Fiche de révision du cours de MPSI/MP2I

Ce document est un support de révision du cours de MPSI/MP2I : il n'est pas destiné à être rendu.

Instructions pour chaque type de question.

C : compléter.

F : corriger l'affirmation fausse énoncée (une ou plusieurs corrections peuvent être nécessaires). Parfois, ce ne sera pas si faux que ça...

Q : indiquer lequelles de ces affirmations sont vraies, corriger les fausses.

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

K est un sous-corps quelconque de $\mathbb{C}$.

I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Le cas échéant, E désignera dans certaines questions un espace préhilbertien réel, dont le produit scalaire sera noté $(.|.)$, et la norme associée $\|.\|$.

1. *Q*. Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.
(i) $\mathrm{Re}(z+z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$.
(ii) $\mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(z')$.
(iii) $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
(iv) $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
(v) $\mathrm{Im}(\overline{z}) = -\mathrm{Im}(z)$.
(vi) $|z| = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$.
(vii) Si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$, $\mathrm{Arctan}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right)$ est une mesure de l'argument de z.
(viii) $|z|^2 = z\overline{z}$.
(ix) $|z - z'| \geqslant |z| - |z'|$.
(x) $\mathrm{Re}(z\overline{z'})$ est le produit scalaire des vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'.
(xi) $\mathrm{Im}(z\overline{z'})$ est le déterminant des vecteurs du plan d'affixes respectives z et z'.
(xii) $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z)}$.

2. *Q*. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ tous deux non nuls, $r = |z|$, $r' = |z'|$, θ et θ' des mesures respectives des arguments de z et z'.
(i) $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$.
(ii) $\theta - \theta'$ est une mesure de l'argument de $\dfrac{z'}{z}$.
(iii) $\mathrm{Re}(z) = r\cos\theta$.
(iv) $\mathrm{Im}(z) = ir\sin\theta$.
(v) Pour $n \in \mathbb{N}$, $z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$.
(vi) $\sin\theta = \dfrac{z - \overline{z}}{2ir}$.

3. *C. Une formule d'angle moitié*. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $1 + \mathrm{e}^{i\theta} =$

4. *C*. Soit $z \in \mathbb{C}$, de parties réelle et imaginaire a et b respectivement. Alors la décomposition de e^z selon ses parties réelle et imaginaire est $\mathrm{e}^z =$

5. *C*. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, les racines n-ièmes de l'unité sont

Pour $a \in \mathbb{C}^*$, les racines n-ièmes de a sont

On a alors la factorisation $X^n - a =$

6. *Q*. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
(i) Si ω est une racine n-ième de l'unité, alors $\overline{\omega}$ aussi.
(ii) Si ω est une racine n-ième de l'unité, alors $\overline{\omega} = \omega^{-1}$.
(iii) Si ω et ω' sont des racines n-ièmes de l'unité, alors $\omega + \omega'$ aussi.
(iv) Si ω est une racine n-ième de l'unité, alors ω^k aussi pour tout $k \in \mathbb{N}$.
(v) -1 est une racine n-ième de l'unité.
(vi) La somme de toutes les racines n-ièmes de l'unité est nulle.
(vii) Le produit de toutes les racines n-ièmes de l'unité vaut 1.
(viii) L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ièmes de l'unité forme un groupe pour la multiplication.

7. *Q*. Soit $j = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.
(i) $1 + j + j^2 = 0$.
(ii) $-j$ est une racine cubique de l'unité.
(iii) $\overline{j} = j^2$.

8. *C. Définition « avec des ε »*. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. u converge vers $a \in \mathbb{K}$ si et seulement si

9. *C*. Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. v est une suite extraite (ou sous-suite) de u si et seulement si

10. *Q.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

(i) Si u converge vers ℓ, toute suite extraite de u converge vers ℓ.
(ii) Si u converge, alors elle est minorée.
(iii) Si u diverge, alors elle n'est pas bornée.
(iv) Si u est positive et décroissante, alors elle converge vers 0.
(v) Si u est monotone et majorée, alors elle est convergente.
(vi) Si $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors u converge.
(vii) Si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors u converge.

11. *C. Théorème de Bolzano-Weierstrass.*

12. *C. Définition « avec des ε ».* Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est continue sur I si et seulement si

13. *F.* Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f n'est pas continue sur I si et seulement s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in I$ et pour tout $\eta > 0$, il existe $y \in I$ tel que $|x - y| \leqslant \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.

14. *F.* Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est uniformément continue sur I si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $(x, y) \in I^2$, il existe $\eta > 0$ tel que $|x - y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$.

15. *C. Théorème des bornes atteintes.* Toute fonction

16. *C. Théorème de Heine.*

17. *C.* Soit $f : I \to \mathbb{K}$. f est lipschitzienne sur I si et seulement si

18. *F.* Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $a \in I$. f est continue en a si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

19. *F.* $f : I \to \mathbb{K}$ est de classe C^1 sur I si et seulement si f est continue et dérivable sur I.

20. *Q.* Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$, et $f : I \to \mathbb{R}$, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

(i) Il existe $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
(ii) Le résultat précédent s'étend aux applications f à valeurs dans $\mathbb{C}$.
(iii) f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur $]a, b[$.
(iv) f est strictement croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' > 0$ sur $]a, b[$.
(v) f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $f' = 0$ sur $]a, b[$.

21. *F. Théorème de Rolle.* Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

22. *F. Formule de Leibniz.* Soient $k \in \mathbb{N}$ et $(f, g) \in C^k(I, \mathbb{R})$. Alors $fg \in C^k(I, \mathbb{R})$ et $(fg)^{(k)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f^{(k)} g^{(k-i)}$.

23. *C. Lien entre primitivation et intégration (théorème fondamental de l'analyse).* Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une application . Alors pour tout $a \in I$

$$g : x \mapsto$$

est l'unique de f

24. *F.* Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $(u, v) \in C^1(J, I)$ et $f \in C(J, \mathbb{K})$. Alors $g : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur I et pour tout $x \in I$, $g'(x) = g(v(x)) - g(u(x))$.

25. *F.* Soient $f \in C(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in C([\alpha, \beta], \mathbb{R})$ à valeurs dans I. Alors $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(\varphi(u))\,\mathrm{d}u$.

26. *C. Sommes de Riemann.* Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Alors

$$\sum \qquad\qquad = \int$$

27. *F. Formule de Taylor à reste intégral.*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$, et $f \in C^{n+1}([a, b], \mathbb{K})$. Alors $f(b) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \int_a^b f^{(n+1)}(t) \frac{(t - a)^{n+1}}{(n + 1)!}\,\mathrm{d}t$.

28. *C. Inégalité de Cauchy-Schwarz.* Soient f et g deux applications continues sur le segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad \leqslant$$

29. *Q.* On a les développements limités suivants au voisinage de 0.

(i) $e^{2x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2x^k}{k!} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) $\ln(1+x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

(iii) $-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

(iv) $\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{(2k+1)!} + o(x^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(v) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

(vi) $\operatorname{Arctan} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.

(vii) $\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k+1} x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(viii) $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + \frac{5x^3}{81} + o(x^3)$.

(ix) $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

30. *F.* Soit $(a,b) \in C(I,\mathbb{K})^2$. Pour $t_0 \in I$, l'ensemble des solutions sur I de (E) : $x' + a(t)x = b(t)$ est

$$\left\{ t \mapsto \left(\lambda + \int_{t_0}^{t} b(u) \exp\left(\int_{t_0}^{u} a(v)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u\right) \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(u)\mathrm{d}u\right), \lambda \in \mathbb{K} \right\}.$$

31. *Q.* Soit G un groupe, noté multiplicativement, et dont l'élément neutre est noté 1_G. Alors

(i) Si G n'est pas commutatif, alors pour tout $(x,y) \in G^2$, $xy \neq yx$.

(ii) Pour tout $(x,y,z) \in G^3$, $xyz = xz \Rightarrow y = 1_G$.

(iii) Pour tout $(x,y) \in G^2$, $(xy)^2 = x^2y^2$.

(iv) 1_G est l'unique élément neutre de G.

(v) Pour tout $(x,y) \in G^2$, si $xy = 1_G$, alors $x = y^{-1}$.

(vi) Pour tout $(x,y) \in G^2$, si $xy = yx$, alors $x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

32. *F.* Soient G un groupe et $H \subset G$. Alors H est un sous-groupe de G si et seulement si pour tout $(x,y) \in H^2$, $xy^{-1} \in H$.

33. *C.* Soient $(G,\star)$ et $(H,\bullet)$ deux groupes. $f : G \to H$ est un morphisme de groupes si et seulement si

34. *C.* Soient $(G,\star)$ et $(H,\bullet)$ deux groupes, $f : G \to H$ un morphisme de groupes. Alors le noyau de f est

35. *Q.* Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement, de neutres respectifs 1_G et $1_{G'}$, et f un morphisme de G dans G'.

(i) $f^{-1}(1_{G'}) = 1_G$.

(ii) L'image par f d'un sous-groupe de G est un sous-groupe de G'.

(iii) L'image par f^{-1} d'un sous-groupe de G' est un sous-groupe de G.

(iv) Si f est bijectif, f^{-1} est un isomorphisme de G' sur G.

(v) $f \circ f \circ f$ est un morphisme de G dans G'.

(vi) $\operatorname{Ker} f = \{x \in G, f(x) = 0\}$.

(vii) f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f$ est un singleton.

36. *Q.* Soit $n \geqslant 2$.

(i) $\mathscr{S}_n$ est un groupe fini de cardinal n.

(ii) $\mathscr{S}_n$ est un groupe commutatif.

(iii) Tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$ se décompose comme un unique produit de cycles.

(iv) Tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$ se décompose comme un unique produit de transpositions.

(v) Pour tout $\sigma \in \mathscr{S}_n$, $\varepsilon(\sigma)$ est égal à $(-1)^p$, où p est le nombre de transpositions apparaissant dans une décomposition de σ en produit de transpositions.

(vi) ε est une application linéaire de $\mathscr{S}_n$ dans $\mathbb{R}^*$.

37. *F.* Soient A un anneau et $(x,y) \in A^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} x^k y^n$.

38. *C.* *Identité* $x^n - y^n$. Soient A un anneau et $(x,y) \in A^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

39. *Q.* Soit A un anneau commutatif.

(i) A est intègre si et seulement si pour tout $(a,b) \in A^2$, $(a,b) \neq (0,0) \Rightarrow ab \neq 0$.

(ii) A est intègre si et seulement si pour tout $(a,b,c) \in A^2$ avec $a \neq 0$, $ab = ac \Rightarrow b = c$.

(iii) A est un corps si et seulement si tout élément de A est inversible.

40. *C. Division euclidienne dans* $\mathbb{Z}$. Soit $(n,p) \in$. Alors il existe tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \end{array} \right.$$

41. *Q.* Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.
(i) $a \wedge b$ est le plus petit diviseur commun de a et b positif.
(ii) $a \vee b$ est le plus petit multiple commun de a et b positif ou nul.
(iii) $da \wedge db = d(a \wedge b)$ si $(d,a,b) \in \mathbb{Z}^3$ sont tous non nuls.
(iv) $(a \vee b)(a \wedge b) = ab$.

42. *C. Théorème de Bézout.* Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, alors

43. *C. Lemmes de Gauss.* Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ tel que

44. *C.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et soit p un entier naturel premier, alors la valuation p-adique de n est $v_p(n) =$.

45. *Q.* On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des entiers naturels premiers.
(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $n = \prod\limits_{p \in \mathscr{P}} p^{v_p(n)}$.
(ii) Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\})^2$, $a \wedge b = \prod\limits_{p \in \mathscr{P}} p^{\max(v_p(a),v_p(b))}$.
(iii) Pour tout $(a,b) \in (\mathbb{Z} \setminus \{-1,0,1\})^2$, $a \wedge b = \prod\limits_{p \in \mathscr{P}} p^{\min(v_p(a),v_p(b))}$.

46. *F.* Soit $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ supérieurs ou égaux à 2. Le système de congruences $\left\{ \begin{array}{l} x \equiv a\ [m] \\ x \equiv b\ [n] \end{array} \right.$ possède au moins une solution dans $\mathbb{Z}$ pour tout $(a,b) \in [\![0, m-1]\!] \times [\![0, n-1]\!]$.

47. *C. Petit théorème de Fermat.* Pour tout $(a,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

48. *C.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A une partie non vide de E. Alors $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus De plus

$$\mathrm{Vect}(A) = \left\{ \qquad \qquad \right\}$$

49. *Q.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
(i) $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
(ii) $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E.
(iii) $F + G = \{x + y, (x,y) \in F \times G\}$.
(iv) F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \emptyset$.
(v) F et G sont supplémentaires si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe un unique $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$.

50. *C.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide et $\mathscr{F} = (x_i)_{i \in I} \in E^I$. La famille $\mathscr{F}$ est libre si et seulement si

51. *C.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si (on ne se contentera évidemment pas de « elle n'est pas libre » : on traduira proprement ce que ça signifie).

52. *F.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \geqslant 2$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée si et seulement si x_n est une combinaison linéaire de $(x_1, \dots, x_{n-1})$.

53. *Q.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
(i) $F = E$ si et seulement si $\dim F = \dim E$.
(ii) $F = G$ si et seulement si $\dim F = \dim G$.
(iii) F et G sont en somme directe si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim(F + G)$.
(iv) F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim(F + G) = \dim E$.
(v) $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$.

54. *F.* Soient $(n,d) \in (\mathbb{N}^*)^2$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension d et $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$. $\mathscr{F}$ est génératrice de E si et seulement si $d \leqslant n$.

55. *C. Forme géométrique du théorème du rang.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors f réalise un

56. *F. Théorème du rang.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{Ker}(u) = \dim F$.

57. *C. Définition d'une application linéaire à partir d'une base.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, E étant de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

58. *Q.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$.
(i) u est un projecteur si et seulement si $u^2 = u$.
(ii) u est une symétrie si et seulement si $u^2 = 0$.

(iii) u est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u = E$.
(iv) u est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E) = E$.
(v) u est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$.
(vi) u est un projecteur si et seulement si $2u - \mathrm{id}_E$ est une symétrie.
(vii) u est une symétrie si et seulement si $\dfrac{u + \mathrm{id}_E}{2}$ est un projecteur.

59. *F.* Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace de E et $u \in \mathscr{L}(E)$. F est stable par u si et seulement si $\forall x \in E,\ u(x) \in F$.

60. *C. Définition du produit matriciel de deux matrices rectangulaires A et B (cas général).*

61. *C.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(E_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^4$

$$E_{i,j} E_{k,\ell} =$$

62. *F.* Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.

63. *F.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(A)\operatorname{Tr}(B)$.

64. *C. Définition de la similitude de matrices.*

65. *Q.* Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.
(i) A et B sont semblables si et seulement si elles ont le même rang.
(ii) A et B sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.
(iii) $\operatorname{rg}(AB) \leqslant \operatorname{rg}(B)$.
(iv) $\operatorname{rg}(AB) \geqslant \operatorname{rg}(A)$.
(v) $\operatorname{rg}(A^\top) = \operatorname{rg}(A)$.
(vi) A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(B)$.
(vii) A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg}(A) = n$.
(viii) $\operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A = n^2$.

66. *C. Définition et caractérisation de l'équivalence matricielle.* Soit $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$. A et B sont équivalentes si et seulement s'il existe ou encore si et seulement si A et B

67. *F.* Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$. A est de rang $r \in [\![0, \min(n,p)]\!]$ si et seulement si on peut extraire de A une matrice carrée inversible de taille r.

68. *F.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension non nulle quelconque. Un sous-espace $H \subset E$ est un hyperplan de E si et seulement si H est le noyau d'une forme linéaire.

69. *F.* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Un sous-espace $F \subset E$ est de dimension $p \in [\![0,n]\!]$ si et seulement s'il existe p formes linéaires $(\varphi_1, \dots, \varphi_p)$ sur E telles que $F = \bigcap_{1 \leqslant k \leqslant p} \operatorname{Ker} \varphi_k$.

70. *C.* Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $b \in F$, et $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = b$ d'inconnue x.
- Si $b \notin \operatorname{Im} u$, alors $\mathscr{S} =$
- Sinon, $\mathscr{S}$ est un dirigé par

71. *Q.* Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors
(i) $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathscr{S}_n} \prod_{k=1}^{n} a_{k,\sigma(k)}$.
(ii) $\det(A) = 0 \iff A \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
(iii) pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$.
(iv) $\det(A^\top) = (-1)^n \det(A)$.
(v) Pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$.
(vi) Pour tout $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

72. *F.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en enlevant la i-ème ligne et la j-ème colonne. Alors pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on a $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \Delta_{i,j}$.

73. *C. Formule des cofacteurs.* On a l'expression explicite de A^{-1} pour $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ à l'aide de la comatrice $\operatorname{Com} A$ de A

$$A^{-1} =$$

On a en toute généralité pour A non nécessairement inversible :

74. *F.* Soit $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts. Le déterminant de Vandermonde $\det\left(\left(a_i^j\right)_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\0\leqslant j\leqslant n}}\right)$ est égal à $\displaystyle\prod_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2}(a_j-a_i)$.

75. *Q.* Soit $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$.
(i) $\deg(P+Q)\leqslant\max(\deg P,\deg Q)$ avec égalité si et seulement si P et Q sont de degrés différents.
(ii) $\deg(PQ)=\deg(P)+\deg(Q)$.
(iii) $\deg(P\circ Q)=\deg(P)\deg(Q)$.
(iv) $\deg(P')=\deg(P)-1$.

76. *C.* Une famille d'éléments non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts est

77. *C.* Une famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$ est échelonnée en degrés si et seulement si . Dans ce cas

78. *C. Division euclidienne dans* $\mathbb{K}[X]$. Soit $(P,Q)\in$. Alors il existe

79. *Q.* Soit $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$.
(i) $P\wedge Q$ est le diviseur commun unitaire de plus grand degré de P et Q.
(ii) $P\vee Q$ est le multiple commun de plus petit degré de P et Q.
(iii) $P\wedge Q=1$ si et seulement s'il existe $(U,V)\in\mathbb{K}[X]^2$ tel que $\deg(UP+VQ)=0$.

80. *F.* Soit $(P,Q,R)\in\mathbb{K}[X]^3$ tels que $P\wedge Q=1$. Si $P|R$ et $Q|R$, alors $PQ|R$.

81. *C.* Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

82. *C.* Soit $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$, la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ des polynômes interpolateurs de Lagrange associés est définie pour $k\in[\![0,n]\!]$ par Cette famille forme de plus une et pour tout $P\in$, on a $P=$

83. *Q.* Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ deux à deux distincts, $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ la famille des polynômes de Lagrange associée.
(i) Pour tout $(i,j)\in[\![0,n]\!]^2$, $L_i(x_j)=\delta_{i,j}$.
(ii) $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ a pour image la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ par la fonction d'interpolation $\theta:P\mapsto(P(x_0),\dots,P(x_n))$.
(iii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x_kL_k=X$.

84. *Q.* Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ et $\alpha\in\mathbb{K}$.
(i) α est racine double de P si et seulement si $(X-\alpha)^2|P$.
(ii) α est racine de P de multiplicité $m\in\mathbb{N}^*$ si et seulement si $P(\alpha)=\ldots=P^{(m-1)}(\alpha)=0$.

85. *C.* Soit $P=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$, avec $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{C}^5$ et $a\neq0$. On note ses racines $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant4}\in\mathbb{C}^4$. Alors
$\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\alpha_1\alpha_3\alpha_4+\alpha_2\alpha_3\alpha_4=$.

86. *Q.* Les fractions rationnelles suivantes ont des décompositions en éléments simples de la forme donnée.
(i) $\dfrac{X^4+X^3-1}{X(X+1)(X+2)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+1}+\dfrac{c}{X+2}$.
(ii) $\dfrac{X^2-1}{X(X+2)(X^2+1)}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+2}+\dfrac{c}{X^2+1}$.
(iii) $\dfrac{X^2-1}{X(X+2)^3}=\dfrac{a}{X}+\dfrac{b}{X+2}+\dfrac{c}{X+2}+\dfrac{d}{X+2}$.
(iv) $\dfrac{X}{(X-1)(X^2+1)^2}=\dfrac{a}{X-1}+\dfrac{bX+c}{X^2+1}+\dfrac{dX+e}{(X^2+1)^2}$.

87. *C.* Soient $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$, $Q\neq0$, $P\wedge Q=1$, et α une racine simple de Q. Alors le coefficient de $\dfrac{1}{X-\alpha}$ dans la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P}{Q}$ est

88. *F.* Soient $P\in\mathbb{K}[X]$ non nul et scindé. On note $(r_1,\dots,r_d)$ les $d\in\mathbb{N}^*$ racines distinctes de P. Alors la décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est $\dfrac{P'}{P}=\displaystyle\sum_{k=1}^{d}\dfrac{1}{X-r_k}$.

89. *Q.* Soit E un espace préhilbertien réel.
(i) Pour tout $(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2$, tout $(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_p)\in E^{n+p}$, et tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n,\mu_1,\dots,\mu_p)\in\mathbb{R}^{n+p}$, on a

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k\middle|\sum_{k=1}^{p}\mu_ky_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}\lambda_k\mu_k(x_k|y_k).$$

(ii) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(x|y)\geqslant0$.
(iii) Pour tout $x\in E$, $(x|x)>0$.
(iv) Pour tout $(x,y)\in E^2$, $(x|y)\leqslant\|x\|\,\|y\|$.

90. *C.* Soit E un espace préhilbertien réel. Pour tout $(x,y)\in E^2$, on a $\|x+y\|^2=$

91. *F. Théorème de Pythagore* : soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^2$.

92. *F.* Soit E un espace préhilbertien réel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ deux à deux orthogonaux. Alors $(x_1, \dots, x_n)$ est libre.

93. *Q.* Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E.
(i) $F = (F^\perp)^\perp$.
(ii) $F^\perp \cap F = \{0\}$.
(iii) $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E.
(iv) Si $F^\perp$ et F sont supplémentaires dans E, alors pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x, F) = \|p(x)\|$ avec p le projecteur orthogonal sur $F^\perp$.

94. *C. Formule de projection* : soit E un espace euclidien non nul. Alors

95. *F.* Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\operatorname{Ker} p \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = E$.

96. *F.* Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$. s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_E$ et $\operatorname{Ker} s$ et $\operatorname{Im} s$ sont orthogonaux.

97. *C.* Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, p le projecteur orthogonal sur F. Alors pour tout $x \in E$, on a $p(x) =$ où

98. *F. Algorithme de Gram-Schmidt.* Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n)$ une base de E. Alors la famille $(e_1, \dots, e_n)$, définie par $e_1 = a_1$ et par $e_k = a_k - \sum_{\ell=1}^{k-1} (a_k|e_\ell) e_\ell$ pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, est une base orthogonale de E vérifiant de plus pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(a_k|e_k) = 0$.

99. *C. Théorème de Gram-Schmidt.* Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (a_1, \dots, a_n)$ une base de E. Alors il existe une unique

100. *C.* Soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si

101. *C.* $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si

102. *Q.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. $\sum u_n$ est absolument convergente
(i) si et seulement si $\sum |u_n|$ converge.
(ii) si et seulement si $\left(\left| \sum_{n=0}^{N} u_n \right| \right)_{N \in \mathbb{N}}$ est majorée.
(iii) implique qu'elle est convergente.
(iv) est une affirmation vraie lorsque u ne s'annule pas et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.
(v) est une affirmation vraie lorsque u ne s'annule pas et $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(vi) est une affirmation fausse lorsque $u_n \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right)$.
(vii) est une affirmation vraie lorsque $u_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

103. *F.* Soit $(u, v) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$, alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

104. *Q.* Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(i) Si u décroît vers 0, alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.
(i) Si u croît vers 0, alors $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.
(ii) Si u décroit vers 0, alors $\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^n u_n \leqslant u_{N+1}$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

105. *Q.* Soit $\mathscr{F} = (u_{n,p})_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$. $\mathscr{F}$ est sommable si
(i) pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}^2$, il existe $M > 0$ tel que $\sum_{i \in J} u_i \leqslant M$.
(ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_p u_{n,p}$ est convergente et $\sum S_n$ est convergente, où $S_n = \sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}$.
(iii) $\sum_{(n,p) \in \mathbb{N}^2} u_{n,p} < \infty$.
(iv) $\sum_k \left(\sum_{\ell=0}^{k} u_{\ell, k-\ell} \right)$ est convergente.
(v) il existe $(v_{n,p})_{(n,p) \in N^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$ sommable telle que $u_{n,p} \leqslant v_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
(vi) il existe une partie finie J de $\mathbb{N}^2$ et $(v_{n,p})_{(n,p) \in N^2} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^2}$ sommable telles que $u_{n,p} = v_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2 \setminus J$.

106. *Q.* Soit $\mathscr{F} = (u_{n,p})_{(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2} \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}^*)^2}$ une famille sommable de somme S.

(i) $S=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}u_{n,p}\right)$.

(ii) Si $J_k=\{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2, n+p=k\}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, alors $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{(n,p)\in J_k}u_{n,p}\right)$.

(iii) $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ np=k}}u_{n,p}\right)$.

(iv) $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n+p^2=k}}u_{n,p}\right)$.

(v) $S=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{\substack{(n,p)\in(\mathbb{N}^*)^2\\ n^2+p^2=k^2}}u_{n,p}\right)$.

(vi) La série $\sum_k u_{k^2+k,k}$ est convergente.

107. *C.* $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ est ouvert si et seulement si

108. *C.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$. f possède une dérivée partielle en $(x_0,y_0)\in\Omega$ selon sa première variable si et seulement si

109. *Q.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\Omega$ et $f:\Omega\to\mathbb{R}$.

(i) f est continue en (x_0,y_0) si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que pour tout $(x,y)\in\Omega$, $\|(x-x_0,y-y_0)\|\leqslant\eta\Rightarrow|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant\varepsilon$.

(ii) f est continue en (x_0,y_0) si et seulement si $x\mapsto f(x,y_0)$ est continue en x_0 et $y\mapsto f(x_0,y)$ est continue en y_0.

(iii) Si f possède des dérivées partielles selon ses deux variables en tout point de Ω, alors f est continue sur Ω.

(iv) f est de classe C^1 sur Ω si et seulement si f est continue sur Ω et possède des dérivées partielles selon ses deux variables en tout point de Ω.

110. *C.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. Pour tout $a\in\Omega$ et tout $h\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, la dérivée de f selon h en a est

$$D_hf(a)=$$

que l'on peut aussi exprimer à l'aide des dérivées partielles

$$D_hf(a)=$$

et du gradient

$$D_hf(a)=$$

111. *C. Développement limité à l'ordre 1 d'une fonction de classe C^1 de deux variables.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\Omega$ et $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. Alors en notant $h=(x,y)$

$$\begin{aligned} f(x_0+x,y_0+y)&= && \text{(avec les dérivées partielles)}\\ &= && \text{(avec une dérivée directionnelle)}\\ &= && \text{(avec le gradient).}\end{aligned}$$

112. *C. Règle de la chaîne.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$.

- Pour $\gamma:I\to\Omega$ de classe C^1 sur I et $g:t\mapsto f(\gamma(t))$, on a pour tout $t\in I$

$$g'(t)=$$

- Pour un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $(\varphi,\psi)\in C^1(U,\mathbb{R})$ tel que $(\varphi(u,v),\psi(u,v))\in\Omega$ pour tout $(u,v)\in U$, et $h:(u,v)\mapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$, on a pour tout $(u,v)\in U$

$$\partial_1h(u,v)=$$

$$\partial_2h(u,v)=$$

113. *Q.* Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\in C^1(\Omega,\mathbb{R})$. $a\in\Omega$ est un point critique de f

(i) si et seulement si f atteint en a un extremum local.

(ii) si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=0$.

(iii) si et seulement si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

(iv) si et seulement si $\nabla f(a) = 0$.

114. *F.* Une probabilité P sur un univers fini Ω est une application $P : \Omega \to [0,1]$ telle que $P(\emptyset) = 0$ et pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

115. *C. Formule des probabilités composées.* Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$. Alors

116. *C.* Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}^*$. $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ est un système complet d'événements si et seulement si

117. *F.* Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ un système complet d'événements. Pour tout $B \in \mathscr{P}(\Omega)$, $P(B) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)$.

118. *F.* Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $n \in \mathbb{N}^*$. $(A_1, \dots, A_n) \in \mathscr{P}(\Omega)^n$ est une famille d'événements mutuellement indépendants si et seulement si $P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, avec $i \neq j$.

119. *Q.* Soit (X,Y) un couple aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, P).

(i) La loi du couple (X,Y) est entièrement déterminée par la donnée de la loi de X et de la loi de Y.

(ii) Pour tout $\ell \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = \ell) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = \ell\}$ est entièrement déterminée par la donnée de $(P_{\{Y=\ell\}}(X = k))_{k \in X(\Omega)}$.

(iii) Les lois marginales du couple (X,Y) sont les lois de X et Y.

(iv) X et Y sont des variables aléatoires.

(v) Pour tout $\ell \in Y(\Omega)$, $P(Y = \ell) = \displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P_{\{X=k\}}(Y = \ell)$.

(vi) X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(k,\ell) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\{X = k\}$ et $\{Y = \ell\}$ sont des événements indépendants.

(vii) X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, $\{X \in A\}$ et $\{Y \in B\}$ sont des événements indépendants.

120. *Q.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

(i) $\left(\displaystyle\sum_{\ell=1}^{k} X_\ell^2 \cos(X_{\ell+1})\right)_{1 \leqslant k \leqslant n-1}$ est une variable aléatoire.

(ii) $(\sqrt{|X_2 - X_1|}, \sqrt{|X_3 - X_2|}, \dots, \sqrt{|X_n - X_{n-1}|})$ est une variable aléatoire.

(iii) On suppose $n = 2p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$, alors $(|X_1|^{|X_2|}, |X_3|^{|X_4|}, \dots, |X_{2p-1}|^{|X_{2p}|})$ sont mutuellement indépendantes.

(iv) $(X_1X_2, X_2X_3, \dots, X_{n-1}X_n)$ sont mutuellement indépendantes.

(v) Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ fixé, on pose $Y = \displaystyle\max_{1 \leqslant \ell \leqslant k} X_\ell$ et $Z = \min\{\ell \geqslant k+1, X_\ell > 0\}$ si cet ensemble n'est pas vide, et $Z = n+1$ sinon. Alors Y et Z sont indépendantes.

121. *C.* Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si et seulement si

122. *F.* Soit une variable aléatoire X qui suit la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$. Alors X modélise la répétition de n épreuves de Bernoulli mutuellement indépendantes et de même paramètre p.

123. *F. Théorème de transfert.* Soient X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini E et $f : E \to \mathbb{C}$. Alors

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(f(X) = x).$$

124. *C. Inégalité de Markov.* Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini, alors

125. *Q.* Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini.

(i) $V(X) = E(X^2 - E(X)^2)$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, $P(X \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{V(X)}{\varepsilon}$.

(iii) $V(X) > 0$.

(iv) $V(X) = 0$ si et seulement si $X = 0$.

126. *F.* Soit $X \in L^2$ une variable aléatoire réelle discrète. Alors

$$V(X) = E((X - E(X))(X + E(X))).$$

127. *Q.* Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé fini.

(i) $\mathrm{Cov}(X,Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$.

(ii) $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0 \iff X$ et Y sont indépendantes.

Formules

128. Équivalent usuel faisant intervenir $(1+x)^\alpha$:

129. Équivalent usuel impliquant le cosinus :

130. Équivalent usuel faisant intervenir le sinus :

131. Équivalent usuel faisant intervenir l'exponentielle :

132. Équivalent usuel faisant intervenir le logarithme :

133. Formule de Stirling :

134. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, développement limité en $x=0$ à l'ordre $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^\alpha =$

135. Développement limité en $x=0$ à l'ordre $2n+1$: $\operatorname{Arctan} x =$

136. Développement limité en $x=0$ à l'ordre $2n+1$: $\sin x =$

137. Développement limité en $x=0$ à l'ordre $2n$: $\operatorname{ch} x =$

138. Développement limité en $x=0$ à l'ordre n : $\mathrm{e}^x =$

139. Développement limité en $x=0$ à l'ordre n : $\ln(1+x) =$

140. Développement limité en $x=0$ à l'ordre 5 : $\tan x =$

141. Domaine de dérivabilité et dérivée de Arcsin :

142. Domaine de dérivabilité et dérivée de Arccos :

143. Domaine de dérivabilité et dérivée de th :

144. Domaine de dérivabilité et dérivée de tan :

145. Domaine de définition et dérivée de Arctan :

146. Expression simple de la dérivée n-ième de sin :

147. Donner une inégalité de convexité faisant intervenir le logarithme.

148. Donner deux inégalités de convexité faisant intervenir le sinus.

149. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

150. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$

151. Primitives de $x \mapsto x^\alpha$ selon $\alpha \in \mathbb{R}$

152. Primitives de ln

153. Pour $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, donner les primitives de $\dfrac{u'}{u}$

154. Primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$

155. $1+\cos x =$

156. $1-\cos x =$

157. $\sin x \cos y =$

158. $\cos x \cos y =$

159. $\sin p - \sin q =$

160. $\cos p - \cos q =$

161. $\cos(a-b) =$

162. $\sin(a+b) =$

163. $\sin(2x) =$

164. (Trois formes attendues) $\cos(2x) =$

165. $\tan(x+y) =$

166. $\cos x$, $\sin x$, $\tan x$, en fonction de $t = \tan \dfrac{x}{2}$.

167. Formules d'Euler.

168. $a\cos x + b\sin x = A\sin(x+\varphi)$ avec $A =$ et φ

169. $\sin(\text{Arccos}(x)) =$

170. Expression du produit matriciel AB avec $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant q}}$.

171. Expression explicite du déterminant de $M = \left(m_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

172. Développement selon une rangée de $\det(M)$ avec $M = \left(m_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

173. Formule des cofacteurs.

174. Expression explicite du déterminant de Vandermonde $V = \det\left((a_k^\ell)_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ 0\leqslant \ell\leqslant n}}\right)$ pour $(a_0,\dots,a_n)\in K^{n+1}$.

175. Définition, espérance et variance de $X \sim \mathscr{B}(n,p)$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in[0,1]$.