



TD 28 - Champ magnétique

☆ application directe du cours ☆☆ entraînement ☆☆☆ perfectionnement ♥ incontournable

Questions de cours

1. Tracer et orienter les lignes de champs magnétique pour un aimant droit, une spire circulaire et une bobine longue. Identifier les zones de champs faibles, forts et uniformes.
2. Définir le moment magnétique associé à une boucle de courant.

Ex. 1

Exercices d'application sur le cahier d'entraînement



- Exercices 16.7 & 8: Superposition de champs magnétiques
- Exercices 16.9 à 14: Utilisation des symétries et invariances
- Exercice 16.17: Analyse dimensionnelle

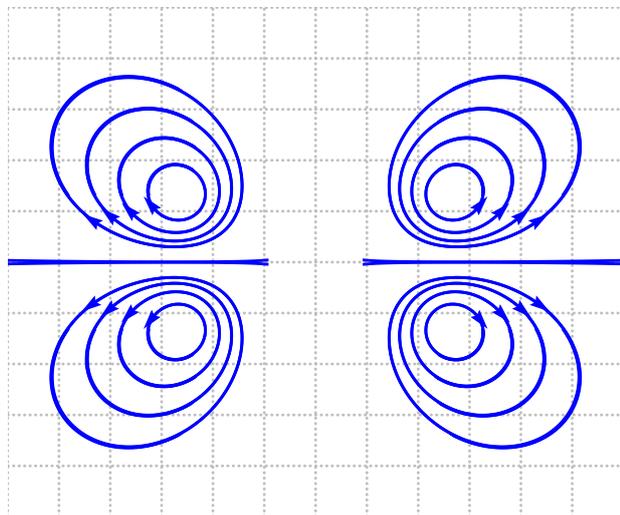
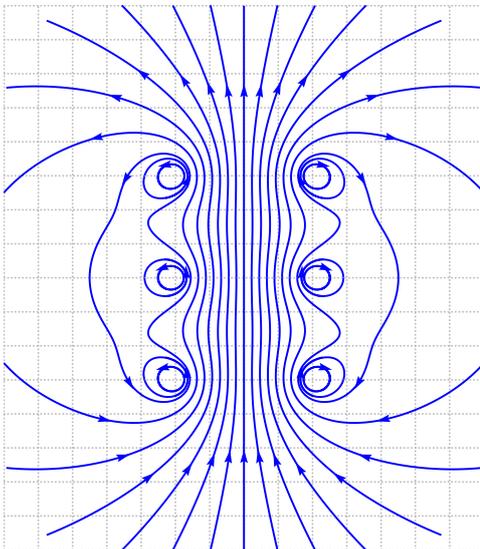
Ex. 2

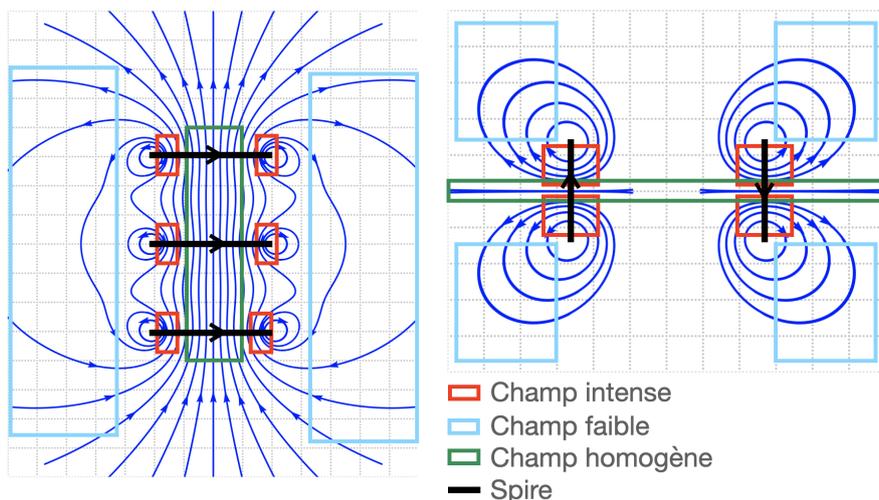
Lecture de cartes de champ



Pour les deux cartes de champ ci-contre :

- déterminer les lieux où le champ magnétique est le plus intense, le moins intense ;
- déterminer le lieux où le champ magnétique est relativement homogène ;
- déterminer les spires créant le champ magnétique en précisant le sens du courant qui les parcourt.





Ex. 3

Unités et dimensions des grandeurs magnétiques



- En s'appuyant sur des lois physiques connues, exprimer le tesla en fonction des unités de base du système international (mètre, kilogramme, seconde et ampère).
- À l'aide des constantes fondamentales e charge élémentaire, m_e masse de l'électron et h constante de Planck, former une grandeur homogène à un moment magnétique. Calculer sa valeur numérique et la comparer à la valeur expérimentale du moment magnétique d'un électron : $\mu_e = 9,28 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2$.
- On considère un aimant de centre O et de moment magnétique $\vec{M} = M\vec{u}$, avec \vec{u} un vecteur unitaire. On peut montrer que le champ magnétique créé par l'aimant en un point M de son axe (O, \vec{u}) tel que $OM = r$ est donné par $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi} M r^\alpha \vec{u}$. Déterminer la valeur de α . Comparer le comportement du champ magnétique créé par un aimant à celui du champ électrique créé par une charge ponctuelle.



- On peut partir de l'expression de la force magnétique : $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, pour voir que
$$1 \text{ T} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C} \times 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Sachant que $1 \text{ A} = 1 \text{ C} \cdot \text{s}^{-1}$ (avec $i = dq/dt$) et que $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ (avec $\vec{F} = m\vec{a}$), on en conclut que : $1 \text{ T} = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{A}^{-1}$.

- Dans la suite, on note M la dimension d'une masse, L celle d'une longueur, T celle d'un temps et I celle de l'intensité d'un courant électrique.

On peut écrire : $[m_e] = M$, $[e] = I \cdot T$, $[\mu] = I \cdot L^2$ et $[h] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$.

On cherche une formule de la forme ; $\mu = h^\alpha m_e^\beta e^\gamma$, soit $I \cdot L^2 = M^\alpha \cdot L^{2\alpha} \cdot T^{-\alpha} \cdot M^\beta \cdot I^\gamma \cdot T^\gamma$. Il faut donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha = 2 \\ \gamma = 1 \\ -\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

On a donc $\alpha = 1$, $\beta = -1$ et $\gamma = 1$. On en déduit
$$\mu = \frac{he}{m_e} = 1,17 \times 10^{-22} \text{ A} \cdot \text{m}^2.$$

En réalité, le moment magnétique de l'électron est donné par $\mu_e = \frac{g\mu_B}{2}$, où $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = \frac{e\hbar}{4\pi m_e}$ et $g = 2,002$ (mesuré expérimentalement).

3. On peut utiliser l'expression du champ magnétique dans un solénoïde infini comportant n spires par unité de longueur : $B = \mu_0 n I$, pour voir que les termes nI et $\mathcal{M}r^\alpha$ ont la même dimension.

Avec $[n] = L^{-1}$, $[I] = I$ et $[\mathcal{M}] = I \cdot L^2$, on en déduit $\boxed{\alpha = -3}$: le champ magnétique créé par un dipôle magnétique décroît en $1/r^3$, c'est à dire plus rapidement que le champ électrique créé par une charge ponctuelle qui décroît en $1/r^2$.

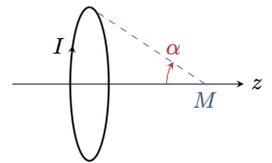
Ex. 4

Champ magnétique d'un spire



Le champ créé par une spire de courant, parcourue par un courant d'intensité $i > 0$, de rayon R , est donné, en un point M qui appartient à l'axe de la spire, par la formule

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha (\pm \vec{u}_z)$$



avec α étant l'angle sous lequel on voit la spire depuis M.

1. Le champ est dirigé suivant $+\vec{u}_z$ ou $-\vec{u}_z$?
2. Calculer la norme de \vec{B} en un point de l'axe distant de $L = 10$ cm du centre de la spire. On prendra $R = 2$ cm et $I = 0,5$ A.



1. D'après la règle du tire-bouchon, le champ magnétique est selon $-\vec{u}_z$.

2. On a $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2}}$ donc

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{R^3}{(R^2 + L^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + L^2)^{3/2}}$$

$$\text{AN: } B = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0,5}{2} \frac{(2 \cdot 10^{-2})^2}{((2 \cdot 10^{-2})^2 + (10^{-2})^2)^{3/2}} = 1,2 \cdot 10^{-7} \text{ T.}$$

Ex. 5

Moment magnétique d'un aimant



On considère un aimant droit, de longueur $L = 10$ cm et de section $S = 1$ cm². On mesure à la surface de son pôle nord un champ magnétique de 0,1 T.

1. Donner un ordre de grandeur du moment magnétique \mathcal{M} de cet aimant en faisant une analogie avec un solénoïde.
2. Quelle est l'intensité du courant qu'il faudrait faire passer dans un solénoïde de taille équivalente pour obtenir le même champ magnétique ? Commenter.



1. Une spire de courant a pour moment magnétique $\mathcal{M} = IS$ donc un solénoïde, ensemble de N spires, a pour moment magnétique $\mathcal{M} = NIS$. Or pour ce dernier, le champ vaut $B = \mu_0 n I$ avec $n = \frac{N}{L}$ avec L la longueur du solénoïde. Donc $I = \frac{LB}{\mu_0 N}$. Ainsi, le moment vaut $\mathcal{M} = N \frac{LB}{\mu_0 N} S = \frac{LBS}{\mu_0}$. En appliquant cette formule à l'aimant droit, on a

$$\mathcal{M} = \frac{10 \cdot 10^{-2} \times 0,1 \times 1 \cdot 10^{-4}}{4\pi \times 10^{-7}} = 0,8 \text{ A}\cdot\text{m}^2.$$

2. On a $I = \frac{\mathcal{M}}{S} = \frac{0,8}{1 \cdot 10^{-4}} = 8 \cdot 10^3 \text{ A}$. Cette valeur est très importante. En pratique, un tel courant induirait un effet Joule assez grand et chaufferait le fil, il serait aussi compliqué à mettre en place avec les moyens du laboratoire. Un aimant droit est alors assez pratique pour créer facilement un champ magnétique relativement important.

Ex. 6

Rapport gyromagnétique de l'atome



On considère le modèle classique de Bohr de l'atome d'hydrogène. L'électron, de masse m_e et de charge $q = -e$, a une trajectoire circulaire uniforme de rayon r et de vitesse \vec{v} autour du noyau situé au point O. On note (O, \vec{u}_z) l'axe de cette trajectoire circulaire.

- En fonction de m_e , r et ω , la vitesse angulaire de rotation de l'électron, exprimer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ de l'électron par rapport au point O. ($\vec{\sigma}$ s'appelle moment cinétique orbital).
- Exprimer l'intensité électrique I circulant dans la spire équivalente à la boucle de courant formée par l'électron en rotation. En déduire le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de cette spire.
- Montrer que $\vec{\mathcal{M}} = \alpha \vec{\sigma}$, où α , à exprimer, s'appelle le rapport gyromagnétique orbital de l'atome. Donner sa valeur numérique.



1. On a $\vec{\sigma} = m_e \omega r^2 \vec{u}_z$.

2. L'intensité I est définie par $I = \frac{dq}{dt}$, or pendant une révolution de période T , il passe un électron dans la spire équivalente. On a donc $I = \frac{q}{T}$, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on a donc : $I = \frac{\omega q}{2\pi}$.

Puis, $\vec{\mathcal{M}} = IS\vec{u}_z$ donne $\vec{\mathcal{M}} = \frac{1}{2}qr^2\omega\vec{u}_z$.

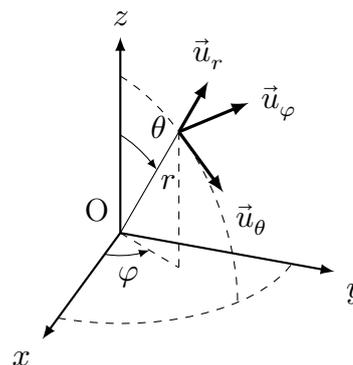
3. On a $\alpha = \frac{q}{2m_e} = -8,8 \times 10^{10} \text{ C} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Ex. 7

Champ magnétique terrestre



Le champ magnétique terrestre est décrit en première approximation par le champ magnétique d'un dipôle situé au centre de la terre O, de moment $\vec{M} = -M\vec{u}_z$, avec $M = 7,9 \times 10^{22} \text{ A} \cdot \text{m}^2$ et \vec{u}_z le vecteur unitaire de l'axe géomagnétique de la Terre (qui est légèrement incliné par rapport à l'axe de rotation terrestre). Un point de l'espace est repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) par rapport à l'axe géomagnétique.



En un point suffisamment éloigné de O, les composantes de \vec{B} sont :

$$B_r = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \frac{2 \cos \theta}{r^3}, \quad B_\theta = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \frac{\sin \theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\varphi = 0.$$

On donne le rayon moyen de la Terre $R_T = 6371 \text{ km}$.

- Déterminer la norme du champ magnétique à Puynormand en Gironde en précisant les hypothèses faites.
- Déterminer l'inclinaison du champ magnétique par rapport à la verticale à Puynormand.
- Dans quelle direction pointe une boussole au pôle nord magnétique terrestre ?

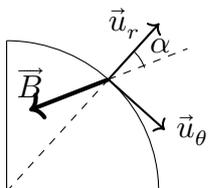


- La latitude de Puynormand vaut environ 45° N , on choisit de confondre le pôle Nord magnétique avec le pôle nord géographique, on a donc $\theta = 90 - 45 = 45^\circ$.

On a donc $B_r = -4,3 \times 10^{-5} \text{ T}$ et $B_\theta = -2,2 \times 10^{-5} \text{ T}$. On en déduit

$$\|\vec{B}\| = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = 48 \mu\text{T}.$$

- La verticale est donnée par la direction de \vec{u}_r . On voit sur le schéma ci-dessous que $\tan \alpha = \frac{B_\theta}{B_r}$, on en déduit $\alpha = 26,6^\circ$.



- Au pôle nord magnétique terrestre, une boussole parfaitement libre de tourner autour de son centre pointe vers le sol.

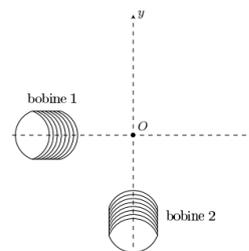
Ex. 8

Champ tournant



Les deux bobines représentées ci-contre ont même rayon, même hauteur et même nombre de spires. Elles sont parcourues par des courants $i_1 = I_m \cos(\omega t)$ et $i_2 = I_m \sin(\omega t)$. Le champ créé par chacun des bobines en O a pour expression

$$\vec{B} = K i \vec{n}$$



où \vec{n} est un vecteur unitaire colinéaire à l'axe de la bobine.

- Quel est le déphasage entre les deux courants ?
- Déterminer l'expression du champ magnétique créé en O.
- Montrer que celui-ci a une norme constante et qu'il tourne à la vitesse angulaire ω . Préciser le sens de rotation.

4. On envisage un dispositif similaire utilisant trois bobines. Comment doit-on disposer les bobines et quels doivent être les déphasages entre les courants ?



1. Les deux courants sont déphasés de $-\pi/2$ ($\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$).
2. En O , on a $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ d'après le principe de superposition avec $B_i = KI_i$ donc

$$\vec{B} = KI_m \cos \omega t \vec{u}_x + KI_m \sin \omega t \vec{u}_y = KI_m (\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$$

On retrouve le vecteur de la base polaire $\vec{u}_r = \cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y$.

3. Le vecteur n est un vecteur tournant à la vitesse angulaire ω , analogue au vecteur \vec{u}_r de la base polaire avec ici $\theta = \omega t$. Il tourne dans le sens trigonométrique (sens des θ croissants).
4. Il faudrait disposer spatialement les bobines avec des angles de $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ d'intervalle par rapport à la première. Cherchons le déphasage a et b à donner aux bobines pour avoir un champ tournant

$$\vec{B} = KI_m \left(\cos \omega t \vec{u}_x + \cos(\omega t + a) \left(\cos \frac{2\pi}{3} \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi}{3} \vec{u}_y \right) + \cos(\omega t + b) \left(\cos \frac{4\pi}{3} \vec{u}_x + \sin \frac{4\pi}{3} \vec{u}_y \right) \right)$$

$$\vec{B} = KI_m \left(\cos \omega t \vec{u}_x + \left[\cos(\omega t + a) \cos \frac{2\pi}{3} + \cos(\omega t + b) \cos \frac{4\pi}{3} \right] \vec{u}_x + \left[\cos(\omega t + a) \sin \frac{2\pi}{3} + \cos(\omega t + b) \sin \frac{4\pi}{3} \right] \vec{u}_y \right)$$

$$\vec{B} = KI_m \left(\cos \omega t \vec{u}_x + \cos \frac{2\pi}{3} [\cos(\omega t + a) + \cos(\omega t + b)] \vec{u}_x + \sin \frac{2\pi}{3} [\cos(\omega t + a) - \cos(\omega t + b)] \vec{u}_y \right)$$

$$\vec{B} = KI_m \left(\cos \omega t \vec{u}_x + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos \left(\omega t + \frac{a+b}{2} \right) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \vec{u}_x - 2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin \left(\omega t + \frac{a+b}{2} \right) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \vec{u}_y \right)$$

Pour que le champ soit tournant de la même manière que précédemment, on veut que la composante selon \vec{u}_x soit proportionnelle à $\cos \omega t$ et celle sur \vec{u}_y le soit à $\sin \omega t$. On peut y arriver pour $a = -b$. On obtient alors

$$\vec{B} = KI_m \left(\cos \omega t \vec{u}_x + 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cos(\omega t) \cos \left(\frac{a-b}{2} \right) \vec{u}_x - 2 \sin \frac{2\pi}{3} \sin(\omega t) \sin \left(\frac{a-b}{2} \right) \vec{u}_y \right)$$

On remarque que si $\frac{a-b}{2} = \frac{2\pi}{3}$, on a

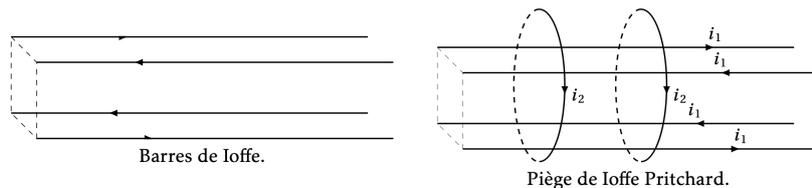
$$\vec{B} = KI_m (\cos \omega t \vec{u}_x + 2 \cos^2 \frac{2\pi}{3} \cos(\omega t) \vec{u}_x - 2 \sin^2 \frac{2\pi}{3} \sin(\omega t) \vec{u}_y)$$

$$\vec{B} = KI_m (\cos \omega t \vec{u}_x + \frac{1}{2} \cos(\omega t) \vec{u}_x - \frac{3}{4} \sin(\omega t) \vec{u}_y)$$

$$\vec{B} = KI_m \frac{3}{4} (\cos \omega t \vec{u}_x - \sin(\omega t) \vec{u}_y)$$

Avec un déphasage respectif de $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{2\pi}{3}$, on obtient ainsi un champ tournant dans le sens décroissant des θ .

- Rappeler l'allure des lignes de champ magnétique développées par un fil rectiligne très long (dans une région où l'on peut considérer ce fil comme infiniment long).
- On considère deux barres parallèles à l'axe Oz , parcourues par des courants de même intensité, mais circulant en sens opposés. Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives $x = a, y = 0$ et $x = -a, y = 0$. Représenter l'allure des lignes de champ magnétique. Que vaut le champ magnétique sur l'axe $x = 0, y = 0$.
- On considère à présent quatre barres rectilignes toutes parallèles à l'axe Oz . Les intersections des barres avec le plan $z = 0$ ont pour coordonnées respectives $(x = a, y = a)$, $(x = a, y = -a)$, $(x = -a, y = -a)$ et $(x = -a, y = a)$. Elles sont parcourues par des courants d'intensité égale et dont les sens sont alternés.

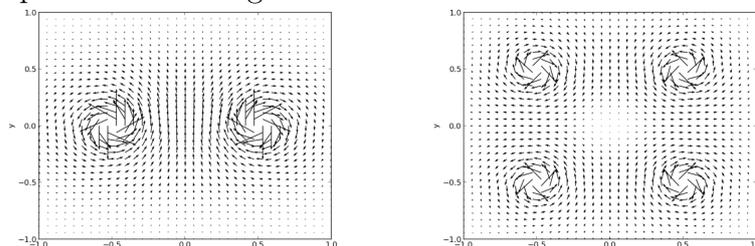


Déterminer l'allure des lignes de champ magnétique dans un plan perpendiculaire aux quatre barres. Indiquer ce que vaut le champ magnétique sur l'axe Oz .

- On ajoute deux bobines contenues dans des plans orthogonaux aux quatre barres. Ces deux bobines sont parcourues par des courants de même intensité, circulant dans le même sens.
 - Sur l'axe du dispositif, quelle est la direction du champ magnétique?
 - En comparant avec la situation précédente (absence des deux spires circulaires), le champ magnétique s'annule-t-il sur l'axe?
 - Dans le contexte du piégeage magnétique d'atomes ultrafroids, on cherche à produire un minimum local de la norme du champ magnétique, ce minimum étant non nul. La distribution de courant proposée vérifie-t-elle ces propriétés?



- Avec un unique fil rectiligne infini, les lignes de champ sont des cercles, contenus dans des plans orthogonaux au fil et centrés sur le fil.
- Avec deux barres, on somme les deux contributions. Les champs s'ajoutent en $(x = 0, y = 0)$, comme représenté sur la figure suivante.
- Avec les quatre barres proposées, on obtient un champ magnétique nul sur l'axe du dispositif, comme représenté sur la figure suivante.



- Le champ magnétique créé par les barres s'annule sur l'axe. La contribution restante est celle des spires, qui produisent un champ dirigé selon l'axe Oz .
 - Avec les deux bobines circulaires, le champ magnétique devient non nul et selon Oz , sur l'axe du dispositif.
 - Avec les quatre barres seules, on produit un champ magnétique dont la norme s'annule sur l'axe et croît au voisinage de l'axe lorsqu'on s'en éloigne. Grâce aux deux bobines, on a, d'une part, un minimum non nul sur l'axe (composante du champ magnétique selon Oz) et, d'autre part, on produit un minimum de la

norme du champ magnétique au centre du dispositif, dans le plan équidistant des deux bobines, pour qu'elles soient séparées d'une distance supérieure à celle de la configuration de Helmholtz. Dans le contexte du piégeage magnétique des atomes ultrafroids les quatre barres permettent un confinement radial et les deux bobines assurent le confinement axial.

Remarque : On utilise souvent un autre dispositif pour les bobines formé :

- d'une paire de bobines de Helmholtz formant un champ axial quasiment uniforme sur l'ensemble du dispositif,
- d'une paire de bobines identiques de même axe mais parcourues par des courants de même intensité mais de sens opposés. Elles forment un champ nul en leur centre mais dont la norme croît rapidement quand on se déplace le long de l'axe.

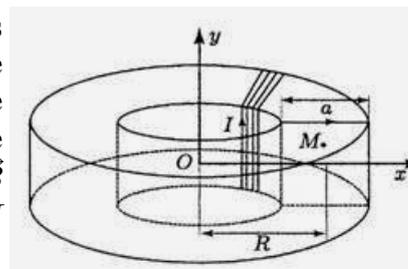
Le champ sur l'axe ainsi réalisé possède donc également une norme minimale non nulle au centre du dispositif et on peut régler séparément la valeur de ce minimum et la «rapidité» avec laquelle la norme croît quand on s'éloigne du centre en choisissant indépendamment les courants dans chaque paire de bobines.

Ex. 10

Bobine torique



Soit un tore de section circulaire de diamètre a , sur lequel sont réparties N spires. Le rayon moyen du tore est noté R et on admet que le nombre de spires est suffisamment élevée pour qu'on puisse considérer toute la surface du tore uniformément couverte par le conducteur (modèle de spires jointives). On souhaite déterminer le champ magnétique \vec{B} créé en tout point de l'espace, par un courant électrique d'intensité I parcourant cette bobine.



1. Montrer, en exploitant les symétries que les lignes de champ magnétique sont des cercles dont on précisera le centre.
2. Que peut-on dire de l'intensité du champ le long d'une ligne de champ ?
3. On rappelle que le produit de l'intensité moyenne du champ par la longueur d'une ligne de champ est égal au produit de la perméabilité du vide par l'intensité enlacée par la ligne de champ considérée. Que peut-on dire du champ à l'intérieur et à l'extérieur du tore ?
4. Lorsque le rayon R devient très supérieur à a , montrer que le champ magnétique à une intensité uniforme dans le tore. Relier sa valeur à l'intensité I et au nombre de spire par unité de longueur n .



1. On considère un point M en dehors du tore repéré par les coordonnées cylindriques (r, θ, y) . Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_y)$ est un plan de symétrie donc le champ \vec{B} y est orthogonal: \vec{B} est selon \vec{u}_θ . Si le champ n'est que selon \vec{u}_θ , les lignes de champ sont des cercles de rayon O .
2. On a une invariance par rotation de B ne dépend pas de θ donc B ne dépend que de r et z . Si on se met sur une ligne de champ circulaire où seul θ varie, l'intensité du champ est constante.
3. A l'extérieur du tore (pour $r < R - \frac{a}{2}$ ou $r > R + \frac{a}{2}$), on a $B \times 2\pi r = 0$ car il n'y a pas de courant enlacé autour de cette ligne de champ. Donc $B = 0$ à l'extérieur du tore.

A l'intérieur du tore ($R - \frac{a}{2} \leq r \leq R + \frac{a}{2}$), on a $B \times 2\pi r = \mu_0 NI$ car il a N spires

traversées par un courant I enlaçant cette ligne de champ. Donc $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ à l'intérieur du tore.

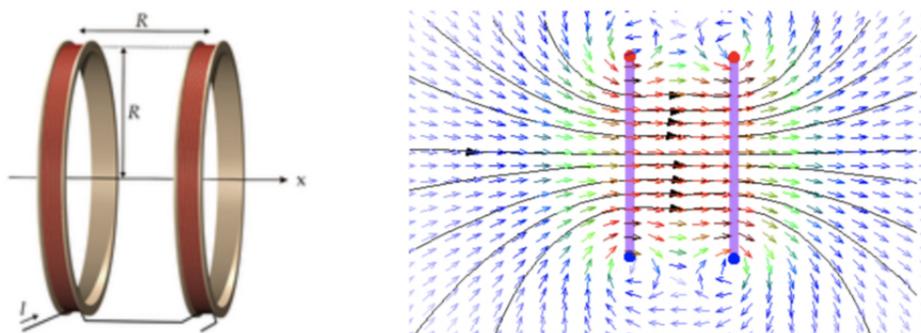
4. Si $R \gg a$, on a $r \sim R$ donc $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} = \mu_0 n I$ avec $n = \frac{N}{2\pi R}$ le nombre de spires par unité de longueur (ici la longueur est le périmètre du tore). Le champ a donc une intensité constante.

Ex. 11

Bobines de Helmholtz



Les bobines de Helmholtz sont un dispositif constitué de deux bobines circulaire de même rayon, parallèles, et placées l'une en face de l'autre à une distance égale à leur rayon. En faisant circuler un courant électrique identique dans ces bobines, un champ magnétique est créé dans leur voisinage, qui a la particularité d'être relativement uniforme au centre du dispositif dans un volume plus petit que les bobines elles-mêmes.



On peut modéliser les bobines de Helmholtz par deux associations de N spires confondues parcourues par un même courant i , de même rayon R et séparées d'une distance R : le champ créé sur l'axe (Ox) à une distance x du centre de la bobine est :

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 N i R^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$$

1. En sommant les champs créés par les deux bobines, calculer le champ en O . On fera attention au choix du système de coordonnées.
2. Montrer par un développement limité correctement justifié que le champ est quasi-uniforme au voisinage de O . On précisera l'ordre d'approximation auquel on peut dire que le champ est uniforme.
3. Faire l'application numérique pour $R = 10$ cm, $i = 1$ A et $N = 10$.



1. On place l'origine de l'axe (Ox) entre les deux bobines donc la distance à chaque bobine est $x = \pm \frac{R}{2}$. Ainsi, le champ en O est

$$\begin{aligned} \vec{B}(O) &= \vec{B}(R/2) + \vec{B}(-R/2) = \frac{\mu_0 N i R^2}{2 \left(R^2 + \left(\frac{R}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 N i R^2}{2 \left(R^2 + \left(-\frac{R}{2} \right)^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_x \\ &= \frac{\mu_0 N i R^2}{\left(\frac{5R^2}{4} \right)^{3/2}} \vec{u}_x = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 N i}{R} \vec{u}_x \end{aligned}$$

2. On s'intéresse au point M autour du point O tel que $OM = dx$ donc

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(M) &= \vec{B}(R/2 - dx) + \vec{B}(-R/2 - dx) \\
 &= \frac{\mu_0 Ni R^2}{2 \left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - dx \right)^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_x + \frac{\mu_0 Ni R^2}{2 \left(R^2 + \left(-\frac{R}{2} - dx \right)^2 \right)^{3/2}} \vec{u}_x \\
 &= \frac{\mu_0 Ni R^2}{2} \left[\frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} - dx \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(R^2 + \left(\frac{R}{2} + dx \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \vec{u}_x \\
 &= \frac{\mu_0 Ni}{2R} \left[\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{dx}{R} \right)^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{dx}{R} \right)^2 \right)^{3/2}} \right] \vec{u}_x \\
 &= \frac{\mu_0 Ni}{2R} \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} - \frac{dx}{R} + \frac{(dx)^2}{R^2} \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{dx}{R} + \frac{(dx)^2}{R^2} \right)^{3/2}} \right] \vec{u}_x \\
 \vec{B}(M) &= \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 Ni}{2R} \left[\left(1 - \frac{4 dx}{5 R} + \frac{4 (dx)^2}{5 R^2} \right)^{-3/2} + \left(1 + \frac{4 dx}{5 R} + \frac{4 (dx)^2}{5 R^2} \right)^{-3/2} \right] \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

Le DL à l'ordre 1 (car $\frac{dx}{R} \ll 1$ si suffisamment autour de O) donne

$$\begin{aligned}
 \vec{B}(M) &= \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 Ni}{2R} \left[\left(1 + \frac{6 dx}{5 R} - \frac{6 (dx)^2}{5 R^2} \right) + \left(1 - \frac{6 dx}{5 R} - \frac{6 (dx)^2}{5 R^2} \right) \right] \vec{u}_x \\
 &= \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{\mu_0 Ni}{R} \left(1 - \frac{6 (dx)^2}{5 R^2} \right) \vec{u}_x
 \end{aligned}$$

On retrouve l'expression précédente si $\frac{dx}{R} \ll 1$ (petits déplacements autour de O), on a bien un champ uniforme. On peut dire que cela est valable tant que $\frac{6 (dx)^2}{5 R^2} < \frac{1}{10}$ donc pour un déplacement de l'ordre de $dx < 0,2R$.

3. On a $B(O) = \left(\frac{4}{5} \right)^{3/2} \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 10 \times 1,0}{10 \cdot 10^{-2}} \simeq 9,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$

Ex. 12

e3a PSI 2020



Pour établir un couplage inductif non résonant entre une bobine émettrice et une bobine réceptrice, on peut utiliser des solénoïdes ou des bobines « plates » $2D$ (voir figure 1).



Figure 1: Bobines utilisées.

Considérons tout d'abord le cas d'un solénoïde de longueur ℓ et d'axe de révolution Oz , comportant N spires circulaires jointives de rayon a , et parcourues par un courant d'intensité variable $i(t)$. On fait l'hypothèse d'être dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi Stationnaires (ARQS).

On suppose dans la suite le solénoïde «infini» et on cherche à exprimer le champ magnétique $\vec{B}(M)$ en tout point M de l'espace, repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . On admet que le champ magnétique est identiquement nul à l'extérieur du solénoïde.

1. Sous quelle(s) condition(s) l'approximation d'un solénoïde «infini» vous semble-t-elle légitime?
2. En invoquant des arguments de symétrie et d'invariance de la distribution de courants, déterminer la direction du champ $\vec{B}(M)$, ainsi que la (ou les) coordonnée(s) dont dépend(ent) son module.

Intéressons-nous à présent au cas d'une bobine «plate», constituée (pour simplifier) de N spires circulaires identiques, d'axe de révolution Oz et de rayon a , placées dans le plan $z = 0$ et parcourues par un courant d'intensité $i(t)$. On se place à nouveau dans le cadre de l'ARQS et on considère un point M de l'axe Oz , de cote $z > 0$.

3. Préciser, en justifiant votre réponse, la direction du champ magnétique $\vec{B}(M)$ au point M .
4. Que dire du plan d'équation $z = 0$ d'un point de vue des courants? Qu'en déduire d'un point de vue du champ magnétique? En déduire une relation simple entre $B_z(-z)$ et $B_z(z)$.

On donne l'expression du champ magnétique créé par la bobine «plate» au point M :

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 N i(t) a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}}$$

5. Représenter l'allure de la fonction $B_z(z)$. Exprimer le champ magnétique maximal $B_{z,\max}$, et déterminer à quelle distance $z_{1/2}$ de la spire le champ magnétique vaut $B_{z,\max}/2$, en fonction de a .

On donne sur la figure 2 les cartes de champ du solénoïde et de la bobine «plate», simulées à l'aide du logiciel FEMM (Finite Element Method Magnetics).

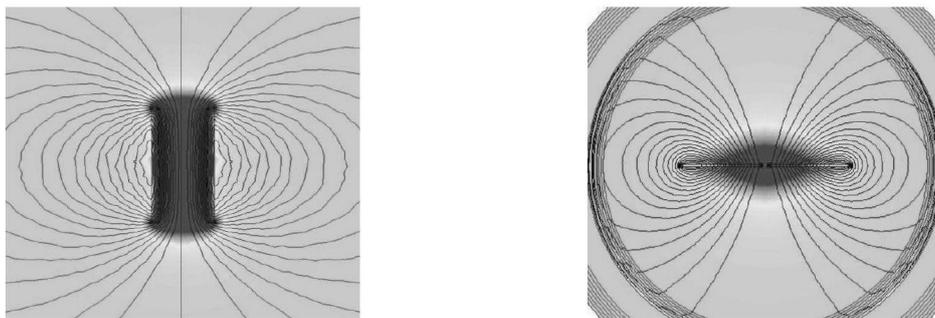


Figure 2: Cartes de champ du solénoïde (à gauche) et de la bobine «plate» (à droite).

6. Justifier les symétries et/ou antisymétries observées sur chacune de ces cartes de champ.
7. Sur la carte de champ du solénoïde, on remarque que les lignes de champ se resserrent au sein du solénoïde et qu'elles y sont approximativement parallèles. Que peut-on déduire de ces observations topologiques?



1. L'approximation du solénoïde infini est valable si $\ell \gg a$.
2. Symétries : $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ est un plan de symétrie des courants. $\vec{B}(M)$, devant être perpendiculaire à ce plan, est porté par \vec{u}_z . Invariances : la distribution de courants est invariante par translation selon z , et par rotation selon θ : B ne dépend donc que de r . Finalement, $\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_z$.

3. Tout plan passant par M et contenant \vec{u}_z est plan d'antisymétrie des courants, et donc plan de symétrie du champ magnétique. Ainsi, en tout point M de l'axe Oz, $\vec{B}(M)$ est porté par \vec{u}_z .
4. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie des courants, et donc un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Cette propriété se traduit par $B_z(-z) = B_z(z), \forall z$.
5. Le champ magnétique est maximal en $z = 0$ et vaut

$$B_{z,\max} = \frac{\mu_0 Ni(t)}{2a}$$

Par définition de $z_{1/2}$, $B_z(z_{1/2}) = B_{z,\max}/2$. Il vient

$$\begin{aligned} \frac{a^2}{2(z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{1}{4a} \\ 2a^3 &= (z_{1/2}^2 + a^2)^{3/2} \\ z_{1/2} &= a\sqrt{2^{2/3} - 1} \approx 0,77a \end{aligned}$$

6. Étudions la carte de champ du solénoïde. - Le plan Π , passant par l'axe vertical de la carte de champ et perpendiculaire à celle-ci, est un plan d'antisymétrie des courants. Ce plan est donc un plan de symétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L, M) symétriques par rapport à Π , on remarque en effet que

$$\vec{B}(M) = \text{sym}_{\Pi}[\vec{B}(L)]$$

- Le plan Π^* , passant par l'axe horizontal de la carte de champ et perpendiculaire à cette dernière, est un plan de symétrie des courants, soit également un plan d'antisymétrie du champ magnétique. Pour tout couple de points (L, N) symétriques par rapport à Π^* , on note effectivement que

$$\vec{B}(N) = -\text{sym}_{\Pi^*}[\vec{B}(L)]$$

On retrouve les mêmes éléments de symétrie sur la carte de champ de la bobine plate.

7. Les lignes de champ se resserrent aux endroits où le champ magnétique est plus intense. Elles sont parallèles aux endroits où le champ magnétique est uniforme.