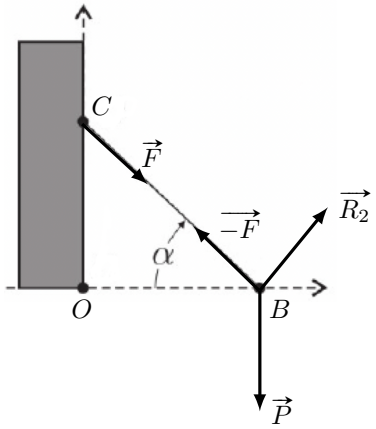
DM n°15 Corrigé

Problème 1 : Chute d'arbres

Partie A : Chute d'un arbre mort

1. Système : le bûcheron assimilé à un point matériel B
   Référentiel : terrestre local supposé galiléen
   Bilan des forces :
   — le poids $\vec{P}$
   — la réaction du support $\vec{R_2} = T_2\vec{u_x} + N_2\vec{u_z}$
   — la force exercée par le câble sur le bûcheron : $-\vec{F}$ (3ème loi de Newton)



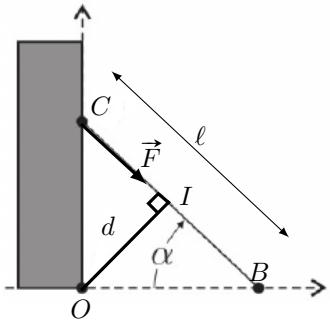
2. Application de la la 2ème loi de Newton au bûcheron dans le référentiel précédemment défini, à l'équilibre :
$$\vec{P} + \vec{R_2} - \vec{F} = \vec{0}$$
   La projection suivant $\vec{u_x}$ donne : $T_2 - F\cos(\alpha) = 0$, soit $\boxed{\mathrm{T_2} = F\cos(\alpha)}$

   La projection selon $\vec{u_z}$ donne : $N_2 - mg + F\sin(\alpha) = 0$, $\boxed{\mathrm{N_2} = mg - F\sin(\alpha)}$

3. Condition de non glissement $T_2 \leq fN_2$ donc $F\cos(\alpha) \leq fmg - fF\sin(\alpha)$ et donc
$$\boxed{F_{\max} = \frac{fmg}{cos(\alpha) + f\sin(\alpha)}}$$

4. G est placé au milieu de l'arbre car ce dernier est homogène, le bras de levier du poids vaut a. La norme du poids est $\| \vec{P} \| = Mg$. Enfin, le poids tend à faire tourner l'arbre dans le sens négatif. Le moment $\mathcal{M}_y(\vec{P})$ du poids de l'arbre par rapport à l'axe $(O, \vec{u_y})$ est donc
$$\boxed{\mathcal{M}_y(\vec{P}) = -aMg}$$

5. Le bras de levier de la force $\vec{F}$, noté d, est indiqué sur le schéma suivant :



   Dans le triangle OCB, $\cos(\alpha) = \dfrac{OB}{\ell}$ et dans le triangle OIB, $\sin(\alpha) = \dfrac{d}{OB}$. Ainsi, $d = \ell\sin(\alpha)\cos(\alpha)$. La force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner l'arbre dans le sens positif : $\mathcal{M}_y(\vec{F}) = \ell F\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et, avec $F = F_{\max}$:
$$\boxed{\mathcal{M}_y(\vec{F}) = \frac{\ell fmg\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + f\sin(\alpha)}}$$

6. Système : l'arbre de moment d'inertie J_y par rapport à l'axe $(O, \vec{u_y})$.
   Référentiel : terrestre local supposé galiléen
   Bilan des actions mécaniques :
   — le poids $\vec{P}$ appliqué en G
   — la réaction du sol $\vec{R_1}$ appliquée en O
   — la force exercée par le câble sur l'arbre $\vec{F}$

Application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{u_y})$:

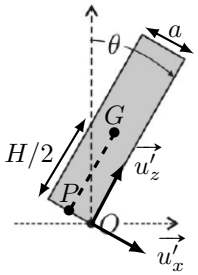
$$J_y\ddot{\theta} = \mathcal{M}_y(\vec{P}) + \mathcal{M}_y(\vec{F}) + \mathcal{M}_y(\vec{R_1})$$

où $\overrightarrow{R_1}$ est une force dont la droite d'action passe par O donc $\mathcal{M}_y(\overrightarrow{R_1}) = 0$.
Pour initier le mouvement, il faut que $\ddot{\theta} > 0$ en $\theta = 0$ soit $\mathcal{M}_y(\vec{P}) + \mathcal{M}_y(\vec{F}) > 0$

$$\frac{\ell f mg\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha) + f\sin(\alpha)} > Mga$$

$$\boxed{\ell > \frac{\cos(\alpha) + f\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}\frac{Ma}{mf} = \ell_{min}}$$

7. A.N. : $\underline{\ell_{min} = 14\,\text{m}}$.
   On peut calculer $OC_{\min} = \dfrac{\ell_{\min}}{\sqrt{2}} = 9{,}9\,\text{m}$, il faut donc monter à 10 m pour fixer le câble à l'arbre.
   On peut en déduire $OB_{\min} = 9{,}9\,\text{m}$ alors que la hauteur de l'arbre est $H = 20\,\text{m}$: le bûcheron a tout intérêt à courir vite pour ne pas se faire écraser !
8. Si le centre d'inertie G est à gauche de l'axe vertical $(O,\overrightarrow{u_z})$, le moment du poids aura tendance à le faire tourner dans le sens négatif autour de $((O,\overrightarrow{u_y}))$ et à le ramener dans sa position verticale.
   Si le centre d'inertie G est à droite de l'axe $((O,\overrightarrow{u_z}))$, le moment du poids aura tendance à le faire tourner dans le sens positif autour de $(O,\overrightarrow{u_y})$ et donc à le faire tomber au sol.
   Dans le cas limite, G est sur l'axe $(O,\overrightarrow{u_z})$, donc à la verticale du point O :
   Dans ce cas $\tan\theta_{0,lim} = \dfrac{a}{H/2}$ et $\boxed{\theta_{0,lim} = \arctan\left(\dfrac{2a}{H}\right)}$.
   A.N. : $\underline{\theta_{0,lim} = 2{,}9\,^\circ}$
9. On introduit le point P et la base $(\overrightarrow{u'_x},\overrightarrow{u'_y})$:



Soit le point P, projeté orthogonal du point G sur la base du tronc :
$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PG} = -a\overrightarrow{u'_x} + \dfrac{H}{2}\overrightarrow{u'_z}$ avec $\overrightarrow{u'_x} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_x} - \sin(\theta)\overrightarrow{u_z}$
et $\overrightarrow{u'_z} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_z} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_x}$.

Soit

$$\overrightarrow{OG} = \left(-a\cos(\theta) + \frac{H}{2}\sin(\theta)\right)\overrightarrow{u_x} + \left(a\sin(\theta) + \frac{H}{2}\cos(\theta)\right)\overrightarrow{u_z}$$

ainsi $z_G = \overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{u_z} = a\sin(\theta) + \dfrac{H}{2}\cos(\theta)$.
Soit E_p l'énergie potentielle de pesanteur : $E_p = Mgz_G$,

$$\boxed{E_p = Mg\left(a\sin(\theta) + \frac{H}{2}\cos(\theta)\right)}$$

10. Application du théorème de la puissance mécanique à l'arbre dans le référentiel précédemment défini : $\dfrac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_{nc}) = 0$ car seul le poids travaille. Or

$$E_m = E_p + E_c = Mg\left(a\sin(\theta) + \frac{H}{2}\cos(\theta)\right) + \frac{1}{2}J_y\dot{\theta}^2$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = Mg\dot{\theta}\left(a\cos(\theta) - \frac{H}{2}\sin(\theta)\right) + J_y\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$

or $\dot{\theta}$ ne peut pas être identiquement nul. L'équation du mouvement est donc :

$$\boxed{J_y\ddot{\theta} + Mg\left(a\cos(\theta) - \frac{H}{2}\sin(\theta)\right) = 0}$$

Partie B : Chute d'un arbre vivant sous l'effet du vent

1. (a) Calculons $\delta\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\delta\vec{F}_v)$ le moment de la force élémentaire par rapport au point O quand l'arbre reste vertical :

$$\delta\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\delta\vec{F}_v) = \overrightarrow{OM}\wedge\delta\overrightarrow{F_v} = z\overrightarrow{u_z}\wedge 2aC_x\rho_a U^2\mathrm{d}z\overrightarrow{u_x}$$

$$\delta\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\delta\vec{F}_v) = 2aC_x\rho_a z\mathrm{d}z\overrightarrow{u_y}$$

On en déduit le moment $\delta\mathcal{M}_y(\delta\vec{F}_v)$ par rapport à l'axe $(O,\overrightarrow{u_y})$:

$$\boxed{\delta\mathcal{M}_y(\delta\vec{F}_v) = \delta\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\cdot\overrightarrow{u_y} = 2aC_x\rho_a z\mathrm{d}z}$$

(b) Le moment total $\mathcal{M}_y$ s'écrit :

$$\mathcal{M}_y = \int_{z=0}^{z=H} \delta\mathcal{M}_y = 2aC_x\rho_a \int_{z=0}^{z=H} z\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathcal{M}_y = aC_x\rho_a U^2 H^2}$$

2. Sur la figure 3, on lit $\boxed{\theta_c = 10\,^\circ}$.
$\Gamma_r(\theta_c) = \Gamma_0(\beta + 4 - 5) = \Gamma_0(\beta - 1) = 0$.
On en déduit $\boxed{\beta = 1}$ et enfin $\boxed{\Gamma_0 = -9{,}0 \times 10^3\,\mathrm{N\,m}}$

3. L'angle θ_m pour lequel Γ_r atteint sa valeur minimale est tel que $\dfrac{\mathrm{d}\Gamma_r}{\mathrm{d}\theta}(\theta_m) = 0$

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_r}{\mathrm{d}\theta}(\theta_m) = \Gamma_0\left(\frac{4}{\theta_c} - \frac{10\theta_m}{\theta_c^2}\right) = 0$$

soit

$$\boxed{\theta_m = \frac{2}{5}\theta_c}$$

A.N. : $\underline{\theta_m = 4\,^\circ}$.

On en déduit $\Gamma_m = \Gamma_r(\theta_m) = \dfrac{9}{5}\Gamma_0$.

A.N. : $\underline{\Gamma_m = -16{,}2 \times 10^3\,\mathrm{N\,m}}$ ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux.

4. (a) Appliquons le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oy). L'arbre est soumis à l'action du vent et au couple dû aux racines :

$$J_y\ddot{\theta} = \mathcal{M}_y + \Gamma_r(\theta)$$

$$\boxed{J_y\ddot{\theta} = aC_x\rho_a U^2 H^2 + \Gamma_0\left(1 + 4\frac{\theta}{\theta_c} - 5\frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)}$$

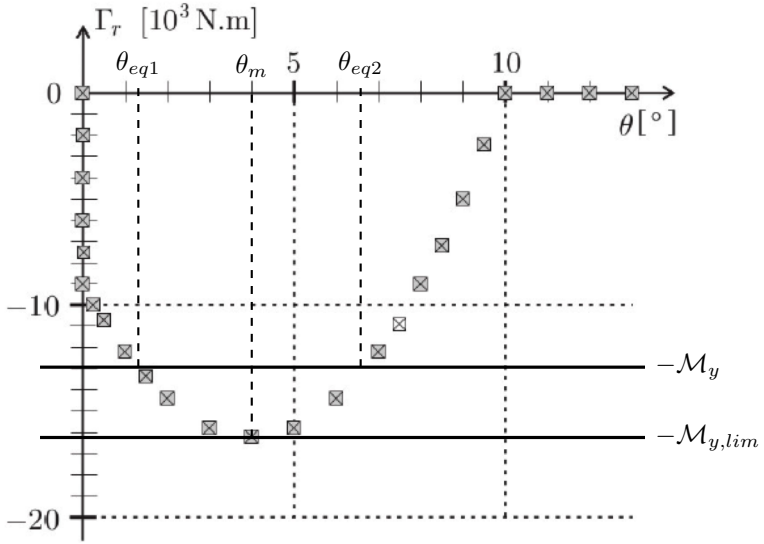
(b) À l'équilibre, $\dot{\theta} = 0$ et $\ddot{\theta} = 0$, ce qui se traduit par $aC_x\rho_a U^2 H^2 = -\Gamma_0\left(1 + 4\dfrac{\theta}{\theta_c} - 5\dfrac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)$ or $\Gamma_0\left(1 + 4\dfrac{\theta}{\theta_c} - 5\dfrac{\theta^2}{\theta_c^2}\right) \geq \Gamma_m$ donc

$$aC_x\rho_a U^2 H^2 \leq -\Gamma_m$$

$$U^2 \leq \frac{-\Gamma_m}{aC_x\rho_a H^2}$$

$$\boxed{U \leq \sqrt{\frac{\Gamma_m}{aC_x\rho_a H^2}} = U_{max}}$$

(c) Analysons la figure 3,



On remarque que, pour $U < U_{max}$, il existe deux positions d'équilibre θ_{eq1} et θ_{eq2}. Étudions le signe de $\ddot{\theta}$ pour des angles au voisinage de ces positions d'équilibre :
— Pour $\theta < \theta_{eq1}$, $\Gamma_r > -\mathcal{M}_y$ donc $J_y\ddot{\theta} = \Gamma_r + \mathcal{M}_y > 0$
— Pour $\theta > \theta_{eq1}$, $\Gamma_r < -\mathcal{M}_y$ donc $J_y\ddot{\theta} = \Gamma_r + \mathcal{M}_y < 0$
Ainsi, au voisinage de θ_{eq1}, les forces en présence tendent à ramener l'arbre vers θ_{eq1} : $\underline{\theta_{eq1}$ est une position d'équilibre stable.}
De façon analogue,
— Pour $\theta < \theta_{eq2}$, $J_y\ddot{\theta} = \Gamma_r + \mathcal{M}_y < 0$
— Pour $\theta > \theta_{eq2}$, $J_y\ddot{\theta} = \Gamma_r + \mathcal{M}_y > 0$
Ainsi, au voisinage de θ_{eq1}, les forces en présence tendent à éloigner l'arbre de θ_{eq2} : $\underline{\theta_{eq2}$ est une position d'équilibre instable.}

Enfin, pour $U = U_{max}$, il existe une seule position d'équilibre : θ_m. Pour θ au voisisnage de θ_m, $\ddot{\theta} > 0$, $\underline{\text{la position d'équilibre est } \theta_m \text{ est instable}}$.