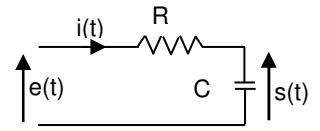


AIDE MEMOIRE : SYSTEMES LINEAIRES

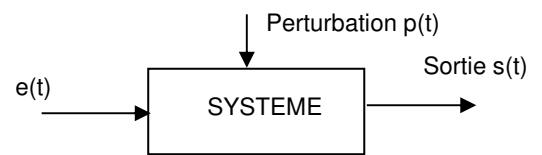
I. SCHEMATISATION

1) Schéma physique On utilise les symboles utilisés en sciences physiques.

Exemple : circuit RC

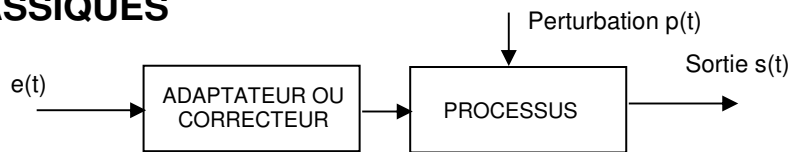


2) Schéma fonctionnel On utilise des « boîtes » dans lesquelles on inscrit le nom des (sous-) systèmes. Les flèches décrivent les grandeurs physiques d'entrée, de sortie et de perturbations

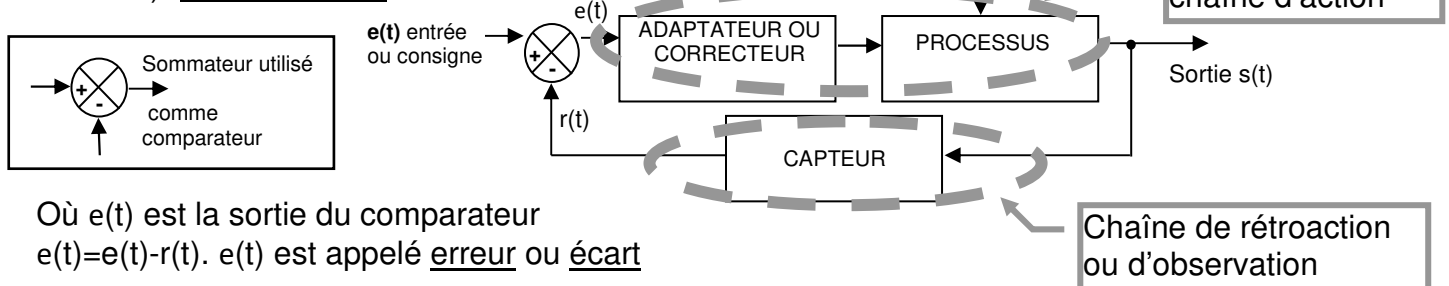


II. STRUCTURES CLASSIQUES

3) Boucle ouverte



4) Boucle fermée



Où $e(t)$ est la sortie du comparateur
 $e(t) = e(t) - r(t)$. $e(t)$ est appelé erreur ou écart

III. PERFORMANCES DES SYSTEMES LINEAIRES (rapidité, stabilité, précision : voir cours)

IV. TRANSFORMEE DE LAPLACE

On note $F(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ $L[f(t)] = F(p)$

5) Théorèmes

Théorème du retard : $\forall \tau \in \mathbb{R}, L[f(t-\tau)] = e^{-\tau p} F(p)$

Théorèmes de la dérivée : si f est à conditions initiales nulles : $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = pF(p)$ et :

$$L\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = p^2 F(p)$$

Théorème de la valeur initiale : Si la limite de f existe :

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow +\infty} p^2 F(p)$$

Théorème de la valeur finale : Si la limite de f existe :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{df(t)}{dt} = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 F(p)$$

6) Transformées usuelles

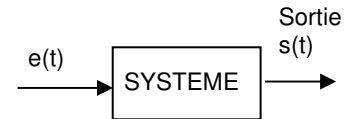
Fonction de Dirac	$L[\delta(t)] = 1$	Fonction rampe $f = a.t$	$L[f(t)] = \frac{a}{p^2}$
Fonction échelon unité ou fonction existence	$L[u(t)] = \frac{1}{p}$	Fonction exponentielle	$L[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$

V. FONCTION DE TRANSFERT

7) Définition

L'équation différentielle régissant le système linéaire étudié est :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \dots + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \text{ avec } a_i \text{ et } b_j \text{ réels}$$



Principe de causalité : on a toujours : $n \geq m$

Définition : n est appelé l'ordre du système

Si on suppose les fonctions $s(t)$ et $e(t)$ à

conditions initiales nulles $s(0) = \frac{ds(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{n-1} s(0)}{dt^{n-1}} = 0$ et $e(0) = \frac{de(0)}{dt} = \dots = \frac{d^{m-1} e(0)}{dt^{m-1}} = 0$ alors la

transformée de Laplace de l'équation différentielle devient :

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n) \cdot S(p) = (b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m) \cdot E(p)$$

Définition : on appelle Fonction de Transfert (F.T.) ou transmittance du système, la fraction :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_n p^n}$$

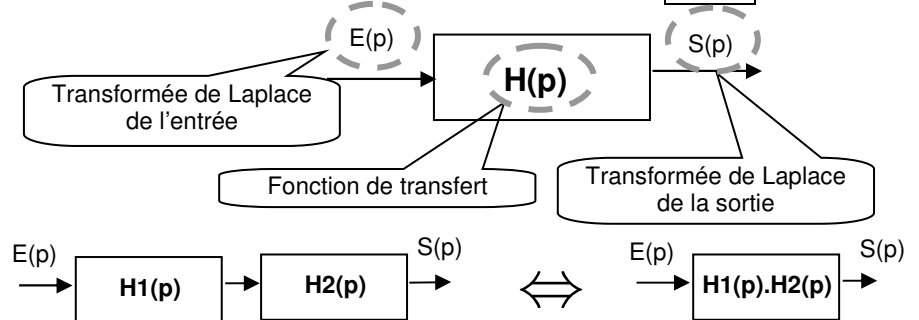
Remarques : 1- l'ordre du système est donc le degré du polynôme au dénominateur de $H(p)$
2- en première année on se limite aux systèmes d'ordre 2 (i.e. $n \leq 2$)

8) Schéma-bloc

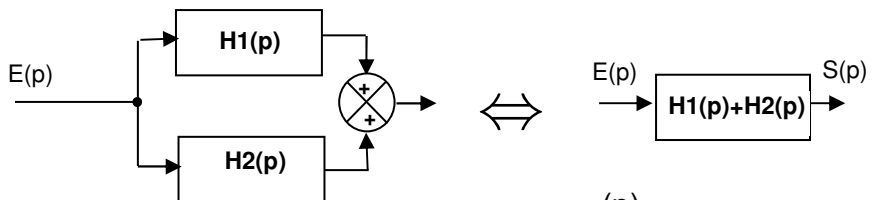
C'est une schématisation qui utilise le symbolisme suivant :

Les combinaisons permettent :

- l'assemblage en série :



- avec sommateur



9) Boucle fermée :

Définitions :

Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) C'est la fonction :

$$FTBF = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p) \cdot B(p)}$$

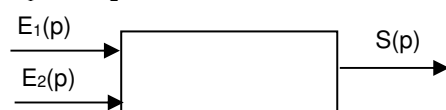
Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) Pour un système bouclé, c'est la fonction :

$$FTBO = \frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p) \cdot B(p)$$

Remarque : ainsi, la FTBF peut aussi s'écrire : $FTBF = \frac{A(p)}{1 + FTBO}$

Théorème de superposition : pour un système à 2 entrées E_1 et E_2 , on a

$$S(p) = \left(\frac{S(p)}{E_1(p)} \right)_{E_2(p)=0} \times E_1(p) + \left(\frac{S(p)}{E_2(p)} \right)_{E_1(p)=0} \times E_2(p)$$



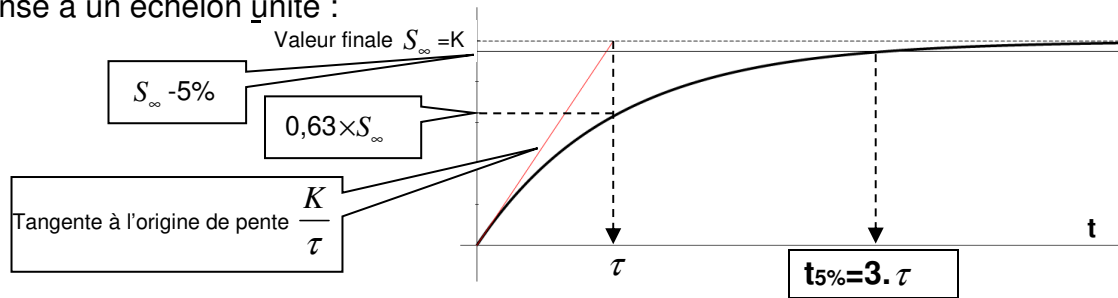
VI. REPONSES TEMPORELLES

10) Premier ordre :

forme canonique : $H(p) = \frac{K}{1 + \tau p}$

où **K** est le gain statique et **τ** la constante de temps

Réponse à un échelon unité :



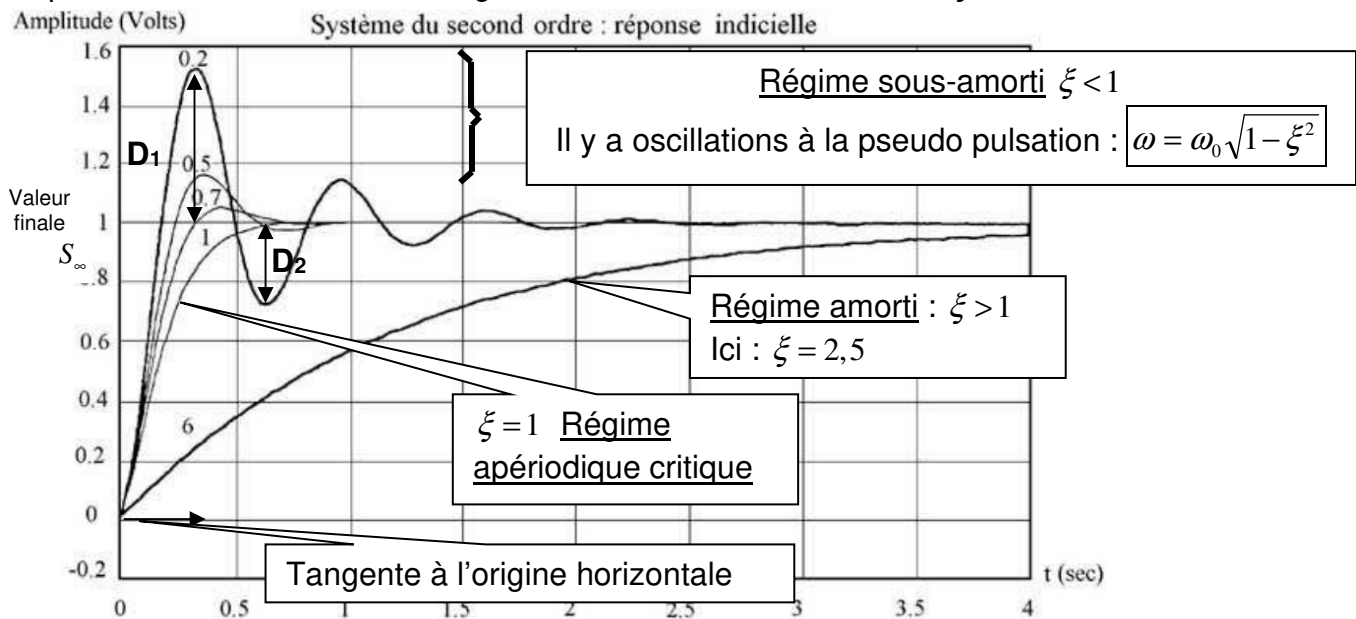
11) Deuxième ordre

forme canonique : $H(p) = \frac{K}{1 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$

où **K** est le gain statique, **ξ** le coefficient

d'amortissement et **ω_0** la pulsation propre non-amortie

Réponse à un échelon : on distingue trois cas suivant la valeur de ξ



Dépassements : Les « bosses » et les « creux » d'une réponse sous amortie sont appelés les dépassements : **D_i** : dépassement N°i

Ils se mesurent en % de la valeur finale : $D_i = \frac{S(t_i) - S_{\infty}}{S_{\infty}}$ où $S(t_i)$ est la valeur de la sortie au $i^{\text{ème}}$ dépassement et S_{∞} la valeur finale

On peut connaître leur valeur grâce à la formule : $D_i = e^{-\frac{i\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

Cas particulier remarquable : Lorsque $\xi = 0,7$ le premier dépassement : **D_1 vaut 5%** cette valeur de ξ assure donc le **temps de réponse à 5% minimal**. On a alors $t_{5\%} \cdot \omega_0 = 3$