

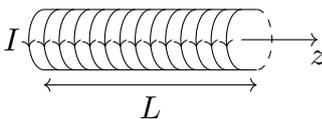


# TD 31 - Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

☆ application directe du cours    ☆☆ entraînement    ☆☆☆ perfectionnement    ♥ incontournable

## Questions de cours

- Définir l'inductance propre d'un circuit. Donner son expression pour une bobine supposée infinie. Décrire le phénomène d'auto-induction.

- 

Solénoïde de longueur  $L$ ,  $n$  spires par unité de longueur.

Estimez la valeur de l'inductance des solénoïdes utilisés en TP.

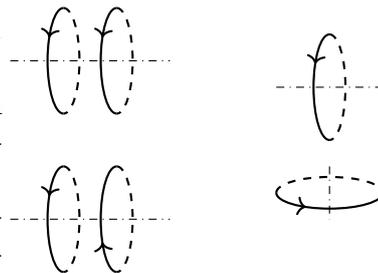
- Décrire le phénomène d'induction mutuelle. Définir l'inductance mutuelle.
- Présenter le modèle du transformateur idéal.

## Ex. 1

### Questions qualitatives



- On double le rayon d'une solénoïde cylindrique en gardant le même nombre de spires par unité de longueur. Que devient son inductance propre ?
- Comment enrouler une grande longueur de fil sur un support cylindrique de telle sorte que l'inductance propre du bobinage soit nulle ?
- Déterminer le signe du coefficient de mutuelle inductance entre les deux spires circulaires dans les trois situations ci-contre.



## Ex. 2

### Schéma équivalent et équation électrique



Un circuit électrique filiforme plan de résistance  $R$ , d'auto-inductance  $L$  et de surface  $S$  est plongé dans un champ magnétique uniforme variable sinusoidalement dans le temps et orthogonal au circuit :  $\vec{B}(t) = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . Représenter le schéma équivalent au circuit et établir l'équation électrique régissant le comportement de l'intensité électrique.

- Dans le cas où on néglige l'auto-induction.
- Dans le cas où on prend en compte l'auto-induction.

## Ex. 3

### Auto-induction et loi de modération de Lenz



Soit un circuit électrique filiforme d'auto-inductance  $L$ , de résistance  $R$  alimenté par un générateur de f.e.m.  $E$  constante. il n'y a pas de champ extérieur, à l'instant  $t = 0$  on ferme l'interrupteur  $K$ .

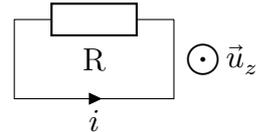
- Représenter le schéma électrique équivalent pour  $t > 0$ .
- En déduire l'équation régissant le comportement de l'intensité électrique notée  $i$ .
- Résoudre cette équation. Commenter l'influence de  $L$ .

## Ex. 4

## Comparaison entre auto-induction et induction extérieure



On considère un circuit électrique rectangulaire, de surface  $S$ , plongé dans un champ magnétique uniforme dépendant du temps  $\vec{B}_{\text{ext}} = B_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$ . On note  $L$  le coefficient d'auto-inductance du circuit et  $R$  sa résistance (voir ci-contre).



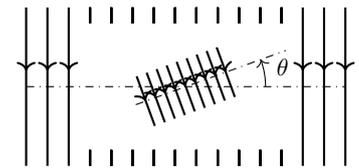
1. Établir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité  $i$  en faisant apparaître un temps caractéristique  $\tau$ .
2. Expliquer pourquoi au bout d'un certain temps de fonctionnement, il est légitime de chercher la solution sous la forme  $i(t) = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$ . Déterminer la valeur de  $i_0$ .
3. Exprimer le rapport des amplitudes de la force électromotrice auto-induite et de la force électromotrice extérieure. En déduire une condition sur la fréquence du champ magnétique pour laquelle l'auto-induction est négligeable.
4. On donne  $R = 10 \Omega$  et  $L = 0,10 \text{ mH}$ . Déterminer la valeur numérique de la fréquence critique qui délimite les deux régimes (auto-induction négligeable ou non).

## Ex. 5

## Calcul d'un coefficient de mutuelle inductance



On place un petit solénoïde, de section  $S_1$ , possédant  $N_1$  spires, placé à l'intérieur d'un grand solénoïde, possédant  $N_2$  spires, de section  $S_2$  et de longueur  $L_2$ . On note  $\theta$  l'angle entre les axes des deux solénoïdes (voir ci-contre).



Déterminer le coefficient de mutuelle inductance  $M$  entre les deux solénoïdes.

## Ex. 6

## Circuits couplés par mutuelle inductance



Soient deux circuits couplés par mutuelle inductance. Le premier comporte un générateur de f.e.m.  $E = E_0 \cos \omega t$  et une résistance  $R$ . Son inductance propre est  $L$ . Le second circuit comporte les mêmes éléments, le générateur en moins. On note  $M$  la mutuelle inductance entre les deux circuits.

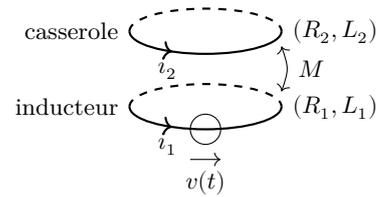
1. Trouver les équations différentielles satisfaites par les intensités  $i_1$  et  $i_2$  des deux circuits.
2. En déduire les équations satisfaites par  $x = i_1 + i_2$  et  $y = i_1 - i_2$ .
3. Donner l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
4. On se place désormais dans le cadre du régime sinusoïdal forcé. En déduire  $\underline{I}_2$ , amplitude complexe de l'intensité dans le circuit secondaire.

On considère maintenant deux circuits d'inductance respective  $L_1$  et  $L_2$ , de même résistance  $R$ , couplés par une mutuelle inductance  $M$ . Ces deux circuits comportent des générateurs de f.e.m. de tension respective  $E_1$  et  $E_2$ .

5. Exprimer les tensions  $E_1$  et  $E_2$  en fonction des intensités  $i_1$  et  $i_2$ .
6. Réaliser un bilan de puissance pour le primaire et pour le secondaire.
7. Faire un bilan de puissance global et faire intervenir l'énergie magnétique des deux circuits  $\mathcal{U}_m$ .

On peut chauffer le fond d'une casserole au moyen des courants induits dans le fond métallique de celle-ci par un champ magnétique variable.

Un bobinage d'autoinductance  $L_1 = 30 \mu\text{H}$  et de résistance  $R_1 = 18 \text{ m}\Omega$ , nommé l'inducteur, est logé dans une plaque en céramique et alimenté par une tension sinusoïdale  $v(t) = V_0 \cos(\omega t)$  de fréquence  $f = 25 \text{ kHz}$  afin de créer un champ magnétique.



Le fond de la casserole posée sur la plaque en céramique est modélisé par une spire de résistance  $R_2 = 8,3 \text{ m}\Omega$  et d'inductance  $L_2 = 0,24 \mu\text{H}$ .

Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre l'inducteur et le fond métallique de la casserole. Le coefficient d'induction mutuelle entre les deux circuits vaut  $M = 2 \mu\text{H}$ .

1. Déterminer les deux équations différentielles couplées vérifiées par les intensités  $i_1$  et  $i_2$  dans les deux circuits.

2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes  $\frac{I_2}{I_1}$ , puis l'expression de

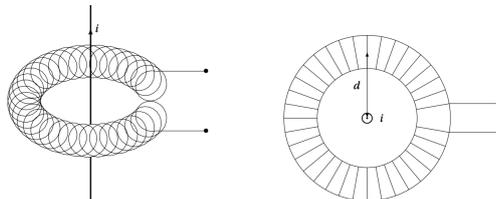
l'impédance d'entrée complexe du système :  $\underline{Z}_e = \frac{V}{I_1}$ .

3. Vérifier que la pulsation  $\omega$  est telle que  $R_1 \ll L_1\omega$  et  $R_2 \ll L_2\omega$ , simplifier les deux expressions précédentes littérales puis calculer la valeur numérique de leur module.

4. Pour des raisons de sécurité, on se fixe comme objectif de limiter les pertes par effet Joule dans l'inducteur à  $50 \text{ W}$ . Quelle est alors la valeur efficace du courant maximal admissible dans l'inducteur ? En déduire la valeur efficace maximale de la tension d'alimentation, l'intensité du courant efficace dans la casserole et la puissance de chauffe développée dans celle-ci.

5. Risque-t-on de s'électrocuter en touchant une casserole posée sur une plaque à induction ?

Pour mesurer l'intensité efficace d'un courant alternatif dans une installation électrique, on peut utiliser une pince ampèremétrique dont cet exercice présente le principe de fonctionnement.



On cherche donc à mesurer l'intensité du courant alternatif qui circule dans un fil assimilé à un fil rectiligne infini, choisi selon l'axe  $Oz$ . On choisit un système de coordonnées cylindriques, avec une base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . L'intensité qui circule dans le sens des  $z$  croissants est de la forme  $i = I_{\text{eff}}\sqrt{2} \cos(\omega t)$ . On dispose autour du fil un circuit constitué d'un ensemble de  $N$  spires circulaires, chacune d'une aire  $S$ , qu'on modélise par un tore disposé autour du fil. Avec le système de coordonnées utilisé, le vecteur surface de chaque spire est selon  $\vec{e}_\theta$ .

On donne le champ magnétique créé par un fil infini traversé par un courant  $i$  à une distance  $d$ :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d} \vec{e}_\theta$$

1. Avec une intensité de 1,0 A, que vaut le champ magnétique à une distance  $d = 2,0$  cm? On donne  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  H.m<sup>-1</sup>. Le champ magnétique est-il uniforme sur le disque délimité par chaque spire ?

Dans la suite, on confondra le champ magnétique moyen sur le disque délimité par chaque spire avec sa valeur au centre de cette spire, à la distance  $d$  du fil.

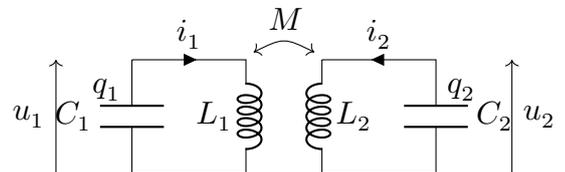
2. Exprimer la force électromotrice  $e$  développée aux bornes du circuit constitué par les  $N$  spires.
3. En déduire l'expression de la valeur efficace  $E_{\text{eff}}$  de la tension mesurée avec cette pince ampèremétrique en fonction  $\mu_0, S, \omega, I_{\text{eff}}, d$ .
4. (a) Quel doit être l'ordre de grandeur de  $N$  pour avoir une tension de l'ordre de 0,1 V pour un courant de l'ordre de 100 A ? On prendra les paramètres géométriques :  $d \simeq 3$  cm ;  $S \simeq 1$  cm<sup>2</sup>, à la pulsation  $\omega = 100\pi$  rad.s<sup>-1</sup>.  
(b) Pourquoi ne peut-on pas avoir confiance dans la mesure de la photographie ?

### Ex. 9

### Oscillateurs couplés par induction mutuelle



Deux circuits électriques sont couplés par induction mutuelle comme indiqué sur le schéma ci-contre. On a  $L_1 = L_2 = L$  et  $C_1 = C_2 = C$ .



1. Établir un système d'équations différentielles couplées vérifiées par les charges  $q_1$  et  $q_2$  des deux condensateurs. On posera  $k = \frac{M}{L}$  et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .
2. À l'instant  $t = 0$ , le condensateur  $C_1$  porte la charge  $q_0$  tandis que le condensateur  $C_2$  est déchargé et les intensités dans les deux circuits sont nulles. Résoudre le système d'équations précédent.
3. Montrer que si  $k \ll 1$ , les fonctions  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  sont sinusoïdales du temps, de pulsation  $\omega_0$ , modulées en amplitude à une pulsation  $\Omega$  à déterminer.
4. En pratique, quels phénomènes limitent la durée des oscillations ?
5. Proposer un système mécanique ayant un comportement analogue à celui-ci.

### Ex. 10

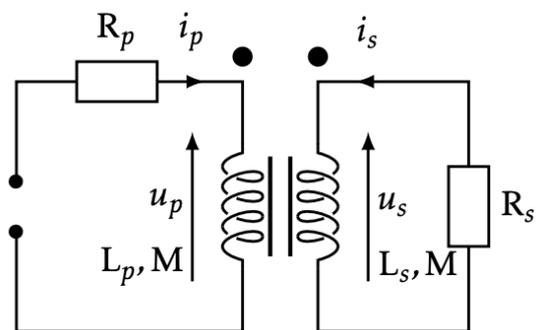
### Puissance dans un transformateur idéal



On considère le transformateur représenté sur la figure ci-dessous.

Le circuit primaire (à gauche sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée  $L_p$ , une inductance mutuelle  $M$  et une résistance  $R_p$ . Il est alimenté par un générateur idéal de tension d'amplitude  $E$  à la pulsation  $\omega$ .

Le circuit secondaire (à droite sur le schéma) est caractérisé par une auto-inductance notée  $L_s$  et la même inductance mutuelle  $M$ . La résistance  $R_s$  prend en compte à la fois la résistance de la bobine (négligeable le plus souvent) et du dipôle qu'on cherche à alimenter.



Avec les conventions représentées sur le schéma pour les intensités  $i_1$  et  $i_2$ , le coefficient  $M$  est positif.

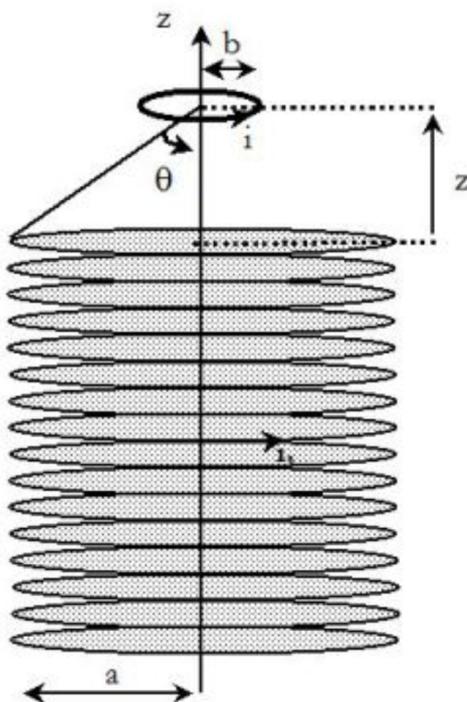
On ne fait dans un premier temps aucune hypothèse sur les relations liant  $L_s, L_p$  et  $M$ .

1. Établir le système d'équations couplées vérifiées par les intensités  $i_p$  et  $i_s$  en régime sinusoïdal établi.

2. En déduire le rapport des amplitudes complexes  $\underline{I}_s/\underline{I}_p$ , puis l'expression de  $\underline{I}_p$  en fonction de  $E$  et des caractéristiques des circuits.
3. On considère maintenant le cas d'un transformateur idéal :
  - ses inductances vérifient  $L_s L_p \simeq M^2$  et  $L_s/L_p = N_s^2/N_p^2$ , avec  $N$  le nombre de spires des enroulements,
  - les résistances sont très faibles devant les impédances inductives.
  - (a) Simplifier, à l'aide de DL, l'expression précédente de  $\underline{I}_p$  pour l'exprimer uniquement en fonction de  $E$ ,  $R_s$ ,  $R_p$  et des  $N_i$ .  
Interpréter : à quoi est équivalent le circuit primaire?
  - (b) Établir l'expression du rapport  $\underline{I}_s/\underline{I}_p$ . À quoi est équivalent le circuit secondaire vu du circuit primaire?
  - (c) Établir l'expression du rapport  $\underline{U}_s/\underline{U}_p$ . Que peut-on en déduire concernant la puissance reçue par l'enroulement du primaire et celle fournie par l'enroulement du secondaire ?
  - (d) Établir l'expression de la puissance moyenne fournie par le générateur d'amplitude  $E$  et de celle reçue par  $R_s$  et les comparer. Pour quelle valeur du rapport  $R_s/R_p$  cette dernière est-elle maximale quand  $E$ ,  $R_p$  et  $\omega$  sont fixés ?

### Ex. 11

### Lévitation magnétique



Un long solénoïde vertical (semi - infini) à section circulaire (de rayon  $a$  et possédant  $n$  spires jointives par unité de longueur) est parcouru par un courant d'intensité :

$$i_1(t) = i_{1,m} \cos \omega t$$

Une bobine circulaire constituée de  $N$  spires de rayon  $b \ll a$ , de résistance  $R$ , d'inductance  $L$  et de masse  $m$ , est placée au-dessus du solénoïde à une distance  $z$  de son extrémité. On repère la position de la bobine par l'angle  $\theta$ .

Vidéo de démonstration: <https://www.youtube.com/watch?v=txmKr69jGBk&t=182s>

On peut montrer que la composante du champ magnétique sur l'axe  $Oz$  au niveau de la spire est:

$$\vec{B}_z = \frac{\mu_0 n i_{1,m} \cos \omega t}{2} (1 - \cos \theta) \vec{e}_z$$

avec  $\tan \theta = \frac{a}{z}$

A l'aide de la conservation du flux magnétique à travers la spire, on peut montrer que le champ magnétique radial au niveau de la spire peut s'écrire :

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(z, 0)}{dz}$$

1. Déterminer l'équation électrique vérifiée par le courant induit  $i(t)$  dans la bobine. On posera  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ .
2. Par des raisonnements autour de la symétrie et des invariances, justifier que le champ magnétique au niveau de la bobine a deux composantes et dépend de deux grandeurs.
3. En déduire la force de Laplace verticale moyenne qui agit sur la bobine.

4. A quelle condition la lévitation au dessus du solénoïde ( $\theta \sim \pi/2$ ) est-elle possible ? L'équilibre éventuel obtenu est-il stable ou instable ?

Ex. 12

Station de charge d'une brosse à dents électrique (Centrale Supélec PSI 2019)

★ ★ ★

La figure 1 présente une station de charge par induction d'une brosse à dents électrique. Le modèle testé bénéficie d'un indice de protection IP67 le protégeant des effets de l'immersion jusqu'à un mètre. Il n'est pas démontable, le circuit électrique alimentant la bobine primaire (1) est totalement inclus dans une résine blanche empêchant d'accéder à ses caractéristiques. Les seules mesures possibles sont réalisées aux bornes du bobinage secondaire (2) situé à la base de la brosse à dents.



Figure 1: Station de charge

## A - Conversion alternatif BF-continu

La station de charge est raccordée au réseau électrique local (le «secteur») basse tension qui délivre une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace 230 V à la fréquence 50 Hz. On applique cette tension  $e(t) = E \sin(\omega t)$  à l'entrée d'un pont redresseur à quatre diodes qu'on supposera idéales (figure 2) afin que le signal  $s_1(t)$  soit un redressement double alternance (valeur absolue) du signal  $e(t)$ . Cette sous-partie A propose l'étude d'un circuit électrique pouvant alimenter le bobinage primaire.

1. Calculer  $E$ .

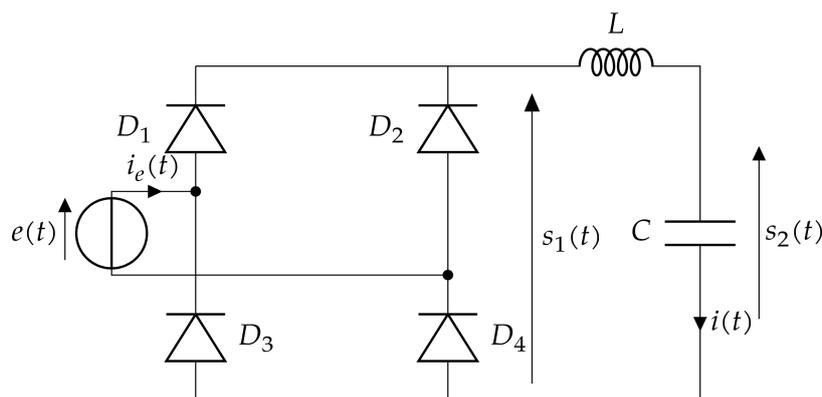


Figure 2: Redresseur PD2 avec filtrage par cellule LC

La figure 3 ci-dessous représente le spectre du signal  $s_1(t)$  auquel il manque sa valeur moyenne.

2. Ajouter cette composante moyenne sur le spectre de la figure 3 en justifiant votre réponse.
3. Quelle est la valeur de la fréquence  $f_1$  de la composante fondamentale du signal  $s_1(t)$  ?

Afin d'obtenir une tension quasiment constante, on peut placer une cellule LC en sortie du pont de diodes (figure 2). Le taux d'ondulation du signal de sortie est défini par  $\tau_o = \frac{\Delta s_2}{\langle s_2 \rangle}$  où  $\langle s_2 \rangle$  est la valeur moyenne temporelle de  $s_2(t)$  et  $\Delta s_2$  la tension crête à crête.

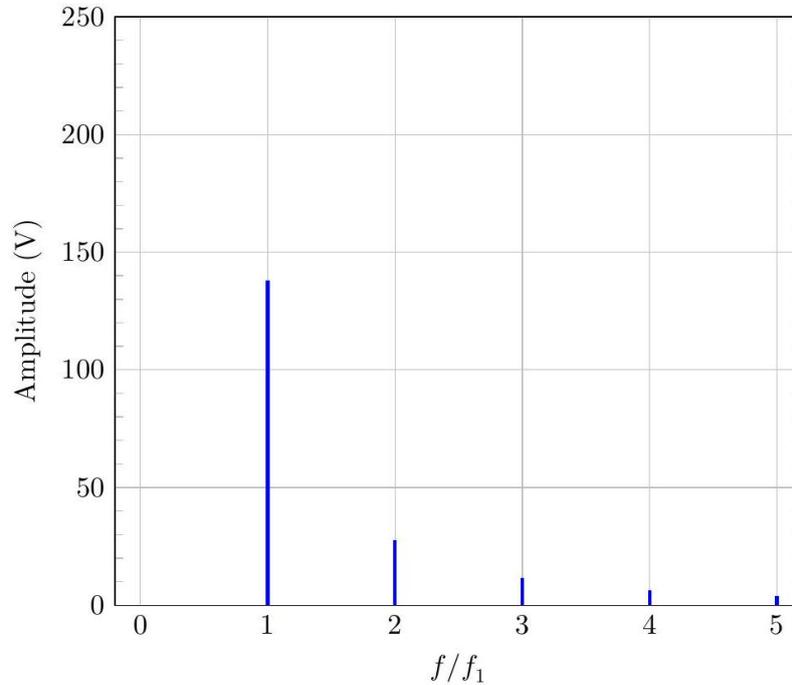


Figure 3: Spectre d'amplitude du signal  $s_1(t)$  de fréquence  $f_1$

4. En prenant  $L = 100\text{mH}$ , comment doit-on choisir  $C$  afin que le taux d'ondulation de  $s_2(t)$  soit inférieur à 5% ?

## B - Conversion continu-alternatif HF

La tension continue générée précédemment peut être convertie en un signal alternatif de haute fréquence à l'aide d'un onduleur. La structure la plus simple est celle d'un onduleur de tension monophasé «pleine onde» (figure 4). Les commutateurs commandés  $K_1$  à  $K_4$  sont considérés idéaux et fonctionnent de manière périodique à la fréquence  $f_0 = 1/T_0$ .

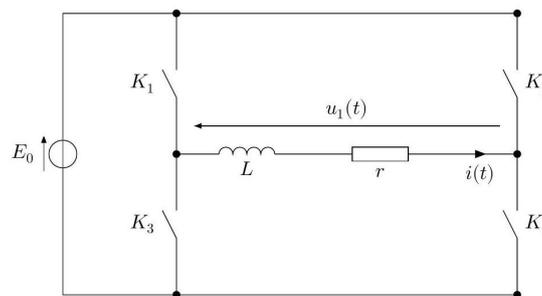


Figure 4: Onduleur pleine onde

5. Remplir le tableau ci-dessous avec l'état de fonctionnement de chaque commutateur et écrire la valeur de  $u_1(t)$  sur chaque demi-période.

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$K_4$	$u_1(t)$
$0 < t < T_0/2$	fermé				
$T_0/2 < t < T_0$					

6. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$  sur chaque demi-période.
7. Déterminer la valeur maximale  $i_{\max}$  de  $i(t)$  en fonction de  $E, r$  et du paramètre  $\alpha = \exp\left(-\frac{rT_0}{2L}\right)$ .
8. Sur un même graphe, tracer les chronogrammes de la tension  $u_1(t)$  et du courant  $i(t)$  traversant la charge inductive dans le cas où  $L/r = T_0/4$ .
9. Comment, en ordre de grandeur, doit-on choisir le rapport  $r/L$  afin d'avoir un courant  $i(t)$  le

plus proche possible d'un courant sinusoïdal sans trop perdre en amplitude?

## C - Couplage par induction

L'accumulateur de la brosse à dents est de type nickel-hydrure métallique Ni – MH. Ses caractéristiques sont « 1,2 V; 2000 mA · h ». Pour une meilleure longévité de l'accumulateur, le fabricant préconise un courant de charge de 200 mA.

10. Sachant que le rendement de charge est d'environ 70%, combien de temps dure une charge complète d'un accumulateur initialement totalement déchargé?

Une bobine test est placée sur la station de charge. Elle est constituée d'un enroulement de 50 spires de fil de cuivre de 0,22 mm de diamètre sur un cylindre de 20 mm de diamètre. On visualise à l'oscilloscope la tension aux bornes de cette bobine (figure 5).

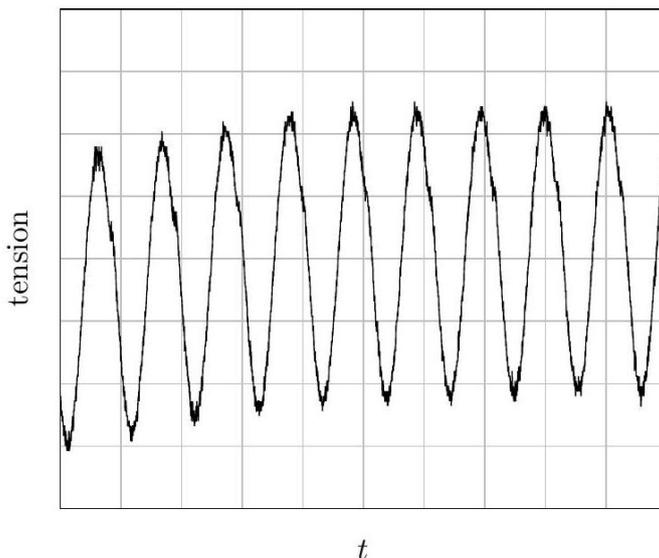


Figure 5: Enregistrement ( $25\mu\text{s}/\text{div}$  et  $50\text{mV}/\text{div}$ )

11. Déterminer numériquement la fréquence  $f_0$  du signal alternatif généré lors de la conversion continu-alternatif HF ? Pourquoi est-il important que cette fréquence soit plus élevée que celle délivrée par le secteur?

### Éléments de réponse

**Ex. 1:** 1)  $\phi \propto S$ , 2) Il faut  $\vec{S}_{tot} = \vec{0}$ . 3) a)  $M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} > 0$ , b)  $M = \frac{\phi_{1 \rightarrow 2}}{i_1} < 0$ , c) 0.

**Ex. 4:** 1)  $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = \frac{i_{lim}}{\tau} \sin(\omega t)$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$  et  $i_{lim} = \frac{SB_0\omega}{R}$ , 2)  $i_0 = i_{lim} = \frac{SB_0\omega}{R}$ , 3)  $\omega \ll \frac{1}{\tau}$ , 4)  
 $f_c = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi R}{L} = 600 \text{ kHz}$

**Ex. 5:**  $M = \mu_0 N_1 N_2 \frac{S_1}{L_2} \cos \theta$

**Ex. 9:** 1)  $\ddot{q}_1 + k\ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_1 = 0$  et  $\ddot{q}_2 + k\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_2 = 0$ , 2)  $q_1(t) = q_0 \cos \left[ \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right] \cos \left[ \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right]$   
 et  $q_2(t) = q_0 \sin \left[ \left( \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \right) t \right] \sin \left[ \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right) t \right]$ , 3)  $q_1(t) = q_0 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{\text{rapide}} \underbrace{\cos(\Omega t)}_{\text{lent}}$   
 et  $q_2(t) = q_0 \underbrace{\sin(\omega_0 t)}_{\text{rapide}} \underbrace{\sin(\Omega t)}_{\text{lent}}$