



TD 29 - Actions d'un champ magnétique



application directe du cours



entraînement



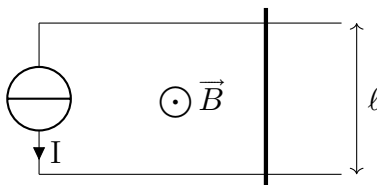
perfectionnement



incontournable



Questions de cours



1. Donner l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas de l'expérience du rail de Laplace (ci-dessus). Que vaut la puissance associée ?
2. Donner le couple subi par l'aiguille aimantée (par exemple d'une boussole) de moment magnétique $\vec{M}$ plongée dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme. Que vaut la puissance associée ?

Ex. 1

Exercices d'application sur le cahier d'entraînement



- Exercice 17.10: Rails de Laplace
- Exercice 17.11: Résultante des forces de Laplace
- Exercice 17.12: Couple des forces de Laplace
- Exercice 17.13: Couple des forces de Laplace et équilibre

Ex. 2

Railgun

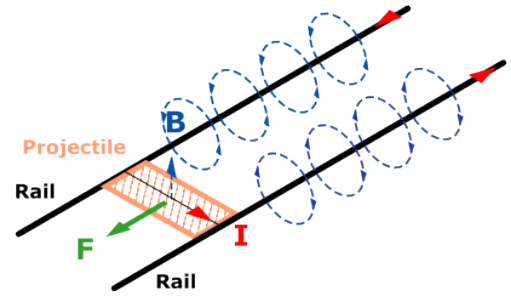


En février 2015, l'US Navy a présenté son canon électromagnétique, ou *railgun*. Cette arme futuriste peut projeter un obus de 10 kg à Mach 7, soit une énergie de 32 MJ, ce qui lui donne une portée de l'ordre de 200 km. L'accélération est de l'ordre de 40 000g, sur une distance de l'ordre de 10 m et en quelques millisecondes. Une video: <https://youtu.be/o4ZqfEJTGzw>.



1. Vérifier la cohérence des données numériques ci-dessus.
2. Déterminer la force subie par le projectile.
3. Estimer la puissance de l'arme, de deux manières différentes.

Le canon est basé sur le principe des rails de Laplace, sauf que le champ magnétique est généré par le courant lui-même: chaque rail crée un champ qui s'enroule autour, et de norme $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ où r est la distance par rapport à l'axe du rail (modélisation par un fil infini) et $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$ la perméabilité magnétique du vide.



4. Vérifier l'orientation des lignes de champ magnétique et de la force.
5. Estimer l'intensité du courant qui doit circuler dans les rails. Commenter.
6. Montrer que les rails ont tendance à se repousser violemment. Estimer la force latérale qu'ils subissent, par unité de longueur.
7. Quels autres problèmes techniques pouvez-vous prévoir ?



1. Mach 7 correspond à une vitesse de 7 fois la vitesse du son dans l'air soit 2400 m.s^{-1} . L'énergie mécanique est alors donnée par $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \sim \frac{1}{2} \times 10 \times 2400^2 \simeq 29.10^6 \text{ J} \simeq 29 \text{ MJ}$. On a le même ordre de grandeur que l'énoncé.

Pour le lancement d'un projectile en l'absence de frottements, on a vu que la trajectoire est donnée par $y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x$ avec α l'angle de la vitesse initiale. On cherche la portée donc la valeur de x pour laquelle on a $y = 0$ c'est-à-dire $x = \frac{2 \tan \alpha \cos^2 \alpha v_0^2}{g} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g}$. Pour une portée maximale, on prend un angle

de $\pi/4$ donc $x = \frac{v_0^2}{g} = \frac{2400^2}{9,81} \simeq 500.10^3 \text{ m}$. On a à peu près le même ordre de grandeur.

On peut justifier en disant que dans notre étude, nous n'avons pas pris en compte les frottements qui réduisent fortement la portée (surtout à cette vitesse).

Pour l'accélération initiale, on peut dire qu'elle est égale à $a_0 = \frac{v_0}{\Delta t}$ avec $\Delta t \sim 5.10^{-3} \text{ s}$, les quelques millisecondes dont l'énoncé parle. On a alors $a_0 \simeq \frac{2400}{5.10^{-3} \times 9,81} \simeq 5.10^4 g$, valeur cohérente avec l'énoncé.

2. D'après le PFD, on a

$$m a = F$$

donc $F = m a = 10 \times 40.10^3 \times 9,81 = 3,9.10^6 \text{ N}$.

3. La puissance vaut $\mathcal{P} = Fv = mav = 10 \times 40.10^3 \times 9,81 \times 2400 = 9,4.10^9 \text{ W}$. On peut aussi dire que $\mathcal{P} \sim \frac{\mathcal{E}_c}{\Delta t} = \frac{32.10^6}{5.10^{-3}} \simeq 6,4.10^9 \text{ W}$. On trouve le même ordre de grandeur.

4. On se place dans le système de coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Le fil a le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ comme plan d'antisymétrie et le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ comme plan de symétrie donc le champ magnétique est porté par $\vec{u}_\theta$: les lignes de champ sont des cercles centrés sur le fil et dans le plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.

La force de Laplace pour le fil vaut $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{\ell}$ selon $\vec{u}_x$ ou $\vec{u}_r$ avec un angle nul. Ainsi, la force est bien selon $\vec{u}_z$ comme indiqué sur la figure.

5. On a $F = \int_0^\ell I d\ell B$. Pour simplifier, on va prendre le même champ qu'au milieu du fil

pour $r = \ell/2$ donc $F \sim \frac{\mu_0 I^2 \ell}{2\pi \ell/2} = \frac{\mu_0 I^2}{\pi}$ donc

$$I = \sqrt{\frac{\pi F}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\pi \times 3,9 \cdot 10^6}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3,1 \cdot 10^6 \text{ A}$$

La valeur est très (trop) importante et ne peut qu'entraîner un effet Joule aussi grand à contrôler.

6. On a la force par unité de longueur $\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{d\ell} = -I\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_\theta = IB\vec{u}_r$. La force est selon

$\vec{u}_r$ avec une composante positive donc les fils se repoussent. On a $f = IB = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times (3,1 \cdot 10^6)^2}{2\pi \times 1} = 1,9 \cdot 10^6 \text{ N.m}^{-1}$: la force linéique est très importante.

7. Il faut pouvoir fournir ce courant, avoir donc un générateur sur place. Un champ magnétique si important attirerait aussi tous les objets métalliques environnants pouvant alors créer des dysfonctionnements en cas de casse.

Ex. 3

Rail de Laplace

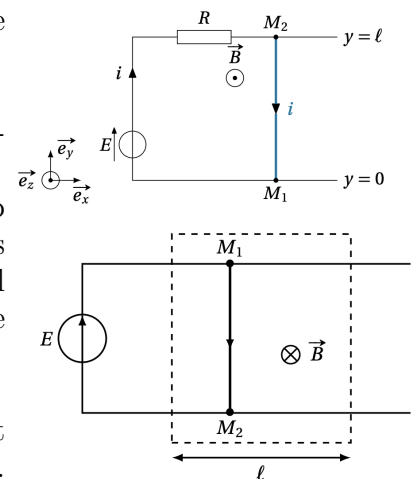


1. On considère une barre M_1M_2 qui glisse sans frottement sur des rails de Laplace. Le circuit est orienté dans le sens indiqué pour l'intensité i sur la figure ci-après. On suppose que la résistance totale du circuit fermé vaut R .

(a) Exprimer l'intensité i en fonction de E et R .

(b) Exprimer la force de Laplace qui s'exerce sur la barre en fonction de E , R , B , ℓ et d'un vecteur unitaire.

2. On considère la configuration ci-contre, dans laquelle le champ magnétique est nul sauf dans la zone délimitée par les traits interrompus, de largeur ℓ égale à la longueur de la barre, où il est uniforme de norme B_0 . On note de nouveau R la résistance totale du circuit.



La barre, de masse m , est lancée de la gauche vers la droite et arrive avec une vitesse v_0 dans la zone de champ magnétique. Déterminer le temps qu'elle met pour en sortir. On néglige tout frottement mécanique.



1. (a) On a immédiatement $i = E/R$.

(b) La force de Laplace est alors $\vec{F}_L = i\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{B}\vec{e}_z = -i\ell B\vec{e}_x$ car $\overrightarrow{M_2M_1} = -\ell\vec{e}_y$. On en déduit $\vec{F}_L = -\frac{E\ell B}{R}\vec{e}_x$.

2. On choisit le repère de la figure ci-contre pour que la force soit selon $+\vec{e}_x$ pour $E \geq 0$.

L'intensité, ainsi que l'ensemble du circuit est orientée dans le sens de la flèche représentée sur la même figure. La force de Laplace est ici immédiatement $\vec{F}_L = i \overrightarrow{M_1 M_2} \wedge B \vec{e}_z = i \ell B \vec{e}_x$ car ici $\overrightarrow{M_1 M_2} = \ell \vec{e}_y$.

On détermine l'intensité en écrivant la loi d'Ohm dans le circuit fermé $E = Ri$. On a donc finalement :

$$\vec{F}_L = \frac{E \ell B}{R} \vec{e}_x$$

La dynamique de la barre est régie par la deuxième loi de Newton. Compte tenu de l'hypothèse de glissement sans frottement, la seule force pertinente pour le mouvement selon x est la force de Laplace.

Avec le signe de la tension imposée, la tige est accélérée vers la droite. On a, tant que la barre est dans la zone de champ magnétique :

$$m \frac{dv_x}{dt} = \frac{E \ell B}{R}$$

On obtient, en intégrant deux fois :

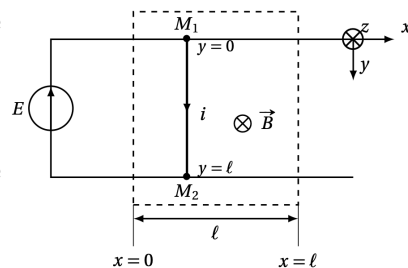
$$v_x(t) - v_0 = \frac{E \ell B}{m R} t \rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{E \ell B}{m R} t \rightarrow x(t) = v_0 t + \frac{E \ell B t^2}{2 m R}$$

La date de sortie de la zone de champ magnétique correspond à $x = \ell$. On résout l'équation du second degré en t suivante

$$v_0 t + \frac{E \ell B t^2}{2 m R} = \ell \Leftrightarrow t^2 + \frac{2 R m v_0}{E \ell B} t - \frac{2 m R}{E B} = 0$$

dont les racines sont : $t = -\frac{R m v_0}{E B \ell} \pm \sqrt{\left(\frac{R m v_0}{E \ell B}\right)^2 + \frac{2 m R}{E B}}$. On retient la racine positive :

$$t = -\frac{R m v_0}{E B \ell} + \sqrt{\left(\frac{R m v_0}{E \ell B}\right)^2 + \frac{2 m R}{E B}}$$



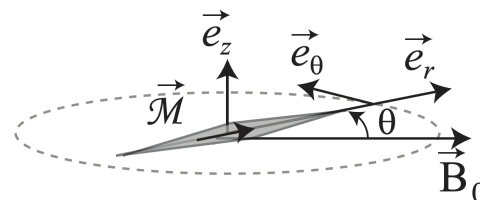
Ex. 4

Oscillations d'une boussole



L'aiguille d'une boussole de longueur $L = 4,0$ cm et de masse $m = 0,80$ g oscille avec une période $T = 0,85$ s une fois écartée légèrement de sa position d'équilibre. Le champ magnétique terrestre qui entoure l'aiguille aimantée vaut $B_0 = 48 \mu$ T.

1. Déterminer l'équation du mouvement vérifiée par θ , angle d'inclinaison de la boussole par rapport au champ magnétique.
2. En déduire le moment magnétique de la boussole.



Données : moment d'inertie par rapport à son centre d'une barre homogène de longueur L : $J_{Oz} = mL^2/12$.



1. On note θ l'angle entre $\vec{B}$ et l'aiguille de la boussole. Pour simplifier, on a supposé que la boussole a été orientée pour que le champ magnétique soit selon l'axe Sud-Nord puis que l'on a écarté l'aiguille de sa position d'équilibre (mais le raisonnement reste valable tant que l'on note θ l'angle entre $\vec{B}$ et l'aiguille de la boussole).

Le moment cinétique de l'aiguille de la boussole vaut $\vec{\mathcal{L}}_O = J_{Oz} \dot{\theta} \vec{e}_z$. Dans le référentiel galiléen d'étude, appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M} \times B_0 \sin \theta \vec{e}_z$$

Puis en projetant selon l'axe vertical :

$$J_{Oz} \ddot{\theta} = -\mathcal{M} \times B_0 \sin \theta$$

Dans l'approximation des petites angles, on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{12B_0\mathcal{M}}{mL^2} \theta = 0$$

2. On en déduit que la pulsation des oscillations est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12B_0\mathcal{M}}{mL^2}}$$

Le moment magnétique vaut donc en fonction de la période :

$$\mathcal{M} = \frac{4\pi^2 mL^2}{12B_0 T_0^2} = 0,12 \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Ex. 5

Petites oscillations d'un aimant



Un aimant homogène, de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ et de moment d'inertie J par rapport à son centre de gravité G est libre de tourner autour de G dans un plan horizontal. Il est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, dont la direction est contenue dans le plan horizontal.

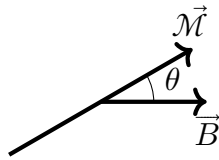
1. L'aimant est légèrement dévié de sa position d'équilibre, tout en restant dans le plan horizontal, puis lâché. Quelle est la période des petites oscillations qui s'ensuivent ?

Afin d'en déduire une mesure de l'intensité du champ magnétique $\vec{B}$, sans connaître le moment d'inertie ni le moment magnétique de l'aimant, on ajoute au champ $\vec{B}$ un champ magnétique $\vec{B}'$ connu créé par un solénoïde. On place d'abord la bobine de telle sorte que les champs $\vec{B}$ et $\vec{B}'$ soient parallèles et de même sens et on mesure la période T_1 des petites oscillations de l'aimant. On change ensuite le sens du courant dans le solénoïde et on mesure la nouvelle valeur T_2 de la période des petites oscillations.

2. Déterminer l'expression de l'intensité B du champ magnétique $\vec{B}$ en fonction de l'intensité B' du champ magnétique créé par la bobine est du rapport $\frac{T_1}{T_2}$, sachant que $B < B'$.



1. On note θ l'angle de déviation du moment magnétique par rapport à sa position d'équilibre.



Le moment magnétique est soumis au couple des actions de Laplace : $\vec{F}_L = \vec{M} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin \theta \vec{u}_z$.

Le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) s'écrit donc : $J\ddot{\theta} = -\mathcal{M}B \sin \theta$,
ou encore, en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{M}B}{J}}$: $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

On obtient la même équation différentielle que celle du pendule simple. Pour de petites oscillations, $\sin \theta \simeq \theta$, et cette équation différentielle se réduit à celle d'un oscillateur harmonique : $\ddot{\theta} = \omega_0^2 \sin \theta = 0$.

On en déduit la période des oscillations : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}B}}$.

2. On a $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B' + B)}}$ et $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{\mathcal{M}(B' - B)}}$ (car $B' > B$).

On en déduit $B = B' \frac{1 - \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2}$.

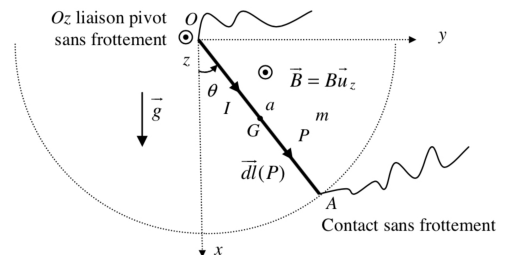
Ex. 6

Pendule magnétique



Une barre OA linéique, conductrice, homogène, de moment d'inertie J et de longueur a se comporte comme un pendule pesant dans le plan vertical Oxy , autour de l'axe Oz autour duquel la liaison pivot est parfaite.

Un fil souple amène un courant d'intensité I constante dans la barre. Le champ de pesanteur est uniforme, le dispositif est plongé dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{u}_z$.



Déterminer l'équation du mouvement.



La barre est soumise à trois forces: le poids, la réaction du support en O et la force de Laplace appliquée en son centre:

$$\vec{F}_L = I\vec{\ell} \wedge \vec{B} = IaB\vec{u}_r \wedge \vec{u}_z = -IaB\vec{u}_\theta$$

Le moment des forces vaut:

- pour le poids

$$\vec{M}(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = \frac{a}{2}mg \sin(-\theta)\vec{u}_z = -\frac{a}{2}mg \sin(\theta)\vec{u}_z$$

- pour la réaction du support

$$\vec{M}(\vec{R}) = \vec{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

- pour la force de Laplace

$$\vec{m}(\vec{F}_L) = \vec{OG} \wedge \vec{F}_L = -I \frac{a^2}{2} B \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = -I \frac{a^2}{2} B \vec{u}_z$$

On applique le TMC à un solide indéformable en rotation autour de l'axe $\vec{u}_z$ fixe

$$J\ddot{\omega} = -\frac{a}{2}mg \sin \theta - I \frac{a^2}{2} B \iff \ddot{\theta} + \frac{amg}{2J} \sin \theta = -\frac{Ia^2 B}{2J}$$

Ex. 7

Canon électro-magnétique Woltereck



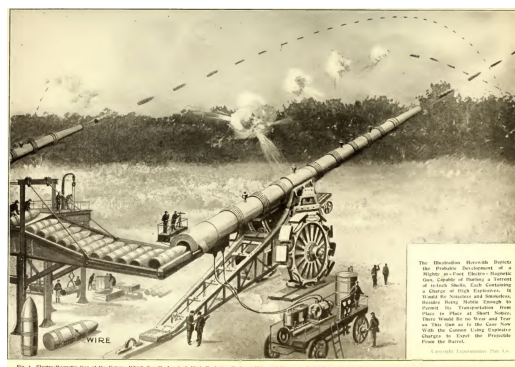
Lors de la première guerre mondiale, des ingénieurs imaginaient des canons à propulsion magnétique permettant de tirer des projectiles en rafale en s'affranchissant de l'échauffement du fût du canon par les projectiles classiques à poudre.

On supposera que le projectile est un aimant permanent de masse $m = 10,0 \text{ kg}$, de moment $\mathcal{M} = 1,00 \cdot 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ qui est accéléré par une bobine constituée de $N = 1000$ spires jointives de rayon $R = 20,0 \text{ cm}$.

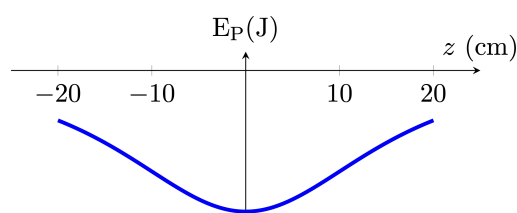
données :

- champ magnétique sur l'axe d'une spire centrée sur l'axe Oz : $B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{1}{(1 + z^2/R^2)^{3/2}}$
- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$

1. Représenter l'énergie potentielle du projectile. Justifier que cette propulsion nécessite d'annuler rapidement le courant à un moment donné.
2. Déterminer l'intensité parcourue dans la bobine pour que la vitesse d'éjection soit de 300 m/s .



1. L'énergie potentielle du moment magnétique est de la forme : $\mathcal{E}_p = -\mathcal{M}B(z)$.



En plaçant un projectile à grande distance, il sera attiré jusqu'au centre de la bobine ($z = 0$) où l'énergie potentielle est minimale. À cet instant son énergie cinétique et donc sa vitesse est maximale. Sans action de notre part, le projectile continue de parcourir la bobine canon jusqu'à annuler sa vitesse (avec un transfert d'énergie cinétique vers son énergie potentielle) et ne pourra donc pas être éjecté efficacement. Il faut couper le courant. L'énergie potentielle est alors nulle en tout point de la bobine et le projectile a alors une vitesse constante.

2. Appliquons la conservation de l'énergie mécanique entre un état où l'obus est fixe (entrée du canon, $v = 0$) et le champ magnétique négligeable ($\mathcal{E}_p = 0$) et le centre de la bobine où sa vitesse est maximale ($v = v_0$) et l'énergie potentielle minimale ($\mathcal{E}_p = -\mathcal{M} \cdot B_{\max}$) :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{M} \cdot B_{\max} = 0 \quad \text{soit} \quad B_{\max} = \frac{\mu_0 NI}{2R} = \frac{mv_0^2}{2\mathcal{M}}$$

On en déduit que le courant vaut :

$$I = \frac{Rmv_0^2}{\mathcal{M}\mu_0 N} = 143 \text{ A}$$

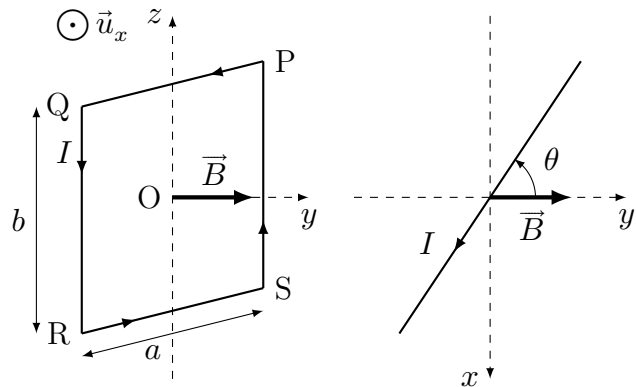
Le dispositif n'est pas absurde mais nécessite une électronique de puissance complexe car le courant est une grandeur continue dans une bobine.

Ex. 8

Action des forces de Laplace



On s'intéresse à une spire rectangulaire, de longueur b , et largeur a , parcourue par un courant électrique d'intensité I et libre de tourner autour de l'axe (Oz) (voir ci-contre). Cette spire est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_y$, orthogonal à l'axe (Oz) .



- Déterminer la résultante des forces de Laplace exercées sur la spire.
- Exprimer la force de Laplace subie par chaque côté de la spire, puis déterminer le moment en O, noté $\vec{F}$ des actions de Laplace sur la spire dans la base orthonormée directe $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.
- Montrer que $\vec{F}$ s'exprime simplement en fonction de $\vec{B}$ et du moment magnétique $\vec{M}$ de la spire.
- Faire le même raisonnement mais si la spire est circulaire de rayon a et de centre O en rotation autour de l'axe Oz .



- Les forces de Laplace subies par chacun des quatre côtés de la spire peuvent s'écrire : $\vec{F}_1 = \overrightarrow{IPQ} \wedge \vec{B}$, $\vec{F}_2 = \overrightarrow{IQR} \wedge \vec{B}$, $\vec{F}_3 = \overrightarrow{IRS} \wedge \vec{B}$ et $\vec{F}_4 = \overrightarrow{ISP} \wedge \vec{B}$.

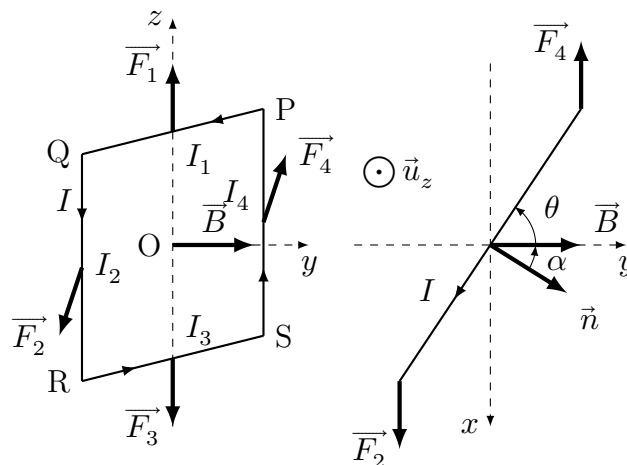
On remarque que $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = I(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS}) \wedge \vec{B} = \vec{0} \wedge \vec{B} = \vec{0}$.

De même : $\vec{F}_2 + \vec{F}_4 = \vec{0}$.

Les forces de Laplace exercées sur deux côtés opposés se compensent.

La résultante totale est donc nulle : $\boxed{\vec{F}_L = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}}$.

- Le point d'application de chaque force de Laplace se situe au milieu de chaque fil.



On introduit α l'angle entre $\vec{B}$ et le vecteur normal à la spire.

On a $\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \overrightarrow{OI_1} \wedge \vec{F}_1 = \vec{0}$, et $\vec{M}_O(\vec{F}_3) = \overrightarrow{OI_3} \wedge \vec{F}_3 = \vec{0}$.

En revanche, $\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \overrightarrow{OI_2} \wedge \vec{F}_2 = \frac{a}{2} \|\vec{F}_2\| \sin \alpha \vec{u}_z = \frac{1}{2} I b B \sin \alpha \vec{u}_z$.

De même, $\vec{M}_O(\vec{F}_4) \frac{a}{2} IbB \sin \alpha \vec{u}_z$.

On a donc $\vec{F}_L = abIB \sin \alpha \vec{u}_z$.

3. On remarque qu'on a bien $\vec{F}_L = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$, où $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S} = Iab\vec{n}$.

4. Ici la force par unité de longueur n'est pas uniforme, il est donc nécessaire d'intégrer les moments élémentaires. On utilise les coordonnées polaires d'angle α avec pour centre O le centre du cercle dans le plan vertical le contenant. En choisissant $\alpha = 0$ au niveau du plan $(0xy)$, on peut donc écrire, pour tout point M du cercle :

$$\vec{OM} = a\vec{u}_r(\alpha) = a(\sin(\alpha)\vec{u}_z + \cos(\alpha)[\cos(\theta)\vec{u}_y - \sin(\theta)\vec{u}_x])$$

On a de même :

$$\vec{u}_\theta(\alpha) = \frac{d\vec{u}_r}{d\alpha} = \cos(\alpha)\vec{u}_z - \sin(\alpha)[\cos(\theta)\vec{u}_y - \sin(\theta)\vec{u}_x]$$

La force de Laplace élémentaire sur la portion $ad\alpha\vec{u}_\theta(\alpha)$ est alors :

$$d\vec{F}_L = Iad\alpha\vec{u}_\theta(\alpha) \wedge B\vec{u}_y = Iad\alpha B(-\sin \alpha(\cos \theta \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_x) + \cos \alpha \vec{u}_z) \wedge \vec{u}_y$$

càd

$$d\vec{F}_L = Iad\alpha B(+\sin \alpha \sin \theta \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_x)$$

Son moment par rapport à l'axe Oz est (en ne conservant que les composantes orthogonales à $\vec{u}_z$) :

$$\begin{aligned} dm_z(\vec{F}_L) &= (\vec{OM} \wedge d\vec{F}_L) \cdot \vec{u}_z = (a\vec{u}_r(\alpha) \wedge d\vec{F}_L) \cdot \vec{u}_z \\ &= [a(\cos \alpha(\cos \theta \vec{u}_y) \sin \theta \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z) \wedge Iad\alpha(+\sin \alpha \cos \theta \vec{u}_z - \cos \alpha \vec{u}_x)] \cdot \vec{u}_z \\ &= Ia^2 d\alpha B(\cos^2 \alpha \cos \theta) \end{aligned}$$

En intégrant sur $\alpha \in [0; 2\pi]$, on obtient bien :

$$m_z(\vec{F}_L) = \int_{\alpha=0}^{2\pi} Ia^2 B(\cos^2 \alpha \cos \theta) d\alpha = \int_{\alpha=0}^{2\pi} Ia^2 B \cos \theta \times \frac{1}{2} (1 + \cos 2\alpha) d\alpha$$

donc

$$m_z(\vec{F}_L) = Ia^2 B \cos \theta \left[\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2} \right]_0^{2\pi} = I\pi a^2 B \cos \theta$$

On peut montrer comme pour la spire rectangulaire que cela correspond à

$$m_z(\vec{F}_L) = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{u}_z$$

avec $\vec{\mathcal{M}} = I\pi a^2(\cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y)$.

Ex. 9

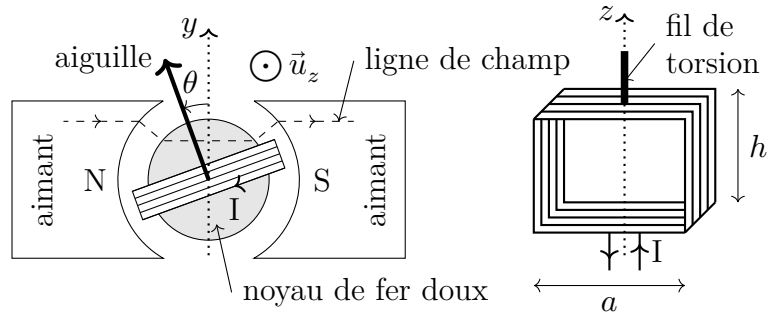
Principe de fonctionnement d'un ampèremètre analogique:
galvanomètre à cadre mobile



Un galvanomètre à cadre mobile est un appareil destiné à mesurer de faibles intensités électriques, de l'ordre du micro-ampère.

L'aiguille est solidaire d'un cadre rectangulaire vertical constitué de N spires de cuivre.

Ce cadre est suspendu à un fil de torsion et placé entre les pôles d'un aimant.



Galvanomètre vu de dessus

Cadre mobile vu de face

Le fil de torsion exerce un couple de rappel $\Gamma_r = -C\theta$ par rapport à l'axe (Oz) , avec C la constante de torsion du fil et θ l'angle de déviation de l'aiguille par rapport à l'axe (Oy) .

Un noyau de fer doux, fixe, assure que les lignes de champ magnétique sont radiales au niveau du cadre : on note B_0 l'intensité du champ magnétique au niveau des côtés verticaux du cadre.

On négligera dans cet exercice tous les phénomènes d'induction qui seront étudiés dans les chapitres suivants.

1. Lorsque le cadre est parcouru par un courant I , montrer que les forces de Laplace exercent un couple Γ_L par rapport à l'axe (Oz) sur le cadre. Calculer ce couple en fonction de la largeur a et de la hauteur h du cadre, de I , N et B_0 .
2. En déduire la position angulaire θ_{eq} du cadre à l'équilibre dans l'hypothèse où elle est petite devant 1 si bien que le moment des forces de Laplace est quasiment constant, en fonction de I , N , B_0 , C , h et a .

On souhaite étudier les oscillations du cadre autour de sa position d'équilibre. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe de rotation. On suppose en outre qu'un dispositif amortissant exerce un couple $\Gamma_f = -\lambda\dot{\theta}$.

3. Déterminer l'équation différentielle pour la position angulaire θ . En déduire la relation entre λ , J et C pour que le cadre retourne le plus rapidement possible vers son équilibre.
4. Proposer un montage électrique permettant de réaliser un voltmètre analogique à l'aide d'un galvanomètre à cadre mobile.



1. Les moments de la force de Laplace sur les parties supérieure et inférieure du cadre sont nuls. On calcule ceux sur les parties latérales. La force de Laplace est donnée par $\vec{F} = I\vec{\ell} \wedge \vec{B}$. A gauche, sur une spire, on a $\vec{F}_g = -Ih\vec{u}_z \wedge B_0\vec{u}_x = -IhB_0\vec{u}_y$ donc le moment vaut $\vec{M}_g = \frac{a}{2}\vec{u}_\theta \wedge \vec{F}_g = -Ih\frac{a}{2}B_0 \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)\vec{u}_z = \frac{IB_0 ah}{2} \cos\theta \vec{u}_z$. On peut montrer qu'on obtient la même chose pour le côté de droite, on a alors pour les N spires

$$\vec{\Gamma}_L = N(\vec{M}_g + \vec{M}_d) = NIahB_0 \cos\theta \vec{u}_z$$

formule qu'on aurait pu retrouver en calculant directement le couple à partir du moment magnétique.

2. D'après le TMC à l'équilibre, projeté sur $\vec{u}_z$,

$$\Gamma_L - \Gamma_r = 0 \iff NIahB_0 \cos\theta_{eq} - C\theta_{eq} = 0$$

Soit on résout directement cette équation, soit on suppose θ_{eq} petit, on a alors

$$NIahB_0 - C\theta_{eq} = 0$$

On a alors $\theta_{eq} = \frac{NIahB_0}{C}$.

3. Le TMC donne

$$\Gamma_L + \Gamma_r + \Gamma_f = J\ddot{\theta}$$

donc

$$J\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + C\theta - NIahB_0 \cos \theta = 0$$

On va se mettre dans le cas où $\theta \sim 0$ donc $\cos \theta \sim 1$ pour simplifier:

$$J\ddot{\theta} + \lambda\dot{\theta} + C\theta = NIahB_0$$

On a une équation du second ordre, on peut calculer le discriminant du polynôme caractéristique:

$$\Delta = \lambda^2 - 4JC$$

On veut que le système retourne le plus vite à sa position d'équilibre, c'est-à-dire soit dans le régime critique donc $\Delta = 0$. Ainsi $\lambda^2 = 4JC$.

4. On branche en parallèle du dipôle aux bornes duquel on veut mesurer la tension un conducteur ohmique de résistance connue et le galvanomètre. Le dipôle agit comme un générateur de tension, l'intensité du circuit pourra être déterminée et mesurée avec le galvanomètre et on pourra remonter à la tension vue que la résistance est connue.

Ex. 10

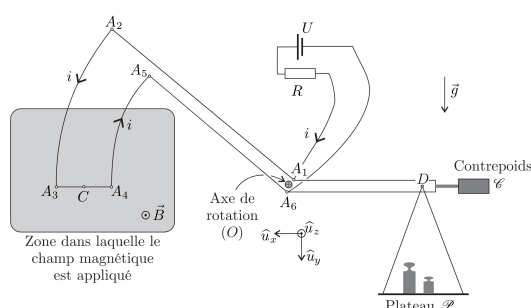
Balance de Cotton (Mines-Pont PSI 2016)



La photo d'un modèle de balance de Cotton est placée ci-contre. Ce type de balance, destinée à la mesure de champ magnétique, a été mis au point par Aimé Cotton en 1900. Elle est constituée de deux fléaux. L'un, à gauche, comprend sur sa périphérie, un conducteur métallique qui sera parcouru par un courant et dont une partie sera placée dans le champ magnétique, uniforme et permanent, à mesurer. Le conducteur sera soumis à des forces de Laplace et la balance penchera du côté de ce fléau. L'autre comporte un plateau sur lequel on peut déposer des masses marquées pour équilibrer la balance et déduire ainsi la norme du champ magnétique. Le schéma de principe de la balance est représenté sur la figure ci-contre.



Sur le fléau dessiné à gauche, les conducteurs permettent le passage d'un courant d'intensité i , selon le parcours $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4 \rightarrow A_5 \rightarrow A_6$. Les portions de circuit A_2A_3 et A_4A_5 sont des arcs de cercle de même centre O . L'ensemble des deux fléaux constitue un système rigide, mobile sans frottement, autour d'un axe horizontal passant par le point O et noté Oz . On désigne par C le milieu du segment A_3A_4 et D le point de suspension du plateau. On note d_1 la distance OC entre les points O et C , d_2 la distance OD entre les points O et D et l la longueur du segment A_3A_4 .



La procédure de mesure est la suivante :

- **Équilibrage « à vide »** : en l'absence de courant i et de masses marquées dans le plateau, le contrepoids C est déplacé de façon à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C , O et D étant alignés sur l'horizontale.
- **Mesure du champ** : on ferme le circuit électrique, ce qui permet au courant d'intensité i de

circuler « dans la balance », le fléau de gauche penche vers le bas ; on ajoute alors des masses dans le plateau jusqu'à ce que la balance soit à l'équilibre, les trois points C, O et D étant alignés sur l'horizontale.

1. Montrer que, lorsque l'équilibrage à vide est réalisé, le centre de masse, G , des parties mobiles de la balance est en O (ou au moins sur la verticale passant par O).
2. Lorsque le courant circule « dans la balance », montrer que le moment résultant en O des forces de Laplace s'exerçant sur les parties en arc de cercle est nul.
3. À l'équilibre, en présence de courant et de champ magnétique, établir l'expression du moment en O des forces de Laplace. En déduire la relation liant B (norme du champ magnétique), la somme m des masses marquées posées sur le plateau, i, l, d_1, d_2 et le module g du champ de pesanteur.
4. La sensibilité de la balance étant de $\delta m = 0,05$ g, déterminer la plus petite valeur de B mesurable pour $i = 10$ A, $g = 10$ m s⁻², $l = 5$ cm et $d_1 = d_2 = 10$ cm. En comparant cette valeur avec une ou des références connues, conclure quant à l'utilisabilité de la balance.



1. À l'équilibre réalisé, le système formé des parties mobiles n'étant soumis qu'à son poids, qui s'applique en G et la réaction de l'axe en O , le théorème du moment cinétique appliqué dans le référentiel du laboratoire galiléen s'écrit :

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{P} = \vec{0}$$

on en déduit que $\overrightarrow{OG}$ est colinéaire à $\vec{u}_y$, donc G est sur la verticale passant par O (pas nécessairement en O).

2. La force de Laplace qui s'exerce sur un élément $d\vec{l} = R d\theta \vec{u}_\theta$ est $d\vec{F}_l = i d\vec{l} \wedge \vec{B}$ est dirigée selon $\vec{u}_r$, son moment par rapport à O est nul.
3. Le moment élémentaire de la force de Laplace vaut $d\vec{M}_l = \overrightarrow{OM} \wedge (i d\vec{l} \wedge \vec{B})$ donc en intégrant

$$\vec{M}_l = \int_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2} x \vec{u}_x \wedge (i dx \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z B) \quad \vec{M}_l = -\vec{u}_z i B \left[\frac{x^2}{2} \right]_{d_1+\ell/2}^{d_1-\ell/2}$$

$$\vec{M}_l = -\vec{u}_z \frac{iB}{2} (2d_1) (-\ell),$$

finalement :

$$\vec{M}_l = iBd_1\ell\vec{u}_z.$$

À l'équilibre la somme des moments est nulle, on en déduit : $iBd_1\ell = mgd_2$, soit

$$B = \frac{mg d_2}{i\ell d_1}.$$

4. L'incertitude sur B est liée à celle sur m par la relation :

$$\delta B = \delta m \frac{gd_2}{i\ell d_1}$$

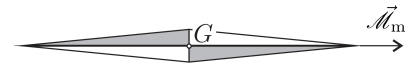
Numériquement, on établit $\delta B = 1.10^{-3}$ T, cette valeur est en ordre de grandeur 10 fois plus grande que le champ magnétique terrestre, mais 1000 fois plus faible que le champ créé par un aimant permanent en fer, néodyme et cobalt.

Ex. 11

Utilisation d'une boussole (Mines-Pont PSI 2016)



Dans cette partie, on utilise une boussole constituée d'une aiguille aimantée mobile, présentant un axe de symétrie longitudinal.

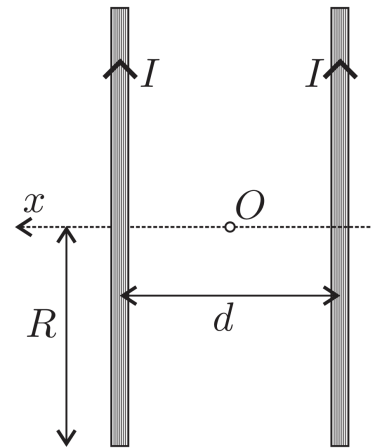


Cette aiguille peut pivoter sans frottement autour d'un axe passant par son centre de masse G et perpendiculaire à l'axe de symétrie. La liaison avec l'axe est du type "pivot parfait" sans frottement. Cette aiguille aimantée se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}_m$ ayant la direction de l'axe de symétrie de celle-ci.

Cette boussole est placée dans un champ magnétique $\vec{B}$, permanent et localement uniforme (il est considéré comme uniforme tout le long de l'aiguille aimantée). Les forces magnétiques soumettent la boussole à un couple $\vec{I}$. On note J le moment d'inertie de l'aiguille aimantée par rapport à l'axe de rotation. Dans un premier temps nous allons étudier les petits mouvements de l'aiguille autour de sa position d'équilibre stable, en négligeant les frottements fluides dus à l'air. Le champ magnétique et l'axe de symétrie de l'aiguille sont dans un plan horizontal. On appelle α l'angle entre la direction de $\vec{B}$ et celle de $\vec{\mathcal{M}}_m$.

1. Après avoir exprimé le couple des forces magnétiques s'exerçant sur l'aiguille en fonction des paramètres du problème que sont B , $\mathcal{M}_m$ et α , établir l'équation différentielle dont α est solution.
2. En déduire les positions d'équilibres de l'aiguille, et indiquer sans calcul l'équilibre stable.
3. En supposant $\alpha \ll 1$, donner l'expression de $\alpha(t)$ en notant α_0 la valeur maximale de cet angle, en faisant apparaître le rapport $\kappa = \mathcal{M}_m/J$ et en supposant que $\left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0$

On cherche à mesurer le rapport κ . Pour cela on mesure la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée placée dans un champ magnétique uniforme connu, créé par des bobines de Helmholtz. Les bobines de Helmholtz sont constituées de deux bobines plates, c'est-à-dire d'épaisseurs négligeables, identiques. Chacune d'entre elles comprend N spires circulaires de rayon R , parcourues par le même courant d'intensité I et dont le sens est indiqué sur la figure ci-contre. Ces deux bobines sont distantes de $d = R$. L'axe Ox de révolution des spires a pour origine le point O tel que les bobines soient équidistantes de celui-ci.



On peut montrer qu'en un point M situé à l'abscisse x , sur l'axe Ox , le champ magnétique $\vec{B}$ créé par les bobines s'écrit

$$\vec{B}(x) = N\vec{B}_0 \left[\left(1 + \left(\frac{x}{R} - \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} + \left(1 + \left(\frac{x}{R} + \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} \right]$$

4. La quantité B_0 (norme de $\vec{B}_0$) s'exprime en fonction de μ_0 , R et I . Par comparaison avec d'autres champs magnétiques, choisir en justifiant précisément ce choix, l'expression de B_0 parmi les suivantes

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}; \quad B_0 = \frac{\mu_0 R}{2I}; \quad B_0 = \frac{\mu_0 IR}{2}; \quad B_0 = \frac{IR}{2\mu_0}.$$

5. Les bobines ont un rayon $R = 15$ cm. On donne le développement limité suivant, avec $X = x/R$,

$$\left(1 + \left(\frac{x}{R} \pm \frac{1}{2} \right)^2 \right)^{-3/2} = \frac{8}{5\sqrt{5}} \left(1 - (\pm) \frac{6}{5} X \pm \frac{32}{25} X^3 - \frac{144}{125} X^4 + o(X^4) \right)$$

Dans quelle zone située sur l'axe Ox autour de O , peut-on considérer que la variation relative de la norme du champ est inférieure à 2% ? Préciser la valeur numérique de cette norme sachant que $N = 50$ spires et $I = 4$ A ?

6. La valeur mesurée de la période des petites oscillations de l'aiguille aimantée est $T = 0,30$ s. Déterminer l'unité et calculer la valeur numérique du rapport κ pour cette boussole.



1. On applique le théorème du moment cinétique à l'aiguille aimantée dans le référentiel du laboratoire :

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} \vec{u}_z = \vec{\mathcal{M}}_m \wedge \vec{B}$$

soit en projection sur $\vec{u}_z$,

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\mathcal{M}_m B \sin \alpha$$

2. À l'équilibre, $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0$, donc $\sin \alpha = 0$, soit $\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$. La position stable est $\alpha = 0$, lorsque $\vec{\mathcal{M}}_m$ et $\vec{B}$ sont colinéaires et de même sens.

3. Pour α petit, $\sin \alpha \simeq \alpha$, l'équation différentielle vérifiée par α est donc :

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{\mathcal{M}_m B}{J} \alpha = 0$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \kappa B \alpha = 0$$

La solution de cette équation est de la forme $\alpha(t) = A \cos(\sqrt{\kappa B} t + \varphi_0)$.

D'après les CI,

$$\begin{cases} \alpha(0) = \alpha_0 = A \cos \varphi_0 \\ \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0 = -\sqrt{\kappa B} A \sin \varphi_0 \end{cases}$$

donc $\varphi_0 = 0$ et $A = \alpha_0$ ainsi:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\sqrt{\kappa B} t)$$

4. Le champ magnétique uniforme créé dans le volume intérieur d'un solénoïde infini est $\vec{B} = \mu_0 n i \vec{u}_z$, où n est le nombre de spires par unité de longueur. L'unité de n est donc m^{-1} , ainsi la seule expression de B_0 , parmi les expressions proposées, qui a la même dimension est :

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

5. Le champ magnétique en un point repéré par $x = XR$ est la somme des champs magnétiques créés par chacune des deux bobines, d'après l'expression fournie, on obtient:

$$\vec{B}(X) = N\vec{B}_0 \left[\frac{8}{5\sqrt{5}} \right] \left[2 - 2\frac{144}{125} X^4 \right] + o(X^4)$$

$$\text{soit } \vec{B}(X) = \vec{B}(0) \left[1 - \frac{144}{125} X^4 \right].$$

Soit $X_{\max}$ la valeur de X telle que $\frac{B(X_{\max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{2}{100}$. Comme $\frac{B(X_{\max}) - B(0)}{B(0)} = \frac{144}{125} X_{\max}^4$, on calcule $X_{\max} = \pm 0,4$, et on en conclut que la plage des valeurs de x telle que le champ magnétique ne varie pas de plus de 2% de sa valeur maximale en $x = 0$ est :

$$-0,4R < x < 0,4R.$$

La valeur du champ magnétique en O est :

$$B(0) = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ T.}$$

6. Comme $\omega = \sqrt{\kappa B}$, $\kappa = \frac{\omega^2}{B}$, soit

$$\kappa = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{1}{B}$$

Numériquement : $\kappa = 3,7105 \text{ s}^{-2}.\text{T}^{-1}$.