

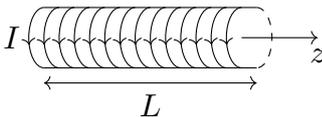


TD 31 - Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

☆ application directe du cours
☆☆ entraînement
☆☆☆ perfectionnement
♥ incontournable

Questions de cours

- Définir l'inductance propre d'un circuit. Donner son expression pour une bobine supposée infinie. Décrire le phénomène d'auto-induction.

- 
Solénoïde de longueur L , n spires par unité de longueur.

Estimez la valeur de l'inductance des solénoïdes utilisés en TP.

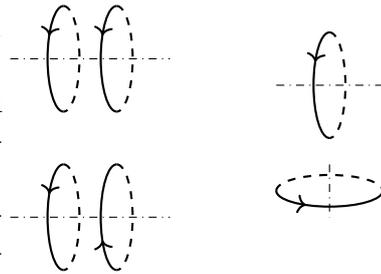
- Décrire le phénomène d'induction mutuelle. Définir l'inductance mutuelle.
- Présenter le modèle du transformateur idéal.

Ex. 1

Questions qualitatives



- On double le rayon d'une solénoïde cylindrique en gardant le même nombre de spires par unité de longueur. Que devient son inductance propre ?
- Comment enrouler une grande longueur de fil sur un support cylindrique de telle sorte que l'inductance propre du bobinage soit nulle ?
- Déterminer le signe du coefficient de mutuelle inductance entre les deux spires circulaires dans les trois situations ci-contre.



- Le flux propre est proportionnel à la surface donc L l'est aussi et quadruple.
- Pour que l'inductance propre soit nulle il faut que la surface algébrique totale soit nulle. Par exemple on enroule le fil autour du cylindre jusqu'à la moitié du fil, puis on enroule le reste dans l'autre sens.
- Si $i_1 > 0$, alors \vec{S}_2 et \vec{B}_1 sont de même sens, donc $\phi_{1 \rightarrow 2} > 0$ donc $M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} > 0$.
 - Si $i_1 > 0$, alors \vec{S}_2 et \vec{B}_1 sont de sens opposé, donc $\phi_{1 \rightarrow 2} < 0$ donc $M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} < 0$.
 - Le champ magnétique moyen généré par le première spire au niveau de la seconde est nul. Les lignes de champ respectent la symétrie de leur cause, ici la spire. Le champ au niveau de la seconde spire est positif d'un côté et négatif de l'autre et se compensent par symétrie, le flux total est nul.

Un circuit électrique filiforme plan de résistance R , d'auto-inductance L et de surface S est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoidalement dans le temps et orthogonal au circuit : $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. Représenter le schéma équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique.

1. Dans le cas où on néglige l'auto-induction.
2. Dans le cas où on prend en compte l'auto-induction.



Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit donc $\Phi_{ext} = \vec{B} \cdot \vec{S} = B_0 S \cos(\omega t) \cos(\alpha)$ avec α l'angle entre le vecteur surface \vec{S} et le champ magnétique. Alors, d'après la loi de Faraday, il apparaît une f.e.m. induite

$$e = -\frac{d\Phi_{tot}}{dt} = B_0 S \omega \sin(\omega t) \cos(\alpha) - L \frac{di}{dt}.$$

La loi des mailles permet d'écrire

$$e = Ri \Rightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = B_0 S \omega \cos(\alpha) \sin(\omega t).$$

Le terme $L \frac{di}{dt}$ disparaît si on néglige les phénomènes d'auto-induction.

Donc sans auto-induction, le circuit est équivalent à une résistance et un générateur de tension alternative et en tenant compte de l'auto-induction, on rajoute une bobine en série.

Soit un circuit électrique filiforme d'auto-inductance L , de résistance R alimenté par un générateur de f.e.m. E constante. il n'y a pas de champ extérieur, à l'instant $t = 0$ on ferme l'interrupteur K .

1. Représenter le schéma électrique équivalent pour $t > 0$.
2. En déduire l'équation régissant le comportement de l'intensité électrique notée i .
3. Résoudre cette équation. Commenter l'influence de L .



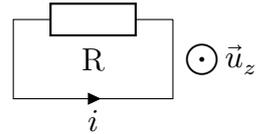
1. Générateur, inductance et résistance associés en série.

2. $L \frac{di}{dt} + Ri = E$.

3. $i = \frac{E}{R} (1 - \exp(-t/\tau))$ avec $\tau = \frac{L}{R}$. Augmenter L revient à augmenter le temps caractéristique, i.e. la bobine s'oppose à l'établissement d'un courant.



On considère un circuit électrique rectangulaire, de surface S , plongé dans un champ magnétique uniforme dépendant du temps $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$. On note L le coefficient d'auto-inductance du circuit et R sa résistance (voir ci-contre).



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité i en faisant apparaître un temps caractéristique τ .
2. Expliquer pourquoi au bout d'un certain temps de fonctionnement, il est légitime de chercher la solution sous la forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Déterminer la valeur de i_0 .
3. Exprimer le rapport des amplitudes de la force électromotrice auto-induite et de la force électromotrice extérieure. En déduire une condition sur la fréquence du champ magnétique pour laquelle l'auto-induction est négligeable.
4. On donne $R = 10 \Omega$ et $L = 0,10 \text{ mH}$. Déterminer la valeur numérique de la fréquence critique qui délimite les deux régimes (auto-induction négligeable ou non).



1. On a $\vec{S} = S\vec{u}_z$ et donc $\phi_{\text{ext}} = SB_0 \cos(\omega t)$.

Le flux propre est par définition $\phi_p = Li(t)$.

La force électromotrice est donnée par la loi de Faraday : $e = -\frac{d(\phi_p + \phi_{\text{ext}})}{dt} = -L\frac{di}{dt} + SB_0\omega \sin(\omega t)$

La loi des mailles nous donne $e = U_R = Ri$

On a donc :

$$Ri = -L\frac{di}{dt} + SB_0\omega \sin(\omega t)$$

$$\text{soit : } L\frac{di}{dt} + Ri = SB_0\omega \sin(\omega t)$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_{\text{lim}}}{\tau} \sin(\omega t)}$$

$$\text{avec } \tau = \frac{L}{R} \text{ et } i_{\text{lim}} = \frac{SB_0\omega}{R}.$$

2. L'amplitude du régime transitoire va décroître exponentiellement. Au bout de quelques τ on peut assimiler la solution à la solution particulière qui est de la forme $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$ car le second membre est sinusoïdal.

On a $i_{\text{SP}} = i_{\text{lim}} \sin(\omega t)$,

$$\text{donc } i_0 = i_{\text{lim}} = \frac{SB_0\omega}{R}$$

3. On a $\left| \frac{e_p}{e_{\text{ext}}} \right| = \frac{L\omega i_0}{SB_0\omega} = \frac{L\omega}{SB_0\omega} \frac{SB_0\omega}{R} = \frac{L\omega}{R} = \omega\tau$

L'auto-induction est donc négligeable pour les basses fréquences, telles que $\omega \ll \frac{1}{\tau}$.

4. $f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{R}{2\pi L} = 16 \text{ kHz}$

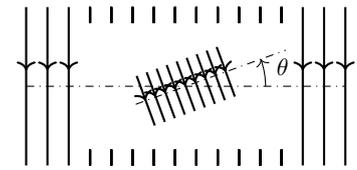
L'auto-induction est bien négligeable en TP pour ce type de circuits, d'où l'usage de bobines.

Ex. 5

Calcul d'un coefficient de mutuelle inductance



On place un petit solénoïde, de section S_1 , possédant N_1 spires, placé à l'intérieur d'un grand solénoïde, possédant N_2 spires, de section S_2 et de longueur L_2 . On note θ l'angle entre les axes des deux solénoïdes (voir ci-contre).



Déterminer le coefficient de mutuelle inductance M entre les deux solénoïdes.



Le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde 2 lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité i_2 vaut $\vec{B}_2 = \mu_0 \frac{N_2}{L_2} i_2 \vec{u}_z$.

Le flux de ce champ magnétique à travers le solénoïde 1 vaut $\Phi_{2 \rightarrow 1} = N_1 (\vec{B}_2 \cdot \vec{S}_1) = N_1 \mu_0 \frac{N_2}{L_2} i_2 S_1 \cos \theta$.

Or le coefficient d'inductance mutuelle entre les deux solénoïdes est tel que $\Phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$.

Par identification, on a donc : $M = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S_1}{L_2} \cos \theta$.

Ex. 6

Circuits couplés par mutuelle inductance



Soient deux circuits couplés par mutuelle inductance. Le premier comporte un générateur de f.e.m. $E = E_0 \cos \omega t$ et une résistance R . Son inductance propre est L . Le second circuit comporte les mêmes éléments, le générateur en moins. On note M la mutuelle inductance entre les deux circuits.

1. Trouver les équations différentielles satisfaites par les intensités i_1 et i_2 des deux circuits.
2. En déduire les équations satisfaites par $x = i_1 + i_2$ et $y = i_1 - i_2$.
3. Donner l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
4. On se place désormais dans le cadre du régime sinusoïdal forcé. En déduire \underline{I}_2 , amplitude complexe de l'intensité dans le circuit secondaire.

On considère maintenant deux circuits d'inductance respective L_1 et L_2 , de même résistance R , couplés par une mutuelle inductance M . Ces deux circuits comportent des générateurs de f.e.m. de tension respective E_1 et E_2 .

5. Exprimer les tensions E_1 et E_2 en fonction des intensités i_1 et i_2 .
6. Réaliser un bilan de puissance pour le primaire et pour le secondaire.
7. Faire un bilan de puissance global et faire intervenir l'énergie magnétique des deux circuits \mathcal{U}_m .



1. Appliquons la loi de Faraday à chacun des circuits :

$$e_1 = -L \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; e_2 = -L \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Le premier circuit est équivalent à l'association d'une résistance R , d'un générateur de f.e.m. e_1 et d'un générateur de f.e.m. $E(t)$ alors la loi des mailles et la loi d'Ohm permettent d'écrire

$$R i_1 = e_1 + E(t) \Rightarrow L \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + R i_1 = E(t).$$

De son côté le second circuit est équivalent à l'association d'une résistance R et d'un générateur de f.e.m. e_2 alors on peut écrire

$$Ri_2 = e_2 \Rightarrow L \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + Ri_2 = 0$$

2. Si on somme les deux équations précédentes on trouve

$$L \frac{dx}{dt} + M \frac{dx}{dt} + Rx = E$$

Si on soustrait les deux équations précédentes on trouve

$$L \frac{dy}{dt} - M \frac{dy}{dt} + Ry = E$$

3. Si on écrit les deux équations précédente sous forme canonique on peut identifier deux temps caractéristiques

$$\tau_x = \frac{R}{L + M}; \tau_y = \frac{R}{L - M}$$

4. On se place en régime sinusoïdal forcé, adoptons une représentation complexe des signaux.

$$\underline{E} = Ee^{j\omega t}; \underline{i}_1 = \underline{I}_1e^{j\omega t}; \underline{i}_2 = \underline{I}_2e^{j\omega t}$$

Reprenons les équations de la question 1 et traduisons les en complexe

$$\begin{aligned} jL\omega \underline{I}_1 e^{j\omega t} + jM\omega \underline{I}_2 e^{j\omega t} + R\underline{I}_1 e^{j\omega t} &= Ee^{j\omega t} \\ jL\omega \underline{I}_2 e^{j\omega t} + jM\omega \underline{I}_1 e^{j\omega t} + R\underline{I}_2 e^{j\omega t} &= 0 \end{aligned}$$

Après quelques calculs on trouve

$$\underline{I}_2 = E \frac{jM\omega}{(L^2 - M^2)\omega^2 - R^2 - 2jLR\omega}$$

5. La loi de Faraday appliquée à chacun des circuits s'écrit

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}; e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Alors chacun des circuits précédents est équivalent à l'association d'une résistance, d'un générateur de f.e.m. E_1 ou E_2 et d'un générateur de f.e.m. e_1 ou e_2 alors la loi des mailles et la loi d'Ohm permettent d'écrire

$$Ri_1 = e_1 + E_1 \Rightarrow E_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} + Ri_1$$

et

$$Ri_2 = e_2 + E_2 \Rightarrow E_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + Ri_2$$

6. On multiplie l'équation différentielle du primaire par i_1 et celle du secondaire par i_2 et alors

$$\begin{aligned} E_1 i_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 \right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} + Ri_1^2 \\ E_2 i_2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2 \right) + M \frac{di_1}{dt} i_2 + Ri_2^2 \end{aligned}$$

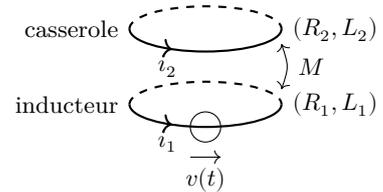
7. Le bilan de puissance global est la somme du bilan de puissance de chacun des circuits :

$$E_1 i_1 + E_2 i_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2 \right) + (Ri_1^2 + Ri_2^2)$$

où on définit $\mathcal{U}_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$ l'énergie magnétique.

On peut chauffer le fond d'une casserole au moyen des courants induits dans le fond métallique de celle-ci par un champ magnétique variable.

Un bobinage d'autoinductance $L_1 = 30 \mu\text{H}$ et de résistance $R_1 = 18 \text{ m}\Omega$, nommé l'inducteur, est logé dans une plaque en céramique et alimenté par une tension sinusoïdale $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$ de fréquence $f = 25 \text{ kHz}$ afin de créer un champ magnétique.



Le fond de la casserole posée sur la plaque en céramique est modélisé par une spire de résistance $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$ et d'inductance $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$.

Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre l'inducteur et le fond métallique de la casserole. Le coefficient d'induction mutuelle entre les deux circuits vaut $M = 2 \mu\text{H}$.

1. Déterminer les deux équations différentielles couplées vérifiées par les intensités i_1 et i_2 dans les deux circuits.

2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{I_2}{I_1}$, puis l'expression de

l'impédance d'entrée complexe du système : $\underline{Z}_e = \frac{V}{I_1}$.

3. Vérifier que la pulsation ω est telle que $R_1 \ll L_1 \omega$ et $R_2 \ll L_2 \omega$, simplifier les deux expressions précédentes littérales puis calculer la valeur numérique de leur module.

4. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à 50 W. Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité du courant efficace dans la casserole et la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

5. Risque-t-on de s'électrocuter en touchant une casserole posée sur une plaque à induction ?



1. Le flux à travers la spire 1 tient compte du champ magnétique créé par la spire 2 et du champ magnétique induit par la spire 1 donc la fém est

$$e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

De la même manière, on a

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

La loi des mailles dans la spire 1 donne

$$v - R_1 i_1 - e_1 = 0 \iff v = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt}$$

La loi des mailles dans la spire 2 donne

$$e_1 - R_2 i_2 = 0 \iff 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

2. En passant les équations obtenues en notation complexe, on a

$$\begin{cases} \underline{V} = R_1 \underline{I}_1 + jL_1 \omega \underline{I}_1 + jM \omega \underline{I}_2 \\ 0 = R_2 \underline{I}_2 + jL_2 \omega \underline{I}_2 + jM \omega \underline{I}_1 \end{cases}$$

De la deuxième équation, on obtient

$$\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2}$$

On en déduit que $\underline{I}_2 = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \underline{I}_1$ et la première équation devient

$$\underline{V} = R_1 \underline{I}_1 + jL_1 \omega \underline{I}_1 + \omega^2 \frac{M^2}{R_2 + j\omega L_2} \underline{I}_1 = \left(R_1 + j\omega L_1 + \omega^2 \frac{M^2}{R_2 + j\omega L_2} \right) \underline{I}_1$$

enfin, on a

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{V}}{\underline{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + \omega^2 \frac{M^2}{R_2 + j\omega L_2}$$

3. On a $\omega = 2\pi f$ donc

$$L_1 \omega = 30 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 25 \cdot 10^3 \simeq 4,7 \, \Omega \gg R_1 \quad \text{et} \quad L_2 \omega = 0,24 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 25 \cdot 10^3 = 3,8 \cdot 10^{-2} \, \Omega > R_2$$

Pour le deuxième cas, il y a un facteur 5 avec R_2 , on peut tenter de le négliger.

En négligeant les termes résistifs, on obtient

$$\underline{Z}_e = j\omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{M}{L_2}$$

Les modules sont donc

$$|\underline{Z}_e| = \omega \left(L_1 - \frac{M^2}{L_2} \right) = 2\pi \times 25 \cdot 10^3 \times \left(30 \cdot 10^{-6} - \frac{(2 \cdot 10^{-6})^2}{0,24 \cdot 10^{-6}} \right) = \frac{2}{3}\pi \simeq 2,1 \, \Omega$$

et

$$\left| \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right| = \frac{M}{L_2} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{0,24 \cdot 10^{-6}} = 8,3$$

4. On cherche $I_{1,\text{eff}} = \frac{I_1}{\sqrt{2}}$. La puissance moyenne vaut $\mathcal{P}_1 = \langle R_1 i_1^2 \rangle = R_1 I_{1,\text{eff}}^2$ donc $I_{1,\text{eff}} =$

$\sqrt{\frac{\mathcal{P}_1}{R_1}}$. Pour que la puissance moyenne par effet Joule ne dépasse pas 50 W, il faut que l'intensité du courant soit inférieure à l'intensité efficace maximale

$$I_{1,\text{eff,max}} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}_{1,\text{max}}}{R_1}} = \sqrt{\frac{50}{18 \cdot 10^{-3}}} = 53 \, \text{A}$$

La tension efficace maximale est donc $V_{0,\text{eff,max}} = |\underline{Z}_e| I_{1,\text{eff,max}} = 2,1 \times 53 = 1,1 \cdot 10^2 \, \text{V}$.

L'intensité efficace dans la casserole vaut

$$I_{2,\text{eff}} = \left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| I_{1,\text{eff,max}} = 8,3 \times 53 = 4,4 \cdot 10^2 \, \text{A}$$

La puissance moyenne dans la casserole est donnée par

$$\mathcal{P}_2 = R_2 I_{2,\text{eff}}^2 = 8,3 \cdot 10^{-3} \times (4,4 \cdot 10^2)^2 = 1,6 \cdot 10^3 \, \text{W}$$

5. La tension induite dans la casserole est de l'ordre de $e_2 = L_2 \omega I_2 = 0,24 \cdot 10^{-6} \times 2\pi \times 25 \cdot 10^3 \times 4,4 \cdot 10^2 \simeq 17 \, \text{V}$. La résistance interne du corps humain est de l'ordre du k Ω , ce qui produit un courant à l'intérieur du corps de l'ordre du mA. Ce n'est pas suffisant

pour provoquer une électrocution.

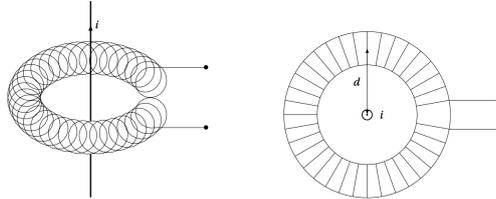
Vous verrez aussi l'année prochaine que le courant pénètre d'autant moins dans un matériau que sa fréquence est grande, ce qui est le cas ici. Le courant électrique s'il doit circuler via le corps humain ne restera qu'à la surface de la peau. La peau a une résistance de l'ordre du $M\Omega$ donc le courant est encore plus faible et inoffensif et surtout en restant sur la peau, il ne traverse pas des organes vitaux, ce qui limite les répercussions.

Ex. 8

Pince ampèremétrique



Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on peut utiliser une pince ampèremétrique dont cet exercice présente le principe de fonctionnement.



On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil assimilé à un fil rectiligne infini, choisi selon l'axe Oz . On choisit un système de coordonnées cylindriques, avec une base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. L'intensité qui circule dans le sens des z croissants est de la forme $i = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(\omega t)$. On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de N spires circulaires, chacune d'une aire S , qu'on modélise par un tore disposé autour du fil. Avec le système de coordonnées utilisé, le vecteur surface de chaque spire est selon \vec{e}_θ .

On donne le champ magnétique créé par un fil infini traversé par un courant i à une distance d :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{e}_\theta$$

1. Avec une intensité de 1,0 A, que vaut le champ magnétique à une distance $d = 2,0$ cm? On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H.m⁻¹. Le champ magnétique est-il uniforme sur le disque délimité par chaque spire ?

Dans la suite, on confondra le champ magnétique moyen sur le disque délimité par chaque spire avec sa valeur au centre de cette spire, à la distance d du fil.

2. Exprimer la force électromotrice e développée aux bornes du circuit constitué par les N spires.
3. En déduire l'expression de la valeur efficace E_{eff} de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction $\mu_0, S, \omega, I_{\text{eff}}, d$.
4. (a) Quel doit être l'ordre de grandeur de N pour avoir une tension de l'ordre de 0,1 V pour un courant de l'ordre de 100 A ? On prendra les paramètres géométriques : $d \simeq 3$ cm ; $S \simeq 1$ cm², à la pulsation $\omega = 100\pi$ rad.s⁻¹.
(b) Pourquoi ne peut-on pas avoir confiance dans la mesure de la photographie ?



1. A une distance $d = 2,0$ cm, le champ magnétique vaut

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \times 1,0}{2\pi \times 2,0 \cdot 10^{-2}} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ T}$$

Le champ n'est pas uniforme car la spire a une étendue spatiale.

2. Le flux à travers une spire est $\phi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS = \frac{\mu_0 i S}{2\pi d}$. Or la pince ampèremétrique est composée de N spires donc le flux total est $\phi = \frac{\mu_0 N i S}{2\pi d}$. La force électromotrice est alors donnée par

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 N S}{2\pi d} \frac{di}{dt}$$

3. En passant en complexe, on a

$$\underline{e} = -j\omega \frac{\mu_0 N S}{2\pi d} I_{\text{eff}} \sqrt{2}$$

En posant $E_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ mod } \underline{e}$, on a

$$E_{\text{eff}} = \frac{\mu_0 N S \omega}{2\pi d} I_{\text{eff}}$$

4. (a) On cherche N pour que le flux d'un champ magnétique créé par un courant de 100 A induise une tension de 0,1 V. On a

$$N = \frac{2\pi d E_{\text{eff}}}{\mu_0 S \omega I_{\text{eff}}} = \frac{2\pi \times 3 \cdot 10^{-2} \times 0,1}{4\pi \times 10^{-7} \times 1 \cdot 10^{-4} \times 100\pi \times 100} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ spires}$$

- (b) Il faudrait un très grand nombre de spires avec un très grand courant pour mesurer une faible tension. Un courant si faible (d'autant plus avec un isolant autour) n'induirait qu'une tension très faible, peu facilement mesurable par ce type d'appareil.

Ex. 9

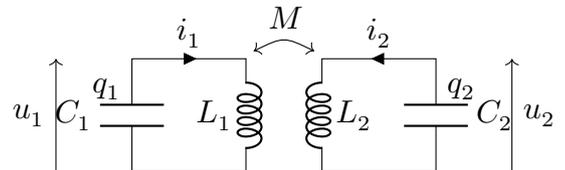
Oscillateurs couplés par induction mutuelle



Deux circuits électriques sont couplés par induction mutuelle comme indiqué sur le schéma ci-contre. On a $L_1 = L_2 = L$ et $C_1 = C_2 = C$.

1. Établir un système d'équations différentielles couplées vérifiées par les charges q_1 et q_2 des deux condensateurs.

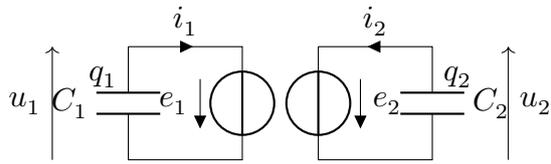
On posera $k = \frac{M}{L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



2. À l'instant $t = 0$, le condensateur C_1 porte la charge q_0 tandis que le condensateur C_2 est déchargé et les intensités dans les deux circuits sont nulles. Résoudre le système d'équations précédent.
3. Montrer que si $k \ll 1$, les fonctions $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont sinusoïdales du temps, de pulsation ω_0 , modulées en amplitude à une pulsation Ω à déterminer.
4. En pratique, quels phénomènes limitent la durée des oscillations ?
5. Proposer un système mécanique ayant un comportement analogue à celui-ci.



1. Dans le circuit 1, il apparaît la force électromotrice d'induction $e_1 = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$, et dans le circuit 2, il apparaît la force électromotrice d'induction $e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$. On peut écrire les schémas électriques équivalents suivants :



La loi des mailles donne donc :

$$\begin{cases} u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}$$

D'après les conventions choisies pour l'orientation des condensateurs, on $q_1 = -Cu_1$ et $q_2 = -Cu_2$, mais $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$ (si i_1 est positif, q_1 diminue) et $i_2 = \frac{dq_2}{dt}$.

On en déduit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + k\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + k\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0 \end{cases}$$

2. Pour découpler les deux équations, on peut poser $x = q_1 + q_2$ et $y = q_1 - q_2$. On peut ainsi écrire :

$$\begin{cases} (1+k)\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \\ (1-k)\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

À $t = 0$, on a $x = q_0$, $y = q_0$, et $\dot{x} = \dot{y} = 0$. En introduisant les pulsations propres

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+k}} \text{ et } \omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-k}}, \text{ on en déduit } x(t) = q_0 \cos(\omega_1 t) \text{ et } y(t) = q_0 \cos(\omega_2 t).$$

On a donc $q_1(t) = \frac{x(t) + y(t)}{2} = \frac{q_0}{2} [\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)]$, soit :

$$q_1(t) = q_0 \cos \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right] \cos \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right].$$

De même, on a donc $q_2(t) = \frac{x(t) - y(t)}{2} = \frac{q_0}{2} [\cos(\omega_1 t) - \cos(\omega_2 t)]$, soit :

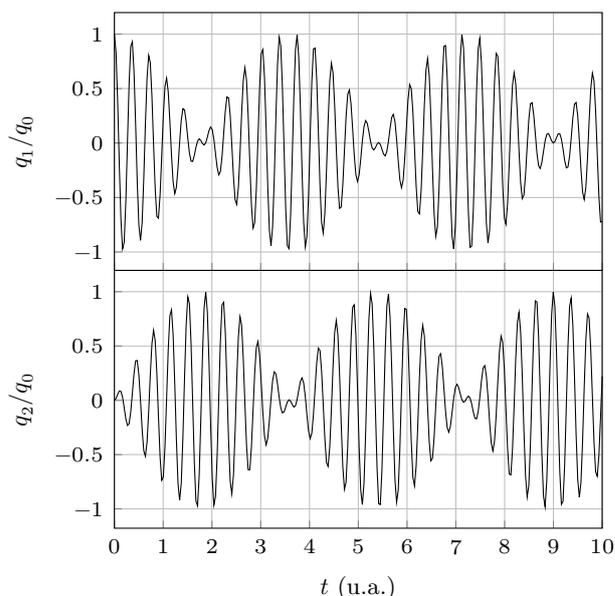
$$q_2(t) = q_0 \sin \left[\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right] \sin \left[\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right].$$

3. Si le couplage entre les deux circuits est faible $k \ll 1$, on a $\omega_1 = \omega_0 (1+k)^{-1/2} \simeq \omega_0 \left(1 - \frac{k}{2}\right)$ et $\omega_2 = \omega_0 (1-k)^{-1/2} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right)$.

On a donc $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_0$ et $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \simeq \frac{k}{2} \omega_0 = \Omega \ll \omega_0$.

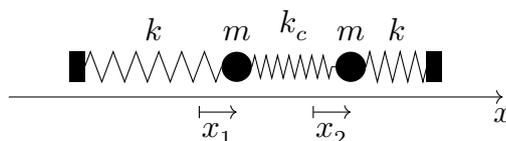
En posant $\Omega = \frac{k}{2} \omega_0$, on peut donc écrire : $q_1(t) = q_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{rapide}} \underbrace{\cos(\Omega t)}_{\text{lent}}$ et

$$q_2(t) = q_0 \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{rapide}} \underbrace{\sin(\Omega t)}_{\text{lent}}.$$



On observe donc des oscillations rapides à la pulsation ω_0 modulées à la pulsation Ω . On peut remarquer que lorsque l'amplitude des oscillations est maximale dans le circuit 1, elle est minimale dans le circuit 2 : le couplage fait passer l'énergie d'un circuit à l'autre de manière périodique.

4. En pratique, la résistance des circuits limite la durée des oscillations.
5. On observerait le même phénomène avec un système de deux oscillateurs masse m - ressort de raideur k couplés par un ressort de faible raideur k' .



Ex. 10

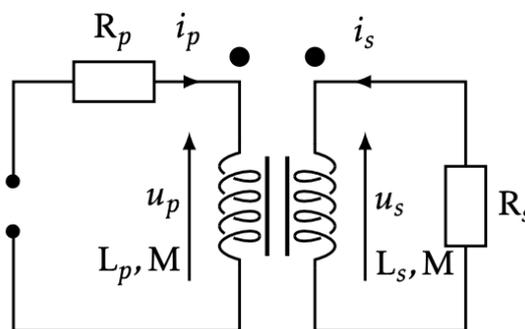
Puissance dans un transformateur idéal



On considère le transformateur représenté sur la figure ci-dessous.

Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée L_p , une inductance mutuelle M et une résistance R_p . Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude E à la pulsation ω .

Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée L_s et la même inductance mutuelle M . La résistance R_s prend en compte à la fois la résistance de la bobine (négligeable le plus souvent) et du dipôle qu'on cherche à alimenter.



Avec les conventions représentées sur le schéma pour les intensités i_1 et i_2 , le coefficient M est positif.

On ne fait dans un premier temps aucune hypothèse sur les relations liant L_s , L_p et M .

1. Établir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités i_p et i_s en régime sinusoïdal établi.
2. En déduire le rapport des amplitudes complexes $\underline{I}_s/\underline{I}_p$, puis l'expression de \underline{I}_p en fonction de E et des caractéristiques des circuits.

3. On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal :

- ses inductances vérifient $L_s L_p \simeq M^2$ et $L_s/L_p = N_s^2/N_p^2$, avec N le nombre de spires des enroulements,
 - les résistances sont très faibles devant les impédances inductives.
- (a) Simplifier, à l'aide de DL, l'expression précédente de \underline{I}_p pour l'exprimer uniquement en fonction de E , R_s , R_p et des N_i .
Interpréter : à quoi est équivalent le circuit primaire?
- (b) Établir l'expression du rapport $\underline{I}_s/\underline{I}_p$. À quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire?
- (c) Établir l'expression du rapport $\underline{U}_s/\underline{U}_p$. Que peut-on en déduire concernant la puissance reçue par l'enroulement du primaire et celle fournie par l'enroulement du secondaire ?
- (d) Établir l'expression de la puissance moyenne fournie par le générateur d'amplitude E et de celle reçue par R_s et les comparer. Pour quelle valeur du rapport R_s/R_p cette dernière est-elle maximale quand E , R_p et ω sont fixés ?



1. Pour la loi des mailles à gauche, il faut prendre en compte les tensions aux bornes du générateur, de la résistance, de la bobine et de l'inductance mutuelle:

$$E - R_p i_p - L_p \frac{di_p}{dt} - M \frac{di_s}{dt} = 0$$

Pour le circuit secondaire, on a à tenir compte des tensions associées à l'auto-inductance et à l'inductance mutuelle et de celle aux bornes de la résistance:

$$L_s \frac{di_s}{dt} + M \frac{di_p}{dt} + R_s i_s = 0$$

2. En passant en notation complexe, on obtient

$$\begin{cases} E = R_p \underline{I}_p + j\omega(L_p \underline{I}_p + M \underline{I}_s) \\ 0 = R_s \underline{I}_s + j\omega(L_s \underline{I}_s + M \underline{I}_p) \end{cases}$$

La deuxième équation donne

$$\underline{I}_s = -\frac{j\omega M}{R_s + j\omega L_s} \underline{I}_p \iff \frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_p} = -\frac{j\omega M}{R_s + j\omega L_s}$$

On remplace cette expression dans la première équation et on obtient

$$E = R_p \underline{I}_p + j\omega L_p \underline{I}_p + \omega^2 \frac{M^2}{R_s + j\omega L_s} \underline{I}_p$$

donc

$$\underline{I}_p = \frac{1}{R_p + j\omega L_p + \omega^2 \frac{M^2}{R_s + j\omega L_s}} E$$

3. (a) Avec un peu de factorisation, l'expression précédente devient

$$\underline{I}_p = \frac{1}{R_p + j\omega L_p - \frac{j^2 \omega^2 M^2}{j\omega L_s} \frac{1}{1 + \frac{R_s}{j\omega L_s}}} E$$

On peut faire un DL car $R_s \ll j\omega L_s$:

$$\underline{I}_p = \frac{1}{R_p + j\omega L_p - \frac{j\omega M^2}{L_s} \left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right)} E = \frac{1}{R_p + j\omega \left(L_p - \frac{M^2}{L_s}\right) + \frac{M^2}{L_s^2} R_s} E$$

Or $M^2 \simeq L_s L_p$ donc $L_p - \frac{M^2}{L_s} \simeq 0$ et $\frac{M^2}{L_s^2} = \frac{L_s L_p}{L_s^2} = \frac{L_p}{L_s} = \frac{N_p^2}{N_s^2}$. On obtient donc

$$\underline{I}_p = \frac{1}{R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s} E$$

Si on pose $R_{\text{eq}} = R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s$, on a $\underline{I}_p = \frac{E}{R_{\text{eq}}}$. Le circuit primaire se comporte comme un conducteur ohmique de résistance R_{eq} .

(b) On a

$$\frac{\underline{I}_s}{\underline{I}_p} = -\frac{j\omega M}{R_s + j\omega L_s} \simeq -\frac{j\omega M}{j\omega L_s} \left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right) = -\frac{M}{L_s} \left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right) \simeq -\frac{M}{L_s}$$

donc le terme de tension associé au circuit secondaire dans la loi des mailles du circuit primaire donne

$$j\omega M \underline{I}_s = \left(-j\omega \frac{M^2}{L_s} + \frac{M^2 R_s}{L_s^2}\right) \underline{I}_p = \left(-j\omega L_p + \frac{L_p}{L_s} R_s\right) \underline{I}_p$$

On peut voir le circuit secondaire comme un composant d'impédance $\underline{Z} = -j\omega L_p + \frac{L_p}{L_s} R_s$, càd une "anti"-bobine (une bobine d'auto-inductance négative) avec une résistance interne.

(c) On a

$$\begin{cases} \underline{U}_p = j\omega L_p \underline{I}_p + j\omega M \underline{I}_s = j\omega L_p \underline{I}_p - j\omega L_p \underline{I}_p + \frac{L_p}{L_s} R_s \underline{I}_p = \frac{L_p}{L_s} R_s \underline{I}_p \\ \underline{U}_s = j\omega L_s \underline{I}_s + j\omega M \underline{I}_p = j\omega L_s \left(-\frac{M}{L_s}\right) \left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right) \underline{I}_p + j\omega M \underline{I}_p \\ = -j\omega M \left(1 - \frac{R_s}{j\omega L_s}\right) \underline{I}_p + j\omega M \underline{I}_p = \frac{M}{L_s} R_s \underline{I}_p \end{cases}$$

donc

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_p} = \frac{M R_s}{L_s} \times \frac{L_s}{L_p R_s} = \frac{M}{L_s}$$

On calcule les puissances avec $\mathcal{P} = U I$ donc

$$\frac{\mathcal{P}_s}{\mathcal{P}_p} = \frac{U_s}{U_p} \times \frac{I_s}{I_p} = -\frac{M}{L_p} \times \frac{M}{L_s} = -\frac{M^2}{L_s L_p} \simeq -1$$

La puissance cédée par le circuit primaire est reçue par le circuit secondaire. Le signe vient du transfert de puissance. Le fait que le rapport vaille 1 est normal car le transformateur est considéré comme idéal, il n'y a donc pas de perte de puissance.

(d) La puissance moyenne fournie par le générateur est $\mathcal{P}_g = \frac{E \left| \underline{I}_p \right|}{2} \cos \left(\arg \frac{\underline{I}_p}{E} \right)$. La formule est $\mathcal{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$ avec φ le déphasage entre la tension et le courant, cette

formule a été démontrée dans un DM mais n'est plus au programme. On a $I_p = \frac{E}{R_{eq}}$
 donc $\arg \frac{I_p}{E} = 0$ et

$$\mathcal{P}_g = \frac{E I_p}{2} = \frac{1}{R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s} \frac{E^2}{2}$$

Par ailleurs, la puissance moyenne reçue par la résistance R_s est

$$\mathcal{P}_{R_s} = R_s \frac{I_s^2}{2} = R_s \left(-\frac{M}{L_s}\right)^2 \frac{I_p^2}{2} = R_s \frac{L_p I_p^2}{L_s^2} = \frac{R_s \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2}{\left(R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s\right)^2} \frac{E^2}{2}$$

On a

$$\frac{\mathcal{P}_{R_s}}{\mathcal{P}_g} = \frac{R_s \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2}{R_p + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 R_s}$$

La puissance est d'autant plus transmise à la charge que la résistance R_p est faible (et donc qu'il y a peu de pertes par effet Joule dans cette résistance), ce qui est cohérent.

La puissance reçue par R_s peut se réécrire

$$\mathcal{P}_{R_s} = \frac{\frac{R_s}{R_p} \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \frac{R_s}{R_p}\right)^2} \frac{E^2}{2R_p}$$

On pose $X = \left(\frac{N_p}{N_s}\right)^2 \frac{R_s}{R_p}$ et on a

$$\mathcal{P}_{R_s} = \frac{X}{(1+X)^2} \frac{E^2}{2R_p}$$

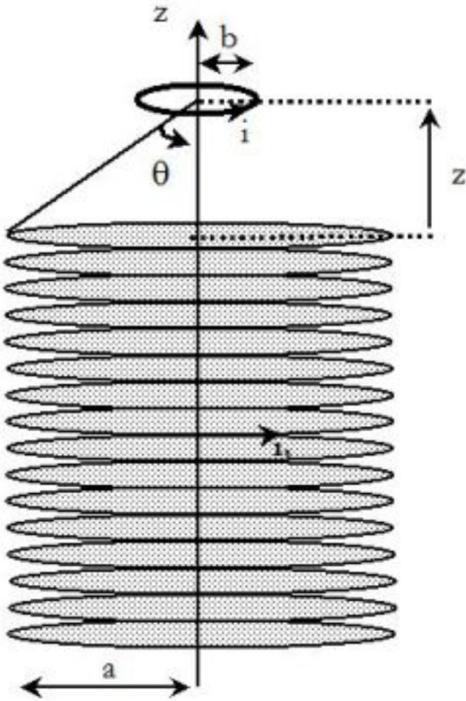
Cherchons le minimum de la fonction $f(X) = \frac{X}{(1+X)^2}$, on a

$$\frac{df}{dX} = \frac{(1+X)^2 - 2(1+X)X}{(1+X)^2} = \frac{(1+X)(1-X)}{(1+X)^2} = \frac{1-X}{1+X}$$

Cette dérivée est positive pour $X < 1$ et négative pour $X > 1$ donc la fonction f est croissante jusqu'à $X = 1$ puis décroissante: elle admet donc un maximum pour $X = 1$.

La puissance reçue par la résistance de charge R_s est maximale pour $X = 1$ c-à-d

$$\frac{R_s}{R_p} = \left(\frac{N_s}{N_p}\right)^2$$



Un long solénoïde vertical (semi - infini) à section circulaire (de rayon a et possédant n spires jointives par unité de longueur) est parcouru par un courant d'intensité :

$$i_1(t) = i_{1,m} \cos \omega t$$

Une bobine circulaire constituée de N spires de rayon $b \ll a$, de résistance R , d'inductance L et de masse m , est placée au-dessus du solénoïde à une distance z de son extrémité. On repère la position de la bobine par l'angle θ .

Vidéo de démonstration: <https://www.youtube.com/watch?v=txmKr69jGBk&t=182s>

On peut montrer que la composante du champ magnétique sur l'axe Oz au niveau de la spire est:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 n i_{1,m} \cos \omega t}{2} (1 - \cos \theta) \vec{e}_z$$

$$\text{avec } \tan \theta = \frac{a}{z}$$

A l'aide de la conservation du flux magnétique à travers la spire, on peut montrer que le champ magnétique radial au niveau de la spire peut s'écrire :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z, 0)}{dz}$$

1. Déterminer l'équation électrique vérifiée par le courant induit $i(t)$ dans la bobine. On posera $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$.
2. Par des raisonnements autour de la symétrie et des invariances, justifier que le champ magnétique au niveau de la bobine a deux composantes et dépend de deux grandeurs.
3. En déduire la force de Laplace verticale moyenne qui agit sur la bobine.
4. A quelle condition la lévitation au dessus du solénoïde ($\theta \sim \pi/2$) est-elle possible ? L'équilibre éventuel obtenu est-il stable ou instable ?



1. On calcule le flux à travers la bobine de ce champ en supposant qu'il est uniforme sur la surface de la spire :

$$\phi = \frac{\mu_0 n N \pi b^2}{2} (1 - \cos \theta) i_{1,m} \cos \omega t$$

On peut définir le coefficient de mutuelle induction M entre la spire et le solénoïde :

$$M = \frac{\mu_0 n N \pi b^2}{2} (1 - \cos \theta) \quad \text{alors} \quad \phi = M i_{1,m} \cos \omega t$$

L'équation électrique de la bobine est alors :

$$Ri + L \frac{di}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = 0$$

On se place en régime sinusoïdal forcé :

$$i = I_m e^{j\omega t} e^{j\varphi}$$

Alors :

$$Ri + jL\omega i + jM\omega i_1 = 0$$

Soit :

$$I_m e^{j\varphi} = -\frac{jM\omega}{R + jL\omega} i_{1m} = \frac{M\omega}{jR - L\omega} i_{1m}$$

On en déduit :

$$I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} i_{1m}$$

Et :

$$\tan \varphi = \frac{R}{L\omega} \left(\text{avec } \cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} < 0 \right)$$

2. La distribution de courant présente une invariance par rotation, le champ magnétique ne dépend donc pas de θ mais dépend de r et z . Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'anti-symétrie, le champ est donc contenu dans ce plan, il est selon les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_z .
3. La force de Laplace élémentaire est :

$$d\vec{F} = i \begin{pmatrix} 0 \\ dl \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_r \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} = -idl \begin{pmatrix} B_z \\ 0 \\ -B_r \end{pmatrix}$$

On s'intéresse à la composante verticale de la force et on intègre sur le contour de taille $2\pi b =$

$$\vec{F}_z = -iB_r \times 2\pi b \vec{u}_z = -2i\pi b \times \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z(z, 0)}{dz} \right) \vec{u}_z = i\pi N b^2 \frac{dB_z(z, 0)}{dz} \vec{u}_z$$

Or:

$$\frac{dB_z}{dz} = \frac{\mu_0 n i_{1,m} \cos \omega t}{2} \sin \theta \frac{d\theta}{dz}$$

et en utilisant $\tan \theta = a/z$, on a :

$$\frac{d\theta}{dz} = -\frac{1}{a} \sin^2 \theta$$

d'où :

$$\frac{dB}{dz} = -\frac{\mu_0 n i_{1,m} \cos \omega t}{2a} \sin^3 \theta$$

La force devient:

$$\vec{F}_z = -\frac{\pi b^2 \mu_0 N n i_{1,m} \cos \omega t}{2a} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

Soit :

$$\vec{F}_z = -\frac{\pi b^2 \mu_0 N n I_m i_{1,m} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)}{2a} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

En valeur moyenne sachant que $\left(\cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi) \right)$

$$\langle \vec{F}_z \rangle = -\frac{\pi b^2 \mu_0 n N I_m i_{1,m}}{4a} \sin^3 \theta \cos(\varphi) \vec{u}_z$$

Avec:

$$I_m = \frac{M\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} i_{1m} \text{ et } \cos \varphi = -\frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

Il vient :

$$\langle \vec{F}_z \rangle = \frac{\pi b^2 \mu_0 n N M L \omega^2 i_{1m}^2}{4a (R^2 + L^2\omega^2)} \sin^3 \theta \vec{u}_z$$

C'est bien une force répulsive (dirigée vers le haut).

4. Bien au-dessus du solénoïde, on a $\theta = \pi/2$. La lévitation est possible si la force de répulsion est supérieure au poids :

$$\frac{\pi b^2 \mu_0 n N M L \omega^2 i_{1m}^2}{4a (R^2 + L^2 \omega^2)} > mg$$

C'est un équilibre stable : si la masse monte, la force de répulsion diminue et la masse retombera. Idem si elle commence par descendre.

Ex. 12

Station de charge d'une brosse à dents électrique (Centrale Supélec PSI 2019)



La figure 1 présente une station de charge par induction d'une brosse à dents électrique. Le modèle testé bénéficie d'un indice de protection IP67 le protégeant des effets de l'immersion jusqu'à un mètre. Il n'est pas démontable, le circuit électrique alimentant la bobine primaire (1) est totalement inclus dans une résine blanche empêchant d'accéder à ses caractéristiques. Les seules mesures possibles sont réalisées aux bornes du bobinage secondaire (2) situé à la base de la brosse à dents.



Figure 1: Station de charge

A - Conversion alternatif BF-continu

La station de charge est raccordée au réseau électrique local (le «secteur») basse tension qui délivre une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 230 V à la fréquence 50 Hz. On applique cette tension $e(t) = E \sin(\omega t)$ à l'entrée d'un pont redresseur à quatre diodes qu'on supposera idéales (figure 2) afin que le signal $s_1(t)$ soit un redressement double alternance (valeur absolue) du signal $e(t)$. Cette sous-partie A propose l'étude d'un circuit électrique pouvant alimenter le bobinage primaire.

1. Calculer E .

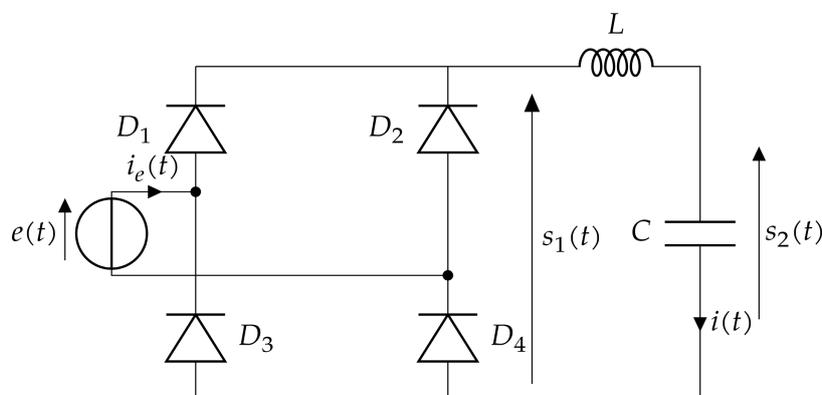


Figure 2: Redresseur PD2 avec filtrage par cellule LC

La figure 3 ci-dessous représente le spectre du signal $s_1(t)$ auquel il manque sa valeur moyenne.

2. Ajouter cette composante moyenne sur le spectre de la figure 3 en justifiant votre réponse.

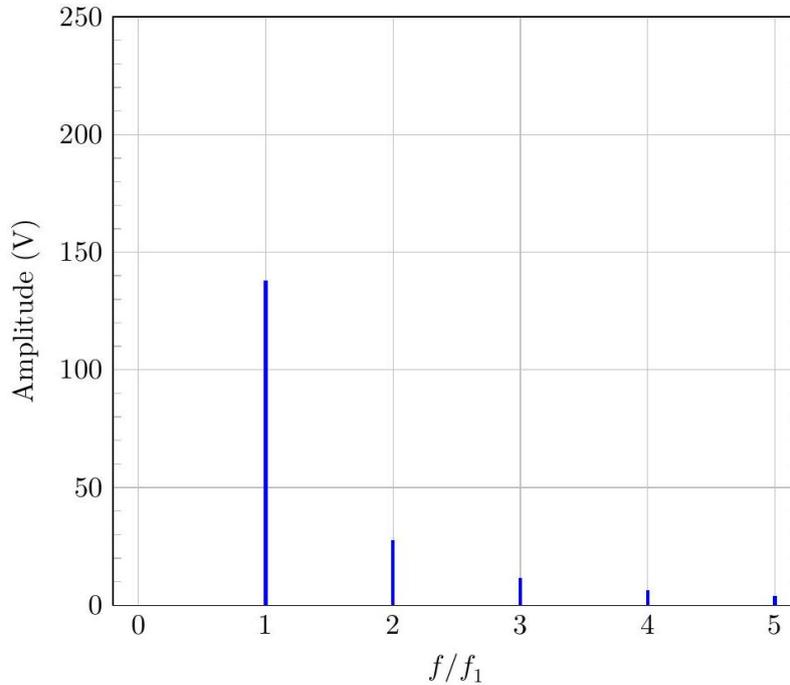


Figure 3: Spectre d'amplitude du signal $s_1(t)$ de fréquence f_1

3. Quelle est la valeur de la fréquence f_1 de la composante fondamentale du signal $s_1(t)$?

Afin d'obtenir une tension quasiment constante, on peut placer une cellule LC en sortie du pont de diodes (figure 2). Le taux d'ondulation du signal de sortie est défini par $\tau_o = \frac{\Delta s_2}{\langle s_2 \rangle}$ où $\langle s_2 \rangle$ est la valeur moyenne temporelle de $s_2(t)$ et Δs_2 la tension crête à crête.

4. En prenant $L = 100\text{mH}$, comment doit-on choisir C afin que le taux d'ondulation de $s_2(t)$ soit inférieur à 5% ?

B - Conversion continu-alternatif HF

La tension continue générée précédemment peut être convertie en un signal alternatif de haute fréquence à l'aide d'un onduleur. La structure la plus simple est celle d'un onduleur de tension monophasé «pleine onde» (figure 4). Les commutateurs commandés K_1 à K_4 sont considérés idéaux et fonctionnent de manière périodique à la fréquence $f_0 = 1/T_0$.

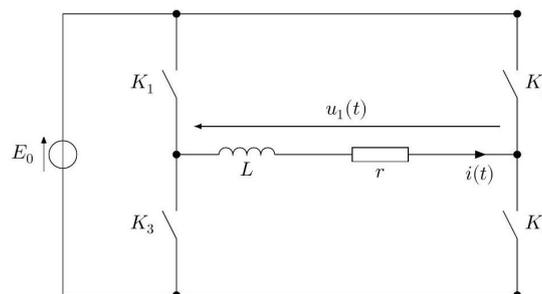


Figure 4: Onduleur pleine onde

5. Remplir le tableau ci-dessous avec l'état de fonctionnement de chaque commutateur et écrire la valeur de $u_1(t)$ sur chaque demi-période.

	K_1	K_2	K_3	K_4	$u_1(t)$
$0 < t < T_0/2$	fermé				
$T_0/2 < t < T_0$					

6. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ sur chaque demi-période.

- Déterminer la valeur maximale i_{\max} de $i(t)$ en fonction de E, r et du paramètre $\alpha = \exp\left(-\frac{rT_0}{2L}\right)$.
- Sur un même graphe, tracer les chronogrammes de la tension $u_1(t)$ et du courant $i(t)$ traversant la charge inductive dans le cas où $L/r = T_0/4$.
- Comment, en ordre de grandeur, doit-on choisir le rapport r/L afin d'avoir un courant $i(t)$ le plus proche possible d'un courant sinusoïdal sans trop perdre en amplitude?

C - Couplage par induction

L'accumulateur de la brosse à dents est de type nickel-hydrure métallique Ni – MH. Ses caractéristiques sont « 1,2 V; 2000 mA · h ». Pour une meilleure longévité de l'accumulateur, le fabricant préconise un courant de charge de 200 mA.

- Sachant que le rendement de charge est d'environ 70%, combien de temps dure une charge complète d'un accumulateur initialement totalement déchargé?

Une bobine test est placée sur la station de charge. Elle est constituée d'un enroulement de 50 spires de fil de cuivre de 0,22 mm de diamètre sur un cylindre de 20 mm de diamètre. On visualise à l'oscilloscope la tension aux bornes de cette bobine (figure 5).

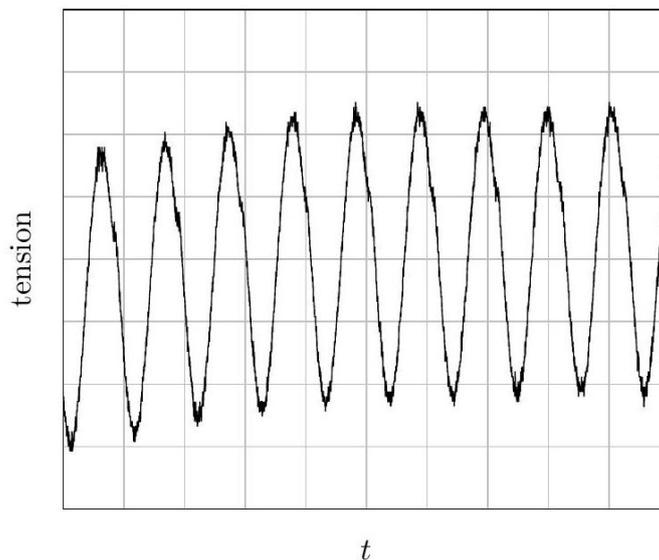


Figure 5: Enregistrement ($25\mu\text{s}/\text{div}$ et $50\text{mV}/\text{div}$)

- Déterminer numériquement la fréquence f_0 du signal alternatif généré lors de la conversion continu-alternatif HF ? Pourquoi est-il important que cette fréquence soit plus élevée que celle délivrée par le secteur?



- E est l'amplitude d'une tension de valeur efficace $U = 230 \text{ V}$: $E = \sqrt{2}U$. $E = 325 \text{ V}$
- On admet que $s_1(t) = |e(t)|$, donc $s_1(t) = E|\sin(\omega t)|$. La composante continue de s_1 est

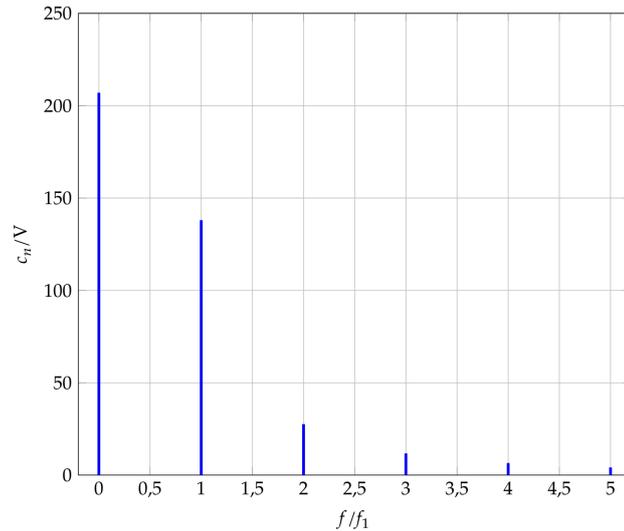
la valeur moyenne de s_1 : $c_0 = \frac{E}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Donc, la fonction étant de période $\frac{T}{2}$: $c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} |\sin(\omega t)| dt$ Donc

$$c_0 = \frac{2E}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(\omega t) dt. \text{ Ce qui donne } c_0 = \frac{2E}{\omega T} \left[-\cos\left(\frac{\omega T}{2}\right) + 1 \right].$$

Donc $c_0 = \frac{2E}{\pi}$. Soit $c_0 = 207 \text{ V}$

Le spectre du signal est :



3. La fréquence de $s_1(t)$ est $f_1 = 100$ Hz.

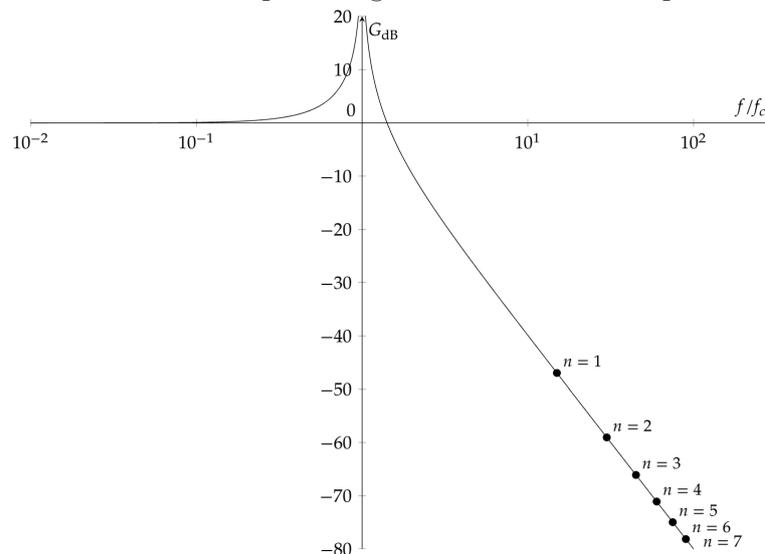
4. La fonction de transfert du filtre est $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}$. Il s'agit d'un filtre passe-bas du second ordre, avec une résonance infinie pour la fréquence $f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Le signal d'entrée est tel que

$$\begin{cases} \langle s_1 \rangle = \frac{2E}{\pi} = 207 \text{ V} \\ \Delta s_1 = E = 325 \text{ V} \end{cases}$$

Le taux d'ondulation du signal d'entrée est donc $\frac{\Delta s_1}{\langle s_1 \rangle} = 1,57$.

Ce taux d'ondulation est très grand devant la valeur souhaitée, il faudra donc que le filtre atténue très fortement les harmoniques du signal. On peut donc supposer que toutes les harmoniques devront avoir des fréquences grandes devant la fréquence caractéristique f_c .



La gain en très basse fréquence est de 1 donc $\langle s_2 \rangle = \langle s_1 \rangle$.

Si toutes les harmoniques ont des fréquences supérieures à f_c , le montage a un comportement double-intégrateur pour la partie variable des signaux. On note

$$\begin{cases} s_1(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_1(t) \\ s_2(t) = \langle s_1 \rangle + \tilde{s}_2(t) \end{cases}$$

En notation complexe, $[1 - LC\omega^2] \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$. Ce qui se simplifie, si toutes les composantes sont dans le domaine double intégrateur :

$$-LC\omega^2 \tilde{s}_2 = \tilde{s}_1$$

En notation réelle : $LC \frac{d^2 \tilde{s}_2}{dt^2} = \tilde{s}_1(t)$.

Pour $0 < t < \frac{T_0}{2}$, $\tilde{s}_1(t) = E \sin(\omega t) - \frac{2E}{\pi}$

De façon évidente, la solution de valeur moyenne nulle et de période $\frac{T_0}{2}$ est :

$$\tilde{s}_2(t) = -\frac{E}{LC} \left[\frac{1}{\omega^2} \left(\sin(\omega t) - \frac{2}{\pi} \right) + \frac{1}{\pi} \left[t \left(t - \frac{T_0}{2} \right) - \frac{T_0^2}{2} \right] \right]$$

Et l'amplitude crête-à-crête est :

$$\Delta s_2 = \tilde{s}_2(0) - \tilde{s}_2\left(\frac{T_0}{4}\right)$$

$$\text{Donc : } \Delta s_2 = \frac{E}{LC} \left[\frac{1}{\omega^2} \sin \frac{\omega T_0}{4} + \frac{T_0^2}{16\pi} \right]$$

Or $\omega T_0 = 2\pi$, donc $\sin \frac{\omega T_0}{4} = 1$ et donc

$$\Delta s_2 = \frac{ET_0^2}{16\pi^2 LC} (\pi + 4)$$

Le taux d'ondulation du signal de sortie est donc

$$\tau_2 = \Delta s_2 \frac{\pi}{2E}$$

$$\text{Donc } \tau_2 = \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi LC}$$

On note $\tau_c = 5 \cdot 10^{-2}$ le taux limite. On souhaite $\tau_2 < \tau_c$.

$$\text{Donc } C > \frac{T_0^2(\pi + 4)}{32\pi L \tau_c}. \text{ Soit } C > 5,68 \text{mF}$$

5. Les règles de fonctionnement sont les suivantes :

- K_1 et K_3 ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre E_0 en court-circuit.
- K_2 et K_4 ne doivent pas être fermés simultanément pour ne pas mettre E_0 en court-circuit.
- K_1 et K_3 ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre la charge inductive en circuit ouvert.
- K_2 et K_4 ne doivent pas être ouverts simultanément pour ne pas mettre la charge inductive en circuit ouvert.

Il y a donc quatre états possibles pour les diodes. Comme on cherche un cycle de fonctionnement n'utilisant que deux de ces états, et que l'on veut que la valeur moyenne de u_1 soit nulle, on propose le cycle suivant:

	K_1	K_2	K_3	K_4	$u_1(t)$
$0 < t < \frac{T_0}{2}$					$u_1(t) = E_0$
$\frac{T_0}{2} < t < T_0$					$u_1(t) = -E_0$

6. L'intensité dans la charge est donnée en notation complexe par $[Lj\omega + r]\underline{i} = \underline{u}_1$.

En tenant compte de la valeur de u_1 :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = \frac{E}{L} & \text{pour } 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ \frac{di}{dt} + \frac{r}{L}i(t) = -\frac{E}{L} & \text{pour } \frac{T_0}{2} < t < T_0 \end{cases}$$

7. Pour $0 < t < \frac{T_0}{2}$, la solution générale de l'équation différentielle est $i(t) = ae^{-\frac{rt}{L}} + \frac{E}{r}$ où a est une constante d'intégration.

Or

$$\begin{cases} i(0) = -i_{\max} \\ i\left(\frac{T_0}{2}\right) = i_{\max} \end{cases}$$

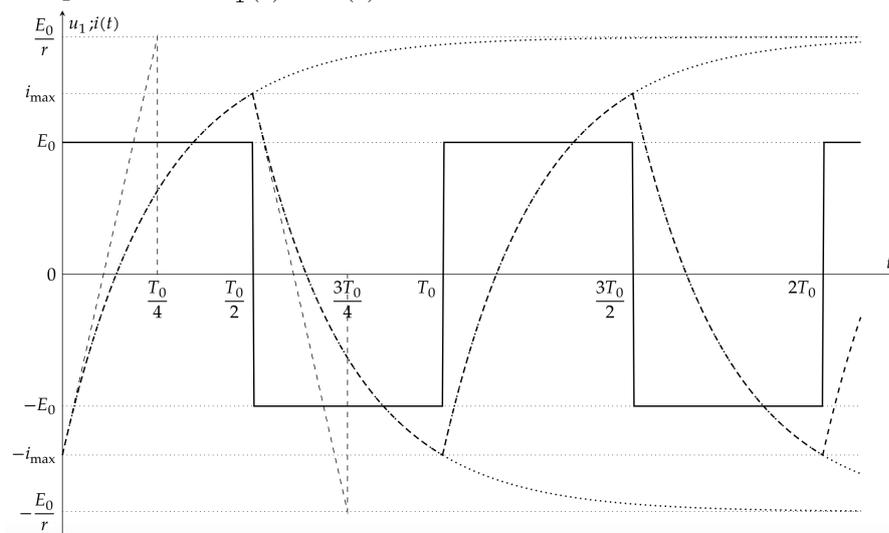
donc

$$\begin{cases} -i_{\max} - \frac{E}{r} = a \\ i_{\max} - \frac{E}{r} = ae^{-\frac{rT_0}{2L}} = a\alpha \end{cases}$$

et $i_{\max} - \frac{E}{r} = -\alpha \left(i_{\max} + \frac{E}{r} \right)$

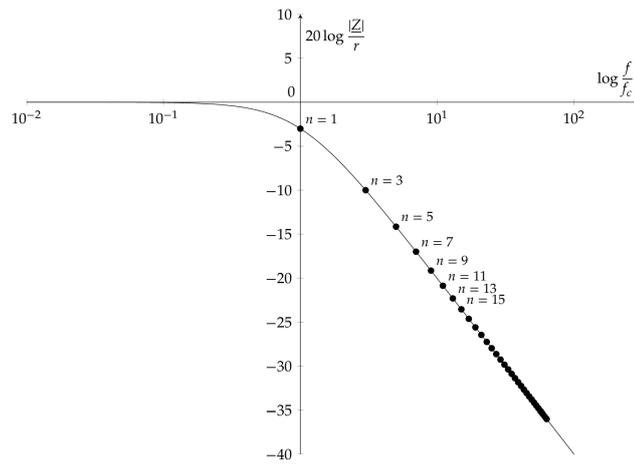
Donc $i_{\max} = \frac{E}{r} \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$

8. Le graphique représentant $u_1(t)$ et $i(t)$ est:



9. L'impédance de la branche (L, r) est $\underline{Z}(j\omega) = r + Lj\omega = \frac{u_1}{i}$. Donc $\frac{ri}{u_1} = \frac{1}{1 + \frac{Lj\omega}{r}}$.

Le montage se comporte comme un filtre passe-bas du premier ordre, de fréquence de coupure $f_c = \frac{r}{2\pi L}$.



Si on choisit $f_0 \simeq f_c$, le fondamental sera légèrement atténué, les harmoniques de rang 3, 5, 7, ... seront plus fortement atténués. Cette situation est un bon compromis : $i(t)$ sera proche d'un signal sinusoïdal sans que son amplitude soit trop faible.

Il faut choisir les composants de telle sorte que $\frac{r}{L} \simeq 2\pi f_0$.

10. On note :

- $i = 200$ mA le courant de charge;
- $Q = 2\text{Ah} = 7,20\text{kC}$ la charge totale;
- $\eta = 0,70$ le rendement de l'opération de charge;
- τ le temps nécessaire pour la charge.

Alors $Q = \eta i \tau$, et donc $\tau = \frac{Q}{i\eta} \cdot \tau = 5 \cdot 10^4 \text{ s} \tau = 14 \text{ h}$

11. On compte 9 périodes sur 9,5 carreaux. La période est donc de $26\mu\text{ s}$ environ et la fréquence est $f = 37\text{kHz}$.

La loi de FARADAY, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ montre que la force électromotrice induite est proportionnelle à la fréquence du signal inducteur. Avec la fréquence utilisée, la force électromotrice induite sera environ huit-cent fois plus grande que celle obtenue avec un courant excitateur de fréquence 50 Hz.