

Limites et continuité

Limites de fonctions réelles d'une variable réelle définie sur un intervalle I : limite finie en un point fini a , unicité en cas d'existence, exemples, propriétés, continuité en un point si $a \in I$, prolongement par continuité si $a \notin I$.

Généralisations aux limites finies ou infinies en un point fini ou infini, exemples ; limites à droite, à gauche en un point non extrémité de I ; généralisation au cas d'une fonction définie sur un intervalle privé d'un point. Définition topologique d'une limite à l'aide des voisinages.

Lien avec la convergence des suites : image d'une suite convergente par une application possédant une limite au point étudié, exemples.

Opérations sur les limites, exemples.

Liens avec la relation d'ordre de $\mathbb{R}$: prolongement des inégalités, retour de limite dans les inégalités, théorème des fonctions encadrées.

Théorème de limite d'une fonction monotone.

Continuité sur un intervalle, théorèmes d'opérations sur les fonctions continues ; restriction, raccordement en un point.

Propriétés globales des fonctions continues : théorème des valeurs intermédiaires (image d'un intervalle par une application continue), théorème des bornes atteintes (image d'un segment par une application continue).

Cas des fonctions strictement monotones, intervalle image, théorème des bijections et continuité de la réciproque.

Question de cours obligatoire à choisir parmi les suivantes :

Q1 : Définition d'un voisinage. Énoncé de la définition topologique d'une limite de fonction et de suite. Théorèmes d'opérations : somme et composition.

Q2 : Théorème d'opérations : produit et inverse. Lien avec la convergence des suites. Exemple de $x \mapsto \sin(1/x)$.

Q3 : Théorème de retour de limite dans les inégalités. Théorème des fonctions encadrées. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est nulle sur $\mathbb{Q}$ et continue, alors elle est nulle sur $\mathbb{R}$. Énoncé du théorème de limite d'une fonction monotone, à droite et à gauche, pour une fonction croissante.

Q4 : Théorème des valeurs intermédiaires.

Q5 : Image d'un segment par une application continue. Interprétation pratique.