Espaces vectoriels

Révision du programme précédent.

Applications linéaires : définition, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme, exemples, forme linéaire, dual d'un $K-$espace vectoriel, propriétés.

Image et noyau d'une application linéaire, propriétés, équations linéaires, allure de l'ensemble des solutions ; structure d'espace vectoriel de $(\mathcal{L}(E,F),+,.)$, structure d'anneau de $(\mathcal{L}(E),+,\times)$ et groupe $(\mathrm{GL}(E),\circ)$ de ses éléments inversibles.

Image de familles particulières : une application linéaire est entièrement déterminée par son action d'ailleurs arbitraire sur une base, image d'une base par une application linéaire injective, surjective, bijective, exemples.

Question de cours à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Somme de deux sous-espaces vectoriels, énoncé du lien avec la réunion, définition d'une somme directe, condition nécessaire et suffisante pour que la somme soit directe. Définition de la notion de sous-espaces supplémentaires, caractérisation. Exemple dans $\mathbb{R}^3$.

Q2 : Définition d'une application linéaire, d'un isomorphisme. Théorème sur les isomorphismes. Composition.

Q3 : Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau et image : définition, caractérisation du noyau. Lien avec la surjectivité et l'injectivité.

Q4 : Noyau et image : cas du produit par un scalaire, d'une restriction. Condition pour que la composée de deux applications linéaires soit nulle. Construction d'une application linéaire par l'image d'une base.

Q5 : Image de familles particulières. Exemple sur $\varphi^3 = \mathrm{Id}$. Remarque sur l'image d'une famille liée et sur $\mathrm{Im}\, f$.