Dérivabilité

Révision du programme précédent.

Dérivée sur un intervalle : dérivabilité, théorèmes d'opérations, dérivées successives éventuelles, fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ pour $p \in \mathbb{N}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$, propriétés. Théorèmes d'opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, formule de Leibniz, exemples.

Extremum relatif d'une fonction définie sur un intervalle réel en un point différent des extrémités, théorème de Rolle, application aux zéros d'une dérivée connaissant ceux de la fonction.

Théorème des accroissements finis, inégalité, interprétation géométrique, condition suffisante pour qu'une application soit lipschitzienne, applications.

Exemple d'étude de suite récurrente avec le théorème des accroissements finis.

Application à la variation des fonctions : caractérisation des fonctions monotones, cas des applications strictement monotones.

Théorème de limite d'une dérivée. Exemples, retour sur le raccordement des solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Dérivabilité des fonctions complexes, brève extension des résultats concernant les fonctions réelles. Contre-exemples prouvant que le théorème de Rolle ne s'applique pas.

Question de cours à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Dérivation d'une réciproque. Définition d'une fonction de classe $\mathcal{C}^p$, énoncé des propriétés, exemple de $x \mapsto 1/x$.

Q2 : Extremum relatif sur un intervalle, théorème de Rolle, généralisation concernant les zéros des dérivées.

Q3 : Théorème des accroissements finis, énoncé des conséquences, application à la divergence de $\sum \frac{1}{n}$.

Q4 : Liens entre signe de la dérivée et monotonie. Cas d'une fonction dérivable à dérivée positive s'annulant sur un ensemble ne contenant pas d'intervalle ouvert non vide.

Q5 : Théorème de limite d'une dérivée, conséquence pour une fonction $\mathcal{C}^1$. Exemple. Cas d'une limite infinie.