boxed{☻}$

On résume ce qu'on a sû prouver :

f' croissante	implique	f convexe				
		f convexe	implique	f presque dérivable	(droite et gauche)
				et f' « croissante »	

Si vous vivez dans un monde idéalisé D_1 vous avez en fait l'équivalence « f convexe si et seulement si f' croissante ».

Une remarque pour étoiles :
une fonction convexe a des dérivées à droite et à gauche, et celles ci sont croissantes. Les seuls problèmes que peut inventer la dérivées ont des sauts « positif ». Elle ne peut donc pas en accumuler trop (une quantité non dénombrable de sauts positifs, c'est pire qu'une série, ça fait $+\infty$ et ça pose problème.



Donc, une fonction convexe doit être « presque partout dérivable » et s'autorise juste un nombre fini ou dénombrable de points anguleux.

Maintenant, je vous ai promis des choses encore plus fortes.

Pour f convexe (et $a < b$), on a $f'_d(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b)$.

Et dans l'univers idéalisé des applications D^1 partout : $f'(a) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'(b)$.

On multiplie par $b-a$ positif[37] : $f'(a).(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant f'(b).(b-a)$.

On fait passer de l'autre côté :

$$\begin{array}{lll} f'(a).(b-a)+f(a) \leqslant f(b) & \text{pour } a \leqslant b & \text{oui !} \\ -f(a) \leqslant f'(b).(b-a)-f(b) & \text{pour } b \geqslant a & \text{bof} \\ f(a) \geqslant f'(b).(a-b)+f(b) & \text{pour } b \geqslant a & \text{c'est mieux} \end{array}$$

Mais sous cette forme, on ne voit pas trop qui va être fixé et qui va pouvoir bouger :

alors je propose $\begin{array}{ll} f'(a).(x-a)+f(a) \leqslant f(x) & \text{pour } a \leqslant x \\ f(x) \geqslant f'(b).(x-b)+f(b) & \text{pour } b \geqslant x \end{array}$

Et comme les variables sont muettes : $\begin{array}{ll} f'(c).(x-c)+f(c) \leqslant f(x) & \text{pour } c \leqslant x \\ f(x) \geqslant f'(c).(x-c)+f(c) & \text{pour } c \geqslant x \end{array}$

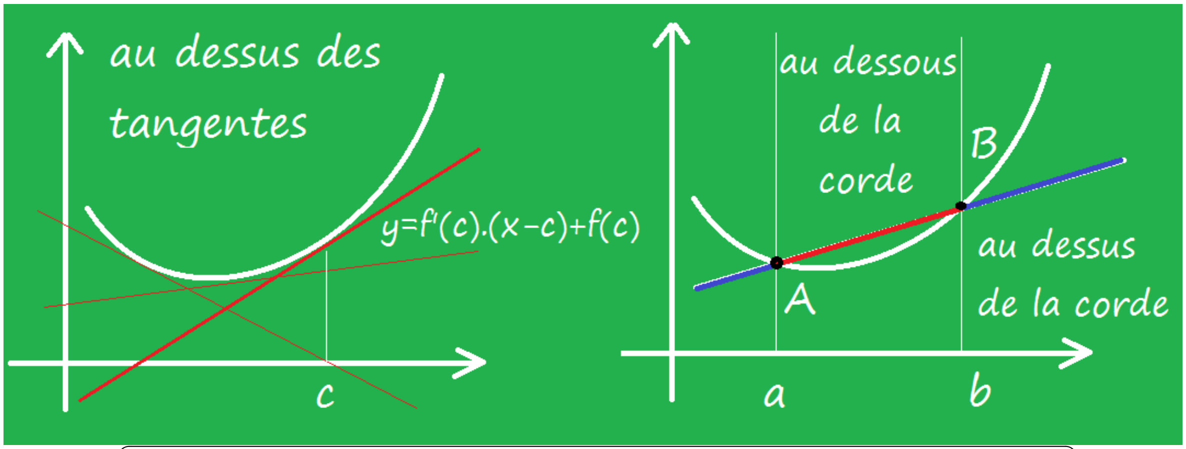
On fusionne en une seule : $\boxed{f(x) \geqslant f'(c).(x-c)+f(c) \text{ pour tout } x}$

On interprète géométriquement : le graphe de f (convexe) est au dessus de ses tangentes.
Et bien sûr le graphe de f concave est au dessous de ses tangentes.
Petit jeu : retrouvez de quelle fonction il s'agit et de la tangente en quel point

$e^x \geqslant 1+x$	$\ln(1+x) \leqslant x$	$\ln(x) \leqslant x-1$	$\sin(x) \leqslant x$	$Arctan(x) \leqslant x$	$\cos(x) \leqslant 1$
sur $\mathbb{R}$	sur $]-1,\ +\infty[$	sur $]0,\ +\infty[$	sur $[0,\ \pi]$	sur $[0,\ +\infty[$	sur $[-\pi/2,\ \pi/2]$

On note que ce sont des formules qu'on obtient aussi avec la formule de Taylor avec reste intégrale quand f" est positive :
$f(x) = f(c)+(x-c).f'(c)+(x-c)^2.\int_0^1 (1-t).f"((1-t).c+t.x).dt \geqslant f(c)+(x-c).f'(c)$
comme quoi rien n'est anodin.

37. surveillez vraiment le signe des multiplicateurs dans vos inégalités



En fait, le graphe d'une fonction convexe est au dessus de ses demi-tangentes puisque une fonction convexe n'a que des demi-tangentes.

Quant à la position par rapport à ses cordes la phrase rigoureuse est
« le graphe est au dessous de ses cordes entre les points d'attache ».
C'est ce qu'on voit en rouge sur le dessin-ce dessus. mais une fois dépassés les deux points d'attache A et B, le graphe passe sous la corde.

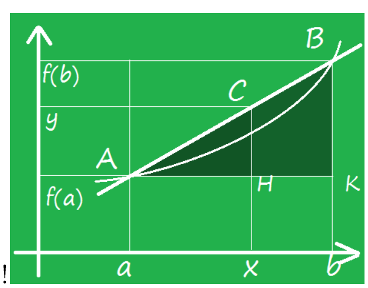
Pour ceux qui ont un doute, on se donne a et b. L'équation de la corde entre $A(a,\ f(a))$ et $B(b,\ f(b))$, c'est...

eh oui, tiens, je vous laisse chercher ?

La pire des méthodes : j'écris a priori une quation de droite $y = \lambda.x+\mu$,j'écris qu'elle passe par A et pas B
je résous, je trouve un truc
et j'écris au proviseur pour demander pourquoi le prof s'oppose à ce que je passe en Spé.
(mais je vous donne quand même le bas avec mention TB (très Bac).

La méthode dynamique : je connais le coefficient directeur : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
je sais que pour $x = a$ elle passe par A
$y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)+f(a)$
et c'est pareil que $y = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-b)+f(b)$ si si

La méthode Thalès : on trace deux triangles (A,K,B) et (A,H,C)
et on écrit la proportionnalité $\dfrac{HC}{AH} = \dfrac{KB}{AK}$
c'est à dire $\dfrac{y-f(a)}{x-a} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
vu comme ça, c'est naturel au possible
ou alors vous n'avez JAMAIS fait de maths !



La méthode barycentre : y est à $f(a)$ et $f(b)$ ce que x est à a et b :
$y = \dfrac{(b-x).f(a)+(a-x).f(b)}{b-a}$

La méthode MPSI2 : l'équation $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ f(a) & f(b) & y \end{vmatrix} = 0$ est une équation de droite
(développer par rapport à la dernière colonne)
elle passe par A (pour $(x,\ y)$ égal à $(a,\ f(a))$ il y a deux colonnes égales)
elle passe par $(b,\ f(b))$. C'est donc elle.

Bon, on a l'équation de la corde, et il faut vérifier
- $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)+f(a)$ pour $x \in [-\infty,\ a]$
- $f(x) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)+f(a)$ pour $x \in [a,\ b]$
- $f(x) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.(x-a)+f(a)$ pour $x \in [b,\ +\infty[$

Mais c'est l'inégalité des trois cordes appliquée à $(x,\ a,\ b)$ ou $(a,\ x,\ b)$ ou $(a,\ b,\ x)$ suivant le cas.

Petit exercice : une application C^1 dont le graphe est toujours au dessus des tangentes est elle convexe (on est d'accord, c'est une réciproque).

Il est temps maintenant de passer de notre définition « trois cordes » à la définition plus classique « comparaison des moyennes ».

Si vous lisez des livres[38] vous avez plutôt croisé la définition suivante de la convexité :

$\forall (x,\ y),\ \forall t \in [0,\ 1],\ f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$

C'est celle qu'on va qualifier de« inégalité de convvexité »
« image de la moyenne plus petite que moyenne des images »
Dès que vous croisez $(1-t).a+t.b$, vous devez voir une moyenne de a et b.
Plusieurs façons de l'envisager : $\dfrac{(1-t).a+t.b}{(1-t)+t}$ (du type $\dfrac{\lambda.a+\mu.b}{\lambda+\mu}$)
pour t égal à 0, $\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{3}{4}$ et 1, on trouve a, $\dfrac{2;a+b}{2}$, $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a+2.b}{3}$ et b
c'est un curseur affine qui va de a (pour $t=0$) à b (pour $t=1$) en passant par le milieu
il va y avoir du théorème de Thalès.

Le membre $f\big((1-t).x+t.y\big)$ est l'image de la moyenne, et $(1-t).f(x)+t.f(y)$ est la moyenne des images.

Passons de la formule des trois cordes à l'inégalité des moyennes.
Premier sens. On suppose vraie l'inégalité des trois cordes pour tout triplet.
On se donne alors x et y (avec $x<y$) puis t entre 0 et 1.
On constate $x \leqslant (1-t).x+t.y \leqslant y$ (preuve : $\begin{array}{ccccc} ((1-t).x+t.y) & -x & = & t.(y-x) & \geqslant 0 \\ y & -((1-t).x+t.y) & = & (1-t).(y-x) & \geqslant 0 \end{array}$).
On écrit donc : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & (1-t).x+t.y & y \\ f(x) & ((1-t).x+t.y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$ puis en développant, on trouve justement $f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.
Faites le vous même, mais le plus simple est quand même de remplacer la colonne du milieu C_2 par $C_2-(1-t)..C_1-t.C_3$, c'est si joli.

On recommence le même calcul dans le cas $x>y$ qui n'est pas interdit :

38. autres que Tocqueville pour Isabelle, Douglas Adams comme Soline, Katsu Aki comme Marius, ou Roger Hargreaves comme Ornella

on trouve cette fois $x \geqslant (1-t).x+t.y \geqslant y$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & (1-t).x+t.y & x \\ f(y) & ((1-t).x+t.y) & f(y) \end{vmatrix} \geqslant 0$, qui aboutit finalement au même résultat à la fin.

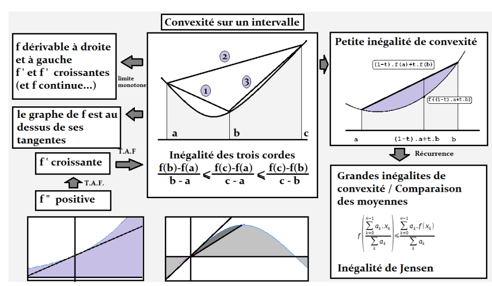
Dans tous les cas on a bien $\forall (x,\ y),\ \forall t \in [0,\ 1],\ f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$.
On peut interpréter cette formule avec le théorème de Thalès :
$(1-t).f\big((1-t).x+t.y\big)+t.f\big((1-t).x+t.y\big) = f\big((1-t).x+t.y\big) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$
puis $(1-t).\Big(f\big((1-t).x+t.y\big)-f(x)\Big) \leqslant t.\Big(f(y)-f\big((1-t).x+t.y\big)\Big)$
Bref, on peut triturer ces formules dans tous les sens. A vous de trouver celui qui vous parle le plus.

Attention, pour t hors de $[0,\ 1]$, l'inégalité change de sens.

Réciproquement. Supposons vraie la formule de comparaison des moyennes. Et montrons la formule de trois cordes.
On se donne a, $b$et c avec $a < b < c$. On va les écrire a, $(1-t).a+t.c$ et c.
Il suffit de choisir : $t = \dfrac{b-a}{c-a}$ (et donc $1-t = \dfrac{c-b}{c-a}$). Vérifiez : $(1-t).a+t.c = b$.
Et vérifiez aussi que t est entre 0 et 1 (signes de t et $1-t$).
L'hypothèse vous permet d'écrire $f(b) \leqslant \dfrac{c-b}{c-a}.f(a)+\dfrac{b-a}{c-a}.f(c)$, puis $(c-a).f(b) \leqslant (c-b).f(a)+(b-a).f(c)$
et même $0 \leqslant (c-b).f(a)-(c-a).f(b)+(b-a).f(c)$.
Saurez vous y reconnaître $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$ (développé par rapport à la dernière ligne).

Résumé : on a toutes ces quantifications équivalentes

$$a < b < c \Rightarrow \bullet \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \geqslant 0$$
$$\bullet\ f(b) \leqslant \frac{c-b}{c-a}.f(a)+\frac{b-a}{c-a}.f(c)$$
$$\bullet\ \frac{f(b)-f()}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$
$$t \in [0,\ 1] \Rightarrow f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$$
$$(a < b) \Rightarrow f'_g(a) \leqslant f'_d(a) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant f'_g(b) \leqslant f'_d(b)$$



Remarque : si on est en début d'année et qu'on n'a pas encore parlé de convexité, on peut demander aux élèves de démontre la formule suivante
$\boxed{\text{pour tout } t \text{ de } [0,\ 1] e^{(1-t).a+t.b} \leqslant (1-t).e^a+t.e^b}$ en suivant la méthode dont vous complèterez les étapes :

- on définit $\varphi = t \longmapsto (1-t).f(a)+t.f(b)-e^{(1-t).a+t.b}$
- on la dérive deux fois, on montre que φ" est de signe constant
- on montre que φ' ne peut pas être de signe constant (en regardant $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$)
- on déduit que φ' est positive puis négative sur $[0,\ 1]$
- on déduit que φ est croissante puis décroissante sur $[0,\ 1]$
- les valeurs aux bornes permettent d'affirmer que φest positive sur $[0,\ 1]$ (et négative hors de $[0,\ 1]$.

.

Question : pourquoi prendre tous les t de $[0,\ 1]$?
Ne suffirait il pas, pour exprimer « image de la moyenne plus petite que moyenne des images » de dire $f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
C'est une bonne question, pas évidente.
Un sens passe bien : si c'est vrai pour tout t, c'est vrai en particulier pour $t=\dfrac{1}{2}$.
Mais l'autre sens ? Tenez, serez vous capable de passer de $\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ et $\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{3.x+y}{4}\Big) \leqslant \dfrac{3.f(x)+f(y)}{4}$, et à $\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{3.x+5.y}{8}\Big) \leqslant \dfrac{3.f(x)+5.f(y)}{8}$ et aussi $\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{13.x+3.y}{16}\Big) \leqslant \dfrac{13.f(x)+3.f(y)}{16}$?
Si vous en êtes capable, vous devez pouvoir généraliser, et... passer à la limite.
Et si vous êtes vicieux, vous irez me construire une fonction totalement discontinue et non convexe vérifiant quand même $\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$, mais juste pour $t=\dfrac{1}{2}$ et pas pour t irrationnel par exemple...
Mais il faudra être très très tordu pour ça.
Je vous donne donc quand même le résultat favorable :
$\forall(x,\ y),\ f\Big(\dfrac{x+y}{2}\Big) \leqslant \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$ et f continue implique f convexe.

Notez au passage pour cette histoire de $t=\dfrac{1}{2}$ que, sachant que le logarithme est concave sur $]0,\ +\infty[$, on a $\ln\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \geqslant \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$.
Effacez les logarithmes et dites moi ce que vous retrouvez... Agréable non ?

J'ai même mieux. On prend trois réels strictement positifs a, $b$et c.
par concavité du logarithme, on peut écrire $\ln\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big) \geqslant \dfrac{\ln(a)+\ln(b)}{2}$ (c'est $t=\dfrac{1}{2}$)
$\ln\Big(\dfrac{2.\alpha+c}{3}\Big) \geqslant \dfrac{2.\ln(\alpha)+\ln(c)}{3}$ pour tout α (c'est $t=\dfrac{1}{3}$)
$\ln\left(\dfrac{2.\frac{a+b}{2}+c}{3}\right) \geqslant \dfrac{2.\ln\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\ln(c)}{3}$ pour α bien choisi
Et c'est ainsi qu'on obtient $\sqrt[3]{a.b.c} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$ bien connue de nous.

D'ailleurs, la tentation est grande de généraliser et de passer de la « petite inégalité de convexité » à la « grande inégalité de convexité ».

petite inégalité de convexité version $(1-t)$ et t $\forall(x,\ y),\ \forall t\in[0,\ 1],\ f((1-t).x+t.y) \leqslant (1-t).f(x)+t.f(y)$
petite inégalité de convexité version α_1 et α_2 $\forall(x_1,\ x_2),\ \forall(\alpha_1,\ \alpha_2)\in(\mathbb{R}^+)^2,\ f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\alpha_2.x_2}{\alpha_1+\alpha_2}\Big) \leqslant \dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\alpha_2.f(x_2)}{\alpha_1+\alpha_2}$
grande inégalité de convexité $\forall n,\ \forall(x_1,\dots x_n),\ \forall(\alpha_1,\dots\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^n,\ f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\ldots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\Big) \leqslant \dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\ldots+\alpha_n.f(x_n)}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$

Les deux versions de l'inégalité de convexité à deux termes sont équivalentes.
Dans un sens, on pose $t=\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$ et on vérifie qu'il est entre 0 et 1.
Dans l'autre sens, on se donne t entre 0 et 1 et on pose $\alpha_1=1-t$ et $\alpha_2=t$ (tous deux positifs).

Et pour passer de la version à deux variables à la version à n variables ? une récurrence sur n ?

Pour l'hérédité : on suppose vraie la formule $f\Big(\dfrac{\alpha_1.x_1+\ldots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}\Big)\leqslant\dfrac{\alpha_1.f(x_1)+\ldots+\alpha_n.f(x_n)}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$
On écrit aussi la formule $f((1-t).x+t.y)\leqslant(1-t).f(x)+t.f(y)$ avec $x=dsp\frac{\alpha_1.x_1+\ldots+\alpha_n.x_n}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}$, $y=x_{n+1}$ et $t=\dfrac{\alpha_{n+1}}{\alpha_1+\ldots+\alpha_n+\alpha_{n+1}}$
On met tout bout à bout... c'est bon.
Dans les petites classes, on appelle ça barycentration partielle.
Si si, $Bar\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n & x_{n+1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}=Bar\begin{pmatrix} Bar\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n\end{pmatrix} & x_{n+1} \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n & \alpha_{n+1}\end{pmatrix}$.
C'est compliqué pour vous ? Vous vous souvenez quand même pour trois points :
(A,B,C) est un triangle de centre de gravité G. Et I est le milieu de AB. Alors G est un barycentre de I et C avec coefficients 2 *et* 1.
$G=Bar\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $I=Bar\begin{pmatrix} A & B \\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $G=Bar\begin{pmatrix} I & C \\ 2 & 1\end{pmatrix}$ *et G est aux deux tiers du segment* $[C,\ I]$.

Et si vous voulez passer de la version à n variables à la version à deux variables ? Non, c'est bon, il suffit de prendre un cas particulier.

Un petit détail : dans la quantification $\forall(x_1,\ldots x_n),\ \forall(\alpha_1,\ldots\alpha_n)\in(\mathbb{R}^+)^n$, il importe que les α_i soient positifs, d'où $(\mathbb{R}^+)^n$.
Mais il importe aussi que leur somme soit non nulle. Sinon, comment la mettre au dénominateur.
Mais alors, comment noter ceci ? $((\mathbb{R}^+)^n)^*$, $(\mathbb{R}^{+*})^n$, $(\mathbb{R}^+)^n-0$, $(\mathbb{R}^+)^n-\{0\}$, $(\mathbb{R}^+)^n-(0,\ldots 0)$?
Et comment le dire avec des mots ? Non tous nuls ? Tous non nuls ?
Réfléchissez.. [39].

Applications classiques :

- Le logarithme est concave donc (pour des α_i tous égaux à 1, c'est le plus simple) : $\ln\Big(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\Big)\geqslant\dfrac{\ln(a_1)+\ldots+\ln(a_n)}{n}$.
  On passe à l'exponentielle (croissante) : $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\geqslant\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$ (comparaison des moyennes).
  A partir de maintenant, vous savez le démontrer en deux lignes.
- Et pour $\dfrac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}\leqslant\dfrac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$, devinez ce qu'on utilise ?
- Montrez que $x\longmapsto\ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
  Déduisez : $1+\Big(\prod_{k=1}^{n}x_k\Big)^n\leqslant\Big(\prod_{k=1}^{,n}(1+x_k)\Big)^{\frac{1}{n}}$ pour des x_k strictement positifs.
  Déduisez $\sqrt[n]{a_1\ldots a_n}+\sqrt[n]{b_1\ldots b_n}\leqslant\sqrt[n]{(a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n)}$ pour des réels strictement positifs a_j et b_i.

Pour aller plus loin : et si on passait à une infinité de termes dans la grande inégalité de convexité. Enfin, c'est mal dit. On va écrire l'inégalité pour n termes et faire tendre n vers l'infini. C'est ce qu'on appelle l'inégalité de Jensen (sur les intégrales).

On prend f continue de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$ et φ convexe (donc continue aussi).
on a alors $\varphi\Big(\displaystyle\int_0^1 f(t).dt\Big)\leqslant\int_0^1\varphi(f(t)).dt$.

Mais c'est tout bête ! On effectue une équisubdivision de $[0,\ 1]$ en n segments, et on applique une

39. ah, non, vous ne pouvez pas réfléchir, lire, copier le cours répondre au téléphone à votre meilleure pote, vérifier qui est Roger Hargreaves

inégalité de convexité pour φ :
$\varphi\Big(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big) \leqslant \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$ (image de la moyenne...)

On fait tendre n vers l'infini. Par continuité de f, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)$ converge vers $\int_0^1 f(t).dt$.

Par continuité de φ, $\varphi\Big(\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$ tend vers $\varphi\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big)$.

Et à droite, par continuité de $\varphi\circ f$, $\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\varphi\Big(f\Big(\frac{k}{n}\Big)\Big)$ converge vers $\int_0^1 \varphi(f(t)).dt$.

L'inégalité large se conserve par passage à la limite : $\varphi\Big(\int_0^1 f(t).dt\Big) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(t)).dt$.

Et si vous préférez la version étendue :

On prend f continue de $[a,\ b]$ dans $\mathbb{R}$ et φ convexe (donc continue aussi). on a alors $\varphi\Big(\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt\Big) \leqslant \frac{1}{b-a}.\int_a^b \varphi(f(t)).dt$.

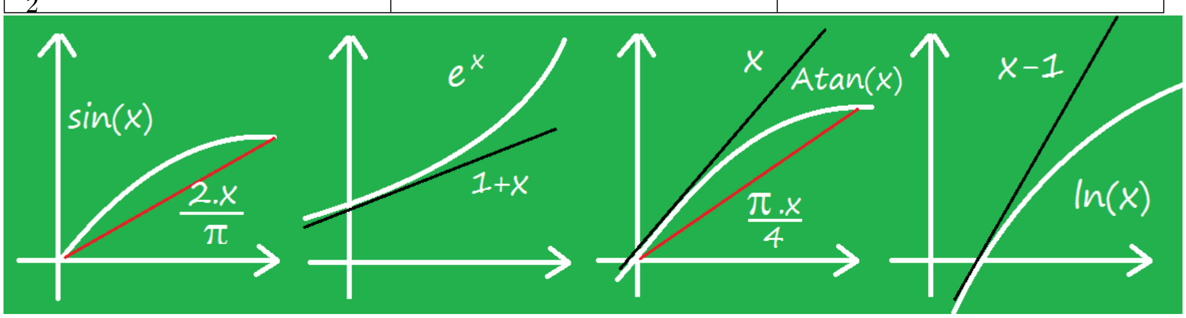
La démonstration est la même, en mettant au bon endroit les $b-a$.
Vous ne savez pas où sont les $\frac{1}{b-a}$? Ah non !
C'est pourtant simple : image de la valeur moyenne face à valeur moyenne de la composée. C'est pourtant une formulation élémentaire !

On le pose souvent pour $\varphi = \exp$.
Mais c'est aussi agréable de l'écrire pour

$x \longmapsto x^2$	$\varphi = x \longmapsto \lvert x\rvert$	$x \longmapsto -\ln(x)$
$\Big(\int_a^b f(t).dt\Big)^2 \leqslant (b-a).\int_a^b (f(t))^2.dt$	$\Big\lvert\int_a^b f(t).dt\Big\rvert \leqslant \int_a^b \lvert f(t)\rvert.dt$	$\ln\Big(\frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t).dt\Big) \geqslant \frac{1}{b-a}.\int_a^b \ln(f(t)).dt$

En gros, c'est à ça que sert la convexité. A ces inégalités dites de convexité de trois type

position par rapport à une corde	position par rapport à une tangente	grande inégalité de convexité
$\sin(x) \geqslant \frac{2.x}{\pi}$ pour x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$	$e^x \geqslant 1+x$ pour x réel	$\frac{a_1+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1\ldots a_n}$



Mais la convexité sert aussi pour les histoires de minima[40].
En fait, on peut le dire simplement, un peu rapidement.
Si f est convexe, sa dérivée est croissante. Elle ne peut donc changer qu'une fois de signe, en passant du négatif au positif (et encore, elle peut rester de signe constant).

40. *je suis resté vieux jeu, latiniste, je dis « minima sociaux » et pas « minimums », je dis « un quantum d'énergie / des quanta », je dis même « un bonus / des boni » et enfin « un thé au rhum / des théories »*

f est donc décroissante, puis croissante.
Elle a un minimum, et ses maxima sont au bout de l'intervalle.
cette notion intervient en physique quand votre système a un équilibre là où une fonction d'état (convexe justement) admet un minimum. Dans ce cas convexe, il y a un unique état d'équilibre.
Et la notion se généralise aux fonctions de plusieurs variables.

Petits exercices :
a- La réciproque d'une application convexe est elle convexe ? concave ?
Qu'allez vous utiliser ? Déterminant ? Trois cordes ? Petite inégalité ? Grande inégalité ?
Et d'ailleurs, la réciproque existe-t-elle ?

b- Si f est convexe et g convexe et croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Pour démontrer ça, qu'allez vous utiliser ? déterminant ? Trois cordes ? Petit inégalité ? grande inégalité ?

c- Une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut elle être majorée ?

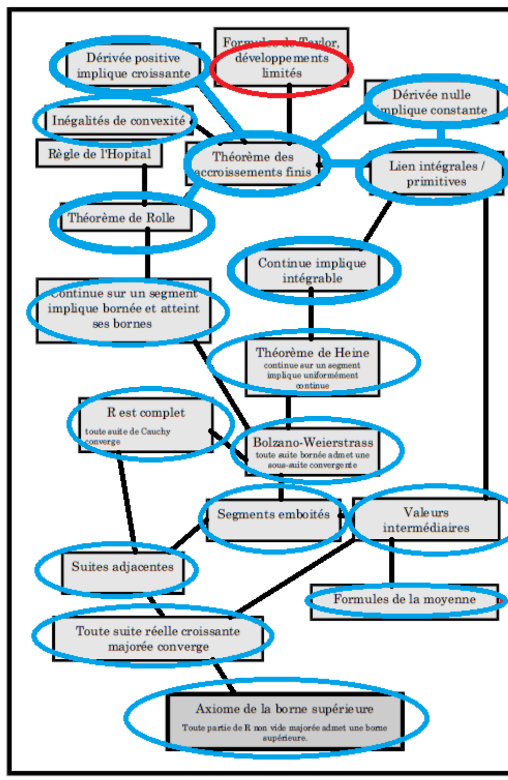
d- Pouvez vous construire f convexe de minmum 1 atteint à la fois en 2 et en 3 ?

Mais ! Que nous reste-t-il maintenant en analyse (la continuité, dérivation, intégration, tous les trucs avec des courbes et des epsilons qu'on découpe en quatre) ?

Si l'on se fie à notre carte mentale ((oui, je me suis rendu compté que c'était le genre de trucs que les pédagogues appelaient une carte mentale histoire de justifier leur salaire), un dernier point et c'est tout.

Et après, on ne parlera plus d'analyse (sauf un peu dans les probabilités avec des sommes et des intégrales) avant de cesser de se voir.

Enfin, « cesser de se voir » est une façon de parler. Ou même de sténographier...
.
.
.
.
.
.



16°) Développements limités.

Cet alinéa va contenir une partie théorique (définition, subtilités diverses), mais le gros sera fait d'exercices dans le cours et en T.D. pour mettre en pratique les développements limités.
En plus, des développements limités, vous en croisez depuis longtemps en maths et en physique. Alors vous savez un peu ce que c'est déjà.

Définition :

Un développement limité d'une application f en a à l'ordre n est une écriture de la forme
$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k + o(h^n)_{h\to 0}$
en supposant quand même f définie sur un voisinage de a.
L'approximation polynômiale ($\sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k$ présentée avec ses puissances orientées dans le sens croissant) est appelée « partie principale ».
Et le terme correctif $o(h^n)_{h\to 0}$ est un terme correctif négligeable devant le dernier terme écrit, et donc aussi devant les autres puisqu'ils sont classés par ordre d'importance décroissante (on rappelle que quand h tend vers 0, 1, h, h^2, h^3 sont des termes de plus en plus petits).

Attention toutefois, ce terme correctif est une « limite ». Vous ne pouvez donc rien dire de son signe, de sa valeur pour h « petit » ou « grand ». Vous ne le connaissez vraiment que pour $h = 0$.
Il existe d'autres présentations :

$$\begin{array}{rclll}
f(a+h) & = & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k & +o(h^n)_{h\to 0} & & (a) \\
f(a+h) & = & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k & +h^n.o(1)_{h\to 0} & & (b) \\
f(a+h) & = & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k & +h^n.\varepsilon(h) & avec\ \varepsilon(h) \longrightarrow_{h\to 0} 0 & (c) \\
f(a+h) & = & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k & +O(h^{n+1}) & & (d) \\
f(x) & = & \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.(x-a)^k & +o((x-a)^n)_{x\to a} & & (e)
\end{array}$$

et enfin $\dfrac{f(a+h) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k}{h^n} \longrightarrow_{h\to 0} 0$

Les formulations (a), (b) et (c) sont équivalentes, c'est la définition même des petits o.
La formulation (d) tend à dire que le terme correction $o(h^{n)}$serait un terme en h^{n+1} ce qui semble assez logique et est presque toujours le cas. mais il peut y avoir des cas tordus où c'est un terme en $h^{n+\frac{1}{2}}$...
La formulation (e) est équivalente aux autres, figure dans certains livres. mais je préfère qu'elle ne figure pas du tout dans votre esprit. Et ce pour deux raisons.

> *Dans $2 + 3.h - h^2 + h^3 + o(h^3)$ par exemple, on voit les termes classés du plus grand au plus petit, tout est cohérent.*
> *face à la même formule en $2 + 3.(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^3)$, on voit encore les termes dans le même ordre, mais il est tellement tentant pour l'élève qui fait du zèle, du calcul et pas de raisonnement de développer en $-3 + 8.x - 4.x^2 + x^3$. Et cette fois, les termes ont tous la même taille, ne peuvent être ordonnés. On ne voit plus du tout que la fonction tend vers 2, avec tangente 3 et comportement localement concave... Tout a été explosé, plus rien n'a de valeur.*
> *De plus, quand vous n'avez pas assez de jugeote, vous écrivez $2 + 3.(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 + o(x^3)$ eu lieu de $2 + 3.(x-1) - (x-1)^2 + (x-1)^3 + o((x-1)^3)$ et alors que fait $o(x^3)$ quand x tend vers m1 ? Il tend vers 0, mais à la même vitesse que $o(1)$, il ne dit plus rien sur la précision de votre calcul. Bref, vous foutez tout en l'air.*

.
Alors retenez : si c'est un développement limité en 3, on pose $x = 3 + h$, on ordonne tout en fonction des puissances (croissantes) de h et SURTOUT on ne revient pas à x.
Visuellement, on translate le repère et on zoome autour de la nouvelle origine.

Il est évident que plus n est grand, plus le développement limité est précis.
En revanche, vous pouvez dégrader un développement limité en enlevant des termes.

$$\begin{array}{cllllllll}
\text{Si vous avez} & f(a+h) & =\alpha_0 & +\alpha_1.h & +\alpha_2.h^2 & \alpha_3.h & +\dots & +\alpha_n.h^n & +o(h^n) \\
\text{alors vous avez aussi} & f(a+h) & =\alpha_0 & +\alpha_1.h & +o(h) & & \text{en regroupant les termes} & & \\
\text{et même} & f(a+h) & =\alpha_0 & +o(1) & & & & &
\end{array}$$

Et ceci vous permet de dire que $f(a+h)$ tend vers α_0 quand h tend vers 0.
Ceci impose alors presque naturellement $f(a)=\alpha_0$ et f devient continue en a.
Mais la ligne $f(a+h)=\alpha_0+\alpha_1.h+o(h)$ dit pour sa part que f est dérivable en a de dérivée α_1.

On retient deux choses de ce début :	• Si f a un développement limité d'ordre au moins égal à 1, alors elle est dérivable en a et les premiers coefficients sont $f(a)$ et $f'(a)$ (vous allez me dire que vous vous en étiez douté). • Les coefficients sont uniques et imposés par f, on va en reparler avec l'unicité du développement limité.

Je vous devine prêts et prêtes à généraliser.
Développement limité d'ordre 2 implique f deux fois dérivable et $\alpha_2=\dfrac{f"(a)}{2}$.
Développement limité d'ordre 3 implique f trois fois dérivable et $\alpha_3=\dfrac{f^{(3)}(a)}{6!}$.
et ainsi de suite.
Si vous affirmez ceci, normalement, • je dois me réjouir et me dire « ils ont compris la formule de Taylor »...
• mais je dois aussi vous dire « non, n'encadrez pas, car c'est faux ».
Surprenant, non ? *f pourrait avoir un développement limité d'ordre 2 sans être deux fois dérivable ? Oui.*
f pourrait avoir un développement limité qui ne vienne pas d'une formule de Taylor Young ? Oui, cette formule est juste une implication n fois dérivable implique « le développement limité existe ».
f pourrait avoir un développement limité, avoir une dérivée seconde et pourtant vérifier $f"(a)\neq 2.\alpha_2$. Ah non, là il ne faut pas pousser. Si elle est de classe D^2, α_2 est bien égal à $\dfrac{f"(a)}{2}$.
Mais le truc est « si elle n'est pas deux fois dérivable, elle a peut être quand même un développement limité d'ordre é.

Alors, un contre-exemple ? Oui. Mais aussi je vous préviens, il est un peu tordu, et le physicien qui sommeille en vous[41] va dire « oui, mais c'est de la triche, on n'en croise jamais des comme ça ».
Je devrai bien reconnaître que c'est le genre de (contre)-exemple qu'on voit au début du cours sur les développements limités et qui part ensuite aux oubliettes.
On définit $\boxed{f=x\longmapsto\begin{cases} x^3 & si \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & sinon\end{cases}}$. Eh oui, encore un graphe fait de petits points... Avec des granulés sur l'axe $0x$ et d'autres sur une parabole cubique.
je vous prouve que f admet en 0 un développement limité d'ordre 2 : $f(0+h)=0+0.h+0.h^2+o(h^2)$.
En effet $\dfrac{f(h)}{h^2}$ vaut h ou 0 et tend vers 0 quand h tend vers 0.
Ensuite, f est elle continue, dérivable...
En 0, f est continue, dérivable, de dérivée 0 (repassez par $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ si vous y tenez).
Mais ailleurs elle est discontinue. Donc non dérivable.
f' n'existe qu'en 0. On ne peut donc pas définir $\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}$, le premier terme de la différence du numérateur n'existe pas...
Si ces taux d'accroissement n'existent pas, comment voulez vous qu'ils aient une limite... $f"(0)$ n'existe pas.

41. ou qui bout à cause d'une température d'ébullition baissée ca• r la pression a augmenté

Et pourtant, f a un développement d'ordre 2 en 0.

. *Et là encore, sur cet exercice, si vous avez un réflexe de Terminale qui dit « je dérive des formules » au lieu de « je regarde ce que ça veut dire « être dérivable », vous êtes mal barré...*

Une fois que vous avez compris ce contre-exemple, vous pouvez même faire des choses encore pires, avec des développements limités d'ordre très élevés, mais aucune dérivée seconde.

Unicité.

Si f admet un développement limité d'ordre n, alors il est unique.

Et je prends cette précaution oratoire (ou plutôt ici calamique) : « si il existe ».
Il y a évidemment des applications sans développement limité, car discontinues, ou a avec une demi-tangente verticale.
Mais ce que dit notre résultat : du moment qu'il y a un développement limité, il n'y en a qu'un.
On va faire comme toujours un raisonnement d'unicité en disant « j'en prends deux et je montre que c'est le même » :

On suppose qu'on a à la fois $\begin{array}{rcllllll} & f(a+h) & = & \alpha_0 & +\alpha_1.h & +\alpha_2.h^2 & +\dots & +\alpha_n.h^n & +o(h^n)_{h\to 0} \\ et & f(a+h) & = & \beta_0 & +\beta_1.h & +\beta_2.h^2 & +\dots & +\beta_n.h^n & +o(h^n)_{h\to 0} \end{array}$.

Première preuve :

on soustrait membre à membre $0 \quad = \quad \alpha_0-\beta_0 \quad +(\alpha_1-\beta_1).h \quad +(\alpha_2-\beta_é).h^2 \quad +\dots \quad +(\alpha_n-\beta_n).h^n$

Or, un polynôme est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nul *(famille libre de monômes en X^n).*

On a donc $\alpha_0-\beta_0=\alpha_1-\beta_1=\dots=\alpha_n-\beta_n$.

Et voilà c'est fini. ☹

Et voilà c'est fichu. Vous n'avez rien compris. Vous vous êtes précipité dans le panneau sans réfléchir...
Pardon ? Où ça !
Mais quand vous avez écrit $o(h^n)-o(h^n)=0$.
Ce n'est pas forcément le même $o(h^n)$ dans les deux formules.

. *On rappelle que c'est une notation pour dire « un élément de l'espace des fonctions qui tendent vers 0 même quand on les divise par h^h ». On est avec deux vecteurs correctifs qui sont dans un espace vectoriel, mais dont la différence n'a aucune raison d'être nulle (elle le sera au final, c'est vrai, mais on n'en sait rien pour l'instant).*

Il aurait fallu écrire quelquechose comme

$\begin{array}{rcllllll} & f(a+h) & = & \alpha_0 & +\alpha_1.h & +\alpha_2.h^2 & +\dots & +\alpha_n.h^n & +o_1(h^n)_{h\to 0} \\ et & f(a+h) & = & \beta_0 & +\beta_1.h & +\beta_2.h^2 & +\dots & +\beta_n.h^n & +o_2(h^n)_{h\to 0} \end{array}$ et là, le problème était visible.

Ou alors écrire une formule du type les $o(h^n)$ pourront varier de ligne en ligne, comme quand on écrit $o(h^n)+h^{n+1}=o(h^n)$.

Ou comme quand le physicien ou le prof de maths de Terminale écrit dans les calculs de primitives : les constantes pourront changer de ligne en ligne $C^{te}+C^{te}=C^{te}$.

Allez, on reprend, avec une vraie preuve qui commence presque pareil :

$\alpha_0 \quad +\alpha_1.h \quad +\alpha_2.h^2 \quad +\dots \quad +\alpha_n.h^n \quad +o_1(h^n)_{h\to 0} \quad = \quad \beta_0 \quad +\beta_1.h \quad +\beta_2.h^2 \quad +\dots \quad +\beta_n.h^n \quad +o_2(h^n)_{h\to 0}$

Puis je vous donne la liste d'arguments `for k in range(n) :`

```
....on fait tendre h vers 0
....on écrit la nouvelle information
....on simplifie
....on divise par h
```

Et je vous en donne les lignes

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\alpha_0 & +\alpha_1.h & +\alpha_2.h^2 & +\dots & +\alpha_n.h^n & +o_1(h^n)_{h\to 0} & = & \beta_0 & +\beta_1.h & +\beta_2.h^2 & +\dots & +\beta_n.h^n & +o_2(h^n)_{h\to 0} \\
\alpha_0 & & & & & & = & \beta_0 & & & & & h\to 0 \\
 & \alpha_1.h & +\alpha_2.h^2 & +\dots & +\alpha_n.h^n & +o_1(h^n)_{h\to 0} & = & & \beta_1.h & +\beta_2.h^2 & +\dots & +\beta_n.h^n & +o_2(h^n)_{h\to 0} \\
 & \alpha_1 & +\alpha_2.h & +\dots & +\alpha_n.h^{n-1} & +o_1(h^{n-1})_{h\to 0} & = & & \beta_1 & +\beta_2.h & +\dots & +\beta_n.h^{n-1} & +o_2(h^{n-1})_{h\to 0} \\
 & \alpha_1 & & & & & = & & \beta_1 & & & & h\to 0 \\
 & & \alpha_2.h & +\dots & +\alpha_n.h^{n-1} & +o_1(h^{n-1})_{h\to 0} & = & & & \beta_2.h & +\dots & +\beta_n.h^{n-1} & +o_2(h^{n-1})_{h\to 0} \\
 & & \alpha_2 & +\dots & +\alpha_n.h^{n-2} & +o_1(h^{n-2})_{h\to 0} & = & & & \beta_2 & +\dots & +\beta_n.h^{n-2} & +o_2(h^{n-2})_{h\to 0} \\
 & & \alpha_2 & & & & = & & & \beta_2 & & & \\
 & & & \ddots & \vdots & \vdots & = & & & & \ddots & \vdots & \vdots \\
 & & & & \alpha_n & +o(1)_{h\to 0} & = & & & & & \beta_n & +o(1)_{h\to 0} \\
 & & & & \alpha_n & & = & & & & & \beta_n &
\end{array}$$

Attention, la formulation mathématique est bien à chaque fois « on fait tendre h vers 0 » et non « on prend $h = 0$ », puisque on a divisé par h avant...

Rédigé à la Choquet, c'est un tableau, c'est visuel, et ça roule tout seul.
Rédigé comme dans un livre, il faut une récurrence propre. Sur qui ? Sur un certain k qui va aller de 0 à n. Faites le.

Preuve rigoureuse de livre.
Par l'absurde. On suppose qu'on a
$(\alpha_0-\beta_0) \quad +(\alpha_1-\beta_1).h \quad +(\alpha_2-\beta_2).h^2 \quad +\dots \quad +(\alpha_n-\beta_n).h^n \quad +o_{1-2}(h^n)_{h\to 0} \quad = \quad 0$, et même proprement $\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k-\beta_k).h^k+o(h^n)=0$.
On suppose que les deux listes de coefficients ne sont pas égales : $\exists k\leqslant n,\ \alpha_k\neq\beta_k$.
On prend alors le premier indice k tel que α_k soit différent de β_k (toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément).
On note k_0 ce premier indice. On a alors $\sum_{k=k_0}^{n}(\alpha_k-\beta_k).h^k+o(h^n)=0$ (avec $\sum_{k=k_0}^{n}$ au lieu de $\sum_{k=0}^{n}$ puisque jusqu'au rang k_0 on a $\alpha_k=\beta_k$).
On divise par h^{k_0} : $\sum_{k=k_0}^{n}(\alpha_k-\beta_k).h^{k-k_0}+o(h^{n-k_0})=0$.
On fait tendre h vers 0 : $\alpha_{k_0}-\beta_{k_0}+0=0$. Et ceci contredit l'hypothèse le premier rang où ils ne coïncident pas ».
On note qu'on a remplacé la récurrence sur k par « le premier indice tel que ». C'est dans le chapitre -1 ça .

L'unicité de l'écriture d'un développement limité (si il existe) vient d'être prouvée ; A quoi ceci va-t-l nous servir ?
Comme à chaque fois : • à faire taire celui qui va dire « je n'ai pas la même réponse, mais la mienne est peut être bonne aussi,
• à faire des raisonnements par identification.
Tiens, identification doit vous faire penser à famille libre et algèbre linéaire. Ici, c'est $C^n(\mathbb{R},\mathbb{R})=\mathbb{R}_n[x]\oplus(o(h^n))$ qu'on a montré, êtes vous d'accord ?

Je vous offre quatre exemples, plus ou moins artistiques.

$\bullet_1$ Montrez que le développement limité en 0 d'une application paire ne contient que des termes d'exposant pair.
$\bullet_2$ Donnez le développement limité d'ordre 6 quand θ tend vers 0 de $\dfrac{1}{\cos(\theta)}$.
$\bullet_3$ On pose $f=x\longmapsto e^{(x^2)}$. Calculez $f^{(n)}(0)$.
$\bullet_4$ On pose $f=x\longmapsto e^{(x^2)}$. Calcule $f^{(n)}(a)$ pour tout a.

Premier exercice.

On suppose deux choses : $f(0+h)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.h^k+o(h^n)_{h\to 0}$[42] et $f(-h)=f(h)$ pour tout h.

On a alors $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.h^k+o(h^n)_{h\to 0}=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.(-h)^k+o(h^n)_{h\to 0}$

puis $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.h^k+o(h^n)_{h\to 0}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.\alpha_k.h^k+o(h^n)_{h\to 0}$.

Par unicité du développement limité, $\alpha_k=(-1)^k.\alpha_k$.
Pour k pair, c'est sans intérêt.
Pour k impair, on a $\alpha_k=0$.
Il ne reste que les termes d'exposants pairs.

Comme $\cos(h)=1-\dfrac{h^2}{2}+\dfrac{h^4}{24}-\dfrac{h^6}{6!}+\dfrac{h^8}{8!}+o(h^9)_{h\to 0}$ par exemple.

$\sin(h)=h-\dfrac{h^3}{6}+\dfrac{h^5}{120}-\dfrac{h^7}{7!}+\dfrac{h^9}{9!}+o(h^{10})_{h\to 0}$ par les même type d'arguments

On a écrit le développement du cosinus à l'ordre 9, et le terme en h^9 est nul.

On peut aussi dire $e^h=\sum_{k=0}^{2.n}\dfrac{h^k}{k!}+o(h^{2.n})_{h\to 0}$ et dire qu'en extrayant la partie paire (unicité. de la décomposition) : $ch(h)=\sum_{p=0}^{n}\dfrac{h^{2.p}}{(2.p)!}+o(h^{2.n})_{h\to 0}$.

Je sais, certains étaient prêts à dire f est paire, donc ses dérivées successives sont alternativement paires et impairs, donc une dérivée sur deux est nulle en 0, et comme les coefficients sont les $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, un coefficient sur deux est nul.[43]*. mais cette preuve a un petit défaut, elle suppose que le développement vient forcément d'une formule de Taylor-Young...*

Deuxième exercice.[44]

La fonction $\theta\longmapsto\dfrac{1}{\cos(\theta)}$ est définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ et de classe C^∞. Elle admet donc un développement limité à n'importe quel ordre.

Si on est resté « élève de Terminale », on applique le premier résultat croisé dans le cours.

> *Finalement, c'est ça la différence entre le pré-Bac et le post-Bac.*
> *En Pré-Bac, le cours est rapide : une définition, un théorème et quarante trois exercices d'application directe de la définition et du théorème.*
> *En Post-Bac, le cours est dense : une définition, un théorème et quarante trois belles idées pour aller plus vite, plus loin, changer de point de vue. l'objectif est de faire de vus des gens qui réfléchissent et ne se contentent pas de la première idée croisée.*

.

Je disais donc : si on est resté « élève de Terminale », on applique le premier résultat croisé dans le cours : la formule de Taylor-Young. On dérive donc sept ou huit fois (sans se tromper S.V.P.) on calcule les dérivées en 0, on divise par des factorielles, et on a la formule.

> *Si on est donc bas de plafond mais efficace en calcul, on y arrive, et on persiste à rouler dans les ornières du tracteur devant. mais on ne va pas loin, pas plus vite que le tracteur de devant. ne restez donc pas dans vos trucs « en Terminale ça marchait comme ça, donc je vais continuer ainsi ». Si vous continuez ainsi, vous aurez le bas en juin 2020, vous aurez le bac en juin 2021 et vous aurez le bac en juin 2022. Tandis que les autres entreront en école d'ingénieur...*

.

---

42. erreur classique $\sum_{k=0}^{n}\alpha_k.h^k+o(h^k)_{h\to 0}$ au lieu de $o(h^n)$, porté par le k qu'on a écrit juste avant

43. *oui, on a utilisé g impaire implique $g(0)=0$, c'est une évidence qui doit figurer dans votre cours de... dans votre tête, c'est tout !*

44. et second pour le cours de ce matin

Pour vous convaincre de l'horreur de cette méthode : la dérivée sixième de $\longmapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est $x \longmapsto \dfrac{61.\cos^6(x) + 662.\cos^4(x).\sin^2(x) + 1320.\cos^2(x).\sin^4(x) + 720.\sin^6(x)}{\cos^7(x)}$...

Maintenant, une fois que je me suis défoulé contre... (oui, contre qui finalement), voici la bonne méthode.
On sait que $\dfrac{1}{\cos(h)}$ admet un développement limité d'ordre (Taylor-Young).
On l'écrit a priori $\dfrac{1}{\cos(h)} = \alpha_0 + \alpha_1.h + \alpha_2.h^2 + \alpha_3.h^3 + \alpha_4.h^4 + \alpha_5.h^5 + \alpha_6.h^6 + o(h^6)_{h\to 0}$.
Et même $\dfrac{1}{\cos(h)} = \alpha_0 + \alpha_2.h^2 + \alpha_4.h^4 + \alpha_6.h^6 + o(h^6)_{h\to 0}$ puisque l'application est paire.
Et dans le même temps, on connaît $\cos(h) = 1 - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^4}{24} - \dfrac{h^6}{6!} + \dfrac{h^8}{8!} + o(h^9)_{h\to 0}$.
Et que fait on ? Le produit des deux.
C'est idiot ! Ça fait 1 ! Oui. Et 1, c'est une développement limité connu : $1 = 1 + 0.h + 0.h^2 + 0.h^3 + 0.h^4 + 0.h^5 + 0.h^6 + o(h^6)$.
Il ne reste qu'à développer et identifier :
$\Big(\alpha_0 + \alpha_2.h^2 + \alpha_4.h^4 + \alpha_6.h^6 + o(h^6)_{h\to 0}\Big).\Big(1 - \dfrac{h^2}{2} + \dfrac{h^4}{24} - \dfrac{h^6}{6!} + \dfrac{h^8}{8!} + o(h^9)_{h\to 0}\Big) = 1 + 0.h + 0.h^2 + 0.h^3 + 0.h^4 + 0.h^5 + 0.h^6 + o(h^6)$
D'accord, c'est un peu long de développer le premier membre. sauf si on le fait proprement :

	α_0	$+\alpha_2.h^2$	$+\alpha_4.h^4$	$+\alpha_6.h^6$	$+o(h^6)$
1	α_0	$+\alpha_2.h^2$	$+\alpha_4.h^4$	$+\alpha_6.h^6$	$+o(h^6)$
$-\dfrac{h^2}{2}$	$-\dfrac{\alpha_0.h^2}{2}$	$-\dfrac{\alpha_2.h^4}{2}$	$-\dfrac{\alpha_4.h^2}{2}$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$
$+\dfrac{h^4}{24}$	$+\dfrac{\alpha_0.h^4}{24}$	$+\dfrac{\alpha_2.h^6}{24}$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$
$-\dfrac{h^6}{6!}$	$-\dfrac{\alpha_0.h^6}{6!}$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$
$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$	$+o(h^6)$

et plus lisiblement

	α_0	$+\alpha_2.h^2$	$+\alpha_4.h^4$	$+\alpha_6.h^6$	$+o(h^6)$
1	α_0	$+\alpha_2.h^2$	$+\alpha_4.h^4$	$+\alpha_6.h^6$	
$-\dfrac{h^2}{2}$	$-\dfrac{\alpha_0.h^2}{2}$	$-\dfrac{\alpha_2.h^4}{2}$	$-\dfrac{\alpha_4.h^6}{2}$		
$+\dfrac{h^4}{24}$	$+\dfrac{\alpha_0.h^4}{24}$	$+\dfrac{\alpha_2.h^6}{24}$			
$-\dfrac{h^6}{6!}$	$-\dfrac{\alpha_0.h^6}{6!}$				
$+o(h^6)$					$+o(h^6)$

Sous cette forme, on a chaque coefficient à identifier :
$\dfrac{1}{\cos(h)}.\cos(h) = \Big(\alpha_0\Big) + \Big(\alpha_2 - \dfrac{\alpha_0}{2}\Big).h^2 + \Big(\alpha_4 - \dfrac{\alpha_2}{2} + \dfrac{\alpha_0}{24}\Big).h^4 + \Big(\alpha_6 - \dfrac{\alpha_4}{2} + \dfrac{\alpha_2}{24} - \dfrac{\alpha_0}{6!}\Big).h^6 + o(h^6)_{h\to 0}$

On obtient un petit système triangulaire : $\begin{array}{ccccccc} \alpha_0 & & & & = & 1 \\ \dfrac{-\alpha_0}{2} & +\alpha_2 & & & = & 0 \\ \dfrac{\alpha_0}{24} & \dfrac{-\alpha_2}{2} & +\alpha_4 & & = & 0 \\ \dfrac{-\alpha_0}{6!} & +\dfrac{\alpha_2}{24} & \dfrac{-\alpha_4}{2} & +\alpha_6 & = & 0 \end{array}$.

On le résout : $\boxed{\dfrac{1}{\cos(h)} = 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{5.t^4}{24} + \dfrac{61.t^6}{720} + o(t^6)_{t\to 0}}$

Troisième exercice.

On estimera que vous connaissez tous le développement limité de l'exponentielle en 0 obtenu par la formule de Taylor dans laquelle les dérivées successives de l'exponentielle en 0 valent toutes 1 :

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)_{x\to 0}$$

.Si une variable h tend vers 0, il en est alors de même de h^2. Et la formule devient :

$$\exp(h^2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^{2.h}}{k!} + o(h^{2.n})_{h\to 0}$$

Et ceci, c'est le développement en 0 de l'application $x \longmapsto e^{x^2}$, sous la forme $f(0+h) = \ldots + o(h^{2.n})_{h\to 0}$.

Mais comme l'application f est de classe C^∞, son développement limité d'ordre $2.n$ est donné aussi par la formule de Taylr :

$$f(0+h) = \sum_{i=0}^{2.n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}.h^i + o(h^{2.n})_{h\to 0}$$

Comme il y a unicité du développement limité (on est das les applications de ce résultat), on peut identifier dans

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{h^{2.k}}{k!} + o(h^{2.n})_{h\to 0} = f(0+h) = \sum_{i=0}^{2.n} \frac{f^{(i)}(0).h^i}{i!} + o(h^{2.n})_{h\to 0}$$

si i est pair ($i = 2.k$)	si i est impair
$\frac{f^{(i)}(0)}{i!} = \frac{1}{k!}$	$f^{(i)}(0) = 0$

car dans le membre de gauche, il n'y a qu'un terme sur deux

Plus proprement : $\boxed{\begin{array}{lcll} f^{(i)}(0) & = & \dfrac{i!}{\left(\frac{i}{2}\right)!} & \text{si } i \text{ pair,} \\ & = & 0 & \text{si } i \text{ impair} \end{array}}$

Une partie était prévisible car l'application est paire.

Ce qu'il y a de joli, c'est qu'on a calculé par exemple $f^{(12)}(0) = \frac{12!}{6!} = 12.11.10.9.8.7$ *sans calculer* $f^{(12)}$ *ailleurs, et sans calculer non plus les dérivées précédentes...*
Après, si vous aimez calculer :
$4096.x^{12}.e^{x^2} + 135168.x^{10}.e^{x^2} + 1520640.x^8.e^{x^2} + 7096320.x^6.e^{x^2} + 13305600.x^4.e^{x^2} + 7983360.x^2.e^{x^2} + 665280.e^{x^2}$.
Ça se fait de tête... Mais de tête de quoi, je ne le dirai pas...

On va faire encore mieux, et trouver la forme de $f^{(n)}(a)$ en tout point a et pas seulement en 0.
Non pas en dérivant et « récurant ». Mais en identifiant « formule de Taylor » et « développement limité obtenu par le calcul ».
On se donne un réel a autour duquel on va bouger, de manière « infinitésimale ».
Je vous laisse écrire ce qui vous semble le plus « simple », surtout si vous êtes physicien dans l'âme [45]

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)_{h\to 0}$$

45. ce qui n'est pas une insulte, juste une déception si vous n'êtes que ça

Mais dans le même temps, on a $f(a+h) = e^{(a+h)^2} = e^{a^2}.e^{2.a.h}.e^{h^2}$.
Or, on connaît les développements limités de $e^{2.a.h}$ et e^{h^2} quand h tend vers 0 :
$e^{2.a.h} = \sum_{i=0}^{n} \frac{(2.a.h)^i}{i!} + o(h^n)_{h\to 0}$ (car $2.a.h$ tend vers 0, et $o(2^n.a^n.h^n)_{h\to 0} = o(h^n)_{h\to 0}$ puisque $2^n.a^n$ est une « constante »)
$e^{h^2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{(h^2)^j}{j!} + o(h^{2n})_{h\to 0}$ et même $e^{h^2} = \sum_{j=0}^{n/2} \frac{h^{2.j}}{j!} + o(h^n)_{h\to 0}$ en coupant avant qu'il ne soit trop ridicule.

On n'a plus qu'à multiplier et identifier

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)_{h\to 0} = e^{a^2}.\Big(\sum_{i=0}^{n} \frac{(2.a.h)^i}{i!} + o(h^n)\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n/2} \frac{h^{2.j}}{j!} + o(h^n)\Big) \\ &= \sum_{\substack{i\leqslant n \\ 2.j\leqslant n}} e^{a^2}.\frac{(2.a)^i}{i!.j!}.h^{i+2.j} + o(h^n) \end{aligned}}$$

L'identification dit $\frac{f^{(k)}(a)}{k!} = \sum_{i+2.j=k} \frac{e^{a^2}(2.a)^i}{i!.j!}$ puis $\boxed{f^{(k)}(a) = e^{a^2}.\sum_{i+2.j=k} \frac{k!.(2.a)^i}{i!.j!}}$

On note qu'on a bien joué (et je me remercie) en n'écrivant pas
$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.h^k + o(h^n)_{h\to 0} = e^{a^2}.\Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{(2.a.h)^k}{k!} + o(h^n)\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n/2} \frac{h^{2.k}}{k!} + o(h^n)\Big)$
comme le fait le néophyte [a] *en appelant tout* k.

a. néophyte : racine grecque pour dire débutant ;citation « ne collez pas le néophyte si vous préférez l'abbesse ! »

.
Évidemment, si vous attendiez une formule plus compacte, c'est un peu décevant.
Mais au moins, on peut vérifier par exemple pour $n = 12$. Il y a plusieurs couples du moment que $i+2.j$ vaut 12 :

i	$i=0$	$i=2$	$i=4$	$i=6$	$i=8$	$i=10$	$i=12$
j	$j=6$	$j=5$	$j=4$	$j=3$	$j=2$	$j=1$	$j=0$
coefficient	$\frac{12!}{6!}.e^{a^2}$	$\frac{12!}{2!.5!}.(2.a)^2.e^{a^2}$	$\frac{12!}{4!.4!}.(2.a)^4.e^{a^2}$	$\frac{12!}{6!.3!}.(2.a)^6.e^{a^2}$	$\frac{12!}{8!.2!}.(2.a)^8.e^{a^2}$	$\frac{12!}{10!.1!}.(2.a)^{10}.e^{a^2}$	$\frac{12!}{12!.0!}.(2.a)^{12}.e^{a^2}$

Si déjà vous comprenez bien ce développement $e^{a^2}.\sum_{i+2.j=k} \frac{k!.(2.a)^i}{i!.j!}$, c'est qu'on a fait du vrai travail depuis de début de l'année[46].
On retrouve $\frac{12!}{6!}$ quand on calcule $f^{(12)}(0)$.
On reconnaît aussi par exemple $\frac{12!}{4!.4!}.(2.a)^4.e^{a^2}$ de la formule écrite plus haut $\ldots + 13\,305\,600 \times a^4 \times e^{a^2} + \ldots$. Vérifiez : $\frac{12.11.10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4}.2^4 = \ldots$

. *On note que cette fois, il est plus prudent d'appeler la variable autour de laquelle on travaille* a *plutôt que* x*, question d'habitude, voire de mauvaise habitude.*

Et je vous en offre un de plus. Il me servait dans le test de début d'année.
Souvenir de septembre. Vus veniez d'arriver au lycée Charlemagne, et vous aviez encore un grand sourire, de belles ambitions et pas de masque.
Les années précédentes, je glissais la question suivante :

46. ou que vous êtes arrivés en Sup déjà intelligents et pas juste bacheliers de l'enseignement secondaire

On définit $f = x \longmapsto \sin(x^2) - \sqrt{1+x^2} + \cos(x + x^3/6)$.
Calculez $f^{(n)}(0)$ pour n de 0 à 5. Généralisez.

A quoi me servait cet exercice ? A tester si les élèves de septembre savaient calculer (ici, c'était énorme de calculer ça). Et ensuite si ils avaient une réaction de non-scientifique.
On peut courageusement calculer les premières dérivées. C'est jouable. Mais dès la seconde, je craque.
Pourtant, une calculatrice peut le faire (vous vous souvenez, on sort de terminale avec une confiance sans faille dans ce truc acheté quatre vingt dix euros, qui calcule de tout).
Et les cinq premières dérivées sont nulles en 0.
Alors si on est naïf comme un pinson sorti du nid (un pinson de nichée), on généralise en disant que toutes les dérivées en 0 sont nulles.
Et c'est une grosse bêtise.
Déjà parce qu'on ne généralise pas à une infinité de valeurs ce que l'on n'a obtenu que pour six.
Ensuite, parce que vous vous dites peut être maintenant que si toutes les dérivées sont nulles en 0, il ne doit pas rester grand chose de la fonction quand on écrit des formules de Taylor...

Et d'ailleurs, l'élève qui aurait eu le courage de calculer la sixième dérivée en 0 aurait trouvé autre chose.

On corrigeait le teste de rentrée lors du chapitre -1, et je promettais aux élèves une explication.. plus tard dans l'année.
Le « plus tard » en question venait justement avec les développements limités.

On obtient facilement le développement limité de cette application en 0 sans dériver.
Et on identifie ensuite avec celui qu'on aurait obtenu en dérivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\sin(h^2) & = & & & h^2 & & & & -\frac{h^6}{6} & +o(h^6) \\
-\sqrt{1+h^2} & = & -1 & & -\frac{h^2}{2} & & +\frac{h^4}{8} & & +\frac{h^6}{16} & +o(h^6) \\
\cos(h+\frac{x^3}{3}) & = & 1 & & -\frac{h^2}{2} & & -\frac{h^4}{8} & & +\frac{h^6}{80} & +o(h^6) \\
f(h) & = & 0 & +0.h & +0.h^2 & +0.h^3 & +0.h^4 & +0.h^5 & -\frac{13.h^6}{60} & +o(h^6) \\
f(h) & = & f(0) & +f'(0).h & +\frac{f"(0)}{2}.h^2 & +\frac{f^{(3)}(0)}{6}.h^3 & +\frac{f^{(4)}(0)}{24}.h^4 & +\frac{f^{(5)}(0)}{120}.h^5 & +\frac{f^{(6)}(0)}{720}.h^6 & +o(h^6)
\end{array}$$

L'identification (argument d'unicité) des deux dernières lignes donne les dérivées successives :
$f(0) = f'(0) = f"(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = 0$ et $f^{(6)}(0) = -156$.
On retrouve sans trop calculer de dérivées que $f^{(k)}(0)$ est nul pour k de $\grave{a}$ à 5, mais aussi qu'il ne faut pas généraliser...

Ah oui, mais, allez vous me dire : comment avez vous obtenu le développement limité de

$$\begin{array}{l}
\sin(h^2) \\
-\sqrt{1+h^2} \\
\cos\left(h + \dfrac{h^3}{6}\right)
\end{array}$$

. Si c'est en dérivant cinq fois chacun, c'est pareil que de dériver la somme...
Mais non, on fait des maths. Donc on trouve le chemin agréable et simple. Et ce n'est pas le premier que l'on vous a indiqué dans le cours, comme indiqué depuis qu'on est sorti de la Terminale.

Par exemple, on sait $\sin(\theta) = \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)_{\theta\to 0}$ (Taylor, et surtout par cœur).
On prend alors $\theta = h^2$ qui tend bien vers 0 et on a $\sin(h) = h - \dfrac{h^6}{6} + o(h^3)_{\theta\to 0}$.

Petite parenthèse : on est en salle 210, donc on est rigoureux. On écrit une égalité, avec un petit o.
Et on ne bidouille pas des trucs sans queue ni tête tels que

$\sin(\theta) = \theta - \dfrac{\theta^3}{6}$ *SII*

$\sin(\theta) \simeq \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + \dots$ *physique*

$\sin(\theta) \sim \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)_{\theta\to 0}$ *j'ai tout gâché*

Le langage des petits o est là pour que tout soit fait d'égalités...
Certes, la formule $\sin(\theta) \sim \theta - \dfrac{\theta^3}{6} + o(\theta^3)_{\theta\to 0}$ *n'est pas fausse, mais elle ne dit rien de plus que* $\sin(\theta) \sim \theta$ *puisqu'un équivalent ne voit que le premier terme non nul.*
laissez votre plume écrire des $\simeq$*et autres dès que vous descendez l'escalier ou traversez la rue, mais laissez votre cerveau parler en salle* 210.

.

Et pour $\sqrt{1+h^2}$? Facile, on sait qu'il y a un développement limité qui existe à tout ordre, car l'application est C^∞. Et on sait qu'il ne contient en 0 que des termes de rang pair. Et on sait que le premier terme en 0 est 1 valeur de la fonction. On a donc $\sqrt{1+h^2} = 1 + a.h^2 + b.h^4 + c.h^6 + o(h^6)_{h\to 0}$.
Mais on n connaît pas a, b et c.
Patience. Nommer les choses vous met sur la bonne piste.
Élevez au carré. C'est tout. $1 + h^2 = \Big(1 + a.h^2 + b.h^4 + c.h^6 + o(h^6)_{h\to 0}\Big)^2$,
puis identifiez :
$1 + h^2 = 1 + 2.a.h^2 + (a^2 + 2.b).h^4 + (2.a.b + 2.c).h^6 + o(h^6)_{h\to 0}$

- a vaut $\dfrac{1}{2}$
- b vaut $-\dfrac{a^2}{2}$
- c vaut $-a.b$

Il suffit de savoir se débrouiller...
Et pour élever au carré, je n'ai pas utilisé $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^{é} + \beta^{é} + \gamma^2 + 2.\alpha.\beta + \dots$. Ça c'est la formule du début du cours, pas ce qu'on utilise une fois qu'on a grandi.

	1	$+a.h^2$	$+b.h^4$	$+c.h^6$	$+o(h^6)$
1	1	$+a.h^2$	$+b.h^4$	$+c.h^6$	$+o(h^6)$
$+a.h^2$	$+a.h^2$	$+a^2.h^4$	$+a.b.h^6$		
$+b.h^4$	$+b.h^4$	$+a.b.h^6$			
$+c.h^6$	$+c.h^6$				
$+o(h^6)$					

Et pour le dernier ? $\cos(\theta) = 1 - \dfrac{\theta^2}{6} + \dfrac{\theta^4}{24} - \dfrac{\theta^6}{720} + o(\theta^6)$ et on l'applique pour $\theta = h + \dfrac{\theta^3}{6}$.

ce n'est pas mortel, puisque

θ	$=$	h		$+\frac{h^3}{6}$				
θ^2	$=$		h^2		$+\frac{h^4}{3}$		$+\frac{h^6}{36}$	$+o(h^6)$
θ^3	$=$			h^3		$+\frac{h^5}{2}$		$+o(h^6)$
θ^4	$=$				h^4		$+\frac{2.h^6}{3}$	$+o(h^6)$
θ^5	$=$					h^5		$+o(h^6)$
θ^6	$=$						h^6	$+o(h^6)$

On développe ensuite $\cos\left(h + \dfrac{h^3}{6}\right)$ et on trouve ce qui a été indiqué plus haut.

Vous avez compris mais vous ne seriez pas capable de le faire vous même ? Ce n'est pas grave.
Je retiens que vous avez compris et que c'est très bien.
Et le reste viendra avec l'habitude.

.

Résumons tout de suite ce que vous aurez le droit de faire avec des développements limités.
Avec les conseils adéquats.

Somme	Pensez bien à écrie les deux développements au même ordre. Sinon, tronquez à l'ordre de celui qui est le moins précis.
Produit	Développez grâce à un tableau. Et coupez tous les termes qui dépassent le moins précis des petits o que vous avez crées.
Puissance	Une puissance n'est rien qu'un produit. Pour développer $(f(a+h))^2$ écrivez que c'est $f(a+h)\times f(a+h)$. Pour développer $(f(a+h))^3$ calculez déjà $(f(a+h))^2$ puis multipliez par $f(a+h)$.
Composée	Reportez un développement limité dans un autre,mais vérifiez déjà que le terme que vous reportez tend bien vers 0, sinon ça n'a strictement aucun sens. Et ensuite, regardez l'ordre auquel vous travaillez et les ordres auxquels vous devez connapitre $f(a+h)$ quand h tend vers 0 et $g(f(a)+k)$ quand k tend vers 0.
Quotient	Suivant les circonstances, • se ramener à ce qui précède en $v(a+h).\frac{1}{u(a)+(\ldots)}=v(a+h).\frac{1}{u(a)}.\frac{1}{1+(\ldots)}$. • faire un produit en croix (mon conseil) • poser une division suivant les puissances croissantes (hors programme, un jour je serai inspecteur général de l'éducation nationale et je vous vengerai)
Intégration	C'est l'opération qui passe bien et fait gagner un ordre de plus. Pensez quand même que vous intégrez depuis un état initial à ne pas oublier (en langage de cochon : n'oubliez pas la constante d'intégration)
Dérivation	Normalement ça conduit à des bêtises car un petit o peut « exploser » à la dérivation. Mais en fait, il y a des astuces : poser a priori et intégrer dire que ça vient d'une formule de Taylor dont il suffit alors de décaler les indices.

Mais pour comprendre ça, le mieux est de le mettre en pratique.
Et je vous propose le grand classique de tous les profs de prépas et de tous les colleurs de prépas : mille et une façons d'obtenir le développement limité de la tangente en 0

sous titre :

1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{17}{315}$

Ce n'est pas l'arrivée du tiercé dans $\mathbb{R}$. ce sont les coefficients. Et vous n'êtes tenus de connaître que les premiers.
Et le titre avec « mille et une » est un peu exagéré ; mais vous allez voir qu'on va en proposer quand même un bon nombre...

Mise en jambe : la tangente est de classe C^∞ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; elle admet donc un développement à tout ordre
la tangente est impaire ; son développement limité en 0 ne contient que des termes d'exposant impair [a].

[a]. ailleurs qu'en 0, on ne dira rien

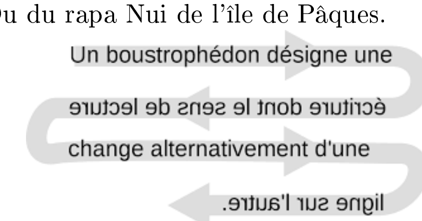
Méthode 1 : Taylor Young

On dérive autant de fois qu'il faut. Et pour se simplifier la vie, on va écrire t à la place de tan(application) et on a donc $t = 1 + t^2$

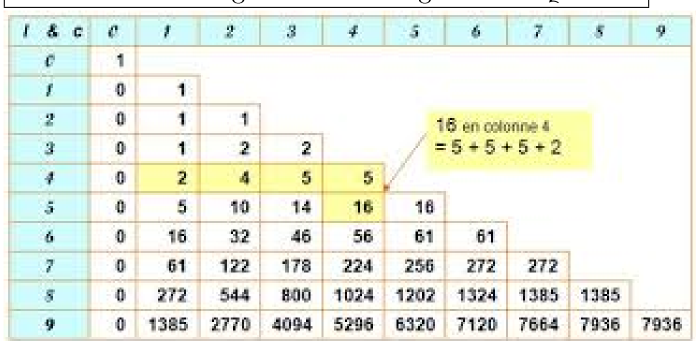
$n =$	dérivée $t^{(n)}$	simplification	valeur en 0	coefficient $\dfrac{t^{(n)}(0)}{n!}$
0	t	t	0	0
1	$1+t^2$	$1+t^2$	1	1
2	$2.t.(1+t^2)$	$2.t+2.t^3$	0	0
3	$(2+6.t^2).(1+t^2)$	$2+8.t^2+6.t^4$	2	$\dfrac{1}{3}$
4	$(16.t+24.t^3).(1+t^2)$	$16.t+40.t^3+24.t^5$	0	0
5	$(16+120.t^2+120.t^4).(1+t^2)$	$16+136.t^2+\ldots+120.t^6$	16	$\dfrac{2}{15}$
6	$(272.t+\ldots+720.t^5).(1+t^2)$	$272.t+\ldots+720.t^7$	0	0
7	$(272+\ldots+5040.t^6).(1+t^2)$	$272+\ldots+7!.t^8$	272	$\dfrac{17}{315}$

On voit que même si on a choisi la méthode bourrin, on l'a conduite avec intelligence, et l'algorithme peut être implémenté sous Python avec des listes.
Je vous laisse d'ailleurs le soin de le mettre en place.

Et je vous invite même si vous voulez à aller lire ce que vous trouvez sur l'algorithme boustrophédon.
Le boustrophédon est le bœuf qui laboure le champ en faisant des aller retours.
On appelle aussi boustrophédon toute écriture qui avance une ligne su deux dans le sens latin/grec une ligne sur deux dans le sens hébreu. C'est de l'étrusque ! Ou du rapa Nui de l'île de Pâques.



→souvent pour s'amuser, les hommes d'équipage ↘
↙ srem sed xuaesio setsav ,sortabla sed tnennerp ↙
↘ qui suivent indolents compagons de voyage ↘
srema serffuog sed rus tnassilg erivan el ↙



l & c	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	1	2	2						
4	0	2	4	5	5					
5	0	5	10	14	16	16				
6	0	16	32	46	56	61	61			
7	0	61	122	178	224	256	272	272		
8	0	272	544	800	1024	1202	1324	1385	1385	
9	0	1385	2770	4094	5296	6320	7120	7664	7936	7936

Je ne sais pas si vous comprenez comment se remplit se triangle presque Pascalien (mais sommes de tous les termes de la ligne du dessus et pas seulement de deux d'entre eux).

Comprenez vous aussi comment on retrouve nos 1, 2, 16 et 272 et les suivants...

`http ://villemin.gerard.free.fr/aNombre/TYPTHNOM/Euler.htm`

On notera que de par le type de construction, les coefficients trouvés seront toujours dans une colonne des entiers positifs, et dans l'autre des rationnels.
Si ceci vous fait penser à un exercice sur les fonctions dont toutes les dérivées sont positives, c'est bien vu.

Cette méthode est utilisable en d'autres points.
Par exemple en $\pi/4$, tous vos t valent 1 :

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+h\right) = 1+2.h+2.h^2+\frac{8.h^3}{3}+\frac{10.h^4}{3}+o(h^4)_{h\to 0}$$

Méthode 2 : Produit en croix, a priori.

On sait que la tangente a un développement limité que l'on pose a priori, en effaçant d'office les termes nuls.
On le multiplie par le développement limité du cosinus (connu) et on identifie avec celui du sinus (connu aussi).

$$\Big(a.h+b.h^3+c.h^5+d.h^7+o(h^7)\Big).\Big(1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}-\frac{h^6}{6!}+o(h^6)\Big)=\Big(h-\frac{h^3}{6}+\frac{h^5}{120}-\frac{h^7}{7!}+o(h^7)\Big)$$

Développons le premier membre avec un tableau, histoire de prendre de bonnes habitudes[47] (et de mauvaises en oubliant d'écrire les petits o) :

	$a.h$	$+b.h^3$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	$a.h$			
$-\frac{h^2}{2}$				
$+\frac{h^4}{24}$				
$-\frac{h^6}{6!}$				

et dans sinus : h : donc $a=1$

	h	$+b.h^3$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	h	$+b.h^3$		
$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$			
$+\frac{h^4}{24}$				
$-\frac{h^6}{6!}$				

et dans sinus : $-\frac{h^3}{6}$: donc $b-\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}$: $b=\frac{1}{3}$

	h	$+\frac{h^3}{3}$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	h	$+\frac{h^3}{3}$	$c.h^5$	
$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$	$-\frac{h^5}{6}$		
$+\frac{h^4}{24}$	$+\frac{h^5}{24}$			
$-\frac{h^6}{6!}$				

et dans sinus : $\frac{h^5}{120}$: donc $c-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{1}{120}$: $c=\frac{2}{15}$.

Je vous laisse remplir la dernière diagonale.

Vous pouvez le refaire pour un classique comme $\frac{x}{e^x-1}$ prolongé par continuité en 0 par la valeur 1.

$$\frac{x}{e^x-1}=\frac{x}{x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+o(x^6)}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}+\frac{x^5}{720}+o(x^5)}$$

Écrivez que cette fonction a pour développement limité $\alpha_0+\alpha_1.x+\alpha_2.x^2+\alpha_3.x^3+\alpha_4.x^4+\alpha_5.x^5+o(x^5)$.

Effectuez un produit en croix :

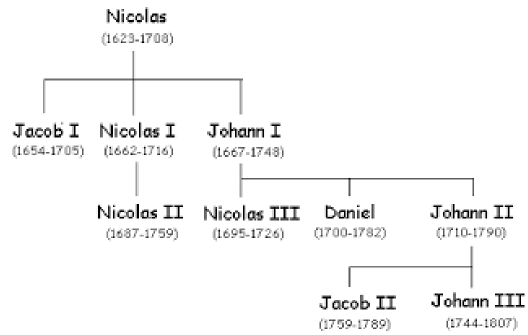
	1	$+\frac{x}{2}$	$+\frac{x^2}{6}$	$+\frac{x^3}{24}$	$+\frac{x^4}{120}$	$+\frac{x^5}{720}$	$+o(x^5)$
α_0	α_0						
$+\alpha_1.x$							
$+\alpha_2.x^2$				$\alpha_2.\frac{x^5}{24}$			
$+\alpha_3.x^3$							
$+\alpha_4.x^4$							
$+\alpha_5.x^5$				bof			
$+o(x^5)$							

Identifiez avec 1 (développement ayant beaucoup de termes nuls).
Indiquez quelles cases n'auront pas à être calculées.

47. de bonnes habitudes pour la thèse

Trouvez la valeur de α_0 et de α_1. Donnez l'équation calculant α_2.
Expliquez pourquoi α_3 et α_5 seront nuls indication $\dfrac{x}{e^x-1}+\dfrac{x}{2}$ est elle paire ? impaire ?
Ces α_k sont appelés nombres de Bernoulli [a] et on les croise dans les sommes de puissances d'entiers entre autres.

[a]. frère de Jean, oncle de Daniel et Nicolas, retrouvez son prénom



Méthode 3 : Division suivant les puissances croissantes.

On écrit les développements limités du numérateur et du dénominateur, ordonnés comme il se doit « suivant les puissances croissantes ».

En effet, quand on est au voisinage de 0*, les puissances sont dans cet ordre :* $1 \gg h \gg h^2 \gg h^3 \gg h^4 \gg h^5 \gg \dots$

Mais l'habitude vers l'infini que vous avez acquise depuis les plus petites classes, c'est $1 \ll X \ll X^2 \ll X^3 \ll X^4 \ll X^5 \ll \dots$.

.

$$
\begin{array}{cccc||cccc}
h & -\dfrac{h^3}{6} & +\dfrac{h^5}{120} & +o(h^5) & 1 & -\dfrac{h^2}{2} & +\dfrac{h^4}{24} & +o(h^4) \\
\hline
-\Big(h & -\dfrac{h^3}{2} & +\dfrac{h^5}{24} & +o(h^5)\Big) & h & +\dfrac{h^3}{3} & +\dfrac{2.h^5}{15} & \\
\hline
 & \dfrac{h^3}{3} & -\dfrac{1}{30}.h^5 & +o(h^5) & & & & \\
 & -\Big(\dfrac{h^3}{3} & -\dfrac{h^5}{6} & +o(h^5)\Big) & & & & \\
\hline
 & & \dfrac{2}{15}.h^5 & +o(h^5) & & & & \\
 & & -\Big(\dfrac{2}{15}.h^5 & +o(h^5)\Big) & & & & \\
\hline
 & & & +o(h^5) & & & &
\end{array}
$$

C'est finalement comme une division euclidienne, mais les puissances sont dans l'ordre « naturel » en 0.

Je rappelle les deux divisions que vous pratiquez depuis votre plus jeune âge :

$$
\begin{array}{cccc||ccc}
2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & \\
\hline
\text{-(1} & \text{3)} & & & 1 & 5 & 5 \\
\hline
 & 7 & 2 & & & & \\
 & \text{-(6} & \text{5)} & & & & \\
\hline
 & & 7 & 0 & & & \\
 & & \text{-(6} & \text{5)} & & & \\
\hline
 & & & 5 & & &
\end{array}
$$

division sur les entiers et

$$
\begin{array}{cccc||ccc}
X^3 & +2.X^2 & -X & +3 & X^2 & +X & -3 \\
\hline
-(X^3 & +X^2 & -3.X) & & X & +1 & \\
\hline
 & X^2 & +2.X & +3 & & & \\
 & -(X^2 & +X & -3 & & & \\
\hline
 & & X & +6 & & &
\end{array}
$$

division sur les polynômes vers $+\infty$.

Normalement, vous devez reconnaître que ma division euclidienne sur les entiers, c'est une division polynômiale avec un polynôme en puissances de 10 $: 2020 = 2.X^3+2.X$, $13 = 1.X+3$, $155 = 1.X^2+5.X+5$ *avec* $X = 10$. *Oui, on ne vous l'a jamais dit ? On aurait dû (surtout moi).*

.

Vous disposez donc *a priori* maintenant d'une troisième division, sur le même principe que les deux autres.

Pour moi, il y a deux différences : l'ordre des exposants d'où son nom
la présence de tout une colonne de o devant le mur de la barre de fraction
pour ma part, j'y vois vraiment un vide ordure d'immeuble dans lequel tous les termes de puissance trop élevée tombent.

$$
\begin{array}{cccc|c||l}
h & -\frac{h^3}{6} & +\frac{h^5}{120} & & +o(h^5) & 1 \quad -\frac{h^2}{2} \quad +\frac{h^4}{24} \quad +o(h^4) \\ \cline{6-6}
-\Big(h & -\frac{h^3}{2} & +\frac{h^5}{24} & & +o(h^5) & h \quad +\frac{h^3}{3} \quad +\frac{2.h^5}{15} \\ \cline{1-4}
 & \frac{h^3}{3} & -\frac{1}{30}.h^5 & & +o(h^5) & \\
 & -\Big(\frac{h^3}{3} & -\frac{h^5}{6} & & +o(h^5) & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2}{15}.h^5 & & +o(h^5) & \\
 & & -\Big(\frac{2}{15}.h^5 & & +o(h^5) & \\ \cline{3-4}
 & & & & +o(h^5) &
\end{array}
$$

J'ai bien écrit *a priori*, car en fait, cette division n'est pas autorisée aux concours.

J'ai encore le souvenir d'une élève partie en Spé dans un autre établissement qui dans un devoir avait utilisé la division suivant les puissances croissantes pour ses développements limités de quotients et avait et droit à un répétitif point d'interrogation de la part de son professeur à chaque nouvelle division.
Certes, le prof de maths connaîssait cette division, mais il tenait à infroemer l'élève : usage non autorisé aux concours.

.

Quel conseil vous donner alors ?

Si vous la posez, faites le... au brouillon,
puis ensuite, reprenez notre grand classique :

- proposez,
- vérifiez
- (vérifiez par produit en croix).

Pourquoi est ce que je trouve décevant que cet algorithme ne soit pas au programme des Prépas ?

Mais parce que c'est exactement la même chose que le produit en croix traité précédemment, mais présenté d'une autre manière.

	$a.h$	$+b.h^3$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	$a.h$			
$-\frac{h^2}{2}$				
$+\frac{h^4}{24}$				
$-\frac{h^6}{6!}$				

et dans sinus : h : donc $a = 1$

$$
\begin{array}{cccc||l}
h & -\frac{h^3}{6} & +\frac{h^5}{120} & +o(h^5) & 1 \quad -\frac{h^2}{2} \quad +\frac{h^4}{24} \quad +o(h^4) \\ \cline{5-5}
-\Big(h & -\frac{h^3}{2} & +\frac{h^5}{24} & +o(h^5)\Big) & h \\ \cline{1-4}
 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & & & \\ \cline{3-4}
\end{array}
$$

	h	$+b.h^3$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	h	$+b.h^3$		
$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^3}{2}$			
$+\frac{h^4}{24}$				
$-\frac{h^6}{6!}$				

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} h & -\frac{h^3}{6} & +\frac{h^5}{120} & +o(h^5) & 1 & -\frac{h^2}{2} & +\frac{h^4}{24} & +o(h^4) \\ \hline -\Big(h & -\frac{h^3}{2} & +\frac{h^5}{24} & +o(h^5)\Big) & h & & & \\ \hline & \frac{h^3}{3} & -\frac{1}{30}.h^5 & +o(h^5) & & & & \end{array}$$

	h	$+b.h^3$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	$a.h$	$+b.h^3$		
$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^2}{2}$			
$+\frac{h^4}{24}$				
$-\frac{h^6}{6!}$				

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} h & -\frac{h^3}{6} & +\frac{h^5}{120} & +o(h^5) & 1 & -\frac{h^2}{2} & +\frac{h^4}{24} & +o(h^4) \\ \hline -\Big(h & -\frac{h^3}{2} & +\frac{h^5}{24} & +o(h^5)\Big) & h & +\frac{h^3}{3} & & \\ \hline & \frac{h^3}{3} & -\frac{1}{30}.h^5 & +o(h^5) & & & & \\ & -\Big(\frac{h^3}{3} & -\frac{h^5}{6} & +o(h^5)\Big) & & & & \\ \hline \end{array}$$

et le coefficient de h^3 est $-\frac{1}{6}$ donc $b = \frac{1}{3}$

	h	$+\frac{h^3}{3}$	$+c.h^5$	$+d.h^7$
1	$a.h$	$+\frac{h^3}{3}$	$+c.h^5$	
$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^5}{6}$		
$+\frac{h^4}{24}$	$-\frac{h^5}{24}$			
$-\frac{h^6}{6!}$				

$$\begin{array}{rrrr|rrrr} h & -\frac{h^3}{6} & +\frac{h^5}{120} & +o(h^5) & 1 & -\frac{h^2}{2} & +\frac{h^4}{24} & +o(h^4) \\ \hline -\Big(h & -\frac{h^3}{2} & +\frac{h^5}{24} & +o(h^5)\Big) & h & +\frac{h^3}{3} & & \\ \hline & \frac{h^3}{3} & -\frac{1}{30}.h^5 & +o(h^5) & & & & \\ & -\Big(\frac{h^3}{3} & -\frac{h^5}{6} & +o(h^5)\Big) & & & & \\ \hline & & \frac{2}{15}.h^5 & & & & & \end{array}$$

Et ainsi de suite.
Mais bon, tant pis. Même si vous avez finalement bien compris, ce n'est pas grave, j'en ai d'autres.

Méthode 4 : Composition avec $\dfrac{1}{1-u}$.

L'idée est de développer déjà $\dfrac{1}{\cos(h)}$, quitte à multiplier ensuite par $\sin(h)$ (en jetant à la poubelle tous les termes non pertinents).
Et pour $\dfrac{1}{\cos(h)}$ toute l'idée est de l'écrire $\dfrac{1}{1-u}$ avec u qui tend vers 0 ou même $\dfrac{a}{1-u}$avec u qui tend vers 0.
Ici, c'est clef en main : $\boxed{\dfrac{1}{\cos(h)} = \dfrac{1}{1-\Big(\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^4}{24}+\dfrac{h^6}{720}+o(h^6)\Big)}}$
Vous voyez qui sera u ? Oui, $\Big(\dfrac{h^2}{2}-\dfrac{h^4}{24}+\dfrac{h^6}{720}+o(h^6)\Big)$. Et on vérifie qu'il tend vers 0 quand h tend vers 0 (c'est LE passage à surveiller, le piège dans lequel chutent tous les mauvais élèves).
On sort alors la formule toute prête : $\dfrac{1}{1-u} = 1+u+u^2+u^3+u^4+o(u^4)_{u\to 0}$ (qui existe aussi à des ordres plus élevés).
On va donc juste ici calculer u^2, u^3 et ça suffira car ensuite u^4 est un $O(h^8)$ et n'est plus visible face au $o(h^6)$ qui traîne dans u.

Dans les développements limités, ce ne sont pas les calculs que je vais surveiller chez vous. Mais le fait que vous saurez écrire ou ne pas écrire les termes inutiles, aligner les petits o, je ter à la poubelle les termes sans intérêts.
Je surveillerai votre capacité à raisonner juste. C'est quand même beaucoup sur ça qu'on vous recrute.
Et il est désespérant de voir un élève (au demeurant charmant et apte à calculer) se fatiguer à calculer pour vous faire plaisr (?) le développement de u^4 *et* u^5 *puis à additionner des* $\frac{h^8}{12}+\frac{h^8}{254}$ *alors qu'il a écrit en milieu de ligne* $+o(h^6)$.
C'est comme l'assistant du peintre flamand du seizième siècle qui va représenter des détails sur une galerie de personnages qu'ensuite le grand maître va recouvrir de peinture noire « mais ils sont dans l'ombre, on ne les voit pas ».

.

Pour les puissances de u, on dresse un tableau, dans le quel on va voir les éléments s'effacer peu à peu :

u^2	$\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^4}{24}$	$+\frac{h^6}{720}$	$+o(h^6)$
$\frac{h^2}{2}$	$\frac{h^4}{4}$	$-\frac{h^6}{48}$		
$-\frac{h^4}{24}$	$-\frac{h^6}{48}$			
$+\frac{h^6}{720}$		$o(h^6)$		
$+o(h^6)$				

puis

$u^2.u$	$\frac{h^4}{4}$	$-\frac{h^6}{24}$	$+o(h^6)$
$\frac{h^2}{2}$	$-\frac{h^6}{8}$		
$-\frac{h^4}{24}$			
$+\frac{h^6}{720}$		$o(h^6)$	
$+o(h^6)$			

On développe $\boxed{\begin{array}{cccccccc} 1 & = & 1 & & & & & \\ +u & = & & \frac{h^2}{2} & -\frac{h^4}{24} & +\frac{h^6}{720} & +o(h^{6)} \\ +u^2 & = & & & \frac{h^4}{4} & -\frac{h^6}{24} & +o(h^6) \\ +u^3 & = & & & & \frac{h^6}{8} & +o(h^6) \end{array}}$ et on somme

$$\frac{1}{\cos(h)} = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{5.h^4}{24} + \frac{61.h^6}{720} + o(h^6)_{h\to 0}$$

C'est ça, la « sécante », qui fait l'objet de la lecture des autres coefficients dans l'algorithme boustrophédon.

Après, c'est classique

	1	$+\frac{h^2}{2}$	$+\frac{5.h^4}{24}$	$+\frac{61.h^6}{720}$	$+o(h^6)$
h	h	$+\frac{h^3}{2}$	$+\frac{5.h^5}{24}$	$+\frac{61.h^7}{720}$	
$-\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^3}{6}$	$-\frac{h^5}{12}$	$-\frac{5.h^7}{84}$		
$+\frac{h^5}{120}$	$+\frac{h^5}{120}$	$+\frac{h^7}{240}$			
$+\frac{h^7}{7!}$	$+\frac{h^7}{7!}$				
$+o(h^7)$					

On note qu'en ayant développé $\frac{1}{\cos(h)}$ à l'ordre 6, on a un développement d'ordre 7 car le premier terme du sinus est h et non 1. Question d'habitude.

Mais au fait, d'où vient ce développement $\boxed{\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n + o(u^n)_{u\to 0}}$ dont on vient de faire usage ?
Pas d'une formule de Taylor Young,sauf si on aime perdre son temps (oui, je reconnais, les dérivées successives de $u \longmapsto \frac{1}{1-u}$ sont faciles à calculer, y compris ensuite en 0).
Il suffit de partir du meilleur côté de la formule : la série géométrique

$$1 + u + u^2 + \ldots + u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} = \frac{1}{1-u} - u^n.\frac{u}{1-u} = \frac{1}{1-u} - u^n.o(1)_{u\to 0}$$

Il ne reste plus qu'à faire passer le $o(u^n)$ de l'autre côté.

Si on vous pose la question aux concours de « d'où vient votre formule $\frac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{n} u^k + o(u^n)_{u\to 0}$ *et si vous voulez être efficace et intelligent , répondez juste « série géométrique et on écrit que* $\frac{u^{n+1}}{1-u}$ *est un* $o(u^n)$ *». Vous aurez tout dit, en quelques mots, avec toute la rigueur voulue, et sans calcul inutile.*

.

Quelle est ensuite l'erreur que fait tout mauvais élève quand il doit traiter un quotient ? Se souvenir qu'il faut se ramener à $\frac{1}{1-u}$ alors que la vraie idée est de se ramener à $\frac{a}{1-u}$.
Le dénominateur ne va donner $1-u$ avec u qui tend vers 1 qu'après avoir factorisé le coefficient dominant.

Exemple : développement limité de $\frac{1}{\cos(t)+ch(t)}$ au voisinage de $t=0$ à l'ordre 8.

C'est vrai que $t \longmapsto \frac{1}{\cos(t)+ch(t)}$ est définie sur un voisinage de 0 (en l'occurrence $\mathbb{R}$ tout entier, car $\cos(t)+ch(t)$ ne peut valoir 0 qu'avec un cosinus hyperbolique minimal égal à 1 et un cosinus égale à -1, ce qui est incompatible), et de classe C^∞. Elle admet donc un développement limité à tout ordre, et ici on pourra prendre 4.

On écrit et addition les deux développements connus : $\cos(h)+ch(h) = 2+\frac{h^4}{12}+\frac{h^8}{20160}+o(h^8)$ (les coefficients sont des inverses d factorielles, et la moitié des termes a été perdue à cause des signes).

On a donc $\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{2+\frac{h^4}{12}+\frac{h^8}{20160}+o(h^8)}$ et à partir de là, deux chemins possibles : l'un qui conduit à la vérité et l'autre qui conduit à la mort. Vous avez le droit d'interroger les deux gardiens, un qui ment toujours et un qui... non, pardon, j'ai des renvois d'exercices de logique.
Je reprends : deux chemins, à vous de choisir le bon :

Méthode 1 :

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{h^4}{24}+\frac{h^8}{8!}+o(h^8)}$$

$$\boxed{u = \Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}+o(h^8)\Big)}$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{2}.\Big(1+\Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}+o(h^8)\Big)+\Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^2+\Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^3+\Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^4+o(h^8)\Big)$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{2}.\Big(1+\Big(-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)+\Big(-\frac{h^4}{24}\Big)^2+o(h^8)\Big)$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{2}-\frac{h^4}{48}+\frac{23.h^8}{26880}+o(h^8)$$

ou alors **Méthode 2 :**

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \frac{1}{1+\Big(1+\dfrac{h^4}{12}+\dfrac{h^8}{20160}+o(h^8)\Big)}$$

$$\boxed{u=\Big(-1-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}+o(h^8)\Big)}$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = 1+\Big(-1-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}+o(h^8)\Big)+\Big(-1-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^2+\Big(-1-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^3+\Big(-1-\frac{h^4}{24}-\frac{h^8}{8!}\Big)^4$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = \Big(1-1+1-1+1\Big)+\Big(-\frac{1}{24}+\frac{2}{24}-\frac{3}{24}+\frac{4}{24}\Big).h^4+\Big(\ldots$$

$$\frac{1}{\cos(t)+ch(t)} = 1+\frac{1}{12}.h^4+\frac{1124}{8!}.h^8+o(h^8)$$

Et on arrête le massacre.
Ce qui vient d'être fait en méthode 2 est une horreur sans nom.

• L'origine de l'erreur : la variable substituée u ne tend pas vers 0, on ne peut donc pas utiliser $\frac{1}{1-u}=1+u+u^2+u^3+u^4+o(u^4)$.
Enfin si, on peut l'utiliser. Mais tout est dans le $o(u^4)$ qui n'a aucune raison d'être petit puisque u ne tend pas vers 0.
• Ensuite, on voit que les puissances de u ont toujours autant de termes.
• Enfin, si on s'était arrêté à $1+u+u^2+u^3+u^3+o(u^3)$, on avait tout autre chose.
• Et surtout, la valeur en 0 ne coïncide même pas...

Donc, ne recopiez pas le deuxième cadre, c'est une horreur !

Méthode 5 : Composition avec la fonction réciproque.

Quand vous êtes arrivé en Sup, vous connaissiez tout juste la fonction tangente, mais ça ne vous posait pas de problème de la définir « quotient du sinus par le cosinus » (et de toutes façons, vous aviez retenu du collège un truc en CAH SOH TOA ou SOHCAHTOA[48]*). Puis on vous a présenté la fonction arctangente comme réciproque de la tangente.*
Tout de suite, c'était plus compliqué, avec des questions du type « quel est l'angle dont la tangente vaut $\sqrt{2}-1$*, et est il bien entre* $-\pi/2$ *et* $\pi/2$*.*
Et pourtant, quand on parle de développements limités, la tangente est compliquée, avec ses $\frac{2}{15}$ *et le boustrophédon, alors que l'arctangente gagne tout de suite ses lettres de noblesse avec un développement limité en 0 très simple...*

Grâce à sa dérivée.
On part de $\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-t^6+t^8-t^{10}+o(t^{10})_{t\to 0}$ (série géométrique)
pis on intègre : $Arctan(x)-Arctan(0)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x (1-t^2+t^4-t^6+t^8-t^{10}+o(t^{10})_{t\to 0}).dt$.

$$Arctan(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}+o(x^{11})_{x\to 0}$$

La seule chose à justifier est « quand on intègre un petit o, on récupère un petit o un ordre plus élevé.
.

Il ne nous reste plus qu'à exploiter l'une des deux formules $\tan(Arctan(h))=h$ ou $Arctan(\tan h))=h$ toutes deux valables dès lors qu'on se maintient sur un voisinage de 0.
On va poser a priori $\tan(\theta)=a.\theta+b.\theta^3+c.\theta^5+d.\theta^7+o(\theta^7)_{\theta\to 0}$ (un terme sur deux par parité) et

48. *Sinus = Opposé sur Hypothénue*
Cosinus = Adjacent sur Hypothénuse et
Tangente = Opposé sur Adjacent

l'appliquer à $\theta = h - \frac{h^3}{3} + \frac{h^5}{5} - \frac{h^7}{7} + o(h^7)_{h\to 0}$ qui tend bien vers 0 quand h tend vers 0.
Je laisse de côté les calculs des puissances successives :

$$\begin{array}{lclllll} a.\theta & = & a.h & -a.\frac{h^3}{3} & +a.\frac{h^5}{5} & -a.\frac{h^7}{7} & +o(h^7) \\ b.\theta^3 & = & & b.h^3 & -b.h^5 & +b.\frac{14.h^7}{15} & +o(h^7) \\ c.\theta^5 & = & & & c.h^5 & -c.\frac{5.h}{3} & +o(h^7) \\ d.\theta^7 & = & & & & d.h^7 & +o(h^7) \end{array}$$

On identifie avec h et on a un système $\left\{\begin{array}{lllll} a & & & & = 1 \\ -\frac{a}{3} & +b & & & = 0 \\ \frac{a}{5} & -b & +c & & = 0 \\ -\frac{a}{7} & +\frac{14.b}{15} & -\frac{5.c}{3} & +d & = 0 \end{array}\right|$.

On parie que vous le résolvez de tête : $\boxed{1}\ \boxed{\frac{1}{3}}\ \boxed{\frac{2}{15}}\ \boxed{\frac{17}{315}}$?

La composition dans l'autre sens est moins pratique, car on doit élever $\tan(\theta)$ *(que l'on aura posé a priori) au carré, au cube... ce qui crée des choses lourdes avec des* a, $a.b$, $a.c^2.b$ *et autres trucs de ce genre.*
On note aussi que si on n'a retenu que le développement limité de la tangente et oublié celui de l'arctangente, on peut retrouver ce dernier avec cette méthode.

L'idée de « je pose a priori, je compose, j'identifie » sert pour les développements limités de réciproques.

Méthode 6 : Équation fonctionnelle.

C'est encore une méthode a priori : on écrit le développement limité avec des coefficients à trouver,
on écrit des choses intéressantes,
on trouve les coefficients.

Écrivons donc encore $\tan(h) = a.h + b.h^3 + c.h^5 + d.h^7 + o(h^7)_{h\to 0}$.
Et citons la formule : $\tan(2.h) = \dfrac{2.\tan(h)}{1-\tan^2(h)}$ (c'est ça une équation fonctionnelle, qui relie la valeur de la fonction en différents points liés entre eux).
On fait un produit en croix : $\tan(2.h).\Big(1-\tan^2(b)\Big) = 2.\tan(h)$.
Quand h tend vers 0, $2.h$ le fait aussi et on peut donc utiliser le même développement limité :

$$\Big(a.h+b.h^3+c.h^5+d.h^7+o(h^7)_{h\to 0}\Big).\Big(1+\Big(a.h+b.h^3+c.h^5+d.h^7+o(h^7)_{h\to 0}\Big)^2\Big) = 2.\Big(a.h+b.h^3+c.h^5+d.h^7+o(h^7)_{h\to 0}\Big)$$

Je m'occupe de développer le membre de droite, vous vous occupez de celui de gauche... oui, Naël, tu as déjà fini le calcul, j'écoute, je copie
$2.a.h + (8.b - 2.a^3).h^3 + (32.c - 12.a^2.b).h^5 + (128.d - 18.a.b^2 + 36.a^2.c).h^7 + o(h^7)_{h\to 0}$
De tête ! Bravo. Ou alors tu l'as et en colle cette semaine...
Bon, il y a une petite erreur de signe, c'est $2.a.h + (8.b - 2.a^3).h^3 + (32.c - 12.a^2.b).h^5 + (128.d - 18.a.b^2 - 36.a^2.c).h^7 + o(h^7)_{h\to 0}$.

Ensuite, on identifie avec le membre de droite, et on trouve $\left\{\begin{array}{llll} 2.a & & & = 2.a \\ -2.a^3 & +8.b & & = 2.b \\ -12.a^2.b & +32.c & & = 2.c \\ 128.d & -18.a.b^2 & -36.a^2.c & = 2.d \end{array}\right|$.

On résout et on trouve... oui, Naël : $a = 1$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2}{15}$et $d = \dfrac{17}{315}$. De tête encore !
Non, en fait, la première équation donne juste $a = a$. Elle ne sert à rien, et il reste quatre inconnues pour trois équations.
Il faut donc par nous même dire $a = 1$ (équivalent $\tan(h) \sim_{h\to 0} h$). Et ensuite, on trouve bien les valeurs indiquées.

. *Notre équation fonctionnelle ne se suffisait pas totalement à elle même, il fallait une information de plus...*

Remarque : peu de sujets et exercices de concours utilisent quand même une telle idée d'équation fonctionnelle pour trouver le développement limité cherché.
On va donner dans le plus classique avec l'équation différentielle.

Méthode 7 : Équation différentielle.

Quoi ! Vous avez oublié que la tangente est solution d'une équation différentielle ? Pas linéaire (quoique).

Mais on a quand même $\boxed{\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)}$ pour tout x.

On pose donc une fois encore $\tan(h) = a.h + b.h^3 + c.h^5 + d.h^7 + o(h^7)_{h\to 0}$.

On dérive d'un coté, et de l'autre on élève au carré et ajoute 1 :

$$a + 3.b.h^2 + 5.c.h^4 + 7.d.h^6 + o(h^6) = 1 + \begin{array}{llll} a^2.h^2 & +a.b.h^4 & +a.c.h^6 & +o(h^7) \\ +a.b.h^4 & +b^2.h^6 & & \\ +a.c.h^6 & & & \end{array}.$$

On identifie (argument d'unicité) : $\left\{\begin{array}{lllll} a & & & = & 1 \\ & 3.b & & = & a^2 \\ & & 5.c & = & 2.a.b \\ & & 7.d & = & b^2 + 2.a.c \end{array}\right|.$

Et là, le calcul donne tout de suite (plus rapidement que sur les autres) : $a = 1$, $b = \dfrac{1}{3}$, $c = \dfrac{2}{15}$ et $d = \dfrac{truc}{machin}$.

Oui, j'écris juste $d = \dfrac{truxc}{machin}$ *car si je le répète trop, les élèves finissent par ne retenir que lui et par oublier* $\boxed{\tan(h) = h + \dfrac{h^3}{3} + o(h^4)}$ *qui est le seul à connaître.*
On note que celui ci donne l'équivalent : $\tan(h) \sim_{h\to 0} h$,
l'équation de la tangente au graphe (la première bissectrice)
et la position par rapport à cette tangente : $\dfrac{h^3}{3} + o(h^3)$,
positif pour h positif et assez petit
. . *négatif pour h négatif et assez petit*

La méthode est si efficace qu'on peut avoir envie de la généraliser.
Marius, c'est quoi ce papier que tu es en train de passer à Karel ?

On écrit à l'ordre $2.n + 1$: $\tan(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^{2.k+1} + o(h^{2.n+1})$

On dérive : $\tan'(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2.k+1).\alpha_k.h^{2.k} + o(h^{2.n})$

On élève au carré : $\tan^2(h) = \Big(\sum_{i=0}^{n} \alpha_i.h^{2.i+1} + o(h^{2.n+1})\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j.h^{2.j+1} + o(h^{2.n+1})\Big)$.

On identifie le coefficient de $h^{2.k}$ dans chacun des deux termes :

α_0	$= 1$	terme en h^0
$3.\alpha_1$	$= (\alpha_0)^2$	terme en h^2
$5.\alpha_2$	$= 2.\alpha_0.\alpha_1$	terme en h^4
$(2.k+1).\alpha_k$	$= \sum_{2.i+1+2.j+1=2k} \alpha_i.\alpha j$	terme en $h^{2.k}$
	non mais ! Marius !	

On a donc une formule un peu laide mais qui permet de calculer le nouveau à l'aide de produits croisés des précédents...

$$\alpha_k = \frac{1}{2.k+1}.\sum_{i+j=k-1} \alpha_i.\alpha j$$

C'est d'ailleurs la formule qui permet d'identifier les coefficients du développement limité de la tangente avec ce que donne le boustrophédon.

Quelques questions cependant :
- j'avais bien dit qu'on ne pouvait pas dériver un développement limité, ceci pose-t-il problème
- peut on justifier quand même que le développement limité de $\tan'$ est bien la dérivée du développement limité de tan ?
- peut on justifier quand même que la dérivée du développement limité de tan est bien le développement limité de la dérivée de tan ?
- peut on justifier quand même qu'en intégrant la dérivée du développement limité de tanon a bien le développement limité de tan ?
- ces phrases ont elles un sens ?
- où Marius a-t-il trouvé cette image ?
- Leibniz peut il nous aider à résoudre notre problème ?

Première idée pour ne pas avoir à dire « *je dérive le développement limité* » *(phrase qui fait se rouler par terre d'horreur l'examinateur de mathématiques qui a toujours quatre contre-exemples dans sa poche)* : Leibniz.

On par de $\tan' = 1 + \tan^2$ et on dérive k fois : $\tan^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!.q!}.\tan^{(p)}.\tan^{(q)}$.

En particulier en 0 : $\tan^{(k+1)}(0) = \displaystyle\sum_{p+q=k} \frac{k!}{p!.q!}.\tan^{(p)}(0).\tan^{(q)}(0)$.

Comme toutes les dérivées d'ordre pair de la tangente sont nulles en 0, on prend k pair, et on forcera p et q à être impairs : $p = 2.i+1$ et $q = 2.j+1$:

$$\tan^{(2.n+1)}(0) = \sum_{2.i+2.j+2=2.n} \frac{(2.n)!}{(2.i+1)!.(2.j+1)!}.\tan^{(2.i+1)}(0).\tan^{(2.j+1)}(0)$$

Vous ne voyez pas le rapport avec notre formule $\alpha_k = \dfrac{1}{2.k+1}.\displaystyle\sum_{i+j=k-1} \alpha_i.\alpha j$? Je suis déçu ! $\alpha_k$est le coefficient de $h^{2.k+1}$ dans le développement limité en 0. On a donc $\alpha_{2.k+1} = \dfrac{\tan^{(2.k+1)}(0)}{(2.k+1)!}$. Je vous laisse reporter dans une formule pour retrouver l'autre...

Deuxième idée pour ne pas avoir à dire « *je dérive le développement limité* » *(phrase qui fait dire à l'examinateur de physique « oui, oui, allez y »)* : un aller-retour.

Supposons que f a pour développement limité en a : $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k + o(h^n)_{h\to 0}$.

Et supposons aussi que f' admet bien un développement limité (car de classe suffisante par exemple).

On écrit alors a priori le développement limité de f : $f'(a+t) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i.t^i + o(t^{n-1})_{t\to 0}$.

On intègre pour t de 0 à h (avec h qui tend vers 0 et force t à faire de même) :

$$f(a+h) - f(a) = \int_{t=0}^{h} f'(a+t).dt = \int_{t=0}^{h} \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \beta_i.t^i + o(t^{n-1})_{t\to 0}\Big).dt$$

On effectue le calcul en rappelant que $\int_0^h o(t^{n-1}).dt = o(h^n)_{h\to 0}$ *(bien mettre des variables différentes, et pas $\int_0^h o(h^{n-1}).dh = o(h^n)_{h\to 0}$ qui ne veut rien dire).*

On obtient $f(a+h) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_i}{i+1}.t^{i+1} + o(h^n)_{h\to 0}$

puis $f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_{k-1}}{k}.t^k + o(h^n)_{h\to 0}$.

On identifie avec le développement limité initial de f : $\frac{\beta_{k-1}}{k} = \alpha_k$ et donc $\beta_{k-1} = k.\alpha_k$.

On reporte : $f'(a+t) = \sum_{k=1}^{n} k.\alpha_k.t^{k-1} + o(t^{n-1})_{t\to 0}$.

C'est COMME SI on avait dérivé.

Retenez donc :

on ne dérive pas un développement limité, mais quand on sait que f' en a un, c'est exactement comme si on avait dérivé.

Ce peut être la formule que vous retiendrez pour vous justifier à un oral de concours.

« Je ne dérive pas, mais je peux vous prouver que f' a bien le développement limité que je propose ». *Et vous ajoutez* « en intégrant et identifiant ».

Troisième idée pour ne pas avoir à dire « *je dérive le développement limité* » *(phrase qui fait dire à l'examinateur de S.I.I. « moi, j'ai déjà dérivé, ça y est »)* : la formule de Taylor-Young.

Supposons que f est de classe C^n au voisinage de a.

Elle admet alors un développement limité : $f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k.h^k + o(h^n)_{h\to 0}$ avec $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Mais en même temps, f' est de classe C^{n-1} au voisinage de a.

Elle admet son propre développement limité $f'(a+h) = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i.h^i + o(h^{n-1})_{h\to 0}$ avec $\beta_i = \frac{(f')^{(i)}(a)}{i!}$.

En comparant les deux formules $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ et $\beta_{k-1} = \frac{(f')^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$ et en simplifiant les factorielles, on a arrive à $\beta_{k-1} = k.\alpha_k$ pour tout k.

On reporte : $f'(a+h) = \sum_{k=1}^{n1} k.\alpha_k.h^{k-1} + o(h^{n-1})_{h\to 0}$.

cette fois encore, c'est comme si on avait dérivé.

Mais encore une fois, l'argument est autre : « comparaison de deux formules de Taylor Young avec des indices décalés).

Bref, on peut retenir qu'en dehors du contexte des fonctions un peu artificielles du cours de mathématiques comme $x \longmapsto x^2.\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ prolongé en 0, le développement limité de f' existe et coïncide avec la dérivée du développement limité de f.

Méthode 8 : Intégration.

On cherche le développement limité de $\frac{1}{\cos(\theta)}$ puis de $\frac{1}{(\cos(\theta))^2}$.

On trouve $\frac{1}{\cos(\theta)} = 1 + \frac{\theta^2}{2} + \frac{5.\theta^4}{24} + o(\theta^5)_{\theta\to 0}$ et $\frac{1}{\cos^2(\theta)} = 1 + \theta^2 + \frac{2.\theta^4}{3} + o(\theta^5)_{\theta\to 0}$.

Oui, j'ai bien écrit $\frac{5.\theta^4}{24} + o(\theta^5)_{\theta\to 0}$ *ce n'est pas une erreur.*
Vous attendiez $\frac{5.\theta^4}{24} + o(\theta^4)_{\theta\to 0}$ *ce qui semble normal : ordre* 4.
Mais en fait, j'ai écrit $\frac{5.\theta^4}{24} + +0.\theta^5 + o(\theta^5)_{\theta\to 0}$, *à l'ordre* 5.
En profitant du fait que le coefficient de θ^5 *est nul.*
Encore une fois, une petite idée toute simple. Une fois de plus, pas de liste de quinze théorèmes à apprendre par cœur, mais des petites idées simples à savoir mettre en pratique. Et des changementsde point de vue à savoir pratiquer...

.

Il ne reste plus qu'à intégrer de 0 à h avec h qui tend vers 0 :

$$\tan(h) - \tan(0) = \int_0^h \frac{d\theta}{\cos^2(\theta)} = \int_0^h \left(1 + \theta^2 + \frac{2.\theta^4}{3} + o(\theta^5)_{\theta\to 0}\right).d\theta = h + \frac{h^3}{3} + \frac{2.h^5}{15}.o(h^6)_{h\to 0}$$

Et ici, je vous invite à bien retenir une chose. On intègre d'un état initial à un état final (merci la physique qui donne ici un sens de la rigueur). Comme ça, on n'oublie pas $f(a)$ quand on intègre $\int_0^h f'(a+t).dt$. Ce qu'on pourrait nommer la « constante d'intégration »[49].

Exemple : $\ln(1+\cos(h))$ en 0 à l'ordre 5.

Je vous le met en T.D. celui là. Et je vous conseille de commencer par dériver.
Mais quand vous intègrerez, n'oubliez pas la valeur en 0 : $\ln(1+\cos(h)) = \ln(2) + \ldots$.

Exemple : Développement limité de l'arctangente en 1 à l'ordre 5.

L'application *Arctan* admet en 1 des développements limités à tous les ordres, de par son caractère C^∞.
Mais on va l'attaquer par sa dérivée : $Arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Non, ! Bougre de bougre[50], on est en 1 : $Arctan'(1+t) = \frac{1}{1+(1+t)^2}$.

On va devoir développer $\frac{1}{2+2.t+t^2}$ par la méthode qu'on veut, et à l'ordre 4 (on va intégrer et gagner un ordre), et j'ai bien écrit $\frac{1}{2+2.t+t^2}$ et pas $\frac{1}{t^2+2.t+2}$ ou $\frac{1}{t^2+2+2.t}$ qui manquent de pertinence

---

49. vous le savez, en tant que prof de maths, je déteste ce sobriquet de « constante d'intégration » ; et il n'a aucune raison d'exister, puisque quand on intègre, il y a un état initial et un état final... c'est quand on prend une primitive qu'il reste ces « constantes »

50. « bougre » était synonyme de « hérétique » et « débauché prenant les choses à rebours », datant de XII eme siècle, par déviation du mot « bulgare » ; tandis que le « croate » a donné le mot « cravate » ; connaissez vous des langues étrangères où le mot « français » a donné un adjectif ou un substantif passé dans le langage courant ?

même si ils sont bien égaux à notre quantité.

$$
\begin{array}{lllll}
1 & & & & \\
-\Big(1 & +t & +\frac{t^2}{2}\Big) & & \\
\hline
 & -t & -\frac{t^2}{2} & & \\
 & -\Big(-t & -t^2 & -\frac{t^3}{2}\Big) & \\
\hline
 & & \frac{t^2}{2} & +\frac{t^3}{2} & \\
 & & -\Big(\frac{t^2}{2} & +\frac{t^3}{2} & +\frac{t^4}{4}\Big) \\
\hline
 & & & & -\frac{t^4}{4} \\
 & & & & -\Big(\frac{t^4}{4} \quad +o(t^4)\Big) \\
\hline
 & & & & o(t^4)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{||llll}
2 & +2.t & +t^2 & \\
\hline
\frac{1}{2} & -\frac{t}{2} & +\frac{t^2}{4} & -\frac{t^4}{4}
\end{array}
$$

On trouve $\dfrac{1}{2+2.t+t^2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{2} + \dfrac{t^2}{4} + 0.t^3 - \dfrac{t^4}{4} + o(t^4)_{t\to 0}$ et j'écris le $0.t^3$ pour marquer qu'il y a bien un terme, mais qu'il est nul.
On intègre sans rien oublier :

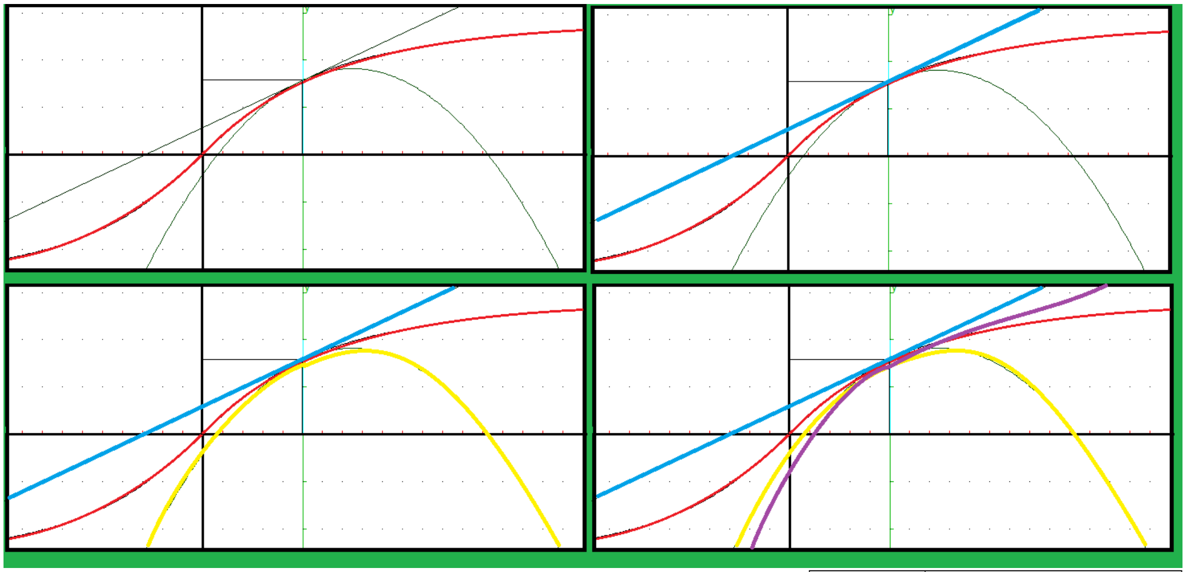
$$Arctan(1+h) - Arctan(1) = \int_{t=0}^{h} \frac{dt}{2+2.t+t^2} = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + 0.h^4 - \frac{h^5}{40} + o(h^5)$$

puis $$\boxed{Arctan(1+h) = \frac{\pi}{4} + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{4} + \frac{h^3}{12} + 0.h^4 - \frac{h^5}{40} + o(h^5)_{h\to 0}}$$

Cet exercice est là pour que vous n'oubliiez pas le terme $\dfrac{\pi}{4}$.

Profitions en pour interpréter les différents termes du développement

$\dfrac{\pi}{4}$	la valeur en 1
$\dfrac{h}{2}$	l'approximation affine $Arctan(1+h) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{h}{2} + o(h)_{h\to 0}$, la dérivée en 1 vaut $\dfrac{1}{2}$
$\dfrac{-h^2}{2}$	le terme correctif par rapport à la tangente, localement concave
$+\frac{h^3}{12}$	le terme correctif par rapport à la parabole, les variations d'accélération, à interpréter comme la courbe du chômage
$0.h^4$	il vaut 0, mais comment interpréter un changement de tendance sur la vitesse de variation de notre quantité... ah non, c'est même pire...



Oui, le développement limité sert à connaître l'allure locale du graphe

ordre 0	limite
ordre 1	tangente au graphe
ordre 2	convexité locale

On sait bien que quand on écrit $f(a+h) = \alpha + \beta.h + o(h)$ *(quitte à englober dans $o(h)$ des termes en $O(h^2)$ et plus qui ne serviront qu'après)*, on trouve la tangente au graphe de f en a.
Mais ensuite ? Si on laisse tomber le $o(h^2)$, on trace $f(a+h) = \alpha + \beta.h + \gamma.h^2$ qui est une parabole.
Et l'orientation de cette parabole dépend du signe de γ (en fait $\dfrac{f"(a)}{2}$ si Young-Taylor).

On retrouve

$f"(a) > 0$	localement convexe
$f"(a) = 0$	?
$f"(a) < 0$	localement concave

Et le terme $\gamma.h^2$ nous donne la position par rapport à la tangente

	$h < 0$	$h > 0$	
$\gamma > 0$	au dessus de la tangente	au dessus de la tangente	convexe
$\gamma < 0$	au dessous de la tangente	au dessous de la tangente	concave

Alors, normalement, il y a des termes derrière le $\gamma.h^2$. Qu'en ai je fait ? Je les ai écrits $o(h^2)$ et...
Non, je les ai écrits $h^2.o(1)_{h\to 0}$ et j'ai pris h assez petit pour que le $o(1)$ soit plus petit que $\dfrac{|\gamma|}{2}$.
Quel intérêt : $\gamma.h^2 + o(h^2) = h^2.(\gamma + o(1))$ et avec $|o(1)| \leqslant \dfrac{|\gamma|}{2}$, $\gamma + o(h^2)$ est du même signe que γ.
C'est ce petit raisonnement qui permet de dire qu'on peut laisser tomber le petit o au bout du développement, puisque pour h assez petit, $\alpha_n.h^n + h^n.o(1)$ est du même signe que $\alpha_n.h^n$.

Étudions quand même à présent plus en détails ces études locales de graphes (et promis, après, on se fait une dernière méthode pour le développement limité de la tangente).

a- A-t-on toujours une tangente horizontale quand la dérivée s'annule ? b- A-t-on toujours un minimum ou un maximum quand la dérivée s'annule ? c- A-t-on toujours un minimum ou un maximum quand la dérivée s'annule et change de signe ? d- Que se passe-t-il quand la dérivée seconde s'annule ? e- Que se passe-t-il quand la dérivée seconde s'annule et change de signe ?

a- Oui, le développement limité d'ordre 1 donne $f(a+h) = f(a) + 0.h + o(h)$ et 0 est le coefficient directeur de la tangente.

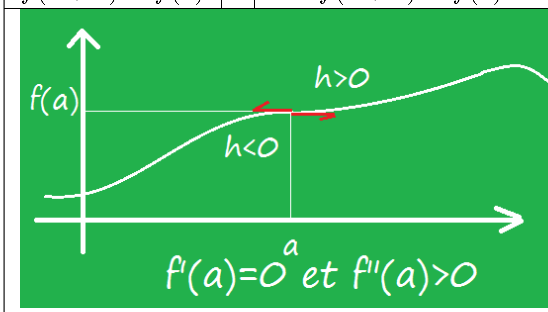
b- Non. On rappelle que $x \longmapsto x^3$ annule sa dérivée en 0 mais n'a pas de minimum.

Explication : si dans le développement limité, on a

$f(a)$ connu	$f'(a)=0$	$f"(a)=0$	$f^{(3)}(a)=\gamma>0$
ordonnée	tangente horizontale	pas de chance	par exemple

elors $f(a+h)=f(a)+\gamma.h^3+o(h^3=f(a)+(\gamma+o(1)).h^3$
Pour h plus petit qu'un certain $\eta_{\gamma/2}$ e,n valeur absolue, le terme correctif est du signe de h^3.

$h<0$		$h>0$
$f(a+h)<f(a)$		$f(a+h)>f(a)$

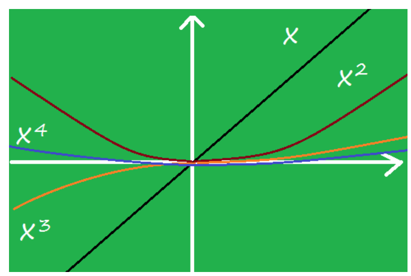
On a alors 

la courbe traverse sa tangente horizontale.

Je vous laisse faire le schéma pour $f'(a)=0$et $f"(a)<0$.
Tiens, et je le fais pour $f'(a)=0$ et $f"(a)=0$? Non, car là, tout est dans le signe du terme suivant... : $f(a+h)=f(a)+0.h+O.h^2+\delta.h^4+o(h^4)$.
Si δ (qui cache en fait $f^{(4)}(a)$) est non nul, le terme correctif est de signe constant (que h soit positif ou négatif, h^4 reste positif).

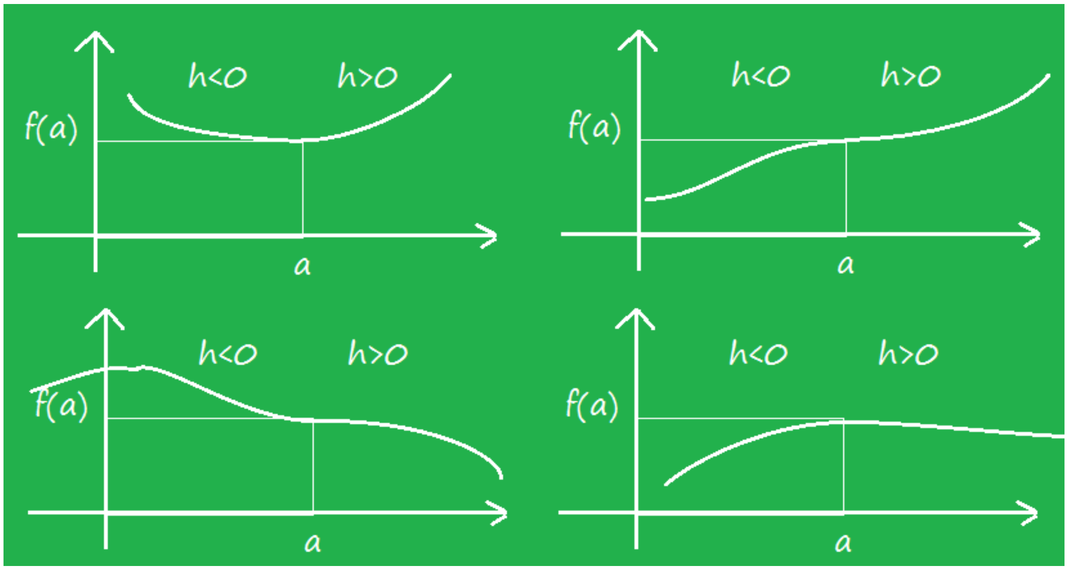
Pensez à $x\longmapsto x^4$ en 0.
.
.
.
.
.
.

• sa dérivée s'annule : tangente horizontale
• sa dérivée seconde s'annule : on ne sait rien de la convexité locale
• sa dérivée troisième s'annule : oui ?
• sa dérivée quatrième est positive : on a un minimum $f(a+h)\geqslant f(a)$



Normalement, l'idée doit se former dans votre esprit pour le point b et le point c.
On regarde l'exposant de la première dérivée non nulle en a après $f'(a)=0$.
On le note p et on a alors $f(a+h)=f(a)+0.h+\ldots+0.h^{p-1}+\alpha_p.h^p+o(h^p)=f(a)+h^p.(\alpha_p+o(1))$.
Le terme correctif est du signe de $h^p.\alpha_p$ en tout cas pour h plus petit en valeur absolue qu'un certain $\eta_{|\alpha_p|/2}$.
découpez les petits graphes et collez les dans le tableau :

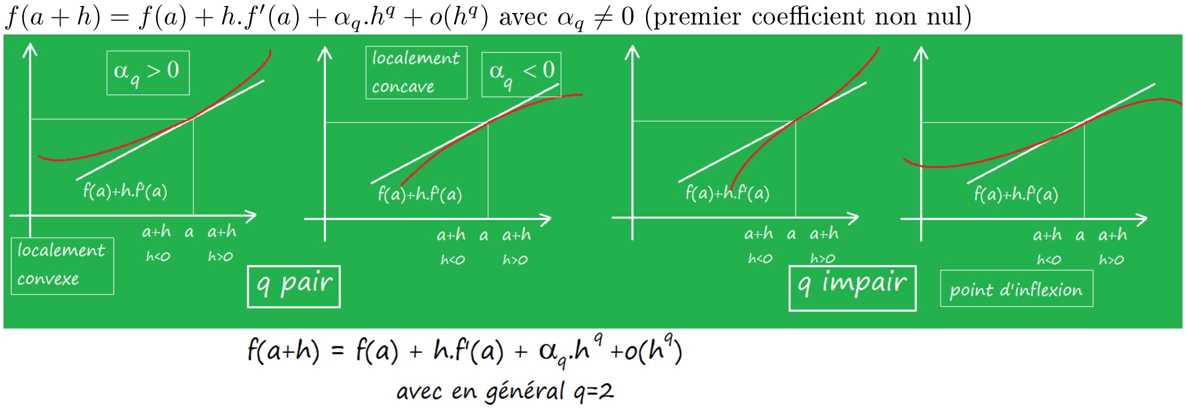
		h négatif		h positif	
p pair	$\alpha_p>0$	$f(a+h)>f(a)$		$f(a+h)>f(a)$	minimum local
	$\alpha_p<0$	$f(a+h)<f(a)$			maximum local
p impair	$\alpha_p>0$			$f(a+h)>f(a)$	inflexion
	$\alpha_p<0$				



Pour répondre au c : oui, si la dérivée s'annule, et passe du négatif au positif, alors f est décroissante puis croissante, elle admet un minimum local. [51]

Pour réponde au d, si la dérivé seconde s'annule, on ne sait pas.
Si elle s'annule et change de signe, on a un point d'inflexion : le graphe traverse sa tangente.

On fait d'ailleurs à ce stade un nouveau tableau pour résumer, avec cette fois la position par rapport à la tangente :
$f(a+h) = f(a) + h.f'(a) + \alpha_q.h^q + o(h^q)$ avec $\alpha_q \neq 0$ (premier coefficient non nul)



Le point d'inflexion correspond à un changement de concavité.
Vous en connaissez avec le sinus ou l'arctangente en .
En général, il se détecte par une dérivée seconde nulle.
Mais la condition n'est pas suffisante, comme l'atteste encore $x \longmapsto x^{'}$ en 0.

Le bon critère est	la dérivée seconde s'annule et change de signe
ou	la dérivée seconde s'annule et la dérivée suivante non nulle a un exposant impair.

C'est souvent pour ces études locales qu'on fait des développements limités en mathématiques, et peut être que

51. Rappel de définition : minimum local : $\exists \mu > 0,\ \forall x \in [a-\mu,\ a+\mu],\ f(x) \geqslant f(a)$,
je ne sais même pas si on vous l'a défini l'an dernier ou avant
minimum global : $\forall x \in D_f,\ f(x) \geqslant f(a)$,

vos grands frères ou grandes sœurs ont étudié les arcs paramétrés $t \longmapsto \begin{matrix} x_t \\ y_t \end{matrix}$ *dans le plan, voire* $t \longmapsto \begin{matrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{matrix}$ *dans* $\mathbb{R}^3$.

Méthode 9 : Dérivation.

On commence par calcule le développement limité en 0 de $\cos(t)$ et de $\ln(\cos(t))$ car cos et lnsont des fonctions dont on connaît les développements...
Pas d'inquiétude, pour le cosinus, c'est $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^5)_{t\to 0}$ avec des coefficients en factorielles.
Mais le logarithme ! Certains vont me dire qu'en 0 il y a un problème.
Sauf que ce n'est fort heureusement pas en 0 qu'on en a besoin, mais là où le cosinus nous a déposé : en 1.
On rappelle $\ln(1+u) = u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} - \dfrac{u^4}{4} + on\ va\ jusqu'ou$ avec des coefficients classiques [52].
A qui va-t-on l'appliquer ? $u = -\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^5)_{t\to 0}$, c'est bon il tend bien vers 0.
Et à quel ordre ? Sachant qu'on a écrit un (t^5), on va avoir besoin d'écrire des puissances de u tant qu'elles apportent du t^5et même des termes d'ordre inférieur.
Comme u est en $O(t^2)$, u^2 contient encore du t^4, mais u^3est inutile, il n'apporte que du t^6 et des termes d'ordre plus élevé.
On utilise donc $\ln\Big(1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^5)_{t\to 0}\Big) = \Big(-\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} + o(t^5)_{t\to 0}\Big) - \dfrac{1}{2}.\Big(-\dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}\Big)^2 + o((t^2)^3)$.
Bref, $\ln(\cos(t)) = -\dfrac{t^2}{2} - \dfrac{t^4}{12} + o(t^5)$ (c'est $o(t^5)$ qui ramasse toutes les cochonneries, y compris $o(t^6)$).

On dérive, ou du moins on applique nos résultats précédents sur la dérivation :
$-\tan(t) = -t - \dfrac{t^3}{3} + o(t^4)_{t\to 0}$

C'est un peu maigre, et c'était prévisible, car en plus, on dérivait et perdait un ordre.
Il faudrait reprendre avec $\cos(t) = 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24} - \dfrac{t^6}{6!} + \dfrac{t^8}{8!} + o(t^9)_{t\to 0}$

$$u = -\tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^4}{24} - \tfrac{t^6}{6!} + \tfrac{t^8}{8!} + o(t^9)_{t\to 0}$$

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + o(u^4) \text{ avec } u(u^4) = o(t^8)\ ^a$$

$$\begin{array}{lcllllll}
u & = & -\frac{t^2}{2} & +\frac{t^4}{24} & -\frac{t^6}{720} & +\frac{t^8}{8!} & +o(t^8) \\
u^2 & = & & \frac{t^4}{4} & -\frac{t^6}{24} & +\frac{t^8}{320} & +o(t^8) \\
u^3 & = & & & -\frac{t^6}{8} & +\frac{t^8}{32} & +o(t^8) \\
u^4 & = & & & & \frac{t^8}{16} & +o(t^8)
\end{array}$$

$$\ln(\cos(t)) = -\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} - \frac{t^6}{45} - \frac{17.t^8}{2520} + o(t^8)$$

a. en fait $o(u^4) \subset o(t^8)$ puisqu'on parle d'ensembles

C'est finalement plus pénible que la plupart des précédentes.

Mais ! C'est étrange ça, sur un polycopié, j'aurais du tout de suite préparer le développement à l'ordre 8, non ?
Par forcément, parce que dans votre carrière d'étudiant de Prépas, vous serez souvent amené à ne pas

52. les coefficients doivent vous rappeler la série harmonique alternée en $\ln(2)$ ou la divergence en $\ln(n)$ de la série harmonique, on est en territoire connu

savoir tout de suite à quel ordre faire votre développement limité.

La question revient souvent :
- à quel ordre je dois développer le numérateur
- je développe f à quel ordre dans $g(f(a+h))$ pour que la composée soit à l'ordre 8 ?
- je dois calculer tous ces termes là ?

C'est avec la pratique que vous finirez par
- savoir à peu près
- développer parfois trop de termes (tant pis, après on efface l'inutile)
- développer parfois pas assez de termes (tant pis, on recommence, mais une partie du travail est déjà fait)

J'ai largement utilisé le développement limité du cosinus, de l'exponentielle et du logarithme. Parce que je les connais par cœur. Et vous

17°) Développements limités à connaître.

Il y a trois familles :

famille exponentielle
famille série géométrique
famille binôme de Newton

dont voici les parents et les enfants

famille exponentielle				
exp	ch	sh	sin	cos
famille série géométrique				
$\frac{1}{1+h}$	$\frac{1}{(1+h)^2}$	$\frac{1}{(1+h)^n}$	$\ln(1+h)$	$Arctan(h)$
famille binôme de Newton				
$(1+h)^\alpha$	$\sqrt{1+h}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$Arcsin(h)$	

On commence par la première :

famille exponentielle					
	formule en 0	on retient et généralise	et ailleurs	origine
exp	$e^h = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} + o(h^n)_{h\to 0}$	$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{6} + o(h^3)$	$e^{a+h} = e^a.e^h$	Taylor
sh	$sh(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^{2.p+1}}{(2.p+1)!} + o(h^{2.n+2})_{h\to 0}$	$sh(h) = h + \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^6)$	$sh.ch + ch.sh$	partie impaire
ch	$ch(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{h^{2.p}}{(2.p)!} + o(h^{2.n+1})_{h\to 0}$	$ch(h) = 1 + \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o(h^6)$	$ch.ch + sh.sh$	partie paire
sin	$\sin(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p.h^{2.p+1}}{(2.p+1)!} + o(h^{2.n+2})_{h\to 0}$	$\sin(h) = h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^6)$	$\cos.\sin + \sin.\cos$	$e^{i.h}$ partie impaire
cos	$\cos(h) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p.h^{2.p}}{(2.p)!} + o(h^{2.n+1})_{h\to 0}$	$\cos(h) = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{h^4}{24} + o(h^6)$	$\cos.\cos - \sin.\sin$	$e^{i.h}$ partie paire

Pour l'exponentielle, c'est $e^{0+h} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!}.h^k + o(h^n)$ avec des dérivées qui valent toutes 1.

C'est ce qui explique la présence de factorielles.

Ces factorielles qui grimpent vite au dénominateur vous confirment que l'an prochain vous pourrez même passer du développement limité au développement en série entière (oui, une série de terme général $\left(\frac{h^n}{n!}\right)_{n\geqslant 0}$*) sur* $\mathbb{R}$ *tout entier* $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *et même sur* $\mathbb{C}$ *ou sur* $(M_k(\mathbb{C}),+,.)$.

On pense aussi à ces factorielles en se disant qu'en dérivant $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ *on doit retrouver la même chose.*

Comme le sinus hyperbolique en est la partie impaire, on récupère la partie impaire du développement limité.
Et pour le cosinus hyperbolique, on fait de même.
On notera que comme il n'y a que des signes plus, la fonction obtenue est croissante, convexe sur $\mathbb{R}^+$ et tend vite vers l'infini.

En revanche, en prenant $i.h$ à la place de h (formule de Moivre et Euler), on crée l'alternance de signes bien connue pour le sinus et le cosinus.
On retrouve aussi $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$ *dans la partie principale du développement limité.*

Oui, Oskar, on pourra aussi définir le cosinus d'une matrice $\cos(M) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k.M^{2.k}}{'2.k)!}$.
.

Je ne vous recommande pas de retenir la formule en sigma, mais juste les premiers termes, et normalement, vous devez ensuite reconstituer les exposants, la parité, l'alternance de signes et tout le reste...

Ensuite, il y a le problème : ce sont des développements limités en 0, mais ailleurs ?
Il suffit de profiter des propriété de ces fonction.

Exemple : $e^{ch(t)}$ et $ch(e^t)$ quand t tend vers 0 à l'ordre 4.

$$e^{ch(t)} = e^{1+\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = e^1.e^{\frac{t^2}{2}}.e^{\frac{t^4}{24}+o(t^4)} = e.\Big(1+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}.\Big(\frac{t^2}{2}\Big)^2+o(t^4)\Big).\Big(1+\frac{h^4}{24}+o(h^4)\Big) = e+\frac{e.t^2}{2}+\frac{e.t^4}{6}+o(t^5)$$

On vérifie la valeur en 0 et on a un minimum.

On notera que vous croiserez aussi $e^{ch(t)} = e + \frac{e.t^2}{2} + \frac{e.t^4}{6} + O(t^6)$ *puisque le terme suivant est un multiple de* t^6 *(et des termes d'ordres plus élevés encore).*
.

Ensuite, $ch(e^t) = ch\Big(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\Big)$ est plus lourd. On n'est visiblement pas en 0.
On développe donc d'abord $ch\Big(1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\Big) = ch(1).ch\Big(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\Big) + sh(1).sh\Big(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{24} + o(t^4)\Big)$.
A présent, il reste un terme u qui tend vers 0 auquel on peut appliquer les développements $ch(u)$ et $sh(u)$:

$$\begin{array}{rclllll} u & = & t & +\frac{t^2}{2} & +\frac{t^3}{6} & +\frac{t^4}{24} & +o(t^4) \\ u^2 & = & & t^2 & +t^3 & +\frac{7.t^4}{12} & +o(t^4) \\ u^3 & = & & & t^3 & +\frac{3.t^4}{2} & +o(t^4) \\ u^4 & = & & & & t^4 & +o(t^4) \end{array}$$ et le résultat ultime est sans intérêt, mais calculable

$$ch(e^t) = ch(1) + sh(1).t + \frac{e^1}{2}.t^2 + \frac{(3.ch(1) + 2.sh(1)).t^3}{6} + \frac{(8.ch(1) + 7.sh(1)).t^4}{24} + o(t^4)$$

On n'encadre pas ce résultat. En maths, le chemin est souvent bien plus important et beau que la seule destination.
.

Disons le tout de suite, l'élève qui attaque l'exercice en écrivant

$$ch(e^t) = ch\Big(1 + t + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^3}{6} + \tfrac{t^4}{24} + o(t^4)\Big) = 1 + \frac{\Big(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)\Big)^2}{2} + \frac{\Big(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6}+\frac{t^4}{24}+o(t^4)\Big)^4}{24} + o(t^4)$$

pourra avoir lu tout Tocqueville, connaître les gouverneurs de tous les états des États Unis, calculer l'entropie d'un système isolé, écrire douze fonctions de transfert... sa place ne sera pas en école d'ingénieur, puisqu'il manipulera des outils sans les avoir compris... quoi de pire pour un ingénieur ?[53].

53. *peut être « prescrire de boire de l'eau de javel pour se désinfecter de l'intérieur »*

Sinon, on pourra noter que quand on écrit
$\sin(a+h)=\sin(a).\cos(h)+\cos(a).\sin(h)=\sin(a).\Big(1-\frac{h^2}{2}+\frac{h^4}{24}+o(h^5)\Big)+\cos(a).\Big(h-\dfrac{h^3}{6}+\dfrac{h^5}{120}+o(h^5)\Big)$
on aboutit à $\sin(a+h)=\sin(a)+\cos(a).h-\dfrac{\sin(a)}{2}.h^2-\dfrac{\cos(a)}{6}.h^3+\dfrac{\sin(a)}{24}.h^4+\dfrac{\cos(a)}{120}.h^5+o(h^5)\Big)$
qu'on aurait obtenu directement par la formule de Taylor...

Vous savez quoi, on continue avec la deuxième :

famille série géométrique		
	formule en 0	on retient et généralise
$\dfrac{1}{1+h}$	$\frac{1}{1+h}=\sum_{k=0}^{n}(-h)^k+o(h^n)_{h\to 0}$	$\frac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+o(h^3)_{h\to 0}$
$\dfrac{1}{1-h}$	$\frac{1}{1-h}=\sum_{k=0}^{n}h^k+o(h^n)_{h\to 0}$	$\frac{1}{1-h}=1+h+h^2+h^3+o(h^3)_{h\to 0}$
$\dfrac{1}{(1-h)^2}$	$\frac{1}{(1-h)^2}=\sum_{k=0}^{n}(k+1).h^k+o(h^n)_{h\to 0}$	$\frac{1}{(1-h)^2}=1+2.h+3.h^2+4.h^3+o(h^3)$
$\ln(1+h)$	$\ln(1+h)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+o(h^n)_{h\to 0}$	$\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)_{h\to 0}$
$\ln(1-h)$	$\ln(1-h)=-\sum_{k=1}^{n}\dfrac{h^k}{k}+o(h^n)_{h\to 0}$	$\ln(1-h)=-\Big(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)_{h\to 0}\Big)$
$Arctan(h)$	$Arctan(h)=\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{2.k+1}.h^{2.k+1}+o(h^{2.n+2})_{h\to 0}$	$Arctan(u)=u-\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{u^5}{5}o(u^6)_{h\to 0}$

je dédouble le tableau faute de place

famille série géométrique			
	on retient et généralise	et ailleurs	origine
$\dfrac{1}{1+h}$	$\frac{1}{1+h}=1-h+h^2-h^3+o(h^3)_{h\to 0}$	$\frac{1}{a+h}=\frac{1}{a}.\frac{1}{1+\frac{h}{a}}$	série géométrique
$\dfrac{1}{1-h}$	$\frac{1}{1-h}=1+h+h^2+h^3+o(h^3)_{h\to 0}$	idem	
$\dfrac{1}{(1-h)^2}$	$\frac{1}{(1-h)^2}=1+2.h+3.h^2+4.h^3+o(h^3)$		« dérivation »
$\ln(1+h)$	$\ln(1+h)=h-\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)_{h\to 0}$	$\ln(a+h)=\ln(a)+\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)$	intégration
$\ln(1-h)$	$\ln(1-h)=-\Big(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{3}+o(h^3)_{h\to 0}\Big)$	$\ln(a+h)=\ln(a)+\ln\Big(1+\dfrac{h}{a}\Big)$	
$Arctan(h)$	$Arctan(u)=u-\dfrac{u^3}{3}+\dfrac{u^5}{5}o(u^6)_{h\to 0}$		intégration

La première formule, avec son alternance de signes peut s'obtenir par la formule de Taylor, en dérivant $t\longmapsto\dfrac{1}{t}$ (très vite une récurrence propose et démontre la bonne formule).
Mais je rappelle que le mieux est de partir du membre « somme », d'identifier une série géométrique de raison $-h$ et de retrouver $\dfrac{1-(-h)^{n+1}}{1-(-h)}=\dfrac{1}{1+h}+o(h^n)_{h\to 0}$.

La deuxième ligne est là pour vous montrer qu'avec un signe moins, c'est mieux : $\sum_{k=0}^{n}h^k=\dfrac{1-h^{n+1}}{1-h}=\dfrac{1}{1-h}+o(h^n)_{h\to 0}$.
C'est ce même signe moins qu'on retrouve partout dans ces formules.

Vous n'êtes pas tenu en Sup de connaître $\dfrac{1}{(1-h)^2}$ *mais avouez que c'est simple.*

On peut le retrouver en effectuant aussi $\frac{1}{1-h}.\frac{1}{1-h}$.
Sinon, il est tentant de généraliser pour les dérivées successives. Faites le si vous avez l'esprit étoile.

En revanche, l'intégration qui donne un logarithme doit être connue de vous.
Avec son premier terme $\ln(1+h) \sim_{h\to 0} h$.
Et on rappelle au passage que $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ converge vers $\ln(1-(-1))$ quand n tend vers l'infini. On est en terrain connu ;.

> *Mais ne dites jamais au prof de maths que le développement limité de* $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ *converge vers* $\ln(2)$. *Ce n'est pas un développement limité, c'est un développement de Taylor.*
> *Dans un développement limité, il y a une variable* h *qui doit tendre vers* 0.
> *Comment faites vous, petit génie, pour dire que* 1 *est une variable ? pour dire que* 1 *tend vers* 0 *?*
> *Donc, surveillez votre langage : distinguez formule de Taylor et développement limité. ça commence pareil, mais ça ne finit pas de la même façon, et surtout ce n'est pas le même usage.*

.

Celle que je vous recommande de retenir, c'est celle avec les mêmes signes partout :

$$-\ln(1-h) = h + \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + \frac{h^4}{4} + \ldots + \frac{h^n}{n} + o(h^n)_{h\to 0}$$

En repartant de $\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n.t^n + o(t^n)_{h\to 0}$ appliquée à $t = h^2$ *(qui tend bien vers* 0*)* :
$\frac{1}{1+h^2} = 1 - h^2 + h^4 - h^6 + \ldots + (-1).h^{2.n} + o(h^{2n})_{h\to 0}$
Il ne reste qu'à intégrer entre 0 et u qui tend vers 0 :

$$Arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^n}{2.n+1}.u^{2.n+1} + o(u^{2.n+2})$$

Et pour récupérer celui de l'argument tangente hyperbolique ? Facile, repartez de $\frac{1}{1-t^2}$ et intégrez.

A moins que vous n'ayez la présence d'esprit de comprendre que c'est la partie impaire du logarithme.
Tiens, et si les choses s'éclairaient tout à coup comme ça.

Maintenant, on regarde quand ce n'est pas pour des $1+h$.
Pour le logarithme, la clef est indiquée au début : $\ln(a+h) = \ln(a) + \ln\left(1+\frac{a}{h}\right)$. Il y a donc juste une constante additive qui traine devant (la valeur en $h = 0$) et un petit changement de variable.

> *Sinon, perdez le rêve d'obtenir un développement du logarithme en* 0 *: il n'y en a pas... Même avec de vieillies ruses en* $\ln(1+(h-1))$.

.

C'est ce qui va nous servir pour les développements limités des fractions rationnelles aussi.
Par exemple, décomposées en éléments simples de la formée $\frac{1}{x-a}$.

Exercices :	Développement limité de $\frac{1}{X-3}$ en 6 à l'ordre 4.
	Développement limité de $\frac{X+2}{X^2-3.X+1}$ en 5 à l'ordre 4.

Avant toute chose, on vérifie que l'application est bien définie sur un voisinage du point considéré.
Ensuite, réflexe de base : on translate et on pose $X = 6+h$ puisque c'est au voisinage de 6 que ça se passe.

On a alors $\dfrac{1}{X-3}=\dfrac{1}{6+h-3}=\dfrac{1}{3+h}$.

On veut voir une forme en $\dfrac{a}{1+t}$, on force donc la main avec $\dfrac{1}{3+h}=\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{3}}$.

On trouve à l'ordre 4 : $\dfrac{1}{3+h}=\dfrac{1}{3}.\Big(1-\dfrac{h}{3}+\dfrac{h^2}{9}-\dfrac{h^3}{27}+\dfrac{h^4}{81}+o(h^4)\Big)$.

On développe et c'est fini.

Valeur en 6 :	$\dfrac{1}{6}$	
Dérivée :	$\dfrac{-1}{9}$	(localement décroissante)
Dérivée seconde :	$\dfrac{1}{27}$	(localement convexe)

Pour $\dfrac{X-2}{X^2-3.X+2}$, on a au moins deux possibilités [54] : décomposer en éléments simples
faire venir le $\dfrac{a}{1+u}$ avec u un peu compliqué, certes.

Je vous fais les deux, tout en sachant que dans les deux, on posera $X=5+h$:

<u>Méthode polaire :</u> [55] $\dfrac{X+2}{X^2-3.X+2}=\dfrac{X+2}{(X-2).(X-1)}=\dfrac{4}{X-2}-\dfrac{3}{X-1}=\dfrac{4}{3+h}-\dfrac{3}{4+h}$ (deux pôles réels)

$\dfrac{X+2}{X^2-3.X+2}=\dfrac{4}{3}.\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{3}}-\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{4}}$

On va sommer $\frac{4}{3}.\Big(1-\frac{h}{3}+\frac{h^2}{9}-\frac{h^3}{27}-\frac{h^4}{81}\Big)-\frac{3}{4}.\Big(1-\frac{h}{4}+\frac{h^2}{16}-\frac{h^3}{64}-\frac{h^4}{256}+o(h^4)\Big)$ et le reste n'est que calcul.

<u>Méthode brutale :</u> $\dfrac{X+2}{X^2-3.X+2}=\dfrac{7+h}{12+7.h+h^2}=(7+h).\dfrac{1}{12}.\dfrac{1}{1+\dfrac{7.h+h^2}{12}}$

On pose donc $u=\dfrac{7.h+h^2}{12}$ et on calcule $u^2=\dfrac{49.h^2+14.h^3+h^4}{144}$, $u^3=\dfrac{343.h^3+147.h^3}{1728}+o(h^4)$ et $u^4=\dfrac{2401.h^4}{20736}+o(h^4)$.

On somme, on réunit les termes, on divise encore par 12 et on multiplie par $7+h$.
Avec du courage, on y arrive.

<u>Et encore une méthode :</u>

car il y a 10 catégories de gens
- ceux qui savent compter
- ceux qui ne savent pas
- ceux qui connaissent la blague en base 2 mais pas en base 3

On écrit cette fois $\dfrac{X+2}{X^2-3.X+2}=\dfrac{7+h}{(3+h).(4+h)}=(7+h).\dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{3}}.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{4}}$.

Il ne reste qu'à multiplier trois développements, étape par étape : (sous forme d'un cube ?)

54. ne comptez jamais sur moi pour vous dire « voilà, face à tel exercice, il n'y a que tel chemin, il faut faire ça et ça » ; quand vous serez ingénieur, ce sera à vous de trouver plusieurs voie, d'en choisir une, d'en estimer les qualités et défauts

55. pourquoi les ours polaires raisonnent mal ? parce qu'ils ne sont pas cartésiens

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -\frac{h}{3} & +\frac{h^2}{9} & -\frac{h^3}{27} & +\frac{h^4}{81} \\ \hline 1 & a & & v & o & u \\ -\frac{h}{4} & s & & d & e & \\ +\frac{h^2}{16} & c & o & m & p & l \\ -\frac{h^3}{64} & e & t & e & r & \\ +\frac{h^4}{256} & t & o & t & t & \end{array} \quad \text{et encore } \frac{1}{12} \text{ et } 7+h.$$

D'ailleurs, ces développements limités me font penser à un superbe exercice de dénombrement par les développements limités.

Vous avez des pièces de 1 euro, 2 euros et 3 euros (oui, c'est louche, mais on est en maths).
De combien de façons différentes pouvez vous payer la somme de n euros ?

n	nombre	façons				
0	1	voilà				
1	1	1				
2	2	$1+1$	2			
3	3	$1+1+1$	$1+2$	3		
4	4	$1+1+1+1$	$1+1+2$	$1+3$	$2+2$	
5		$1+1+1+1+1$	$1+1+1+2$	$1+1+3$	$1+2+2$	$2+3$

Pour l'instant, ça a l'air trop facile ! Un collégien généralisera... trop vite.

Pour payer6 euros, il y a

$1+1+1+1+1+1$	$1+1+1+3$	$1+2+3$	
$1+1+1+1+2$	$1+1+2+2$	$2+2+2$	$3+3$

Et pour payer 9 euros, je vous laisse trouver les 12 solutions.

En fait, pour n fixé, on cherche le nombre de solutions dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (et même $([0,\ n]\cap\mathbb{N})^3$) de l'équation $i+2.j+3.k=n$ (on paye avec $\begin{array}{l} i \text{ pièces de 1 euro} \\ j \text{ pièces de 2 euros} \\ k \text{ pièces de 3 euros}\end{array}$).

Et comment les développements limités vont intervenir ?

Je vous donne le début : $\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n} x^{2.j} + o(x^{2.n})\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} x^{3.k} + o(x^{3.n})\Big)$.

Quel sera le coefficient de x^n dans ce développement limité ?

Et de qui est ce le développement limité ?

. *Avez vous constaté qu'après avoir maintenu une rigueur où la variable tendant vers 0 s'appelait toujours h, je glisse peu à peu vers d'autres noms ?*

Et pour patienter, un autre exercice, tout bête en fait : connaissez vous une application dont le développement limité en 1 est
$f(1+h)=1+1.h+2.h^2+6.h^3+24.h^4+120.h^5+720.h^6+o(h^6)$?

Réponse à ma question idiote ci dessus (idiote et perfide car on se dit « des factorielles », il doit y avoir l'exponentielle... »).

En fait, c'est simple, il suffit de demander $f(1+h)=1+1.h+2.h^2+6.h^3+24.h^4+120.h^5+720.h^6$ sans même le petit o.

Et de choisir $f(x)=1+1.(a-1)+2..(x-1)^2+6.(x-1)^3+24.(x-1)^4+120.(x-1)^5+720.(x-1)^6$.

Et on le garde sous cette forme ?

Ça dépend. Si vous le développez $620-3081.x+9728.x^{é}-\ldots+720.x^6$ alors vous avez exprimé la solution... au voisinage de 0.

Tout dépend de ce que vous voulez en faire.

Revenons en à nos pièces de 1, 2 et 3 euros.

Voici effectivement les façons de payer 9 euros :

[[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 2, 3], [1, 1, 1, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 3, 3], [1, 1, 2, 2, 3], [1, 2, 2, 2, 2], [1, 2, 3, 3], [2, 2, 2, 3], [3, 3, 3]]

Pour payer 15 euros, voici les 27 solutions :
[[1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 3, 3], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3], [1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3], [1, 1, 1, 1, 2, 3, 3, 3], [1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2], [1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3], [1, 1, 1, 3, 3, 3, 3], [1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3], [1, 1, 2, 2, 3, 3, 3], [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2], [1, 2, 2, 2, 2, 3, 3], [1, 2, 3, 3, 3, 3], [2, 2, 2, 2, 2, 2, 3], [2, 2, 2, 3, 3, 3], [3, 3, 3, 3, 3]]

A présent, regardons comme suggéré $\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n} x^{2.j}\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} x^{3.k}\Big)$.
Les trois sommes ont des variables de sommation ayant des noms différents, c'est bien vu.
Le produit est $\sum_{Max(i,j,k)\leqslant n} x^{i+2.j+3.k}$, et l'écriture $Max(i,j,k) \leqslant n$ est correcte mais pas forcément facile à saisir.
Et on va les regrouper en fonction de leur exposant, car un même exposant revient plusieurs fois.
En fait, même, combien de fois voit on x^n ? Autant de fois que n peut s'écrire $i + 2.j + 3.k$ avec i, j et k plus petits que n.
La condition « avec i, j et k plus petits que n » est redondante avec le fait qu'on demande de travailler avec des entiers naturels.

La question est donc ramenée à « quel est le coefficient de x^n dans $\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n} x^{2.j}\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} x^{3.k}\Big)$ ».

Pour vous convaincre : quand vous développez $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6).(1+x^2+x^4+x^6).(1+x^3+x^6)$, *qui sont les termes en* x^6 :

réponse :

$1+1+1+1+1+1$: $x^6.1.1$	$1+1+1+3$: $x^3.1.x^3$	$1+2+3$: $x.x^2.x^3$	
$1+1+1+1+2$: $x^4.x^2.1$	$1+1+2+2$: $x^2.x^4.1$	$2+2+2$: $1.x^6.1$	$3+3$: $1.1.x^6$

On peut même demander « quel est le coefficient de x^n dans $\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{j=0}^{n} x^{2.j} + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{k=0}^{n} x^{3.k} + o(x^n)\Big)$ » puisque les termes ajoutés sont d'un ordre plus élevé que n.

On aurait même pu aller chercher $\Big(\sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{j=0}^{[n/2]} x^{2.j} + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{k=0}^{[n/3]} x^{3.k} + o(x^n)\Big)$.
Et quitte à bien choisir le $o(x^n)$, on peut avoir pris à chaque fois un développement limité connu.

$$\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3} = \Big(\sum_{i=0}^{n} x^i + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{j=0}^{[n/2]} x^{2.j} + o(x^n)\Big).\Big(\sum_{k=0}^{[n/3]} x^{3.k} + o(x^n)\Big)$$

La question devient donc juste « quel est le coefficient de x^n dans le développement limité du produit $\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3}$ ».
Et alors ? Facile, cette fraction peut s'exprimer non plus comme un produit mais comme une somme.
Ça s'appelle « décomposition en éléments simples » : $\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3} = \frac{1}{(1-x)^3.(1+x).(1+x+x^2)}$
On va donc devoir calculer six coefficients, car le dénominateur est de degré $-$.
Et c'est en voyant de multiples décompositions en éléments simples que vous retiendrez bien à quoi

elles ressemblent (et pas en apprenant par cœur une définition générale) :

$$\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{(1-x)^3.(1+x).(1+x+x^2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{(x-1)^2}+\frac{c}{(x-1)^3}+\frac{d}{x+1}+\frac{e}{x-j}+\frac{f}{x-j^2}$$

Il doit y avoir $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{(x-1)^2}+\dfrac{c}{(x-1)^3}$ et pas juste $\dfrac{c}{(x-1)^3}$, car sinon, vous n'avez pas un espace de dimension suffisante dans le membre de droite.
Ou sinon, retenez qu'avec juste $\dfrac{c}{(x-1)^3}$ vous ne pourriez pas décomposer $\dfrac{x+3}{(x-1)^3}$ par exemple.
Ici, c'est c et d, puis e et f qu'on calcule facilement par la méthode des pôles.
On peut trouver a et b par division suivant les puissances croissantes (hors programme dans ce contexte aussi).
On peut aussi réduire au dénominateur commun et résoudre.
Allez, cadeau :

$$\frac{1}{1-x}.\frac{1}{1-x^2}.\frac{1}{1-x^3}=\frac{-17}{72.(x-1)}+\frac{1}{4.(x-1)^2}-\frac{1}{6.(x-1)^3}+\frac{1}{8.(x+1)}+\frac{e^{i.\pi/6}}{\sqrt{3}.(x-j)}+\frac{e^{-i.\pi/6}}{\sqrt{3}.(x-j^2)}$$

Maintenant, on effectue les développements limités : pour $\dfrac{1}{1-x}$et ses puissances, c'est facile pour $\dfrac{1}{1+x}$ aussi.
Et pour $\dfrac{e^{-i\pi/3}}{9.(x-j)}$, il faut changer un peu en $\dfrac{-e^{i\pi/3}}{9.(1-x.j^2).j}$ puis $\dfrac{1}{9.(1-x.j^2)}$ (vérifiez).

	fraction	coefficient de x^n
$\frac{17}{72}$	$\frac{1}{1-x}$	1
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{(1-x)^2}$	$n+1$
$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{(1-x)^3}$	$\frac{(n+1).(n+2)}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{1+x}$	$(-1)^n$
$\frac{e^{\cdot\pi/6}}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{1-x.j^2}$	$j^{2.n}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{1-x.j}$	j^n

Le coefficient de x^n dans la forme décomposée en éléments simples est donc

$$\frac{(n+1).(n+2)}{12}+\frac{n+1}{4}+\frac{17}{72}+\frac{(-1)^n}{8}+\frac{j^{2.n}}{9}+\frac{j^n}{9}$$

Déjà, que ceci fasse un entier est assez surprenant. mais que ça donne la suite

1	1	2	3	4	5	7	8	10	12	14	16	19	21

Et on pourra payer 2020 euros de 341044 façons..
Cette suite est référencée A001399 sur l'OEIS (Encyclopédie en ligne des suites d'entiers).
1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 16, 19, 21, 24, 27, 30, 33, 37, 40, 44, 48, 52, 56, 61, 65, 70, 75, 80, 85, 91, 96, 102, 108, 114, 120, 127, 133, 140, 147, 154, 161, 169, 176, 184, 192, 200, 208, 217, 225, 234, 243, 252, 261, 271, 280, 290, 300, 310, 320, 331, 341
• number of partitions of n into at most 3 parts ; also partitions of n+3 in which the greatest part is 3 ; also number of unlabeled multigraphs with 3 nodes and n edges.
• Also number of tripods (trees with exactly 3 leaves) on n vertices.
• Also number of partitions of n+3 into exactly 3 parts ; number of partitions of n in which the greatest part is less than or equal to 3 ; and the number of nonnegative solutions to b + 2c + 3d = n.

• Also a(n) gives number of partitions of n+6 into 3 distinct parts and number of partitions of 2n+9 into 3 distinct and odd parts, e.g., 15 = 11 + 3 + 1 = 9 + 5 + 1 = 7 + 5 + 3.

• Also bracelets with n+3 beads 3 of which are red (so there are 2 possibilities with 5 beads).
• Also coefficient of q^n in the expansion of $\binom{m}{3}_q$ as m goes to infinity.
•Write 1,2,3,4,... in a hexagonal spiral around 0, then a(n) for n > 0 is formed by the folding points (including the initial 1). The spiral begins :

```
          85--84--83--82--81--80
          /                     \
        86  56--55--54--53--52  79
        /   /                 \   \
      87  57  33--32--31--30  51  78
      /   /   /             \   \   \
    88  58  34  16--15--14  29  50  77
    /   /   /   /         \   \   \   \
  89  59  35  17   5---4  13  28  49  76
  /   /   /   /   /     \   \   \   \   \
90  60  36  18   6   0   3  12  27  48  75
  /   /   /   /   /   /   /   /   /   /
91  61  37  19   7   1---2  11  26  47  74
    \   \   \   \          /   /   /   /
    62  38  20   8---9--10  25  46  73
      \   \   \            /   /   /
      63  39  21--22--23--24  45  72
        \   \                /   /
        64  40--41--42--43--44  71
          \                    /
          65--66--67--68--69--70
```

Bon, si on revenait à nos développements limités avec la dernière famille :

famille binôme de Newton		
	formule en 0	on retient et généralise
$(1+h)^a$	$(1+h)^a = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{a.(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} h^k + o(h^n)_{h\to 0}$	$(1+h)^a = 1 + a.h + \frac{a.(a-1)}{2}.h^2 + \frac{a.(a-1).(a-2)}{6}.h^3 + o(h$
$\sqrt{1+h}$	$\frac{1}{1-h} = \sum\limits_{k=0}^{n} calculable.h^k + o(h^n)_{h\to 0}$	$\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + o(h^2)_{h\to 0}$
$Arcsin(h)$	à voir	

En fait, pour cette famille, seule la première ligne est à connaitre. les autres ne seront que des cas particuliers, et on ne vous demandera pas de connaître par cœur les coefficients. Juste de savoir les retrouver rapidement et les écrire sous forme agréable.

D'où sortent les coefficients de cette formule ? D'une simple formule de Taylor-Young.
On dérive en effet $(1+x)^a$ e $a.(1+x)^{a-1}$ puis $a.(a-1).(1+x)^{a-2}$ et on conjecture la formule

$$(x(1+x)^a)^{(n)} = \Big(x \longmapsto a..(a-1)\dots(a-n+1).x^{a-n}\Big) = \Big(x \longmapsto \prod_{k=0}^{n-1}(a-k).x^{a-n}\Big)$$

qu'on démontre par récurrence sur n (entier !).
Il ne reste qu'à calculer la valeur en 0 et diviser par une factorielle
et on a ces $\dfrac{a.(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}$
avec n facteurs en haut (d'où l'arrêt juste avant $a-n$
et n facteurs en bas (bon, une factorielle).
On pourra écrire ceci $\prod\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{a-k}{k+1}$ ou même $\dfrac{a!}{(n-a)!.a!}$ si toutefois $a!$ a un sens pour a non entier.

Sous cette forme, vous comprenez le nom de binôme de Newton.

On note qu'effectivement si l'exposant a est un entier naturel, on retrouve par exemple
$(1+h)^a = 1 + \binom{a}{1}.h + \binom{a}{2}.h^2 + \binom{a}{3}.h^3 + o(h^3)_{h\to 0}$.

Un autre cas simpliste est $a = -1$. En effet, ce « binomiaux » valent alors $\dfrac{(-1).(-2).(-2)\dots(-n)}{n!}$ ce qui fait $(-1)^n$ et la formule redonne bien $\dfrac{1}{1+h} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k.h^k + o(h^k)_{h\to 0}$.

De même, pour a égal à -2, on retrouve une formule déjà croisée (j'ai failli dire « connue »).

Si vous n'écrivez qu'un terme, vous avez juste $(1+h)^a = 1 + a.h + o(h)_{h\to 0}$,

que vous utilisez en physique, y compris sous ses formes simples$\sqrt{1+h} = 1 = \dfrac{h}{2} + o(h)_{h\to 0}$

$\dfrac{1}{1+h} = 1 - h + o(h)_{h'\to 0}$

$\dfrac{1}{\sqrt{1+h}} = 1 - \dfrac{h}{2} + o(h)_{h\to 0}$

Le cas ensuite classique est l'exposant $\dfrac{1}{2}$ (et la variante encore plus agréable $-\dfrac{1}{2}$ comme vous allez le voir avec l'ami John[56].

Calculons en effet $\dfrac{\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}$ pour n donné.

On a $n-1$ signes moins au numérateur. Et n facteurs 2 au dénominateur

$\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}-k}{k+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.1.1.3.5\dots(2.n-3)$ (vérifiez le dernier terme).

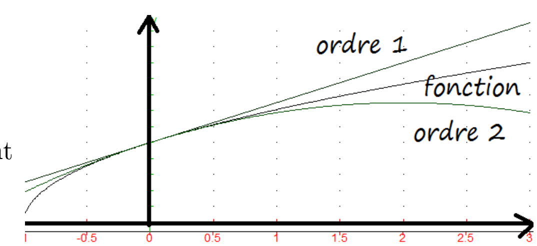
On insère classiquement les entiers pairs (souvenirs de septembre quand vous étiez encore jeunes, beaux et pleins d'espoirs) :

$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\frac{1}{2}-k}{k+1} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^n.n!}.\frac{(2.n-2)!}{2.4.6\dots(2.n-2)} = \frac{(-1)^{n-1}.(2.n-2)!}{2^{2.n-1}.n!.(n-1)!}$$

Personnellement, je n'ai jamais retenu cette formule.
Trop peu digeste.
Mais je retiens les deux premiers termes :

$$\boxed{\sqrt{1+h} = 1 + \frac{h}{2} - \frac{1}{8}.h^2 + o(h^2)_{h\to 0}}$$

et si on me le demande je calcule le suivant $\dfrac{\frac{1}{2}.\left(-\frac{1}{2}\right).\left(-\frac{3}{2}\right)}{6} = \dfrac{1}{16}$.



Mais encore plus propice aux sujets de concours : quand l'exposant a vaut $-\dfrac{1}{2}$.

Cette fois, tous les facteurs du numérateur ont un signe moins,
il n'y a plus un premier 1 à part
on termine les impairs à $2.n-1$

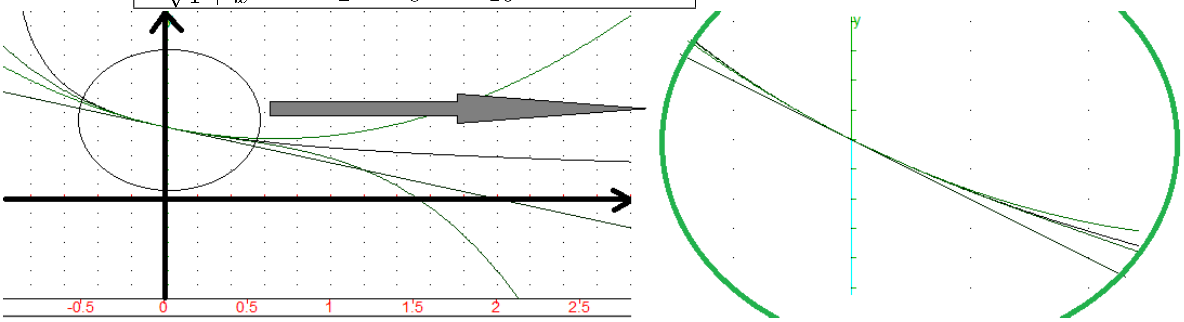
$$\prod_{k=0}^{n-1}\frac{-\frac{1}{2}-k}{k+1} = \frac{(-1)^n}{2^n.n!}.\frac{(2.n)!}{2.4.6\dots(2.n)} = \frac{(-1)^n.(2.n)!}{2^{2.n}.(n!)^2}$$

Qui est alors le John associé à tout ça : Wallis. Par quel miracle, ah, je laisse les plus enthousiastes d'entre vous chercher.

56. quel John déjà croisé, devinez)

On a donc

$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k.(2.k)!}{2^{2.n}.(k!)^2}.x^k + o(x^n)_{x\to+\infty}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2.k)!}{2^{2.k}.(k!)^2}.x^k + o(x^n)_{x\to+\infty}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2.k)!}{2^{2.k}.(k!)^2}.x^{2.k} + o(x^{2.n})_{x\to+\infty}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-4.x^2}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(2.k)!}{(k!)^2}.x^{2.k} + o(x^{2n})_{x\to+\infty}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3.x^2}{8} - \dfrac{5.x^3}{16} + o(x^3)_{x\to 0}$



Ces formules reviennent dans quelques sujets de concours et la dernière sert dans quelques approximations de physique.

Et dans des **exercices** comme « développement limité en 0 d'Arcsinus ».

Pour celui ci, vous intégrez $Arcsin(h) = \displaystyle\int_0^h \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2.k)!}{2^{2.k}.k!.(k+1)!}.h^{2.k+1} + o(h^{2.n+1})_{x\to+\infty}$.

Et si je vous demande le développement limité en 0 d'Arccosinus ? Pas d'effort, une formule de trigonométrie simple !

Autre exercice : multipliez le développement limité de $\sqrt{1+h}$ par celui de $\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}$. Obtenez vous alors des résultats nouveaux sur des sommes de produits de factorielles ?

Et si on n'est pas en 1, que fait on ?
Le développement limité de $\sqrt{2+h}$ est facile à obtenir :
$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}.\sqrt{2+\dfrac{h}{2}} = \sqrt{2}.\Big(1 + \frac{h}{4} - \frac{h^2}{32} + o(h^2)_{h\to 0}\Big)$.
On retient toujours : factoriser et non pas soustraire ou translater, comme pour $\ln(2+h)$ ou $\dfrac{1}{2+h}$.

Exemple : donnez le développement limité d'ordre 2 en 0 de $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}$.

pas de problème de domaine, ni de continuité, ni de dérivabilité.
D'ailleurs, si on veut : on dérive : $\dfrac{1}{8.\sqrt{1+x}.\sqrt{3+\sqrt{1+x}}.\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}}}$ et on calcule en 0, c'est bon.
Mais la dérivée seconde ne m'inspire plus, même en écrivant
$(1+x)^{-\frac{1}{2}}.\big(3+(1+x)^{-\frac{1}{2}}\big)^{\frac{-1}{2}}.\Big(2+\big(3+(1+x)^{-\frac{1}{2}}\big)^{\frac{-1}{2}}\Big)^{-\frac{1}{2}}$.

On connaît déjà $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ (formule du cours de mardi[57]).

C'est $(1+x)^a = 1 + a.x + \frac{a.(a-1)}{2}.a^2 + o(x^2)_{x\to 0}$.

On a donc $\sqrt{3+\sqrt{1+x}} = \sqrt{4 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$.

On reveut $\sqrt{1+u}$? facile (enfin, quand on a l'habitude) : $\sqrt{3+\sqrt{1+x}} = \sqrt{4.\Big(1 + \frac{x}{8} - \frac{x^2}{32} + o(x^2)\Big)}$.

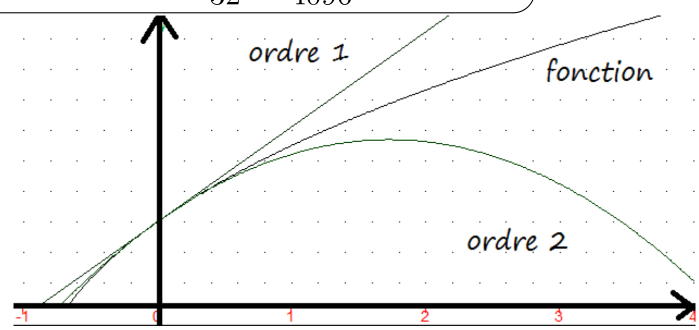
Cette fois, on trouve $2.\Big(1 + \frac{1}{2}.\Big(\frac{x}{8} - \frac{x^2}{32}\Big) - \frac{1}{8}.\Big(\frac{x}{8}\Big)^2 + o(x^4)\Big) = 2 + \frac{x}{8} - \frac{9.x^2}{256} + o(x^2)$.

On termine : $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}} = \sqrt{4 + \frac{x}{8} - \frac{9.x^2}{256} + o(x^2)} = 2.\sqrt{1 + \frac{x}{32} - \frac{9.x^2}{1024} + o(x^2)}$.

cette fois, on va avoir $2.\Big(1 + \frac{1}{2}.\Big(\frac{x}{32} - \frac{9.x^2}{1024}\Big) - \frac{1}{8}.\Big(\frac{x}{32}\Big)^2\Big) + o(x^2)\Big)$.

Le calcul définitif donne $\boxed{\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1+x}}} = 2 + \frac{x}{32} - \frac{37.x^2}{4096} + o(x^2)_{x\to 0}}$

valeur 2 en 0
pente de coefficient directeur 1/32
localement concave



Questions en vrac de nos lecteurs sur les développements limités

$\bullet_1$ quand on élève au carré le développement limité du sinus ou de la tangente en 0, on gagne un ordre, c'est normal ?
$\bullet_2$ pourquoi développement limité : est ce parce que la validité en est limitée autour du point a sur un intervalle $[a-\alpha,\ a+\alpha]$
est ce parce que on se limite à un nombre fini de termes dans la somme ?
$\bullet_3$ à quoi servent les développements limités ?
$\bullet_4$ en général, la fonction frôle sa tangente (DL d'ordre 1) et « rebondit dessus », quelle st sa position par rapport à sa parabole osculatrice (DL d'ordre 2).

$\bullet_1$ Développement limité du sinus à l'ordre 5 : on part de $h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)_{h\to 0}$.
Quand on élève au carré, on calcule en fait un produit
$\Big(h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)_{h\to 0}\Big).\Big(h - \frac{h^3}{6} + \frac{h^5}{120} + o(h^5)_{h\to 0}\Big)$.
On crée certes au bout un $o(h^{10})_{h\to 0}$, mais ce n'est pas ça l'important.
Le moins fin des petits o créés est un $h.o(h^6)$. On a donc obtenu un développement à l'ordre 7.

Le phénomène sera le même quand on multipliera par un développement sans terme constant.

Si vous voulez un peu de vocabulaire pour faire pédant : il y a l'ordre (le petit o au bout)
et il y a la valuation : premier exposant visible ».
Le sinus peut être écrit à tout ordre, mais sa valuation vaut 1.

57. prochain

En revanche, $\dfrac{\sin(h)}{h}$ a pour valuation 0 puisque h se simplifie entre numérateur et dénominateur.
tant qu'on cause de valuation, il y a un exercice classique et joli (quoique calculatoire) :
Quelle est la valuation en 0 de $\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))$?

On calcule : $\sin(\tan(x)) = x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{40} - \dfrac{55.x^7}{1008} + o(x^8)_{x\to 0}$

$\tan(\sin(x)) = x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{40} - \dfrac{105.x^7}{5040} + o(x^8)_{x\to 0}$

La valuation de la différence est donc 7. Autant dire que près de 0, vous confondez $\sin(\tan(x))$ et $\tan(\sin(x))$.

$\bullet_2$ Le mot anglais pour développement limité est séries. Ce qui laisse à penser qu'on les appelle limités parce qu'on limite le nombre de termes.

Et l'an prochain, vous parlerez de séries entières avec des choses comme $\sin(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k.x^{2.k+1}}{(2.k+1)!}$ qui sont de vraies séries et plus du tout du tout des développements limités.
dans une série entière, le nombre de termes est parti à l'infini, mais la variable x ou h ne tend plus du tout vers *à*.

$\bullet_3$ Les développements limités servent à faire
des études locales de fonctions : tangente au graphe, position par rapport à la tangente, points d inflexion.
Vous étudiez même le cercle osculateur, c'est à dire le cercle qui est la meilleure approximation locale du graphe (courbe d'ordre 2 telle que $graphe = cercle + o(h^2)$).
En général, le graphe traverse son cercle osculateur. Il faudra que je repose un ou deux exercices là dessus.
Ou même que je vous fasse étudier le « rayon de courbure », c'est à dire le rayon de ce cercle de meilleure approximation. Et le centre de courbure (on vous en a parlé en SII ?).
On pourra aussi en comparant les développements limités trouver la position relative de deux courbes.

des calculs approchés de fonction : en fait, on utilise le développement de Taylor, mais comme on se contente de dire que l'erreur commise est le reste, on se contente de la partie principale du développement limité.
C'est peut être ainsi que votre calculatrice va s'y prendre pour calculer $\sin(\theta)$ pour θ tapé au clavier (après l'avoir ramené entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ par imparité, périodicité...).
La calculatrice qui sait faire des additions et multiplications...
Et si vous lui demandiez de calculer alors $x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040}$?
Ce devrait être une bonne approximation du sinus, non ? Lagrange nous dit que l'erreur est plus petite que $\dfrac{\theta^8}{8!}$ quand même.
Et facile à calculer si vous la mettez sous la forme $x.\Big(1 - x^2.\Big(\frac{1}{6} - x^2.\Big(\frac{1}{20} - x^2.\frac{1}{42}\Big)\Big)\Big)$.
Dans la pratique, votre calculatrice utilisera plutôt une approximante de Padé (voir TD).

des équivalents de termes général de séries : la série de terme général $\Big(n.\Big(\sin\Big(\frac{1}{n}\Big) - \tan\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big)_{n>0}$ converge-t-elle ? Si vous n'utilisez pas un développement limité pour avoir un équivalent du terme général, vous allez ramer.

Tenez, un oral des CCP (avec questions intermédiaires) : terme général $\dfrac{\Big(e - \Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n\Big)}{(\ln(n^2+n))^2}.e^{\frac{1}{n}}$ déjà, il tend bien vers 0 ?

des calculs de limites :

bien souvent, vous serez face à des formes indéterminées du type $\dfrac{o(1)}{o(1)}$ (vous pensiez que j'allais tomber dans le panneau et parler de $\dfrac{0}{0}$? Non, pas moi !).
il vous faudra utiliser des développements limités à des ordres suffisants pour qu'il reste au numérateur et eu dénominateur un équivalent
vous serez ramené à un quotient d'équivalents...
Et face à 1^∞ il faudra aussi revenir au logarithme
Exemple : $\left(\dfrac{n^2+n+1}{n^2-n+1}\right)^n$ tend vers e^2 quand n tend vers l'infini (évident non ? non !)
$\dfrac{1-\cos(x^2)}{x.\sin(x).\ln(1-x^2)}$ tend $\dfrac{1}{4}$ vers quand x tend vers 0.
$(2-x)^{\tan(x.\pi/2)}$ en 2^-, ça donne quoi ?
$\dfrac{x^{1+\frac{1}{x}}-x}{\ln(1+x^2)}$ en $+\infty$
$\dfrac{1-\sin(x)}{(\pi-2.x)^2}$ en $\dfrac{\pi}{2}$
Et on peut vous en soumettre des tonnes comme ça.

Mais je sens que nous allons bientôt partir pour d'autres aventures...