



Chap 29 - Actions d'un champ magnétique

Objectifs

Notions	Capacités exigibles
Densité linéique de la force de Laplace dans le cas d'un élément de courant filiforme.	C29_1 Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme.
Résultante et puissance des forces de Laplace.	C29_2 Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire. C29_3 Exprimer la puissance des forces de Laplace.
Couple et puissance des actions mécaniques de Laplace dans le cas d'une spire rectangulaire, parcourue par un courant, en rotation autour d'un axe de symétrie de la spire passant par les deux milieux de côtés opposés et placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire orthogonal à l'axe.	C29_4 Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique. C29_5 Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.
Action d'un champ magnétique extérieur uniforme sur un aimant. Positions d'équilibre et stabilité.	
Effet moteur d'un champ magnétique tournant.	



- Force de Laplace: Rail de Laplace
- Moment de la force de Laplace: Spire de courant + aimant
- Position d'équilibre: Aimant + boussole
- Moteur homopolaire: Pile, aimant, fil de cuivre.
- Machine synchrone démontable

1 Force de Laplace

1.1 Force de Laplace



PIERRE-SIMON DE LAPLACE (1749 - 1827)



Physicien et mathématicien français. Il accomplit d'innombrables travaux, principalement en astronomie/mécanique, en thermodynamique et en mathématiques (probabilités).

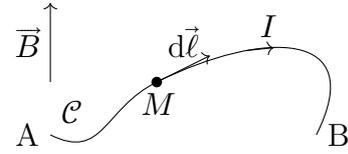
Un matériau, parcouru par un courant électrique filiforme d'intensité I selon le déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$, plongé dans un champ magnétique **extérieur** \vec{B} subit la force de Laplace élémentaire :

$$d\vec{F}_L = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

où $d\vec{\ell}$ est orienté dans le sens de I .

La résultante des forces de Laplace sur le circuit filiforme \mathcal{C} est :

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{F}_L = \int_{\mathcal{C}} I d\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$



Un fil **rectiligne** de longueur ℓ , parcouru par un courant électrique d'intensité I , plongé dans un champ magnétique **extérieur uniforme** \vec{B} subit la force de Laplace :

$$\vec{F}_L = I \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

où $\vec{\ell}$ est orienté dans le sens de I .

Le point d'application de la force de Laplace est au milieu du fil.



La définition dit "plongé dans un champ magnétique extérieur". En effet, le fil parcouru par un courant crée un champ magnétique. Par linéarité des équations de la magnétostatique :

$$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{fil}$$

On peut donc séparer le champ total en deux parties : celle due au fil et celle due à l'extérieur. Dans la force de Laplace, on ne prend en compte que \vec{B}_{ext} (et il sera noté \vec{B} tout court en général).

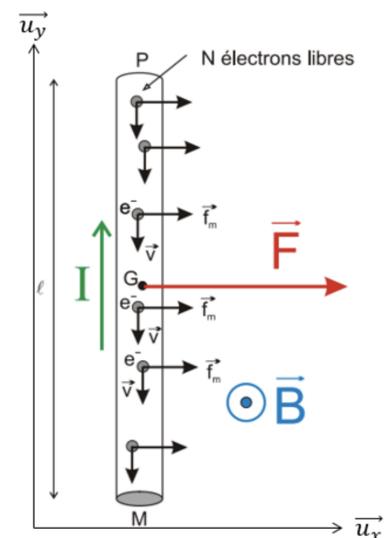
Lien entre force de Laplace et force de Lorentz

La force de Laplace est liée à la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ subie par les porteurs de charge à l'intérieur du fil. En effet, dans le fil, les électrons vont à la même vitesse \vec{v} .

On considère les électrons parcourant une portion $d\ell$ du fil pendant un temps dt .

Il y a dN électrons mobiles qui parcourent cette portion tels que $I = \frac{dNq_e}{dt}$. En considérant la force de Lorentz $d\vec{F}$ subie par tous ces électrons, on a

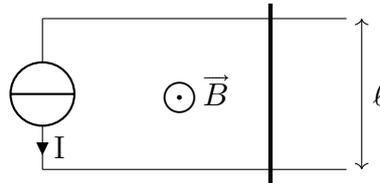
$$\begin{aligned} d\vec{F} &= \sum_{i, dN \text{ électrons}} \vec{F}_i = \sum_{i, dN \text{ électrons}} q_e \vec{v} \wedge \vec{B} = dN q_e \frac{d\vec{\ell}}{dt} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{dN q_e}{dt} d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = d\vec{F}_L \end{aligned}$$



Expérience du rail de Laplace

Deux rails conducteurs parallèles, séparés d'une distance ℓ sont reliés à une source de courant. Le circuit électrique est fermé par une tige métallique libre de se déplacer selon l'axe des rails.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme (en pratique dans l'entrefer d'un aimant).



? Représenter la force de Laplace subie par la tige sur le schéma ci-dessus, estimer son ordre de grandeur.

✓ On a $I\vec{\ell}$ selon $+\vec{u}_y$ et \vec{B} selon $+\vec{u}_z$ donc \vec{F} est selon $\vec{u}_y \wedge \vec{u}_z = \vec{u}_x$.

On a $\|\vec{F}\| \sim I\ell B$. Pour $I \sim 100$ mA, $\ell \sim 10$ cm et $B \sim 0,1$ T, on a $\|\vec{F}\| \sim 10^{-3}$ N.

? Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la tige mobile de l'expérience du rail de Laplace. Déterminer l'expression de sa vitesse v en fonction du temps.

✓ D'après le PFD, on a $m \frac{dv}{dt} = I\ell B$, soit $v = \frac{I\ell B}{m}t$.

On trouve une vitesse croissant linéairement. En réalité, il faut tenir compte des frottements et d'effets d'induction, étudiés dans le chapitre suivant, et la tige finit par atteindre une vitesse limite.

1.2 Puissance des forces de Laplace

Si le fil est en translation, la puissance de la force de Laplace est donnée par :

$$\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = (I\vec{\ell} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v},$$

? Donner l'expression de la puissance de la force de Laplace dans l'expérience du rail de Laplace, estimer son ordre de grandeur.

✓ $\mathcal{P}_L = I\ell Bv \simeq 10^{-1} \text{ A} \times 10^{-1} \text{ m} \times 10^{-1} \text{ T} \times 10^{-1} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 10^{-4} \text{ W}$.

2 Couple exercé par un champ magnétique sur un moment magnétique

2.1 Couple magnétique

Une aiguille aimantée, caractérisée par un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tend à s'aligner sur un champ magnétique, c'est donc qu'elle subit des actions de sa part.

Un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ (spire ou aimant), plongé dans un champ magnétique \vec{B} **uniforme** subit un couple :

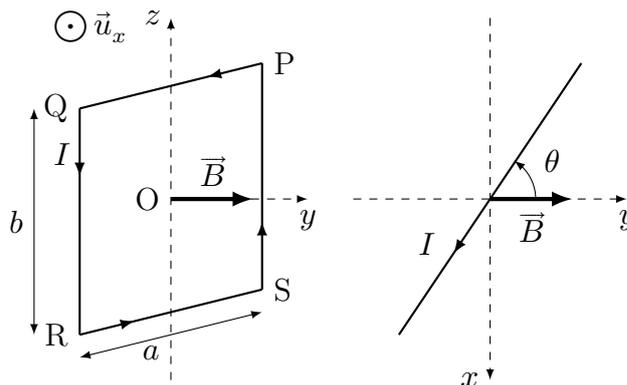
$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

 Dans le cas où le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ est associé à une spire de surface S parcourue par l'intensité I (soit $\vec{\mathcal{M}} = I\vec{S}$), on a $\vec{\Gamma} = I\vec{S} \wedge \vec{B}$.

On peut montrer que ce moment correspond au couple des actions de Laplace sur la spire.

Démonstration dans le cas d'une spire rectangulaire

 Démontrer l'expression dans le cas d'une spire rectangulaire, de longueur b , et largeur a , parcourue par un courant électrique d'intensité I et libre de tourner autour de l'axe (Oz) (voir ci-contre). Cette spire est plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_y$, orthogonal à l'axe (Oz).



 Calculer la force de Laplace et le moment associé sur chacune des arêtes du cadre. Attention à déterminer les angles correctement.

 On s'intéresse à la portion rectiligne du haut entre P et Q (car I va dans ce sens). On a

$$\vec{F}_{PQ} = \int_P^Q I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \overrightarrow{IPQ} \wedge \vec{B}$$

car \vec{B} et I constants et indépendants du déplacement entre P et Q . On pourrait retrouver le même résultat en intégrant la formule trouvée au dessus.

On a donc $\vec{F}_{PQ} = \overrightarrow{IPQ} \wedge \vec{B} = Iab \sin(\pi - \theta) \vec{u}_z = Iab \sin \theta \vec{u}_z$.

Calculons son moment pour la force appliquée au milieu de cette portion. On a $\vec{m}_{PQ} = \frac{b}{2} \vec{u}_z \wedge \vec{F}_{PQ} = \vec{0}$ car le vecteur position et \vec{F}_{PQ} sont colinéaires. On peut appliquer le même raisonnement pour montrer que le moment de la force sur l'arête RS est nul aussi.

Intéressons-nous à l'arête QR . De la même manière, on a

$$\vec{F}_{QR} = \int_Q^R I d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = \overrightarrow{IQR} \wedge \vec{B}$$

donc $\vec{F}_{QR} = IbB\vec{u}_x$. Ainsi le moment de cette force vaut

$$\vec{m}_{QR} = \frac{a}{2} (\sin \theta \vec{u}_x - \cos \theta \vec{u}_y) \wedge \vec{F}_{QR} = \frac{IabB}{2} \cos \theta \vec{u}_z$$

On peut appliquer le même raisonnement pour montrer que sur l'arête SP , $\vec{m}_{SP} = \frac{IabB}{2} \cos \theta \vec{u}_z$.

Le moment total est égal à la somme des moments sur chaque côté avec les forces appliquées sur le milieu des sections, on a donc

$$\vec{\Gamma} = 2 \times \frac{IabB}{2} \cos \theta \vec{u}_z = IabB \cos \theta \vec{u}_z$$

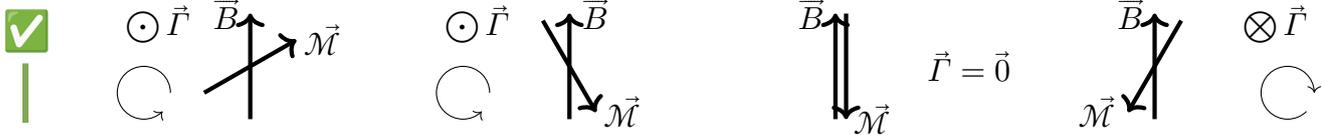
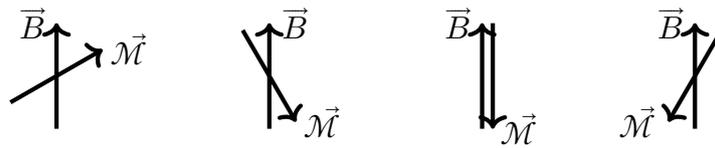
On voit apparaître le produit de la surface ab et I c'est-à-dire $\|\vec{\mathcal{M}}\|$ et l'angle entre le vecteur surface/moment magnétique et \vec{B} vaut $\pi/2 - \theta$ donc $\cos \theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ c'ad l'angle entre $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{B} . Ainsi

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

 Pour un couple, la résultante des forces est nulle : les actions d'un champ magnétique uniforme sur un moment magnétique peuvent le mettre en rotation autour de son centre de masse, mais n'entraînent pas de mouvement de translation du moment magnétique.

Couple subi par un moment magnétique

? Compléter les schémas ci-dessous en dessinant le couple $\vec{\Gamma}$ et en précisant dans quel sens le moment magnétique se met à tourner.



2.2 Positions d'équilibre d'un moment magnétique

Un moment magnétique permanent $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ magnétique \vec{B} possède une énergie potentielle définie par : $\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$

? En raisonnant sur l'exemple précédent, déterminer les positions d'équilibre d'un moment magnétique dans un champ magnétique uniforme et leur stabilité. Commenter avec la définition de l'énergie potentielle magnétique.

✓ Il y a deux positions d'équilibre : une stable et une instable.

Le moment magnétique tourne toujours pour s'aligner avec \vec{B} dans son sens sauf quand il est aligné dans l'autre mais un léger déplacement de cette position d'équilibre tend à le réaligner dans le sens de \vec{B} (position stable).



On a $\mathcal{E}_p = -\mathcal{M}B \cos \theta$ avec θ l'angle entre le moment magnétique et le champ. Ainsi, la position

$\theta = 0[2\pi]$ correspond à un minimum donc une position d'équilibre stable et $\theta = \pi[2\pi]$ à une position d'équilibre instable, c'est bien cohérent avec ce qu'on a trouvé précédemment avec les mains.

2.3 Puissance du couple magnétique

On considère un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ tournant à la vitesse angulaire ω autour d'un axe (Δ) orienté par le vecteur unitaire \vec{u} , dans un champ magnétique uniforme.

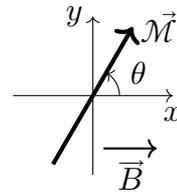
La puissance du couple de Laplace est donnée par :

$$\mathcal{P}_L = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega} = \vec{\Gamma} \cdot (\omega \vec{u}).$$

Moment magnétique en rotation dans un champ magnétique uniforme

On considère un moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ en rotation dans le plan (Oxy) , plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_x$ uniforme.

On note θ l'angle entre $\vec{\mathcal{M}}$ et \vec{u}_x .



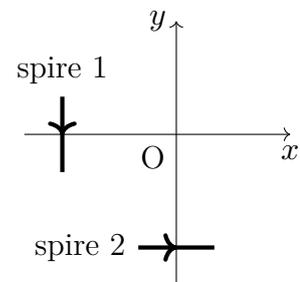
? Exprimer la puissance du couple magnétique en fonction de \mathcal{M} , B , θ et ses dérivées par rapport au temps.

✓ $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = -\mathcal{M}B \sin \theta \vec{u}_z$ et $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ donc $\mathcal{P}_L = -\mathcal{M}B \dot{\theta} \sin \theta$.

3 Effet moteur d'un champ magnétique tournant

3.1 Création d'un champ magnétique tournant

On place deux spires circulaires, comme indiqué sur le schéma ci-contre. La spire 1 crée en O le champ $\vec{B}_1 = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$, la spire 2 crée en O le champ $\vec{B}_2 = B_0 \sin(\omega t) \vec{u}_y$.



? Caractériser le champ magnétique en O. Que se passe-t-il si l'on place une aiguille aimantée en O ?

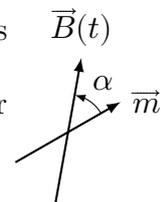
✓ \vec{B} champ tournant à la pulsation ω .

Si le champ tourne suffisamment lentement, l'aiguille s'aligne dessus. (Sinon, il faut tenir compte du retard).

3.2 Principe du moteur synchrone

Un moteur synchrone fonctionne sur le principe de l'exemple précédent.

- Le **stator** est constitué de bobines parcourues par des courants variables déphasés qui créent un champ magnétique tournant.
- Le **rotor** est un aimant (en fait un électroaimant: bobines parcourues par un courant continu). Il subit le couple magnétique du stator.
- La **charge** fait subir un couple $-\Gamma_c$ au rotor.



Les moteurs synchrones sont par exemple utilisés dans certains trains, dont les rames du TGV ou le successeur du TGV, l'AGV.

? Supposons que le rotor ne tourne pas à la même vitesse angulaire que le champ magnétique tournant. Montrer qu'alors il subit un couple moyen nul.

✓ On a $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}B \sin \alpha \vec{u}_z$ avec $\alpha = (\omega_B - \omega_M)t + \alpha_0$.

Si le rotor et le stator ont des vitesses angulaires différentes, $\langle \sin \alpha(t) \rangle = 0$ et $\langle \Gamma \rangle = 0$.

? On suppose donc que le rotor tourne à la même vitesse angulaire ω que le champ magnétique mais avec un certain retard angulaire α_0 . Exprimer le couple magnétique subi par le rotor.

✓ On a $\vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B} = \mathcal{M}B \sin \alpha_0 \vec{u}_z$.

? En régime permanent, déterminer le retard angulaire en fonction du couple de charge. Déterminer le couple de charge maximal avant que le rotor ne décroche.

✓ Le théorème du moment cinétique donne $\frac{dJ\omega}{dt} = 0 = \mathcal{M}B \sin \alpha_0 - \Gamma_c$ en régime permanent.

Soit $\sin \alpha_0 = \frac{\Gamma_c}{\mathcal{M}B}$.

Il y a décrochage si $\Gamma_c > \mathcal{M}B$.

? Exprimer la puissance fournie à la charge en régime permanent.

✓ On a $\mathcal{P} = \Gamma\omega = \mathcal{M}B\omega \sin \alpha_0$.

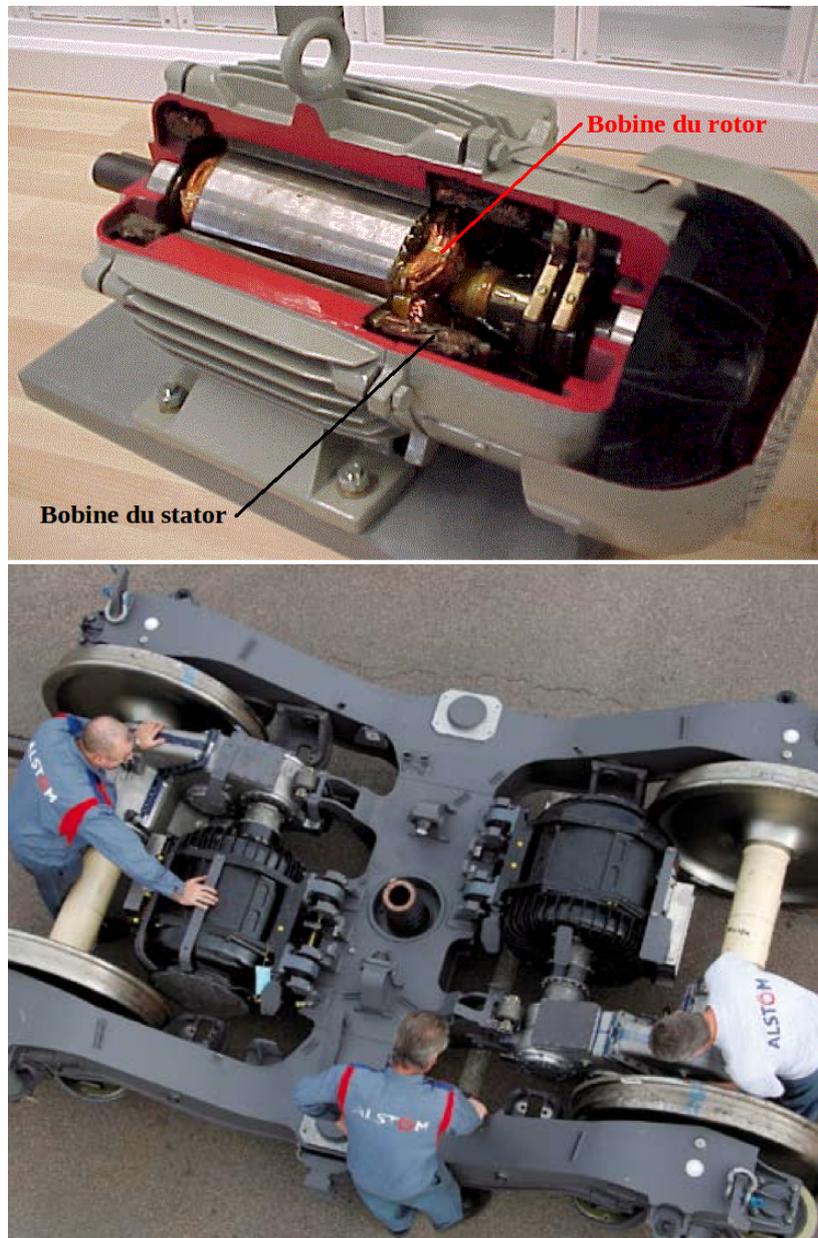


Figure 1: En haut, moteur synchrone de démonstration. En bas, moteurs synchrones installés sur un bogie d'AGV (automotrice à grande vitesse).