# Vibrations d'un réglet

**Question à écrire au tableau :** peut-on modéliser les vibrations d'un réglet par celles d'un système masse-ressort équivalent ?

**Comment faire ?** (phase de réflexion en binôme puis mise en commun)

- amener les étudiants à constater que la seule mesure de la fréquence de vibration à vide ne peut pas suffire puisqu'il y a une seule mesure pour deux paramètres,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{éq}}}{m_{\text{éq}}}}\,.$$

- l'idée de faire une mesure de flèche (= déflexion à l'extrémité libre) en statique ne résout rien car elle s'écrit

$$\delta = \frac{m_{\text{éq}}g}{k_{\text{éq}}}$$

  donc on retrouve à nouveau le rapport $m_{\text{éq}}/k_{\text{éq}}$.
- l'ajout de masses à l'extrémité du réglet permet de contourner la difficulté, la fréquence de vibration et la flèche deviennent

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{\text{éq}}}{m_{\text{éq}}+m}} \qquad \text{et} \qquad \delta = \frac{(m_{\text{éq}}+m)g}{k_{\text{éq}}}$$

## I - Étude dynamique

**Mesures :**

- mesurer 20 (ou 30) périodes d'oscillations pour des masses allant de 5 g à 100 g ;
- représenter ${T_0}^2$ en fonction de $m$, on s'attend à une droite d'équation

$${T_0}^2 = 4\pi^2\frac{m+m_{\text{éq}}}{k}\,.$$

**Exploitation et interprétation :**

- observation : le modèle affine est valable jusqu'à 50 g seulement, pas au delà $\rightsquigarrow$ première limite du modèle ;
- procéder à une régression affine sur les points pertinents + estimation des incertitudes par Monte-Carlo ;
- il est intéressant de comparer la masse équivalente à la masse réelle du réglet, on a théoriquement (cf. cours RDM)

$$m_{\text{éq}} = \frac{33}{140}m_{\text{réelle}}$$

  Interprétation/idée de la démo (cf. poly RDM) : la masse équivalente est celle qui donne à l'ensemble du réglet la même énergie cinétique que s'il bougeait entièrement à la vitesse de son extrémité libre, mais comme les points proches de l'encastrement bougent à une vitesse plus faible, la masse équivalente est plus faible que la masse réelle.

  $\longrightarrow$ expérience en bon accord avec la théorie.
- on a aussi une expression théorique pour la raideur,

$$k_{\text{éq}} = \frac{3EI}{\ell^3}$$

  où $E \simeq 200$ GPa est le module d'Young de l'acier et $I = bh^3/12$ le momement quadratique du réglet, de largeur $b$, longueur $\ell$ et épaisseur $h$.

  $\longrightarrow$ accord quantitatif à tester.

## II - Étude statique

**Mesures :**

- mesurer la flèche pour différentes masses suspendues (poser la potence par terre et y maintenir une règle) ;
- représenter $\delta$ en fonction de $m$, on s'attend à une droite d'équation

$$\delta = \frac{(m_{\text{éq}} + m)g}{k_{\text{éq}}}$$

**Exploitation et interprétation :**

- procéder à une régression affine + estimation des incertitudes par Monte-Carlo ;
- comparer aux valeurs dynamiques par le $z$-score : la raideur $k_{\text{éq}}$ est en bon accord dans les deux expériences, mais la masse équivalente pas du tout ;
- Interprétation : dans le modèle masse-ressort, la même masse décrit à la fois l'effet d'inertie et celui de la gravité. C'est plus subtil dans le cas du réglet, et l'étude dynamique donne une masse qui n'est que la masse « inertielle » alors que l'étude statique donne une masse qui n'est que la masse « pesante ». La pesanteur se manifeste dans l'étude dynamique via la position d'équilibre, qui n'est pas étudiée, et l'inertie n'intervient pas du tout dans l'étude statique. Une telle différence n'intervient pas du tout pour la raideur.
- Formule théorique : flèche d'une poutre encastrée-libre avec chargement linéique $\mu g = m_{\text{réelle}} g/\ell$

$$\delta = \frac{\mu g \ell^4}{8EI} \qquad \text{d'où} \qquad m'_{\text{éq}} = \frac{3}{8} m_{\text{réelle}}$$

  → l'accord avec mes expériences n'est pas génial, je trouverais plutôt 5/8 de la masse réelle ? je n'ai pas d'explication.

**Conclusion :** le modèle masse-ressort permet de modéliser certains phénomènes, mais s'avère trop simple pour capturer toute la physique de l'élasticité du réglet. Pour une fois qu'un TP se finit avec une conclusion négative ☺