



2019
2020

Mpsi 2 Charlemagne
Mardi 5 mai

IS27

Rappel : le 4 mai est le jour star-wars : may the fourth (be with you). Mais dimanche alors ? Que l'arbre soit avec toi ?

♡ 0 ♡ Soit f dérivable de $[a \Gamma b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$. on doit montrer qu'il existe c vérifiant $f'(c) = 0$. On va le faire par l'absurde, on suppose $0 \notin f'([a \Gamma b])$. Montrez qu'alors f est injective, monotone. Concluez.

♡ 1 ♡ Soit g dérivable de $[a \Gamma b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $g'(a) = \alpha$ et $g'(b) = \beta$. Montrer que pour tout γ de $[\alpha \Gamma \beta]$ il existe c vérifiant $g'(c) = \gamma$ (en appliquant le résultat précédent à f bien choisie).

◇ 0 ◇ Donnez le domaine de définition de $x \mapsto (1-x)^{\frac{-1}{x}}$ (notée f) et prolongez la par continuité en 0. Calculez f' , y compris en 0. Montrez qu'elle est alors de classe C^2 y compris en 0.

◇ 1 ◇ Montrez que le système d'équations $\left\{ \begin{array}{l} \text{Argsh}(x) = 2 \cdot \text{Argsh}(y) \\ 3 \cdot \ln(x) = 2 \cdot \ln(y) \end{array} \right|$ admet un unique couple solution. Étudiez la suite $x_{n+1} = \frac{1}{4} - (x_n)^4$.

♣ 0 ♣ x est un carré parfait. On lui ajoute 5, c'est encore un carré parfait. On lui soustrait 5, c'est encore un carré parfait. Ceci vous semble impossible... dans $\mathbb{N}$, oui. Mais Fibonacci a trouvé la réponse de ce défi lancé par l'empereur Frédéric II. Il s'agissait de carrés de rationnels (rappelons que 2 n'est pas un carré parfait, même dans $\mathbb{Q}$, mais que $\frac{1}{100}$ et $ds\frac{25}{49}$ sont des carrés parfaits).

◇ 2 ◇ On note P l'ensemble des applications C^∞ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R}^+ \Gamma f^{(n)}(x) \geq 0$. Montrez que P est stable par addition, multiplication et composition. Existe-t-il des éléments de P bornés ? On cherche les f de P telles que f^{-1} soit aussi dans P . Calculez $(f^{-1})'(b)$ et $(f^{-1})''(b)$ pour tout b de $\mathbb{R}^+$. Montrez que les seuls éléments de P dont la réciproque est dans P sont des fonctions affines.

◇ 3 ◇ $F = (x \Gamma y) \mapsto x^3 + 3 \cdot x \cdot y^2 - 15 \cdot x - 12 \cdot y$. Pour $(a \Gamma b)$ donnés, trouvez p, q, r, s et t pour avoir $F(a + h \Gamma b + k) = F(a \Gamma b) + \begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2 + k^2)_{(h \Gamma k) \rightarrow 0}$. Résolvez $p = q = 0$ d'inconnues $(a \Gamma b)$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour chacun des quatre couples trouvés, donnez spectre et vecteurs propres de $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

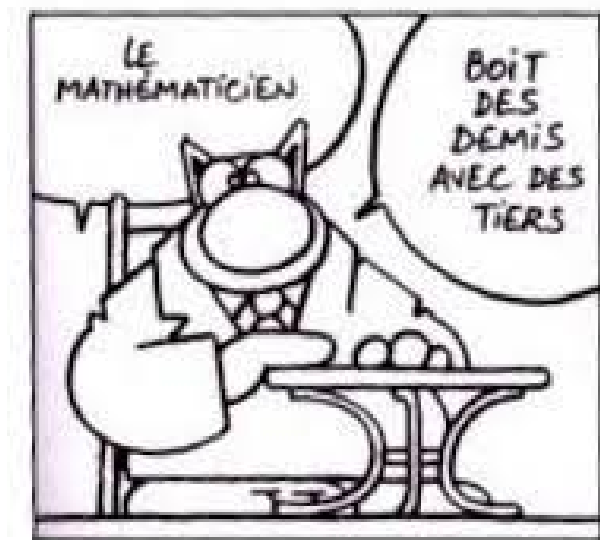
◇ 4 ◇ Soit f de classe C^2 de $[a \Gamma b]$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(a) = f(b) = 0$. On se donne x , il faut montrer qu'il existe c vérifiant $f(x) = \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{2} \cdot f''(c)$. Vous pouvez le faire, pour x fixé, en introduisant $\varphi_x = t \mapsto f(t) - A \cdot (t-a) \cdot (t-b)$ et en ajustant A pour que φ_x soit nulle en x . Bon, eh faites le alors !

♯ -1 ♯ A et B sont deux listes de même longueur. Il faut un test pour savoir si B est ou non une copie de A obtenue par permutation circulaire. C'est en gros pour savoir si deux dispositions d'individus autour d'une table sont la même, à rotation près. Par exemple A='abcde' et B='cdeab' : oui.

◇ 5 ◇ Montrez : $e^x \geq 1 + x$ pour tout x .
 Montrez $\exists x \Gamma 2^x < 1 + x$.
 Montrez : $\forall a \neq e \Gamma \exists x \in \mathbb{R} \Gamma a^x < 1 + x$.

◇ 6 ◇ (H_n) la série harmonique diverge. Mais qu'en est il de la série de terme général $\left(\frac{1}{H_n}\right)_{n \geq 1}$?

◇ 7 ◇ Élevez à la puissance n :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$


2019 2020 Théorème de Darboux.

IS27

On suppose que f' ne s'annule pas.

Pour tout couple $(x \Gamma y)$ avec $x \neq y$, on sait qu'il existe c vérifiant $f(y) - f(x) = (y - x) \cdot f'(c)$.

Ni $y - x$, ni $f'(c)$ n'est nul. $f(y) - f(x)$ est non nul.

C'est du raisonnement par contraposée. « Non injective implique $\exists c \Gamma f'(c) = 0$ »

a donné ici

« f' jamais nulle implique f injective ».

L'application f est dérivable, donc continue en tout point. Et on a prouvé qu'elle est injective.

Un théorème du cours (au programme) dit qu'elle est monotone.

Si elle est croissante, alors sa dérivée (qui existe par hypothèse) est positive ou nulle partout. Ceci contredit $f'(a) < 0$.

Si elle est décroissante et dérivable, alors sa dérivée est négative ou nulle partout. Ceci contredit $f'(b) > 0$.

On tient notre contradiction. C'est la preuve la plus rapide du théorème de Darboux.

Maintenant, γ est une valeur entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

On définit alors (idée classique) : $g = x \mapsto f(x) - \gamma \cdot x$ (idée classique qui remplace l'axe Ox par un axe incliné).

g est toujours dérivable. $g'(a)$ et $g'(b)$ valent $\alpha - \gamma$ et $\beta - \gamma$. Ce sont deux réels de signes opposés puisque γ est entre α et β .

On peut donc appliquer le résultat précédent à g (ou $-g$) : sa dérivée s'annule au moins une fois. On a bien c vérifiant $f'(c) = \gamma$.

Nulle part on n'a prétendu appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à f' puisque on n'a aucun hypothèse de continuité sur elle.

2019	2020	Système.	IS27
-------------	-------------	-----------------	-------------

Le système $\begin{cases} \text{Argsh}(x) = 2.\text{Argsh}(y) \\ 3.\ln(x) = 2.\ln(y) \end{cases}$ impose juste a priori $x > 0$ et $y > 0$.

Ensuite, comme sh et Argsh sont véritables inverses l'une de l'autre (de même que $\ln$ et $\exp$), on peut le rendre équivalent à $\begin{cases} x = sh(2.\text{Argsh}(y)) \\ x^3 = y^2 \end{cases}$.

Par les formules classiques de trigonométrie hyperbolique (cosinus hyperbolique positif, donc $ch = \sqrt{1 + sh^2}$) : $x = 2.y.\sqrt{1 + y^2}$ et $x^3 = y^2$.

On élève au carré la première sans perdre d'information car x et y sont positifs : $x^2 = 4.x^3.(1 + x^3)$ et $y^2 = x^3$.

La solution $x = 0$ est refusée, il reste $4.x^4 + 4.x = 1$ puis $y^2 = x^3$.

On cherche combien l'équation $4.x^4 + 4.x = 1$ a de racines avec un tableau de variations :

x	0	$]0\Gamma + \infty[$
$4.x^4 + 4.x$	0	$\nearrow +\infty$

L'application est un homomorphisme de $]0\Gamma + \infty[$ sur $[0\Gamma + \infty[$ donc une racine, et une seule, à l'équation $4.(x^4 + x) = 1$.

On trouve donc une unique racine x de l'ordre de $0\Gamma246$ à 10^{-3} près (calculatrice sans lui demander l'algorithme utilisé par `fsolve`).

On trouve alors $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Pour avoir plus de précision sur la valeur de x , on la ramène, non pas à une dichotomie (pourtant bien étudiée en I.P.T.) mais à un point fixe : $x = \frac{1}{4} - x^4$.

On crée donc la suite $u_{n+1} = \frac{1}{4} - (u_n)^4$.

Et on note α le point fixe cherché (inconnu à ce stade) et β l'autre point fixe (négatif).

2019	2020	Une matrice.	IS27
-------------	-------------	---------------------	-------------

On calcule les premières puissances de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 13 & 13 & 13 & 55 & 13 & 13 & 13 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \\ 7 & 7 & 7 & 13 & 7 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

la suivante donne la même forme, avec coefficients 13, 55 et 133.

On en vient à conjecturer une forme générale qu'on valide par récurrence.

Quoi? Du premier coup d'œil? Oui, pour la forme, pas pour les valeurs : avec trois suites de coefficients qu'on nomme a_n , b_n et c_n :

La clef est dans le produit suivant :

$$\begin{pmatrix} a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \\ b_n & b_n & b_n & c_n & b_n & b_n & b_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \\ a_n & a_n & a_n & b_n & a_n & a_n & a_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si les trois coefficients existent au rang n , ils existent au rang $n+1$ et vérifient :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n \\ b_{n+1} &= c_n \\ b_{n+1} &= 6.a_n + b_n \\ c_{n+1} &= 6.b_n + c_n \end{aligned}$$

Les trois dernières formules sont compatibles entre elles par récurrence à double hérédité.

On traduit matriciellement : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}.$

On élève à la puissance n en diagonalisant : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}.$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3^{n-1} & 0 \\ 0 & (-2)^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$ et on rappelle $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

On trouve enfin $a_n = \frac{3^n - (2)^n}{5}, b_n = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1}}{5}$ et $c_n = \frac{3^{n+2} - (-2)^{n+2}}{5}$

On recalcule les premiers pour se convaincre :

1	1	7	13	55
---	---	---	----	----

Attention, la formule n'est pas valable au rang 0 qui est à part.

Vous avez aimé, vous avez su faire sans erreurs ? Parfait. Je suis fier de vous.

2019	2020	La question pour Fibonacci.	IS27
------	------	-----------------------------	------

On cherche un rationnel x qui est un carré parfait de rationnel. Autant l'écrire $x = \frac{p^2}{q^2}$ avec p et q premiers entre eux.

On veut que $\frac{p^2 - 5.q^2}{q^2}$ et $\frac{p^2 + 5.q^2}{q^2}$ soient aussi des carrés parfaits.

Ceci revient à demander que $p^2 - 5.q^2$ et $p^2 + 5.q^2$ soient des carrés parfaits d'entiers.

On a une équation à l'image de celles des triplets pythagoriciens : $p^2 - 5.q^2 = r^2$ et $p^2 + 5.q^2 = t^2$.

Déjà, en sommant (mais la condition ne sera que nécessaire) : $2.p^2 = r^2 + t^2$ ou encore $p^2 - r^2 = t^2 - p^2$.

On factorise : $(p - r).(p + r) = (t - p).(t + p)$.

Mais on a aussi $p^2 - r^2 = 5.q^2$ donc $(p - r).(p + r) = 5.q.q$.

de même $(t - p).(t + p) = 5.q.q$

Avec $q = 1$, on cherche si on peut avoir $(p - r).(p + r) = 5$ et $(t - p).(t + p) = 5$ avec des entiers. raté.

Avec $q = 2$ on tente encore notre chance, et ainsi e suite.

Léonard de Pise arrive à $q = 12, p = 41$ puis $r = 31$ et $t = 49$.



On vérifie :

$p - r$	$p + r$	
10	72	
		$5.q^2 = 720$
$t - p$	$t + p$	
8	90	

En hommage au tableau « le fils de l'homme » de René Magritte, voici Fibo nashi.

Les formules que Fibonacci a utilisées :
$$\frac{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 - m.n.(m^2 - n^2) = \left(\frac{m^2 - 2.m.n - n^2}{2}\right)^2}{\left(\frac{m^2 + n^2}{2}\right)^2 + m.n.(m^2 - n^2) = \left(\frac{m^2 + 2.m.n - n^2}{2}\right)^2} \text{ avec } m = 5$$

et $n = 4$ il obtient $m.n.(m^2 - n^2) = 180$, et il divise tout par 36. Bon, on est Fibonacci ou on est juste un prof ou un élève de MPSI2...

Résumé : $\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2$ et $\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2$.

2019	2020	Applications à dérivées positives.	IS27
-------------	-------------	---	-------------

La stabilité de P par addition repose que $(f + g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$.

La stabilité par multiplication repose sur la formule de Leibniz. On prend f et g dans P , on se fixe n quelconque, on calcule $(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} . f^{(n-k)} . g^{(k)}$. C'est une combinaison à coefficients positifs d'applications positives, c'est une application positive.

Pour la composition, on n'a pas de formule simple pour $(f \circ u)^{(n)}$. Mais on sait que c'est une combinaison de termes tous positifs.

Les fonctions constantes positives ont toutes leurs dérivées positives ou nulles (et souvent nulles). Elles sont dans P .

Si f est dans P , elle est continue car dérivable autant de fois qu'on veut.

Elle est croissante car sa dérivée est positive ou nulle.

mais de là à ce qu'elle soit strictement croissante.

Cela dit, comme f''' est positive, sa dérivée première est croissante.

Une fois qu'elle est non nulle en un point, elle reste plus grand que cette valeur.

Ayant $f'(x)'(a)$ pour x plus grand que a , f est minorée par une application affine de coefficient directeur a .

Elle tend vers $+\infty$ vers l'infini.

Et donc l'intervalle image n'est pas borné.

On suppose que f et f^{-1} sont dans P .

On va étudier le signe de f' et f'' surtout.

On part de $f(f^{-1}(x)) = x$ pour tout x et pour se simplifier la vie, on pose $\varphi = f^{-1}$.

$f'(\varphi(x)).\varphi'(x) = 1$ puis $f''(\varphi(x)).(\varphi'(x))^2 + f'(\varphi(x)).\varphi''(x) = 0$ pour tout x .

Mais par hypothèse, f' , f'' , φ' et φ'' sont positives.

Pour que la somme soit nulle, la seule solution est que les deux termes soient nuls.

f'' est nulle en tout point.

f est affine.

Et les seules fonctions affines qui soient bijectives entre $\mathbb{R}^+$ et lui-même sont de la forme $x \mapsto a.x$ avec $a > 0$.

On vérifie que la condition nécessaire poussée jusqu'au bout est suffisante.

2019	2020	Fonctions de deux variables.	IS27
------	------	------------------------------	------

$F = (x \mapsto y) \mapsto x^3 + 3.x.y^2 - 15.x - 12.y$, c'est de classe C^∞ a-t-on envie de dire (mais en plusieurs variables, ça veut dire quoi?)

$$\begin{array}{cccc} a^3 & +3.a^2.h & +3.a.h^2 & +h^3 \\ +3.a.b & +3.b^2.h & +3.a.k^2 & +3.h.k^2 \\ & +6.a.b.k & +6.b.h.k & \end{array}$$

On développe $F(a + h \Gamma b + k) =$

$$\begin{array}{cc} -15.a & -15.h \\ -12.b & -12.k \end{array}$$

On jette à la poubelle des $o(\text{ordre } 2)$ les h^3 et $h.k^2$.

On garde la première colonne c'est $F(a \Gamma b)$. On regroupe les termes d'ordre 1 et ceux d'ordre 2.

$$F(a + h \Gamma b + k) = F(a \Gamma b) + \begin{pmatrix} 3.a^2 + 3.b^2 - 15 & 6.a.b - 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3.b \\ 3.b & 3.a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o(h^2 + k^2)_{(h \Gamma k) \mapsto (0 \Gamma 0)}$$

Avec les notations de Monge

ordre 1		ordre 2		
p	q	r	s	t
$3.a^2 + 3.b^2 - 15$	$6.a.b - 12$	$3.a$	$3.b$	0
Gradient $\begin{pmatrix} 3.a^2 + 3.b^2 - 15 \\ 6.a.b - 12 \end{pmatrix}$		Hessienne $\begin{pmatrix} 0 & 3.b \\ 3.b & 3.a \end{pmatrix}$		

On annule simultanément les deux composantes de la « dérivée » : $a^2 + b^2 = 5$ et $a.b = 2$.

On trouve une équation en a^2 : $a^2 + \frac{4}{a^2} = 5$ qui donne $a^2 = 4$ ou $a^2 = 1$.

On reporte :

$a^2 = 4$			$a^2 = 1$	
$a = 2$	$a = -2$		$a = 1$	$a = -1$
$b = 1$	$b = -1$		$b = 2$	$b = -2$
$(2 \Gamma 1)$	$(-2 \Gamma -1)$	point	$(1 \Gamma 2)$	$(1 \Gamma -2)$
$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}$	matrice	$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$
$\{3.(1 + \sqrt{2}) \Gamma 3.(1 - \sqrt{2})\}$	$\{3.(-1 - \sqrt{2}) \Gamma 3.(-1 + \sqrt{2})\}$	spectre		
		matrice de passage		

2019	2020	Une série.	IS27
------	------	------------	------

La série à terme général positif $\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}\right)_{n \geq 1}$ est une série à termes positifs.

Le terme général tend vers 0. Mais on le minore par $\frac{1}{n}$, série divergente.

La série de terme général $\left(\frac{1}{H_n}\right)_{n \geq 1}$ diverge.

2019	2020	Cycles.	IS27
------	------	---------	------

Pour savoir si la liste A est une « rotation » de la liste B, on peut procéder ainsi

- on teste si A est égale à B.
- on décale A d'un cran, on refait le teste
- et ainsi de suite n fois (n est la longueur commune des deux listes).

Et pour faire tourner les éléments d'une liste, pour que [a,b,c,d] devienne [b,c,d,a] par exemple? On enlève le premier (pop) et on le recolle au bout.

A.append(A.pop(0))

```
def Test(A, B) :
;...n = len(A)
....if Len(B) != n :
.....return(False) #même si ce n'est pas demandé
....for k in range(n) :
.....if A == B :
.....return(True)
.....A.append(A.pop(0))
....return(False)
```

Mais ce n'est pas très propre. Quelles la complexité du test $A=B$ sur les deux listes ?

Une solution consiste aussi à copier deux listes A bout à bout $AA=A+A$ puis à voir si B est une sous-liste de A .

On peut aussi parcourir A à la recherche du premier élément de B ,

- si on ne le trouve pas, fini
 - chaque fois qu'on le trouve : on parcourt la suite de A et on regarde si il y a égalité avec les autres termes successifs de B
- mais on parcourt A avec un modulo n pour revenir en boucle au début de A .

Et pour des solutions économiques en espace mémoire et temps :

<https://www.techiedelight.com/check-strings-can-derived-circularly-rotating/>

2019 **2020** **Exponentielle de base e , de base 2...**

IS27

L'inégalité $e^x \geq 1 + x$ est une inégalité de convexité.

On écrit une formule de Taylor : $e^x = 1 + e^x + \frac{x^2}{1} \cdot \int_{t=0}^1 (1-t) \cdot e^{t \cdot x} \cdot dt$. le reste intégrale est positif, que que soit le signe de x .

En revanche, $x \mapsto 2^x$ est aussi convexe, mais ce n'est pas sa tangente à l'origine qu'on regarde.

On étudie la différence $f = x \mapsto 2^x - 1 - x$.

Elle se dérive en $x \mapsto \ln(2) \cdot 2^x - 1$.

En 0, f est nulle, mais sa dérivée est négative. Elle le reste sur un voisinage de 0 par continuité de f' .

Localement, f est décroissante. Elle passe donc dans les négatifs, c'est fini.

Si on prend $F = x \mapsto a^x - 1 - x$, elle est nulle en 0, mais sa dérivée ne l'est pas.

Cas $a > e$. $F'(0)$ est positif, F' est positive sur un voisinage $[-\mu\Gamma \mu]$, F est croissante localement. Elle est donc négative juste avant 0 sur tout $[-\mu\Gamma 0]$.

Cas $a < e$. $F'(0)$ est négatif, F' est négative sur un voisinage $[-\mu\Gamma \mu]$, F est décroissante localement. Elle est donc négative juste après 0 sur tout $[0\Gamma \mu]$.

2019 **2020** **Formule de Taylor.**

IS27

On se donne x différent de a et b sinon, la relation $f(x) = \frac{(x-a) \cdot (x-b)}{2} \cdot f''(c)$ ne pose pas de problème, on prend c quelconque (par exemple $\frac{a+b}{2}$) et on a $f(a) = \frac{(a-a) \cdot (a-b)}{2} \cdot f''(c)$.

On définit alors $\varphi_x = t \mapsto f(t) - A \cdot (t-a) \cdot (t-b)$ et on ajuste A pour avoir $\varphi_x(x) = 0$: $A = \frac{f(x)}{(x-a) \cdot (x-b)}$.

Par construction	$\varphi_x(a) = f(a) - 0 = 0$		$\varphi_x(x) = 0$ (choix de A)		$\varphi_x(b) = 0$
Rolle sur φ_x		$\exists u \in]a \ x[\ \varphi'_x(u) = 0$		$\exists v \in]x \ b[\ \varphi'_x(v) = 0$	
Rolle sur φ'_x			$\exists c \in]u \ v[\ \varphi''_x(c)$		

On justifie l'usage du théorème de Rolle : φ_x est de classe D_2 sur tous nos intervalles.

On assure aussi que u et v ne sont pas confondus : $u < x < v$.

. On pouvait aussi utiliser le théorème de Rolle en cascade.

L'égalité $\varphi''_x(c) = 0$ donne $f''(c) - 2 \cdot A = 0$.

On a donc $A = \frac{f''(c)}{2}$ et on reporte dans l'égalité $\varphi_x(x) = 0$. Et c'est fini : $f'(x) = \frac{f''(c)}{2} \cdot (x-a) \cdot (x-b)$.

Pour que $x \mapsto (1-x)^{\frac{-1}{x}}$ existe, il faut repasser par la formule $a^b = e^{b \cdot \ln(a)}$: $1-x$ doit être positif, le domaine s'arrête en 1.

Et il faut que $\frac{1}{x}$ existe. On enlève 0 : $\boxed{D_f =]-\infty 0[\cup]0 1[}$

En 1, $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ tend vers $+\infty$. $f(x)$ tend vers l'infini.

Vers $-\infty$, $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ tend vers 0, $f(x)$ tend vers 1.

En 0, $\frac{\ln(1-x) - \ln(1-1)}{x}$ tend vers la dérivée en 1 de $t \mapsto \ln(1-t)$.

La forme indéterminée tend vers 1, et $f(x)$ tend vers e .

On posera donc dorénavant $\boxed{f(0) = e}$

On dérive partout sauf en 0 : $x \mapsto \frac{-\ln(1-x)}{x}$ est déjà moche à dériver, on finit par trouver $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$.
 $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$
 $\frac{x}{x^2} \cdot f(x)$.

Le signe de la dérivée est dicté par celui de $\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)$ qu'on note $\varphi(x)$.

On dérive φ en $x \mapsto \frac{x}{(1-x)^2}$. φ admet en 0 un minimum nul. φ est donc positive.

f est croissante.. sur chaque intervalle de son domaine de définition.

Que se passe-t-il en 0? On regarde si f' admet une limite. Et on applique le théorème de la limite de la dérivée.

On doit étudier si $\frac{\frac{x}{1-x} + \ln(1-x)}{x^2} \cdot f(x)$ a une limite en 0.

On réduit au dénominateur commun $\frac{x + (1-x) \cdot \ln(1-x)}{x^2 \cdot (1-x)} \cdot f(x)$.

On rappelle le développement limité du logarithme en 0 : $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

On multiplie $(1-x) \cdot \ln(1-x) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ en coupant ce qui est d'un ordre trop élevé.

On reporte et simplifie par x^2 : $\frac{x + (1-x) \cdot \ln(1-x)}{x^2 \cdot (1-x)} \cdot f(x) = \left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \cdot f(x)$.

Le théorème de la limite de la dérivée donne f est dérivable en 0

$$f'(0) = \frac{e}{2}$$

f' est continue en 0

On recommence avec f'' . Et cette fois, il faut des développements plus poussés.

$f''(0)$ est nul. Mais on l'aura par d'autres méthodes.