◇ 0 ◇ On définit : $F(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}.dt\right)^2$ | $\phi(x)=\left(\int_0^1 e^{-t^2}.dt+\int_1^x e^{-t}.dt\right)^2$

Montrez que F est croissante sur $\mathbb{R}^+$, majorée par ϕ sur $[1,\ +\infty[$. et admet une limite en $+\infty$ qu'on ne calculera pas (c'est le but de l'exercice).

◇ 1 ◇ Calculez F'.

◇ 2 ◇ On définit aussi $G(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$ | $H(x)=-\int_0^1 e^{-x.(1+t^2)}.dt$

◇ 3 ◇ Montrez pour x et $x+h$ positifs : $\left|G(x+h)-G(x)-h.H(x)\right|\leqslant \frac{h^2}{2}.\int_0^1(1+t^2).e^0.e^{2.|h|}dt$. Déduisez que G est dérivable de dérivée H.

◇ 4 ◇ Montrez que $x\longmapsto F(x)+G(x^2)$ est constante (valeur) ?

◇ 5 ◇ Montrez : $0\leqslant G(x)\leqslant \int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1+t^2)}.dt$. Calculez alors $\lim_{x\to+\infty} G(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

♣ 0 ♣ Maintenant qu'on a $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, montrez moi $\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{1}{u^2}}.du=\frac{\sqrt{\pi}}{2.e^2}$.

◇ 6 ◇ Pour f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit $f^+=Max(f,\ 0)$ et $f^-=Max(-f,\ 0)$. Montrez que f^+e st convexe, mais pas forcément f^-.
Soient f et g convexes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, convexes. Montrez que $Max(f,\ g)$ est convexe.
Montrez que $Min(f,\ g)$ ne l'est pas forcément, mais montrez qu'il existe une minorante de f et g qui est convexe.

◇ 7 ◇ Pour quelles valeurs de p réel positif l'application $t\longmapsto(1-t^{\frac{1}{p}})^p$ est elle convexe sur $[0,\ 1]$?

◇ 8 ◇ Montrez que si f est convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors pour tout a, $\{x\in\mathbb{R}\mid f(x)=a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini.

◇ 9 ◇ Une matrice carrée réelle A admet un racine carré si il existe M réelle vérifiant $M^2=A$.
Montrez que si A admet une racine carrée, alors son déterminant est forcément positif ou nul.
Montrez qu'une matrice admettant des racines carrées commute avec ses racines carrées.
Montrez que $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.
Montrez que $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ a des racines carrées (combien ?).
Montrez que $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ a des racines carrées.
Montrez que $\begin{pmatrix}-1&0\\0&-4\end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.
Si A et B ont une racine, $A.B$ en a-t-elle une ?

♣ 1 ♣ Montrez que $n\longmapsto \ln(n!)$ est convexe de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, c'est à dire que « $p<q<n$ dans $\mathbb{N}^3$ » implique $\begin{vmatrix}1&1&1\\p&q&n\\\ln(p!)&\ln(q!)&\ln(n!)\end{vmatrix}\geqslant 0$.

♣ 2 ♣ Devant vous deux portes. Derrière chaque porte, soit un tigre, soit un trésor (il peut y avoir deux tigres ou deux trésors). Sur chaque porte, une affiche avec une information. Règle de la porte A : si il y a un tigre, l'affiche ment, s'il y a un trésor, l'affiche dit vrai. Et pour la porte B, c'est le contraire.
Que faites vous dans chacune des situations suivantes :

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 1	les deux cellules contiennent un trésor	les deux cellules contiennent un trésor
situation 2	il y a au moins un trésor derrière une porte	l'autre cellule contient un trésor
situation 3	fais attention, il y a un trésor derrière une porte et un tigre derrière l'autre	l'autre cellule contient un trésor
situation 4	les deux cachent la même chose	l'autre cellule contient un trésor

Et cette fois, les deux papiers sont tombés par terre, et vous ne savez ps de quelle porte il sont tombés : « cette porte ouvre sur un tigre » et « les deux portes cachent un tigre »

♯ -1 ♯ Chez Zarmazon tout est hiérarchise, chaque employé a un supérieur hiérarchique (et un seul), mais qui a lui même un supérieur et ainsi de suite (jusqu'à Jeffrey Bezos).
Une liste L indique en vrac les couples [employé, son supérieur] mais chacun est juste référence par un nombre.
Pouvez vous à partir de la liste L retrouver quel est le numéro du big boss Bezos ?
Écrivez une procédure qui donne pour chaque employé la liste de tous ses supérieurs hiérarchiques jusqu'au big boss (complexité par rapport au nombre total d'employés ?).
Exemple [[1, 2], [3, 5], [2, 4], [5, 4], [6, 5], [4, 9], [7, 6], [10, 9], [8, 10]], le big boss est le 9, et on a les listes hiérarchiques
1 : 2, 4, 9
2 : 4, 9
3 : 5, 4, 9
4 : 9
5 : 4, 9
6 : 5, 4, 9
7 : 6, 5, 4, 9
8 ; 10, 9
9 :
10 ; 9

2019 2020 Questions de cours sur la convexité. IS29

Pour f convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on définit $f^+ = Max(f,\ 0)$ et $f^- = Max(-f,\ 0)$. Montrez que f^+e st convexe, mais pas forcément f^-.
Soient f et g convexes de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$, convexes. Montrez que $Max(f,\ g)$ est convexe.
Montrez que $Min(f,\ g)$ ne l'est pas forcément, mais montrez qu'il existe une minorante de f et g qui est convexe.

On définit $f_p = t \longmapsto (1 - t^{\frac{1}{p}})^p$ sur $[0,\ 1]$.
Comme t est positif, $t^{\frac{1}{p}}$existe. Il faut encore que $t^{\frac{1}{p}}$ reste entre 0 et 1 (c'est bon), $1 - t^{\frac{1}{p}}$est positif, on peut l'élever à un exposant même non entier.

Ensuite, on dérive puisque f_p a tout pour être C^∞ sur $]0,\ 1[$ au moins : $f_p' = t \longmapsto t^{\frac{1}{p}-1}.(1 - t^{\frac{1}{p}})^p$.
Et tant pis, on redérive.
Pour p entre 0 et 1, l'application est convexe.
Pour p au delà de 1, elle est concave.
Tristan a du mettre sur le salon une animation GéoGébra où l'on voit le graphe passer du convexe au concave quand p varie.

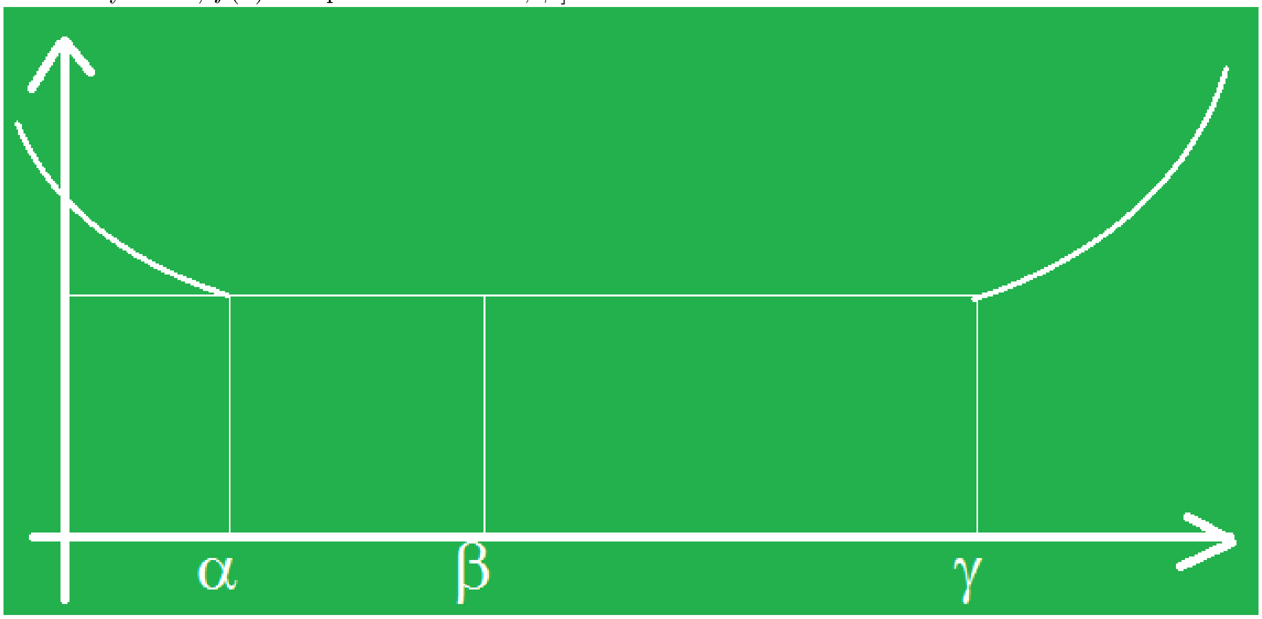
Que peut signifier la question « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = a\}$ est de cardinal 0, 1, 2 ou infini » ?
Qu'une valeur a sur l'axe des ordonnées peut :

• ne pas être atteinte	-1 pour exp
• être atteinte une fois	1 pour exp
• être atteinte deux fois	3 pour ch
• être atteinte une infinité de fois	fonction convexe constante sur un segment

Ce que dit alors cette propriété : si une fonction convexe atteint la même valeur trois fois, alors elle l'atteint une infinité de fois.

Et c'est vrai. Si la fonction convexe f atteinte la même valeur a en α, β et γ, alors elle est constante sur

$[\alpha,\ \gamma]$.
On l'obtient par l'inégalité des trois cordes pour tout réel x entre α et β (puis pour tout réel x entre β et γ).
Pour tout x entre αet β, on a $f(x) \leqslant a$ (sous la corde entre les deux pinces à linge $[\alpha,\ \beta]$)
Pour tout x entre α et β, on a $f(x) \geqslant a$ (au dessus de la corde hors du segment $[\beta,\ \gamma]$)
Par antisymétrie, $f(x) = \alpha$ pour tout x de $\alpha,\ \beta]$.



Si f et g sont convexes, alors leur maximum l'est aussi.
Graphiquement, ça se voit.
Sinon, on va ici passer par la petite inégalité de convexité.
On se donne x et y, ainsi que t entre 0 et 1.
On écrit deux inégalités de convexité, l'une pour f l'autre pour g

$$\begin{array}{lcl} f((1-t).x+t.y) & \leqslant & (1-t).f(x)+t.f(y) \\ g((1-t).x+t.y) & \leqslant & (1-t).g(x)+t.g(y) \end{array}$$

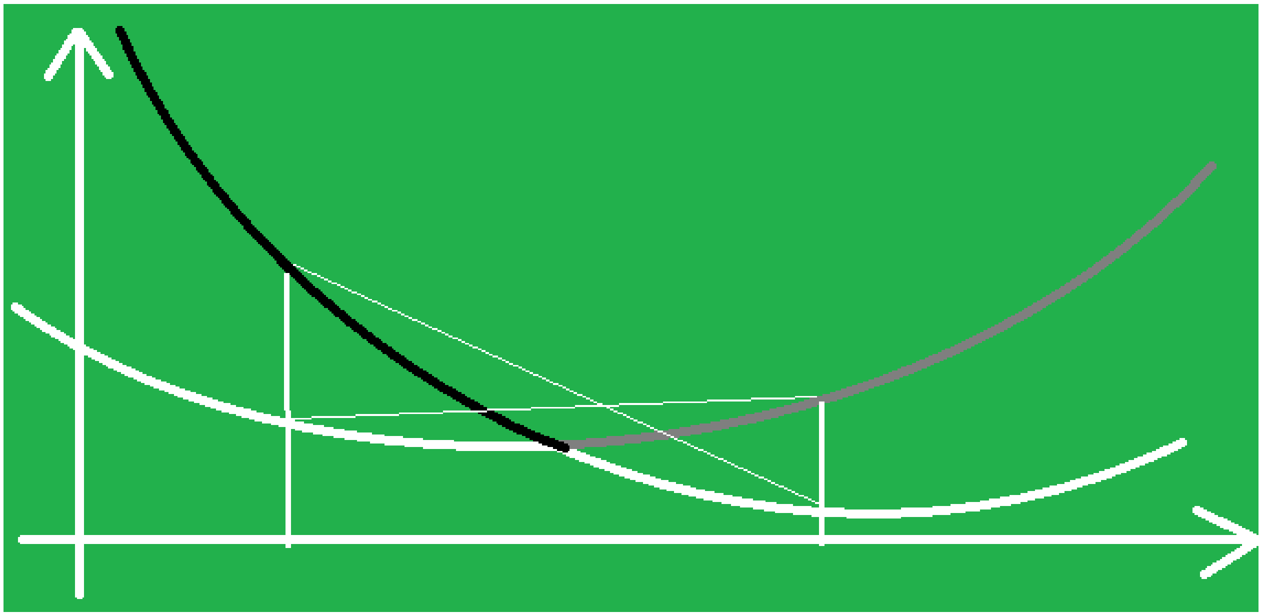
On décide de nommer h l'application $Max(f,\ g)$. On a donc $f(x) \leqslant h(x)$ et $f(y) \leqslant h(y)$.
Comme $1-t$ et t sont positifs, on a donc

$$f((1-t).x+t.y) \quad \leqslant \quad (1-t).f(x)+t.f(y) \quad \leqslant \quad (1-t).h(x)+t.h(y)$$

On fait de même pour g

$$g((1-t).x+t.y) \quad \leqslant \quad (1-t).g(x)+t.g(y) \quad \leqslant \quad (1-t).h(x)+t.h(y)$$

Les deux réels $f((1-t).x+t.y)$ et $g((1-t).x+t.y)$ sont plus petits que le majorant $(1-t).h(x)+t.h(y)$.
Leur maximum $h((1-t).x+t.y)$ l'est donc aussi.
On a obtenu $\quad h((1-t).x+t.y) \quad \leqslant \quad (1-t).h(x)+t.h(y)\quad$, c'est la convexité de h.



. *C'est de nommer $h = Max(f,\ g)$ qui nous a permis de passer au maximum en deux temps.*

Ayant traité cet exercice, on peut dire : f est convexe, $x \longmapsto 0$ est convexe, leur maximum l'est aussi. Et toc !

Sinon, pour $Min(-f(x),\ 0)$, on prend $f = \exp$ et on obtient la fonction $-\exp$ qui n'est plus convexe (car strictement concave [1]).

Et pour minorer$f$ et g convexes sur $[0,\ 1]$?
Facile, toute fonction convexe sur un segment est minorée car continue. [2]
f et g sont minorées, il suffit de prendre comme minorante une fonction constante (donc convexe) inférieure à la borne inférieure de f et à la borne inférieure de g.

Sinon, on peut montrer qu'une application convexe sur un segment $[a,\ b]$est minorée rein qu'en utilisant la position par rapport à la corde entre $A(a,\ f(a))$ et $C\Big(\dfrac{a+b}{2},\ f\Big(\dfrac{a+b}{2}\Big)\Big)$ puis à la corde entre c et $B(b,\ f(b))$.

2019 2020	**Matrices.**	**IS29**

Si A a pour racine carrée M, alors on a $\det(A) = \det(M^2) = (\det(M))^2$. C'est un réel positif, en tant que carré de réel.

Si A est le carré de M, alors on a $A.M = M.A$ car c'est $M^2.M = M^3 = M.M^2$.

Supposons que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$admet une racine carrée M. Alors par conditions nécessaires, on a
$\det(M) = 0$: pas forcément important
$M.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.M$ et donc $M =$ est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$
En effet, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc c est nul, puis a et d sont égaux.
Mais quand on élève $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ au carré, on trouve $\begin{pmatrix} a^2 & 2.a.b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$. Et on exige $a = 0$ pour la diagonale. Et le terme en Nord-Est n'arrive plus à valoir 1.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est le carré de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ par exemple.

1. « strictement concave » est bien antinomique de « convexe »
2. ou pour le moins prolongeable par continuité aux bornes

Pour le trouver ? $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta = \pi$.

Il suffit donc de prendre l'angle moitié en rappelant $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \cos(2.\alpha) & -\sin(2.\alpha) \\ \sin(2.\alpha) & \cos(2.\alpha) \end{pmatrix}$.

Les racines carrées de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commutent avec. Elles sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On peut prendre $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou son opposé.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ a un déterminant positif, mais ça ne suffit pas.

Si elle avait une racine carrée M, celle ci devrait vérifier $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.M = M.\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

M est forcément de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ seule possibilité pour commuter.

Mais la condition $M^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ conduit à $a^2 = -1$ ce qui est impossible dans $\mathbb{R}$.

. *Finalement j'aime assez ces exercices simples où il faut savoir raisonner sur les conditions nécessaires, pas forcément suffisantes.*

Faux raisonnement : A s'écrit M^2 et B s'écrit N^2, alors $A.B$ s'écrit $M^2.N^2$ et c'est un carré. Ah non, ce n'est pas le carré de $(M.N)$!

Un contre-exemple :

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ a une racine carré : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a une racine carré : $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
leur produit $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ n'a pas de racines carrée

2019 2020 Trésors et tigres. IS29

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 1	les deux cellules contiennent un trésor	les deux cellules contiennent un trésor
	Tigre	**Trésor**

Les deux panneaux disent la même chose. ils sont donc soit tous deux vrais, soit tous deux faux.
Si les deux sont vrais, la porte B est en contradiction.

Ils sont donc tous les deux faux. Il n'y a pas deux trésors. Il y a au moins un tigre, voire deux.
Mais comme la pancarte est fausse, il y a un tigre derrière la porte A et un trésor derrière la porte B.

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 2	il y a au moins un trésor derrière une porte	l'autre cellule contient un trésor
	Trésor	**Tigre**

Si la phrase de la porte B est vraie, alors on a a configuration indiquée ci dessus, cohérente.

Si la phrase de la porte B ment, alors c'est qu'il y a un Trésor en B (puisque l'affiche ment)
et qu'il n'y a pas de trésor en A (l'affiche de la porte B ment)
mais alors il y a un tigre en A, et donc la porte A doit mentir :
il n'y a pas de trésor, alors même qu'il y en a un en B ; contradictoire.

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 3	fais attention, il y a un trésor derrière une porte et un tigre derrière l'autre	l'autre cellule contient un trésor
	Trésor	**Tigre**

Si a porte A dit vrai : c'est qu'il y a un trésor en A
et donc un tigre en B puisque les portes cachent des choses différentes
et c'est cohérent.

Si la porte A ment : il y a un tigre en A
et comme elle ment, les deux portes cachent la même chose
cette même chose est un tigre
il y a donc un tigre en B
le panneau en B doit donc être sincère, et c'est contradictoire

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 4	les deux cachent la même chose	l'autre cellule contient un trésor
	Tigre	**Trésor**

Si la porte A dit vrai : il y a un trésor en A
et donc aussi en B
l'affiche de la porte B doit donc mentir. Contradiction/
Si la porte A ment : elle cache un tigre
et les deux portes doivent cacher des choses différentes
il y a un trésor en B
l'affichette en b doit donc mentir et c'est cohérent.
Et avec les deux panneaux qu'on ne sait pas où placer ?
« les deux portes cachent un tigre » et « cette porte ouvre sur un tigre ».

	porte A $Tigre \Leftrightarrow False$	porte B $Tigre \Leftrightarrow True$
situation 4	les deux portes cachent un tigre	cette porte ouvre sur un tigre
	Tigre	**Trésor**

C'est la seule solution cohérente.

2019 2020 Chez Zarmazone. IS29

On retrouve le patron. C'est celui qui n'est nulle part en première position d'un couple [a, b].

On dresse par un simple passage la liste de tous ceux qui ont un supérieur, et la liste de ceux qui sont des supérieurs.

```
def BigBoss(L) :
....EnBas, EnHaut = [ ], [ ]
....for Element in L :
........EnBas.append(Element[0])
........EnHaut.append(Element[1])
....for Superieur in En Haut :
........if not (Superieur) in EnBas :
............return(Superieur)
```

Mais on parcourt quand même plusieurs fois des listes, avec une complexité en O(N^2) où N est le nombre de personnes dans l'entreprise.

Ensuite, pour construire l'arbre, on peut agir de manière progressive.
Solutions Java et C# sur https ://www.techiedelight.com/find-employees-who-reports-to-manager/

2019 2020 L'intégrale dite de Gauss. IS29

L'application F est définie sur tout $\mathbb{R}^+$.
On peut la dériver : $F' = x \longmapsto 2.\Big(\int_0^x e^{-t^2}.dt\Big).e^{-x^2}$ (le e^{-x^2} étant la dérivée de $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}.dt$).

Avec ça, on a même la croissance.

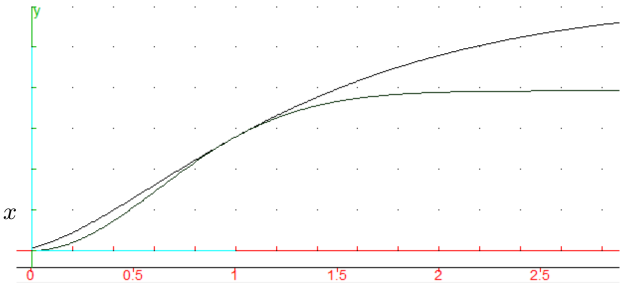
Cela dit, la croissance se gagne aussi en écrivant $(x \leqslant y) \Rightarrow \Big(\displaystyle\int_0^y e^{-t^2}.dt - \int_0^x e^{-t^2}.dt = \int_x^y e^{-t^2}.dt \geqslant 0\Big)$.

Pour majorer : on découpe $\int_0^x e^{-t^2}.dt$ en $\int_0^1 e^{-t^2}.dt + \int_1^x e^{-t^2}.dt$

pour t plus grand que 1, on a $t^2 \geqslant t$, et donc $e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$

puis en intégrant $\int_1^x e^{-t^2}.dt \leqslant \int_1^x e^{-t}.dt$.

Je me demande si cette majoration est pertinente pour x plus petit que 1.



Ensuite, on peut calculer $\int_0^1 e^{-t^2}.dt + \int_1^t e^{-t^2}.dt = \int_0^1 e^{-t^2}.dt + \Big[-e^{-t}\Big]_{t=1}^{x} = \int_0^1 e^{-t^2}.dt + e^{-1} - e^{-x}$.
Ici, si on a de mauvais réflexes, on veut faire tendre x vers l'infini dans la majorant pour majorer par quelque chose qui ne dépende pas de x.

. *Et si on en a de très mauvais, on ne voit même pas qu'il faut un majorant qui ne dépende pas de x.*

Et si on a les bons réflexes, on majore et c'est tout ![3] $\int_0^x e^{-t^2}.dt \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}.dt + e^{-1} - e^{-x} \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}.dt + e^{-1}$.

On élève au carré *(tout ce beau monde est positif)* : F est croissante, majorée par $\Big(\int_0^1 e^{-t^2}.dt + e^{-1}\Big)^2$.
Elle admet donc une limite en $+\infty$ (qu'on ne sait pas encore calculer, ça va venir).[4]

La formule avec $|G(x+h) - G(x) - h.H(x)|$ fait penser à une dérivée. Ça va venir.
Sous le signe somme.
Et ce sera en fait une formule de Taylor.

On se donne x et $x+h$ positifs.
On écrit $G(x+h) - G(x) - h.H(x) = \int_0^1 \Big(\dfrac{e^{-(x+h).(1+t^2)} - e^{x.(1+t^2)}}{1+t^2} - h.e^{-x.(1+t^2)}\Big).dt$
puis $G(x+h) - G(x) = \int_0^1 \Big(e^{-h.(1+t^2)} - 1 - h.(1+t^2)\Big).\dfrac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt$.

La formule de Taylor appliquée à l'exponentielle entre 0 et a à l'ordre 2 donne $e^a = 1 + a + \dfrac{a^2}{2}.e^{\theta.a}$ pour un θ de $]0,\ 1[$.

On fait passer de l'autre côté :
- $|e^a - 1 - a| = \dfrac{a^2}{2}.e^{\theta.a} \leqslant \dfrac{a^2}{2}$ si a est négatif.
- $|e^a - 1 - a| = \dfrac{a^2}{2}.e^{\theta.a} \leqslant \dfrac{a^2}{2}.e^a$ si a est positif.
- $|e^a - 1 - a| = \dfrac{a^2}{2}.e^{\theta.a} \leqslant \dfrac{a^2}{2}.e^{|a|}$ quel que soit a.

On l'applique à $a = -h.(1+t^2)$: $\Big|e^{-h.(1+t^2)} - 1 + h.(1+t^2)\Big| \leqslant \dfrac{h^2.(1+t^2)}{2}.e^{|h|.(1+t^2)}$.
On multiplie par une exponentielle positive, on intègre de 0 à 1 :

$$|G(x+h) - G(x) - h.H(x)| \leqslant \int_0^1 \Big|e^{-h.(1+t^2)} - 1 + h.(1+t^2)\Big|.\frac{e^{-x.(1+t^2)}}{1+t^2}.dt \leqslant \frac{h^2}{2}.\int_0^1 (1+t^2).e^{-x.(1+t^2)}.e^{|h|.(1+t^2)}.dt$$

On majore même l'exponentielle négative par 1, et l'autre par $e^{2.|h|}$.

Remarque : *quand on vous demande de montrer un résultat comme $\Big|G(x+h) - G(x) - h.H(x)\Big| \leqslant \dfrac{h^2}{2}.\int_0^1 (1+t^2).e^0.dt$ ne vous empressez pas de calculer le membre de droite avant de démontrer. C'est au contraire sous*

3. on a déjà fait cette remarque avec les séries
4. c'est fini la Terminale où le majorant de l'énoncé est en plus la limite...

cette forme que vous allez comprendre d'où vient le membre de droite. Il va se former sous cette allure, et c'est seulement ensuite que vous le calculerez pour en faire quelquechose...

On repart de notre formule dans laquelle on évalue le membre de droite :

$$|G(x+h)-G(x)-h.H(x)| \leqslant \frac{4.h^2.e^{2.|h|}}{3}$$

On divise par h ou même par $|h|$: $\left|\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}-H(x)\right| \leqslant \dfrac{4.|h|.e^{|h|}}{3}$.
Quand h tend vers 0, le membre de droite tend vers 0.
Par encadrement, $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}-H(x)$ tend vers 0.
Par définition, $\dfrac{G(x+h)-G(x)}{h}$ tend vers $H(x)$.
On reconnaît : G est dérivable en x de dérivée H.
Une fois encore, *on a dérivé sous le signe somme.*
Et quand on dérive $\dfrac{e^{-x.(1+t^2)}}{(1+t^2)}$ *par rapport à* x, *on obtient justement* $-e^{-x.(1+t^2)}$.

Pour montrer que $x \longmapsto F(x)+G(x^2)$ est constante, je propose de la dérivée, puisque on a dérivé F et G .

$$\Big(x \longmapsto F(x)+G(x^2)\Big)' = \Big(x \longmapsto F'(x)+2.x.G'(x^2)\Big) = \Big(x \longmapsto F'(x)+2.x.H(x^2)\Big)$$

On remplace par les valeurs trouvées : $2.e^{-x^2}.\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}.dt - 2.x.\int_0^1 e^{-x^2.(1+t^2)}.dt$
Pour l'instant, à part 2, que mettre en facteur ? Il n'y a que le signe moins qui soit encourageant.
Les deux intégrales n'ont même pas les mêmes bornes.
Mais si dans la seconde on pose $u = x.t$, alors on a $-x^2.(1+t^2) = -x^2-u^2$ et ça prend forme.

$$2.e^{-x^2}.\int_0^x e^{-t^2}.dt - 2.x.\int_0^1 e^{-x^2.(1+t^2)}.dt = 2.\int_0^x e^{-x^2}.e^{-t^2}.dt - 2.\int_0^x e^{-x^2-u^2}.du$$

le x devant la seconde intégrale est dévoré par $x.dt = du$
Les variables sont muettes, il reste 0.

L'application a une dérivée nulle, elle est constante sur l'intervalle $[0,\ +\infty[$.

En maths, on n'écrit pas $F(x)+G(x^2) = C^{te}$, ça n'a aucun sens.
On écrit $\forall x,\ F(x)+G(x^2) = F(0)+G(0^2)$ qui donne en plus la valeur de la constante
(évidemment, si la fonction est mieux connue en 1, on écrit $\forall x,\ F(x)+G(x^2) = F(1)+G(1^2)$).
Et si on veut le dire autrement, on écrit $(x \longmapsto F(x)+G(x^2)$ est constante.
Avec des mots.

Or, $F(0)$ est nulle (intégrale de 0 à 0). Et $G(0)$ vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}.dt$.
En début d'année de Sup, vous auriez dit « j'en fais quoi ? ». Maintenant, vous intégrez en Arctangente.

Bref, $\boxed{\forall x,\ F(x)+G(x^2) = \dfrac{\pi}{4}}$

Et que va-t-on faire à présent ? Faire tendre x vers l'infini. On va obtenir que $G(x^2)$ tend vers 0, et donc $F(x)$ va tendre vers $\dfrac{\pi}{4}$.
Mais comment faire tendre $G(x^2)$ vers 0 ? En l'encadrant.

La fonction sous le signe somme est positive. $0 \leqslant G(x)$.
De plus $e^{-x.(1+t^2)}$ est plus petit que e^{-x} car $1+t^2$ est plus grand que 1.
On divise, on intègre : $G(x) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{(1+t^2)}.dt$.
Et le majorant auquel on a été conduit se calcule.

On a donc $0 \leqslant G(x) \leqslant \dfrac{\pi.e^{-x}}{2}$.
Par encadrement $G(x)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.
On compose : $G(x^2)$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

On confirme : $\Big(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}.dt\Big)^2$ converge donc vers $\dfrac{\pi}{4}$ quand n tend vers l'infini.

On passe à la racine (signe non problématique) : $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}.dt \longrightarrow_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

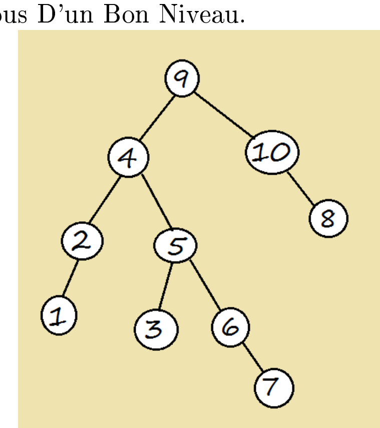
On résume : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Il y a d'autres façons de l'obtenir. Dont certaines plus « géométriques ».

Je vous offre alors aussi un changement de variable $t^2 = u$:
$\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} = \displaystyle\int_{t=0}^{+\infty} e^{-t^2}.dt = \int_{u=0}^{+\infty} e^{-u}.\frac{du}{2.\sqrt{u}}$ et ceci nous donne $\boxed{\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)! = \sqrt{\pi} \text{ et } \Big(-\dfrac{1}{2}\Big)! = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}$

Et pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{1}{u^2}}.du = \frac{\sqrt{\pi}}{2.e^2}$? Pas évident.
Je vous donne le début : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2-\frac{1}{u^2}}.du = \int_0^{+\infty} e^{-(u-\frac{1}{u})^2+2}.du = e^2.\int_0^{+\infty} e^{-(u-\frac{1}{u})^2}.du.$
Là, vous vous doutez qu'on va poser $t = u - \dfrac{1}{u}$. Il va aller de $-\infty$ à $+\infty$. Mais l'élément différentiel va vous embêter.
En effet, il faut exprimer u comme fonction de t. Il va y en avoir deux : une pour t positif et une pour t négatif. Et deux morceaux vont se simplifier mutuellement...
Je vous laisse calculer. C'est un joli exercice de colle de Spé qui relie $\displaystyle\int_0^{+\infty} f\Big(u-\frac{1}{u}\Big).du$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t).du$.

On reprend notre liste [[1, 2], [3, 5], [2, 4], [5, 4], [6, 5], [4, 9], [7, 6], [10, 9], [8, 10]] qu'on va transformer en « arbre ».
C'est de l'IPTDBN Informatique Pour Tous D'un Bon Niveau.



[1, 2]	[2, 4]	[5, 4]
[3, 5]	[6, 5]	[4, 9]
[7, 6]	[10, 9]	[8, 10]

On va lire la liste. Et à chaque nouvel élément créé, on va créer la liste de ses supérieurs, et actualiser les listes.
On le fait avec L telle qu'elle nous est donnée ici :

information lue	liste des supérieurs	
[1, 2]	1 : [2]	
[3, 5]	1 : [2] 3 : [5]	
[2, 4]	1 : [2] 3 : [5] 2 : [4] puis	1 : [2, 4] 3 : [5] 2 : [4]
[5, 4]	1 : [2, 4] 3 : [5] 2 : [4] 5 : [4] puis	1 : [2, 4] 3 : [5, 4] 2 : [4] 5 : [4]
[6, 5]	1 : [2, 4] 3 : [5, 4] 2 : [4] 5 : [4] 6 : [5] puis	1 : [2, 4] 3 : [5, 4] 2 : [4] 5 : [4] 6 : [5, 4]
[4, 9]	1 : [2, 4] 3 : [5, 4] 2 : [4] 5 : [4] 6 : [5, 4] 4 : [9] puis	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9]
[7, 6]	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9] 7 : [6] puis	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9] 7 : [6, 5, 4, 9]
[10, 9]	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9] 7 : [6, 5, 4, 9] 10 : [9]	
[8, 10]	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9] 7 : [6, 5, 4, 9] 10 : [9] 8 : [10]	1 : [2, 4, 9] 3 : [5, 4, 9] 2 : [4, 9] 5 : [4, 9] 6 : [5, 4, 9] 4 : [9] 7 : [6, 5, 4, 9] 10 : [6, 5, 4, 9] 8 : [10, 9]

On va donc travailler avec une liste qui à chaque fois va s'agrandir d'un élément
et réactualiser tous ses éléments par un entend.
Il faudra garder en mémoire une liste des employés déjà croisés et une liste de ceux qui se croient encore sans supérieur à ce stade de lecture de la liste.

Réfléchissez, programmez.